# Generando números de Pitágoras

*Marco Vinicio Vásquez Bernal, Mercedes Elizabeth Vásquez Chiquito*
Universidad Nacional de Educación, UNAE, Javier Loyola, Azogues, Ecuador.
Autores para correspondencia**:** marvas123@hotmail.es, marco.vasquez@unae.edu.ec
Fecha de recepción: 30 de junio 2015 - Fecha de aceptación: 22 de enero 2016

**RESUMEN**

Este trabajo busca mostrar una forma general de encontrar arreglos de tres números naturales (tercias) que cumplen la relación de Pitágoras, es decir que la suma del cuadrado de los dos menores de como resultado el cuadrado del mayor, a través de un proceso mucho más general que los conocidos hasta ahora, llegando incluso a proponer unas fórmulas que, en función de dos parámetros permite encontrar dichos conjuntos de tres elementos, cuyos resultados se los presenta en unas tablas. Los resultados afirman la idea de que existe un infinito número de tercias que cumplen la relación de Pitágoras. Luego veremos cómo se puede usar estas tablas para construir relaciones donde la suma de los cuadrados de más de dos números es igual al cuadrado de otro.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, tercias, cuadrados, suma.

**ABSTRACT**

The paper presents a general way to define three natural numbers (triple) that satisfy the Pythagorean relationship; it is the sum of the squares of two numbers is equal to the square of a larger number, through a process much more general than known so far. We even propose formulas that in function of two parameters find these sets of three elements, the results of which are presented in tables. Results confirm the idea that there are an infinite number of triples that meet the Pythagorean relationship. Further the use of the tables is illustrated how to build relationships where the sum of the squares of more than two numbers equals the square of another.

Keywords: Pythagorean Theorem, thirds, squares, sum.

## 1. INTRODUCCIÓN

Quizá una de las primeras evidencias del uso de la relación $a^2 + b^2 = c^2$ es un triángulo que se encuentra en la pirámide de Kefrén, datada en el siglo XXVI a. C., fue la primera que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, de proporciones 3-4-5, dimensiones que justamente cumplen con la relación establecida. Siendo ésta la primera terna de números Pitagóricos, y a pesar de que se conocen otras ternas, recordando además que Vargas (1994), al igual que Roy & Sonia (2012) y otros autores, propone una generación de ternas Pitagóricas basándose en la igualdad:

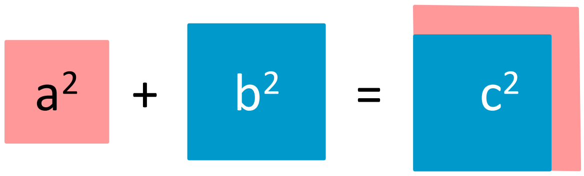
$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Se conocen varios resultados que se limitan a esta condición, estableciendo que las ternas Pitagóricas deben contener un número que resulte de sumar dos cuadrados, otro que resulte de restar esos dos cuadrados y un tercero que resulte del doble producto entre las raíces de esos números. Tres publicaciones sobre temas similares son respectivamente: Alfred (1964) propone cómo encontrar número enteros consecutivos, cuya suma de cuadrado sea un cuadrado perfecto; Hope (1998) muestra algunos patrones de ternas Pitagóricas cuando la hipotenusa es una unidad mayor a uno de los catetos; y Li *et al*. (2008) presentan números que pueden descomponerse en más de una forma cumpliendo las condiciones Pitagóricas, al igual que MacKay & Mahajan (2005). Scheinman (2006) en cambio propone un método para buscar números enteros que cumplan la igualdad, $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$. Más ninguno de éstos propone un método concreto para obtener ternas Pitagóricas de forma general, como lo hacemos en este trabajo.

En este trabajo buscamos generar ternas Pitagóricas que tengan libertad absoluta de construcción, que a partir de unos parámetros que establecen condiciones, se puede generar esas ternas, para lo que se ha desarrollado un proceso que me permito presentar en este artículo.

## 2. COMPLETANDO CUADRADOS

En esencia lo que se tiene es que la suma de dos números cuadrados da como resultado otro número cuadrado, entonces surge la idea de juntar dos cuadrados, de forma que su unión de como resultado un tercero. Esta idea es simple y si nos basamos en que un área es un espacio que puede ser redistribuido, cualquier par de áreas pueden juntarse y dar como resultado una tercera, en la figura siguiente se observa esto:




El resultado es justamente un cuadrado más grande, que se construye ubicando el cuadrado ($b^2$), y ubicando el espacio del otro cuadrado ($a^2$), alrededor del primero, de forma que se construya un nuevo cuadrado, cuyo lado será el valor de c.

