Uniciencia Vol. 37(1), pp. 1-23, January-December, 2023
www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por docentes en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua

Partial meanings of the Pythagorean theorem used by teachers in the creation of tasks within the framework of a continuing education program

Significados parciais do teorema de Pitágoras utilizado pelos professores na criação de tarefas no âmbito de um programa de educação continuada

Eulalia Calle[1], **Adriana Breda**[2*], **Vicenç Font**[2]

Received: Apr/1/2022 • Accepted: May/16/2022 • Published: Jan/1/2023

Resumen

[Objetivo] El objetivo de este artículo es presentar resultados de una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del criterio "implementar una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar", implementado con profesorado de secundaria de matemáticas de Ecuador en un máster de formación continua. **[Metodología]** Después de explicar el proceso de instrucción en el que se enseñó este criterio, se presenta el análisis cualitativo de las respuestas a una de las tareas que se propuso al alumnado de este máster: crear tareas en las que, para su resolución, se tenía que aplicar un determinado significado parcial del teorema de Pitágoras (el geométrico o el aritmético-algebraico), como ejemplo de evidencia del aprendizaje conseguido. **[Resultados]** Los resultados muestran que algunos alumnos del máster proponen tareas para trabajar el teorema de Pitágoras, pero no especifican ni justifican si las tareas diseñadas por ellos están relacionadas con el significado aritmético-algebraico, con el geométrico o con ambos; otros no propusieron ninguna tarea para trabajar el significado aritmético-algebraico y un participante del máster no propuso ninguna tarea para trabajar el significado geométrico. También se observa que algunos crearon tareas que no se corresponden con el significado que señalan. **[Conclusiones]** Se concluye que los profesores tienen dificultades para crear una tarea y señalar el tipo del significado del teorema de Pitágoras que se debe usar para resolverla y que el significado geométrico es el que mejor relacionan con la tarea que proponen.

Palabras clave: Formación continua de profesores; significados parciales del teorema de Pitágoras; idoneidad didáctica; creación de tareas.

* Autora para correspondencia
Eulalia Calle, eulalia.calle@ucuenca.edu.ec, https://orcid.org/0000-0001-9526-8832
Adriana Breda, adriana.breda@ub.edu, https://orcid.org/0000-0002-7764-0511
Vicenç Font, vfont@ub.edu, https://orcid.org/0000-0003-1405-0458
1 Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación, Universidad de Cuenca, Cuenca, Ecuador. 2 Departamento de Educación
2 Lingüística y Literaria, y Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática, Universitat de Barcelona, Barcelona, España.

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Abstract

[Objective] This article presents the results of research on the teaching and learning of the criterion "implement a representative sample of the complexity of the mathematical object to be taught," which was carried out with high school mathematics teachers from Ecuador in a master's degree program in continuing education. **[Methodology]** After a discussion of the instructional process which was used when teaching this criterion, a qualitative analysis of the responses to one of the tasks proposed for the students in this master's degree program is presented: creating tasks for whose resolution the students had to apply a certain partial meaning of the Pythagorean theorem (geometric or arithmetic-algebraic), as a demonstration of the learning that they had achieved. **[Results]** The results show that some students in the master's degree program proposed tasks to work on the Pythagorean theorem, but did not specify or justify whether the tasks they designed were related to arithmetic-algebraic meaning, to geometric meaning or to both; other students did not propose any task to work on arithmetic-algebraic meaning; and one participant in the master's program did not propose any task to work on geometric meaning. It was also observed that some students created tasks that did not correspond to either of these meanings. **[Conclusions]** It was concluded that teachers have difficulties in creating a task and indicating the type of meaning of the Pythagorean theorem that should be used to solve it, and that geometric meaning was most related to the tasks that they proposed.

Keywords: Continuing education of teachers; partial meanings of the Pythagorean theorem; didactic suitability; task creation.