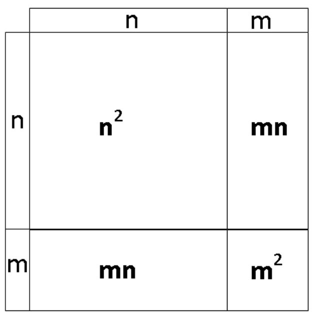
Poniendo en números, a manera de ejemplo, se tiene que: $7^2 + 8^2 = \left(\sqrt{113}\right)^2$, que como dijimos siempre será posible, más en este caso el valor de c es $\sqrt{113}$, que no es un número entero, es decir el lado del cuadrado construido no es un valor entero.

Por lo tanto, a y b, son valores seleccionados, por lo que el asegurar que éstos sean enteros es un problema resuelto, lo que se debe abordar justamente es cómo seleccionarlos para que el valor resultante de c, sea un entero.

Recordemos para ello el siguiente resultado algebraico:

$$(n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$$

Resultado que modela fielmente la realidad geométrica:




y que justamente construye un cuadrado de lado (n + m).

Para empezar el análisis asignemos para m el valor de 1. Con lo cual se tendrá: $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$. Entonces, en este caso, el problema se soluciona si hacemos las siguientes asignaciones:

$$a = m$$
$$b^2 = 2m + 1$$
$$c = m + 1$$

para lo cual se requiere que 2m+1, sea un cuadrado perfecto, pero, se sabe que, como m es un número entero, 2m+1, es un impar, y todo impar al cuadrado, da como resultado un impar, por tanto:

$$2m + 1 = b^2, \text{ donde b es un número entero impar y } m = (b^2 - 1)/2.$$

Con lo que, dando valores a t tendremos los siguientes resultados:

| Ternas Pitagóricas (c - a = 1) | | | | Validación ($a^2 + b^2 = c^2$) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $m = (b^2-1)/2$ | a = m | c = m + 1 | $a^2$ | $b^2$ | $c^2$ | c |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | 4 | 5 | 16 | 9 | 25 | 5 |
| 5 | 12 | 12 | 13 | 144 | 25 | 169 | 13 |
| 7 | 24 | 24 | 25 | 576 | 49 | 625 | 25 |
| 9 | 40 | 40 | 41 | 1600 | 81 | 1681 | 41 |

Donde se tiene un conjunto de valores enteros que cumplen la relación Pitagórica y que entre a y c, difieren por una unidad.

Algo similar intentaremos hacer para el desarrollo:

$$(m+2)^2 = m^2 + 4m + 4$$

Que con un análisis similar al anterior brindará soluciones siempre que se cumpla:

$$a = m$$
$$b^2 = 4m + 4$$
$$c = m + 2$$

| Ternas Pitagóricas (c - a = 2) | | | | Validación ($a^2 + b^2 = c^2$) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $m = (b^2-4)/4$ | a = m | c = m + 2 | $a^2$ | $b^2$ | $c^2$ | c |
| 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 | 4 | 2 |
| 4 | 3 | 3 | 5 | 9 | 16 | 25 | 5 |
| 6 | 8 | 8 | 10 | 64 | 36 | 100 | 10 |
| 8 | 15 | 15 | 17 | 225 | 64 | 289 | 17 |
| 10 | 24 | 24 | 26 | 576 | 100 | 676 | 26 |

La condición ahora es que $4m + 4 = b^2$, pero $4m + 4 = 4(m + 1)$, y como 4 ya es un cuadrado perfecto, el resultado será un cuadrado perfecto si m+1 es un cuadrado perfecto, y eso es posible siempre que m sea un cuadrado perfecto cualquiera menos uno. Se tiene que $m = (b^2 - 4)/4$, es decir b debe ser un número par. Donde, entre a y c, hay una diferencia de 2 unidades.