Resumo

[**Objetivo]** O objetivo deste artigo é apresentar os resultados de uma pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem do critério "implementar uma amostra representativa da complexidade do objeto matemático a ser ensinado", executado com professores de matemática do Ensino Médio do Equador em um mestrado de educação continuada. **[Metodologia]** Depois de explicar o processo instrucional no qual este critério foi ensinado, apresentou-se a análise qualitativa das respostas a uma das tarefas propostas aos alunos deste mestrado: criar tarefas nas quais, para sua resolução, eles tinham que aplicar um determinado significado parcial do teorema de Pitágoras (geométrico ou aritmético e algébrico), como um exemplo de evidência da aprendizagem alcançada. [**Resultados]** Os resultados mostram que alguns alunos de mestrado propuseram tarefas para trabalhar o teorema de Pitágoras, mas não especificaram ou justificaram se as tarefas projetadas por eles estão relacionadas ao significado aritmético e algébrico, ao significado geométrico ou a ambos; outros não propuseram nenhuma tarefa para trabalhar o significado aritmético e algébrico e um participante do mestrado não propôs nenhuma tarefa para trabalhar o significado geométrico. Observa-se, também, que alguns deles criaram tarefas que não correspondem ao significado que indicam. [**Conclusões]** Conclui-se que os professores têm dificuldade em criar uma tarefa e apontar o tipo de significado do teorema de Pitágoras que deve ser usado para resolvê-la e que o significado geométrico é aquele que eles relacionam melhor com a tarefa que propõem.

Palavras-chave: educação continuada de professores; significados parciais do teorema de Pitágoras; idoneidade didática; criação de tarefas.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Introducción

En la investigación en educación matemática se ha considerado un tema de interés el estudio de las conexiones matemáticas (Zengin, 2019). Los resultados de estas investigaciones han impactado en currículos de diferentes países: Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000 y 2013), Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 1998), Turquía (Ministry of National Education, 2013), España (Generalitat de Catalunya, 2015) y Australia (Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, 2012), entre otros, y el fomento de las conexiones se ha incorporado, en ellos, como un aspecto clave.

En los estudios sobre conexiones se consideran dos grandes tipos de conexiones matemáticas: las intra-matemáticas y las extra-matemáticas. En relación con las primeras, a partir de los trabajos de Businskas (2008), en los que se proponían cinco tipos de conexiones, se han ido añadiendo otros tipos de conexiones (Flores y García, 2017) hasta llegar a los nueve tipos de conexiones propuestos en la teoría extendida de las conexiones (Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez y Font, 2022), uno de los tipos considerados es la conexión de significado, en particular, la conexión entre distintos significados parciales de un mismo objeto matemático (que es el tipo de conexión que interesa en esta investigación).

La importancia que se da al establecimiento de conexiones matemáticas, en particular las intra-matemáticas, va de la mano con la importancia que se da a la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos. En mayor o menor medida, la problemática de la complejidad asociada al objeto matemático, y la articulación de sus componentes, está presente en casi todos los marcos teóricos del área de la educación matemática, en particular en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS, a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2019). En este enfoque se modeliza la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones, entendidos como significados parciales, y de las conexiones que se establecen entre ellos (Godino, Burgos y Gea, 2021).

En la actualidad, se han propuesto diferentes modelos de categorías de conocimientos y competencias del profesorado de matemáticas. Entre ellos, el modelo de conocimientos y competencias didáctico matemáticas (CCDM) basado en constructos del EOS (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). En este modelo se considera que, para que un alumno pueda ser competente en la aplicación de las nociones matemáticas, es necesario que en el proceso de instrucción se le enseñe una muestra representativa, metafóricamente hablando, y bien conectada de los diferentes significados parciales (o sentidos) de estas nociones. En consecuencia, se considera necesario que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida esta como pluralidad de significados parciales) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción y que, por tanto, son necesarios procesos formativos que permitan a los profesores reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su posible aplicación en el diseño de tareas, en su práctica docente, con la finalidad de mejorarla.

Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo presenta los resultados de una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del criterio *"implementar una muestra representativa de la complejidad*

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

del objeto matemático que se quiere enseñar", en un proceso de instrucción implementado con 95 profesores de secundaria de matemáticas de Ecuador. Para ello, se diseñó e implementó una secuencia de tareas orientada a reflexionar sobre los diferentes significados de algunos objetos matemáticos y su posible aplicación en la práctica docente, con la finalidad de mejorarla, y para tener evidencias de su aprendizaje. Se les propuso, entre otras, crear tareas (que podían ser problemas o simples ejercicios) en los que, para su resolución, se tenía que aplicar un determinado significado parcial del teorema de Pitágoras (el geométrico o el aritmético-algebraico). Por tanto, la investigación que se relata pretende, como primer objetivo, describir el proceso de instrucción realizado y, como segundo objetivo, evidenciar el aprendizaje logrado analizando si los participantes pueden, dados uno de los dos significados parciales diferentes del teorema de Pitágoras (el geométrico y el aritmético-algebraico), crear tareas en las que, para su resolución, sea necesario este significado parcial. Este segundo objetivo pretende contestar a la siguiente pregunta: ¿Dado un significado parcial del teorema de Pitágoras fijado previamente, pueden los profesores crear una tarea en la que este significado parcial sea indicado para su resolución?

El teorema de Pitágoras ha sido objeto de múltiples investigaciones. Loomis (1968), por ejemplo, clasifica 370 demostraciones del teorema. Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de este teorema han usado diferentes marcos teóricos, y en muchas de ellas se han tenido en cuenta sus diferentes significados parciales de manera explícita (e.g., en Chaverri-Hernández et al., 2020), mientras que en otras se hace implícitamente. Ahora bien, no hemos encontrado ninguna en la que se proponga a los participantes la creación de una tarea en la que se deba usar un determinado significado parcial para su resolución, y tampoco ninguna sobre el teorema de Pitágoras en la formación de profesores de Ecuador.

Después de esta introducción, donde se explican los objetivos, se presentan, en la sección del marco teórico, algunos constructos del EOS. Seguidamente se expone la metodología cualitativa que se ha seguido y se explica la gestión del proceso de instrucción orientado a reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y, también, cómo se analizaron las producciones de los participantes. A continuación, se presentan los resultados y una discusión sobre ellos y, por último, algunas consideraciones finales.

Marco teórico

En esta sección explicamos, de manera breve, el modelo CCDM y la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica y, con más detalle, el componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar" del criterio de idoneidad epistémica. Por último, explicamos los significados parciales que se han tenido en cuenta para describir la complejidad del teorema de Pitágoras.

El modelo CCDM y la idoneidad didáctica

En el modelo teórico de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática (modelo CCDM), basado en constructos del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2019) se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

intervención didáctica; el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) es diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de idoneidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Esta competencia general está formada por diferentes subcompetencias: 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemática; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos centraremos, sobre todo, en esta última subcompetencia, más en concreto en uno de sus componentes. La subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010): idoneidad epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e interaccional. En particular, la idoneidad epistémica se refiere, sobre todo, al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. En Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores para cada criterio que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de didáctica de las matemáticas (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018). En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

El componente "muestra representativa de la complejidad de los objetos matemáticos" (entendida la complejidad como pluralidad de significados parciales y la noción de muestra representativa en términos metafóricos) se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de tareas diferentes, por lo cual, si se quiere enseñar una muestra representativa de significados parciales, es necesario presentar una muestra variada de tareas (Font, Breda y Seckel, 2017). Y, a su vez, si se quiere conseguir que el alumno sea competente en la resolución de una variedad de problemas, en particular extra-matemáticos, donde el objeto matemático en cuestión tiene un rol determinante, es necesario que los alumnos dispongan de una red de significados parciales bien conectados entre sí. En la siguiente Tabla 1 se recogen los indicadores de dicho componente.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Tabla 1 *El componente representatividad y sus indicadores*

Componente de la idoneidad epistémica	Indicadores
Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático a enseñar	• Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar • Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Nota: Font, Breda y Seckel (2017).

Primero hay que valorar, si los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) seleccionados para su implementación son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (para ello la mirada se dirige a las matemáticas). En segundo lugar, dado que el currículo contempla parte de estos significados parciales, hay que valorar si la muestra de significados presentes en el proceso de instrucción es también una muestra representativa de los contemplados en el currículo (en el currículo en general, en la etapa o ciclo o en el curso donde se realiza la implementación). –la expresión muestra representativa, como se ha dicho, se está usando de manera metafórica y es muy contextual–, es decir, depende mucho del objeto que se enseña y del nivel donde se enseña. Un ejemplo de lo que se entiende por muestra representativa se puede poner con el objeto pendiente; en España, en la etapa 12-16 años, el currículo contempla cuatro significados de este objeto (geométrico, trigonométrico, algebraico y funcional), con alumnos de 15 años el geométrico, el algebraico y el funcional se podrían considerar una muestra representativa, en cambio no lo sería explicar solo el algébrico y el funcional. Una vez seleccionados uno o varios significados parciales para su implementación, valorar, como mínimo, si se contempla una muestra representativa de representaciones del objeto y de tareas en los que se aplica o emerge.

Investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos y su uso en la formación de profesores

Utilizando como referente teórico el EOS se han realizado diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos, así como en la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (*e.g.*, por ejemplo, Burgos, et al., 2020; Calle, Breda y Font, 2021; Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007). Por otra parte, en diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España y

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

Latinoamérica se han realizado investigaciones que tienen como finalidad investigar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica (*e.g.*, Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2020; Espinoza y Pochulu, 2019; Ferreres y Vanegas, 2015; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya y Bustamante, 2019). Estas investigaciones han puesto de manifiesto diferentes aspectos en relación con el componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático", de los cuales queremos señalar aquí los siguientes:

1. Aunque no se incorpore explícitamente en el proceso de instrucción la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático", están presentes de manera implícita cuando los profesores hacen valoraciones de sus propuestas didácticas (Breda, 2020).
2. Incorporar este componente para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (profesores o futuros profesores), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. Por ejemplo, para el caso de España, entre otros, Burgos, et al. (2018) y Esqué y Breda (2021) documentan procesos de formación sobre este componente, así como se hace en Seckel (2016) para el caso de Chile.