Siguiendo este proceso partiremos de la igualdad:

$$(m+3)^2 = m^2 + 6m + 9$$

donde, para el desarrollo haremos las siguientes asignaciones:

$$a = m$$
$$b^2 = 6m + 9$$
$$c = m + 3$$

Debiendo estudiar la igualdad $b^2 = 6m + 3 = 3(2m + 3)$. Donde se tiene que $2m + 3$, debe ser un número múltiplo de 3 y de algún cuadrado perfecto, pudiendo ser 12, 27, 48, 75, 108, 147,… , además como m es entero, $2m + 3$, será un número impar; por lo tanto, los posibles valores para $2m + 3$, serán: 3, 27, 75, 147, 243,… Y además hay una relación entre m y b que surge de la expresión presentada y que establece que: $m = (b^2 - 9)/6$, entonces $b^2$ debe ser un número impar y múltiplo de 3. Lo que da el conjunto de las siguientes ternas Pitagóricas:

| Ternas Pitagóricas (c - a = 3) | | | | Validación ($a^2 + b^2 = c^2$) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | $m = (b^2-9)/6$ | a = m | c = m + 3 | $a^2$ | $b^2$ | $c^2$ | c |
| 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 9 | 9 | 3 |
| 9 | 12 | 12 | 15 | 144 | 81 | 225 | 15 |
| 15 | 36 | 36 | 39 | 1296 | 225 | 1521 | 39 |
| 21 | 72 | 72 | 75 | 5184 | 441 | 5625 | 75 |
| 27 | 120 | 120 | 123 | 14400 | 729 | 15129 | 123 |

Ternas donde se observa una diferencia entre a y c de 3 unidades.

A continuación intentaremos generalizar el proceso en base del resultado:

$$(n+m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$$

Realizando las siguientes asignaciones:

$$a = m$$
$$b^2 = 2nm + n^2$$
$$c = n + m$$

Deberemos estudiar la igualdad: $b^2 = 2nm + n^2 = n(2m + n)$. Que como n y m son enteros, $2m + n$ debe ser múltiplo de n y de un cuadrado perfecto. Por lo que podemos definir a $2m + n = nt^2$, con t número entero,

de donde se puede obtener: $2m + n = nt^2$

Entonces: $2m = nt^2 - n$; $m = n(t^2-1)/2$.

Por tanto:

**$a = n(t^2 - 1)/2$**

**$b = nt$,** y como $c = n(t^2 - 1)/2 + n = n(t^2+2-1)/2$, tendremos:

**c = n($t^2$+1)/2**

Se ha encontrado expresiones en función de dos parámetros n y t, que debe cumplir la relación Pitagórica, es decir:

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Reemplazando los valores encontrados tendremos:

$$\left(\frac{n(t^2-1)}{2}\right)^2 + (nt)^2 = \left(\frac{n(t^2+1)}{2}\right)^2$$

Desarrollando lo siguiente:

$$\frac{n^2(t^2-1)^2}{4} + n^2t^2 = \frac{n^2(t^2+1)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(t^2-1)^2 + 4n^2t^2}{4} = \frac{n^2(t^2+1)^2}{4}$$

$$\frac{n^2((t^2-1)^2 + 4t^2)}{4} = \frac{n^2(t^2+1)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(t^4-2t^2+1+4t^2)}{4} = \frac{n^2(t^2+1)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(t^4+2t^2+1)}{4} = \frac{n^2(t^2+1)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(t^2+1)^2}{4} = \frac{n^2(t^2+1)^2}{4}$$

Que muestra que estos valores cumplen la relación Pitagórica.

En consecuencia, hemos fijado unas fórmulas motor, en función de dos parámetros, n y t, para que dando valores enteros a éstos, encontrar valores de **a, b, c** que cumplen la relación indicada. Sobre los parámetros se tiene que n es la diferencia entre a y c.