En Esqué y Breda (2021) se explica cómo usaron en su TFM este componente en la valoración y rediseño de una unidad didáctica de cara a futuras implementaciones en un Máster de Formación inicial de Profesorado de Secundaria de Matemáticas en España. Burgos et al. (2018), a su vez, cuando trabajan en el reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria, focalizan la atención en la faceta epistémica del modelo CCDM, dan importancia al conocimiento de la pluralidad de los significados de los objetos matemáticos en diferentes contextos y llegan a determinar incluso que los docentes, en su intento de lograr un nivel de algebrización, sacrifican la significación del enunciado del problema.

En Seckel (2016) se describe un proceso de formación de una formadora de profesores chilenos de educación básica con mención en matemática, cuyo objetivo es desarrollar su competencia reflexiva y la de sus alumnos. Un aspecto que se trató en el diseño e implementación del ciclo formativo que recibió esta profesora fue cómo abordar el componente "muestra representativa de la complejidad del objeto matemático" (proporcionalidad en este caso).

En cuanto a la creación de problemas con fines didácticos, en el marco del EOS, se considera que es particularmente importante que el profesor identifique los objetos matemáticos primarios en la solución de un problema y establezca interrelaciones entre ellos; es decir, entre la situación-problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. Así, se tendrán redes de objetos que intervienen y emergen, que se denominan configuraciones epistémicas (CE) cuando son consideradas desde una perspectiva institucional y configuraciones cognitivas (CC) cuando son consideradas desde una perspectiva personal. El análisis de

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

estas configuraciones permite tener información acerca de la anatomía de la solución de un problema y admite, entre otros aspectos, crear nuevos problemas por variación de los dados inicialmente, o bien crear nuevos problemas directamente para que en su solución se tenga que utilizar un determinado objeto primario (o varios). Esta manera de entender la creación de problemas usando herramientas del EOS se ha incorporado al enfoque de creación de problemas desarrollado por Malaspina y colaboradores, y usado en diversas experiencias didácticas en el Perú, Ecuador y España (Malaspina, Rubio y Torres, 2019; Torres, 2020).

Complejidad del objeto matemático teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es quizás la relación matemática, de cierta complejidad, más conocida por personas con una formación básica. En su versión geométrica dice que, en un triángulo rectángulo, siendo a la medida de la hipotenusa y b y c las medidas de los catetos, el área de un cuadrado construido tomando como lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos (lo cual se representa como $a^2 = b^2 + c^2$). Esta mirada geométrica se va diluyendo cuando se hace una mirada un poco más aritmético-algebraica y el teorema de Pitágoras se entiende como una relación entre los números o letras que representan las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. De esta manera, los números o letras substituyen a longitudes de segmentos o áreas de cuadrados y su función es representarlos. En esta mirada, los símbolos representan magnitudes o relaciones entre ellas, pero, si bien se pueden realizar acciones sobre ellos, no se consideran objetos con independencia de la magnitud que representan. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten las magnitudes y la situación que representan.

Si se profundiza en la mirada aritmético-algebraica, los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban. Ahora los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan. Esta mirada lleva a entender a, b, c como números o letras que no representan necesariamente magnitudes geométricas y que cumplen que $a^2 = b^2 + c^2$. Primero como ternas pitagóricas de número enteros, pasando por fracciones pitagóricas y llegando a ternas (a, b, c) que pueden no ser enteros, pero que cumplen la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

Estas diferentes miradas al teorema de Pitágoras nos llevan a considerar que, en los primeros años de la secundaria, hay dos significados parciales del teorema de Pitágoras que permiten caracterizar su complejidad, por una parte: 1) el significado geométrico donde vamos a englobar todas las interpretaciones de a, b, c como longitudes de lados del triángulo y sus respectivos cuadrados como las áreas de los cuadrados que los tienen por lados y 2) el significado aritmético-algebraico donde a, b, c se van a entender como números o letras que no representan magnitudes geométricas y que cumplen que $a^2 = b^2 + c^2$. El nexo de conexión entre estos dos significados son las situaciones o problemas en los que se calculan longitudes de alguno de los lados del triángulo rectángulo, sin hacer mención explícita de sus áreas. Se trata de situaciones en las que se interrelacionan los dos tipos de significados, ya que, por una parte, se considera un referente geométrico; pero, por otra

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

parte, se hace un tratamiento aritmético-algebraico para hallar la solución.

El teorema de Pitágoras presenta también interesantes conexiones con otros problemas y teorías, que pueden ampliar los significados parciales anteriores, pero que no serán considerados en este trabajo enfocado hacia los primeros años de la secundaria, que es donde por primera vez se enseña este teorema. Se trata de conexiones con nociones tales como la sección áurea, la simetría dinámica, espirales logarítmicas, trisección del ángulo, duplicación del cubo, cuadratura del círculo, determinación del valor de π, concepto de número irracional, polígonos y poliedros regulares y estrellados, teoría de números, constructibilidad de ángulos y polígonos, fracciones continuas, trigonometría, geometría analítica, vectores, espacios de Hilbert, etc. (Barroso y Gavilán, 2001; González, 2008; Martínez, 2000).

Metodología

En ese apartado, presentamos, primero, el contexto del estudio (profesores participantes, tipo de máster y características del alumnado), En segundo lugar, se narra la implementación de la secuencia didáctica, desde la óptica del docente que imparte la asignatura, en la que se engloba la tarea del teorema de Pitágoras analizada con detalle como evidencia de aprendizaje. Se trata de un tipo de ciclo formativo desarrollado en el marco del EOS (Breda, Pino-Fan y Font, 2017) para el desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor. En este caso, dado que se pretendía enseñar, a los alumnos del máster (profesores de secundaria en activo), la importancia de tener en cuenta, para la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático, una muestra representativa de los diferentes significados de dicho objeto en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas, el proceso de instrucción se diseñó considerando el siguiente principio: para poder usar este componente en la valoración y rediseño de secuencias de tareas, el profesor, como mínimo, debe conocer los diferentes significados del objeto matemático a enseñar (significado holístico) y sus conexiones, debe conocer cuáles de estos significados están incluidos en el currículo y debe poder seleccionar o crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar. En el diseño de la secuencia didáctica participaron los tres autores y en la implementación tres formadores de profesores, dos de los cuales eran el segundo y tercer autor de este documento. El tercer formador fue informado sobre la investigación y dio su consentimiento informado para participar.

A partir de los diarios de clase y de la documentación del campus virtual registrados en el año de 2018, para el primer objetivo, se ha realizado una narración, desde la perspectiva del formador, de lo que fue la enseñanza realizada. Esta implementación la consideramos como un estudio de caso múltiple que se enmarca en las investigaciones en didáctica de las matemáticas de tipo cualitativo-descriptivo.

Por otra parte, para el segundo objetivo, se presenta la tarea propuesta por los formadores como ejemplo de evidencia de aprendizaje y se muestra cómo se han analizado las respuestas de los docentes, conservando su anonimato. En este caso, se trata de una metodología mixta ya que, por una parte, se consideran categorías cualitativas previas (dos tipos de significados) y otras emergentes de los datos y, por la otra, se hace una cuantificación de los tipos de respuestas.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Contexto del estudio

Han participado tres formadores que tenían a su cargo 95 profesores de matemáticas de instituciones educativas públicas y privadas de diferentes ciudades de Ecuador, en particular, profesores que trabajan en los niveles de Educación General Básica Superior y Bachillerato General Unificado.

De los tres formadores participantes, uno tenía experiencia en impartir esta asignatura en másteres similares, mientras que los otros dos, impartieron esta asignatura por primera vez. Los tres formadores conocían a fondo los criterios de idoneidad didáctica y habían realizado investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos. El tercer autor de este artículo participó en diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos: números naturales (Godino, et al., 2009), media aritmética (Rondero y Font, 2015), límite (Contreras, García y Font, 2012), optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017) y colaboró, con la segunda autora, para caracterizar la complejidad del teorema de Thales (Font, Breda y Seckel, 2017) y, con el tercer formador, para caracterizar la complejidad de la derivada (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2011) y de la antiderivada (Gordillo, et al., 2018). A su vez, la segunda autora profundizó en la complejidad de las inecuaciones (Monje, Seckel y Breda, 2018).

De los 95 profesores que cursaron el máster, la mayoría acreditan formación inicial en Licenciatura en Matemáticas, pero, algunos presentan formación inicial en Educación General Básica, Sociología u otras áreas del conocimiento. Además de ejercer la actividad de docencia en matemáticas, los profesores estaban realizando un máster profesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria. Dado su enfoque profesional, este máster se extiende a lo largo de dos años y está dividido en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos ECTS) que incluye asignaturas de la psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de *prácticum* y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica.