Entonces los valores parametrizados para a, b y c serían:

$$\mathbf{a = \frac{n(t^2-1)}{2}}$$

**b = nt**

$$\mathbf{c = \frac{n(t^2+1)}{2}}$$

Valores, que siendo simples de calcular, tienen un problema:

> Para que el valor de a y c sea entero se requiere que n sea par, o si n es impar, t debe ser impar, es decir **no es posible si n es impar y t es par.**

Para solventar este inconveniente:

$$\mathbf{s = 2t + 1,\ ó\ t = (s-1)/2}$$

Donde al realizar los respectivos reemplazos se tendrá:

$$\mathbf{a = 2ns(s+1)}$$

$$\mathbf{b = n(2s + 1)}$$

$$\mathbf{c = n(2s^2 + 2s + 1)}$$

Que obviamente debe cumplir la condición:

$$\mathbf{(2ns(s+1))^2 + (n(2s+1))^2 = (n(2s^2 + 2s + 1))^2}$$

y efectivamente:

$$\mathbf{4n^2s^2(s^2 + 2s + 1) + n^2(4s^2 + 4s + 1)}$$

$$\mathbf{= n^2(4s^4 + 8s^3 + 4s^2 + 4s^2 + 4s + 1)}$$

$$\mathbf{= n^2((2s^2 + 2s)^2 + 2(2s^2 + 2s) + 1)}$$

$$\mathbf{= n^2(2s^2 + 2s + 1)^2,\ l.q.q.d.}$$

Con lo que queda demostrada esta igualdad.

Consecuentemente, las dos formas sirven para hallar los conjuntos de elementos que cumplan la relación Pitagórica. Debiendo indicar que está segunda, posibilita encontrarlas asignando cualquier valor entero para s y n. Sin embargo, ambas propuestas son válidas, por supuesto tomando en cuenta las características especiales de la primera propuesta, para el efecto es conveniente tener presente ciertas sugerencias:

1. El parámetro **n**, en ambos métodos, corresponde a la diferencia entre **b** y **c**.
2. El elemento b del primer método se descompone en **nt**, por tanto cualquier número que sea susceptible de descomposición, puede tomarse como b, y con sus descomposiciones, se asignarán valores a n y t, siempre que **t** sea distinto de 1, ya que si **t = 1**, se tendrá **a = 0**, y **c = b**, lo que no puede considerarse una solución, en cambio si **n = 1**, entonces **b = t,** $\mathbf{a = (t^2 - 1)/2}$ **y** $\mathbf{c = (t^2 + 1)/2}$, donde necesariamente t debe ser impar.
3. No hay grupos de tres números que cumplan la relación Pitagórica y que tengan como elementos al 1 ó al 2.

4. Si se desea que uno de los elementos sean un número primo, se recomienda utilizar el segundo método donde **b = n(2s+1)**, fijaremos **n** en 1, como los números primos son todos impares, excepto l 2 que ya tratamos, determinaremos el valor de **s** que hace que **2s + 1** de como resultado el valor deseado y con ese valor calcularemos **a** según lo establecido en ese método.

## 3. LISTADOS PITAGÓRICOS

Con el segundo proceso hemos construido un cuadro donde se ubican tercias de números Pitagóricos, sobre lo que se puede hacer las siguientes aseveraciones:

- Todo número entero distinto del 1 y del 2, puede formar parte de esas tercias.
- Las tablas donde se mantiene fijo n, generan tablas de tercias múltiples en función de n, de aquel donde n es 1.
- Las tablas donde se fija s, generan tercias múltiples de la primera, cuando se toma n = 1.
- A continuación presentamos como ejemplo algunas tercias generadas con este método.

| Ternas Pitagóricas | | | | | | Validación ($a^2 + b^2 = c^2$) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | t | s = 2t+1 | b = n(2s+1) | a = 2ns(s+1) | c = n(2s²+2s+1) | $a^2$ | $b^2$ | $c^2$ | c |
| 1 | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 16 | 9 | 25 | 5 |
| 2 | 0 | 1 | 6 | 8 | 10 | 64 | 36 | 100 | 10 |
| 3 | 0 | 1 | 9 | 12 | 15 | 144 | 81 | 225 | 15 |
| 4 | 0 | 1 | 12 | 16 | 20 | 256 | 144 | 400 | 20 |
| 5 | 0,5 | 2 | 25 | 60 | 65 | 3600 | 625 | 4225 | 65 |
| 6 | 0,5 | 2 | 30 | 72 | 78 | 5184 | 900 | 6084 | 78 |
| 6 | 1 | 3 | 42 | 144 | 150 | 20736 | 1764 | 22500 | 150 |
| 7 | 1 | 3 | 49 | 168 | 175 | 28224 | 2401 | 30625 | 175 |
| 8 | 1,5 | 4 | 72 | 320 | 328 | 102400 | 5184 | 107584 | 328 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 83 | 1 | 3 | 581 | 1992 | 2075 | 3968064 | 337561 | 4305625 | 2075 |
| 83 | 3 | 7 | 1245 | 9296 | 9379 | 86415616 | 1550025 | 87965641 | 9379 |
| 117 | 3 | 7 | 1755 | 13104 | 13221 | 171714816 | 3080025 | 174794841 | 13221 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 117 | 5 | 11 | 2691 | 30888 | 31005 | 954068544 | 7241481 | 961310025 | 31005 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 313 | 9 | 19 | 12207 | 237880 | 238193 | 56586894400 | 149010849 | 56735905249 | 238193 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| **83** | 41 | **83** | **13861** | **1157352** | **1157435** | **1,3395E+12** | **192127321** | **1,3397E+12** | **1157435** |