Tarea y ejemplo de análisis de las respuestas

La tarea cuyas respuestas se analizan era la siguiente:

> El teorema de Pitágoras tiene diferentes significados parciales. Por una parte se puede considerar un significado geométrico (el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos) y un significado algébrico-aritmético ─se trata de ternas de números, llamadas pitagóricas, en las que el primer número al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos números, por ejemplo: (5, 4, 3), (15, 12, 9) ... Propón dos tareas para cada uno de estos dos significados.

Se optó por un enunciado no muy extenso dado que, como se ha dicho antes, el teorema de Pitágoras es uno de los objetos de la matemática sobre el que las personas en general (y, por tanto, también los profesores) tiene más conocimientos. Tal como se explica en la sección posterior, en el contexto de la implementación realizada los profesores tenían claro que lo que se les preguntaba era que creasen tareas (que podían ser problemas o ejercicios) en los que

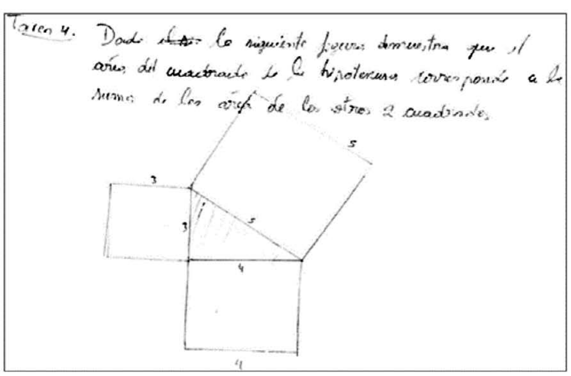
UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

uno de estos dos significados (geométrico y aritmético-algebraico) fuese determinante para su resolución. La tarea fue validada mediante: a) un estudio de los significados parciales del teorema de Pitágoras contemplado en los trabajos finales de máster de futuros profesores de un master de formación de profesores de matemáticas de secundaria (14 TFM) de España en los que se valoraba la implementación de una secuencia de tarea y se daban orientaciones para su rediseño (donde se observó que estos dos significados eran los que estaban presentes siempre); b) mediante su aplicación a un grupo de cinco de futuros profesores –una prueba piloto– que llevó a realizar pequeñas modificaciones en la consigna propuesta, para garantizar la comprensión adecuada del enunciado y c) mediante un juicio experto.

Se pueden hacer muchas clasificaciones diferentes sobre los problemas que se resuelven mediante el teorema de Pitágoras como, por ejemplo, la que se hace en Chaverri-Hernández, et al. (2020). Ahora bien, en esta investigación, la creación de tareas se relaciona con las matemáticas necesarias para su resolución, en particular con un determinado significado parcial del objeto matemático (teorema de Pitágoras en este caso), pero sin concretar dicho significado en una configuración epistémica. La razón es que en el máster no se contempló un proceso específico de enseñanza y aprendizaje del uso de las configuraciones epistémicas de objetos primarios como herramienta de análisis de la actividad matemática necesaria para la resolución de la tarea propuesta.

Para el análisis de las respuestas se partía de categorías a priori (los dos tipos de significado) y se trataba de ver si, dado un significado del teorema de Pitágoras fijado previamente, los profesores pueden crear una tarea en la que este significado parcial sea indicado para su resolución (por ejemplo, si el significado fijado es el geométrico, entendido como una relación entre áreas, el problema propuesto pide calcular un área). Las respuestas en las que se proponía un problema en el que se debían calcular longitudes de alguno de los lados del triángulo rectángulo, sin hacer mención explícita de sus áreas se daban por válidas tanto si el participante las asociaba a un significado geométrico como al aritmético-algebraico. Por otra parte, podía emerger alguna nueva categoría que surgiera a posteriori como resultado del análisis de las respuestas. Por ejemplo, en la siguiente respuesta, con independencia de que se pida demostrar y que las longitudes no se expresen en unidades, se considera que hay correspondencia entre la tarea que se ha creado y el significado que se dice que se pone en funcionamiento para resolverla (el geométrico).



Dada la siguiente figura demuestra que el área del cuadrado de la hipotenusa corresponde a la suma de las áreas de los otros 2 cuadrados.

Figura 1. *Problema creado por el profesor 12 relacionada con el significado geométrico.*
Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Descripción de la implementación en la que se engloba la tarea del teorema de Pitágoras

En este apartado explicamos cómo se ha enseñado a los participantes la importancia de tener en cuenta una muestra representativa de los diferentes significados de un objeto matemático en el diseño, valoración y rediseño de secuencias de tareas. Para ello, se usa una metodología de autoestudio (una mirada a uno mismo en acción, generalmente dentro de contextos educativos) (Hamilton, Smith & Worthington, 2008).

Una de las asignaturas de este máster, titulada *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica*, impartida en el segundo año, tenía como principal objetivo presentar propuestas de innovación y herramientas de valoración de la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor la mejora de su propia práctica. La noción de idoneidad didáctica desglosada en criterios, componentes e indicadores fue utilizada posteriormente por los participantes en su trabajo de fin de máster.

En esta asignatura, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados se crearon momentos y espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo. Después se explicó que los criterios de idoneidad didáctica deben ser entendidos como normas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando esta está orientada a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar mejor. Desde esta perspectiva, la didáctica de las matemáticas nos puede ofrecer principios provisionales consensuados por la comunidad interesada, que pueden servir para guiar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se explicó que para el desarrollo del constructo idoneidad didáctica, se habían considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del National Council of Teachers of Mathematics (2000) y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de didáctica de las matemáticas (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Godino, 2013).

También se remarcó que se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje como el grado en que este (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Se puso énfasis en que se trata de un constructo multidimensional que se tiene que descomponer en idoneidades parciales.

En relación con los criterios parciales de idoneidad, se comentó que se necesitan unos componentes e indicadores que los hagan operativos. Mediante diferentes tareas, el grupo fue acordando diferentes componentes e indicadores de los criterios, las cuales pudieron encajar fácilmente con los propuestos en Breda, Pino-Fan y Font (2017). Se trata de generar una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docente cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018), en particular es muy diferente a las guías docentes para el profesor que acompañan los libros de texto.

A continuación, se comentan con más detalle alguna de las tareas relacionadas con

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

la emergencia del componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar". Para hacer emerger este componente, primero se remarcó que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículos basados en competencias. Se hizo hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos, tomando como primer ejemplo problemas que se resuelven con la aplicación de significados parciales diferentes del teorema de Thales (Font, Breda y Seckel, 2017).

Después se reflexionó sobre la complejidad de la noción de otros objetos matemáticos, entre ellos los de mediatriz y pendiente. Para el caso de la pendiente, lo primero que se hizo fue preguntarles a los alumnos del máster qué entendían por pendiente de una recta, como resultado de sus respuestas aparecieron los cuatro significados de la siguiente tarea que se les propuso a continuación:

Cuadro 1 *Tarea sobre los diferentes significados del objeto matemático pendiente*

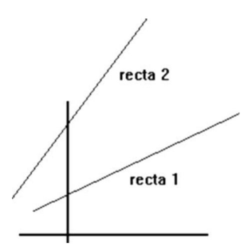
Tarea: A continuación, tienes diferentes significados de la pendiente de una recta y diferentes actividades. Asocia cada significado con la actividad que pone en juego este significado para su resolución (justifica la asociación).

Significados:

a) Significado geométrico: la pendiente determina la inclinación de la recta
b) Significado trigonométrico: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas.
c) Significado algébrico: el número que multiplica a la x en la fórmula y = mx + n
d) Significado funcional: el aumento de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.

Actividades:

Actividad 1. ¿Cuál de las rectas siguientes tiene más pendiente?



Actividad 2. Escribe la fórmula de las siguientes funciones:

Pendiente	-2	3	0
Ordenada en el origen	0	4	-5

Actividad 3. ¿Cuál es la pendiente de la recta y = 4x + 5?

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Actividad 4. Dibuja el gráfico de la función y = 5x + 1 y di si son correctos o no los comentarios de los siguientes estudiantes:

Juan: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba en vertical hasta volver a tocar la recta.

Alba: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia abajo en vertical hasta tocar la recta.

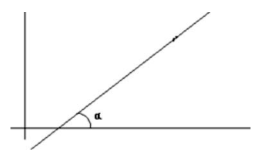
José: Si nos situamos en el origen de coordenadas y nos desplazamos cinco unidades hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 1 unidad hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Ana: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos dos unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 10 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Alberto: Si nos situamos en el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas y nos desplazamos 3 unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 15 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Laura: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos un número de unidades en horizontal, para volver a tocar la recta nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba por cada unidad de desplazamiento horizontal.

Actividad 5. Halla la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje abscisas.



Nota: Fuente propia de la investigación.