**Ejemplo:** Para confirmar las fóormulas y visualizar las infinitas posibilidades que éstas permiten, generaremos una tercia asignando el valor de 83 para n y para s, dando como resultados los valores:

$$a = 13861$$
$$b = 1157352$$
$$c = 1157435$$

Se puede comprobar la igualdad:

$$(13861)^2 + (1157352)^2 = (1157435)^2$$
$$192127321 + 1339463651904 = 1339655779225$$

**Generalización:** se puede indicar que la expresión $a^2 + b^2 = c^2$, puede ampliarse siempre con base en la generación de números Pitagóricos:

Así, si iniciamos con la relación Pitagórica:

$$48985^2 = 48984^2 + 313^2$$

Sabemos además que:

$$313^2 = 312^2 + 25^2 \text{ y } 25^2 = 24^2 + 7^2$$

Entonces:

$$\mathbf{48985^2 = 48984^2 + 312^2 + 24^2 + 7^2}$$

Pudiendo extenderse cuantas veces se desee.

## 4. CONCLUSIONES

Debo iniciar esta sección indicando que el principal uso práctico de las ternas Pitagóricas, es para construir ángulos rectos; es decir, si se logra construir un triángulo cuyos lados constituyen una de esas ternas, se puede concluir que el triángulo formado es un triángulo rectángulo y por tanto el ángulo que se opone al lado mayor es un ángulo recto, como consecuencia de ésto y con ayuda de las funciones trigonométricas se puede también establecer con exactitud la medida de los ángulos agudos presentes.

Este trabajo también permite obtener ternas Pitagóricas que cumplan condiciones específicas, en función de los valores que demos a **n** y **t**. Nuestra investigación muestra contundentemente que la contribución de Pitágoras, aún no es debidamente entendido, su teorema es quizá la relación más tacita entre la geometría y el álgebra, dando al número un carácter de relación que permite entender el entorno.

Unos resultados puntuales permiten vislumbrar la importancia de lo enunciado:

- No es posible construir tercias Pitagóricas de números enteros que contengan al 1 y al 2, constituyéndose éstos, en bases para la construcción de las demás.
- Todos los demás enteros, primos o no, pueden ser parte de tercias Pitagóricas.
- De ser necesario, no hay limitante alguno para generar tercias con números racionales, únicamente se deberá sujetar a las reglas y a los procesos.

Además, algo muy importante es el hecho del sentido de unidad que estas relaciones permiten, pues su definición es la base para estas construcciones, mostrando así, la importancia del número, pero siempre sujeto a la realidad. Es entendible entonces la importancia y respeto que los seguidores de Pitágoras otorgaban al número, pues el mismo surge como una representación simbólica de una realidad que posibilita entender la misma, “interpretando”, con absoluta objetividad las circunstancias.

## BIBLIOGRAFÍA

Alfred, U., 1964. Consecutive integers whose sum of squares is a perfect square. *Mathematics Magazine*, 37(1), 19-32.

Hope, F., 1998. Pythagorean triples revisited. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(7), 478-479.

Li, M.-S., K. Robertson, T.J. Osler, A. Hassen, C.S. Simons, M. Wright, 2008. *On numbers equal to the sum of two squares in more than one way*. Department of Mathematics, Rowan University, Glassboro, NJ 08028. Disponible en: http://www.rowan.edu/colleges/csm/departments/math/facultystaff/osler/110%20SUM%20OF%20TWO%20SQUARES%20IN%20MORE%20THAN%20ONE%20WAY%20MACE%20Small%20changes%20Oct%2008%20%20Submission.pdf, 11 pp.