En la puesta en común sobre la resolución de esta tarea se hizo hincapié en que cada problema exigía poner en funcionamiento un tipo de significado parcial de la pendiente diferente y que la otra cara de la moneda de la competencia en el uso de la noción de pendiente en la resolución de una variedad de problemas era la enseñanza de sus diferentes significados. Se trataba de que los alumnos del máster pasasen de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente en el que, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede dar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos. También se recuperó en este momento toda la reflexión que se había hecho en otra asignatura del máster sobre la importancia de presentar a los alumnos diferentes representaciones de un objeto matemática y trabajar los tratamientos y conversiones entre ellas.

Al final de la asignatura *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica* se realizó una evaluación (examen) para verificar los aprendizajes logrados por los

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

profesores. En particular se les propusieron dos tareas, una sobre la complejidad de la media aritmética y otra sobre la complejidad del teorema de Pitágoras.

La tarea sobre la media aritmética, basada en Batanero (2000) y muy similar a la de la pendiente que se acaba de describir, trataba de que los profesores relacionasen los significados parciales: 1) la media como valor representativo de un conjunto de datos; 2) la media como la estimación de una medida; y 3) valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.), con tres problemas diferentes. Al analizar las respuestas, se concluye que un número importante de los alumnos del máster (56), al relacionar los tres significados con los problemas propuestos, lo hacen de forma confusa y errónea. Por otra parte, 21 dan una respuesta correcta, pero su justificación no es válida; mientras que 18 señalan las respuestas correctas, pero sin ningún tipo de justificación. La segunda tarea propuesta en el examen es la que se analiza en la próxima sección.

Análisis y resultados

La otra pregunta del examen era sobre la complejidad del teorema de Pitágoras. De los 95 profesores, 32 no contestaron la tarea y 63 la contestaron proponiendo una o dos actividades para el significado geométrico y una o dos para el significado aritmético-algébrico. Por tanto, los profesores propusieron hasta cuatro tareas a las que les asignaban alguno de los dos significados (o ninguno).

En cuanto a los 63 profesores que contestaron, tenemos que: a) 10 profesores proponen tareas para trabajar el teorema de Pitágoras, pero no especifican ni justifican si las tareas diseñadas por ellos están relacionadas con el significado aritmético-algebraico, con el geométrico o con ambos; b) 15 profesores no propusieron ninguna tarea para trabajar el significado aritmético-algebraico y un profesor no propuso ninguna tarea para trabajar el significado geométrico; c) 8 profesores crearon tareas que no se corresponden con el significado que señalan, en efecto, 6 profesores, para el significado aritmético-algebraico, proponen actividades de cálculo de áreas de cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, mientras que 2 profesores, para el significado geométrico, proponen tareas de comprobación del teorema de Pitágoras con diferentes ternas pitagóricas.

Respecto a las tareas creadas por los profesores, tenemos:

a) Tareas propuestas para el significado geométrico entendido como una relación de áreas. Hubo un total de 43 tareas propuestas relacionadas con comprobar que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (como la tarea propuesta en la Figura 1 de la sección de metodología). En este caso, hay correspondencia entre el significado señalado y la tarea propuesta.
b) Tareas propuestas por los profesores para el significado geométrico que son más indicadas para otros significados. Este es el caso del profesor 10, quien muestra, implícitamente, que conoce otros significados del teorema de Pitágoras ya que, como tarea para trabajar el significado geométrico, propone el cálculo del módulo de un vector (Figura 2). Es decir, utiliza que en la geometría vectorial-analítica el teorema de Pitágoras permite relacionar el módulo y las componentes de un vector del plano.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

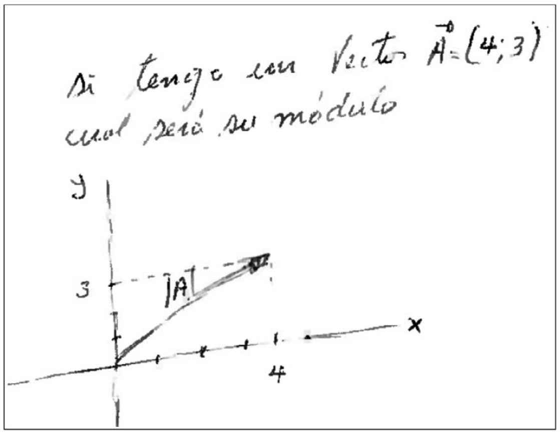


Figura 2. *Problema creado por el profesor 10 para el significado geométrico.*
Nota: Fuente propia de la investigación.

c) Tareas en las que hay correspondencia con el significado asociado (sea el geométrico o el aritmético-algebraico).

Hubo treinta tareas propuestas por los profesores participantes del máster relacionadas con el cálculo de la longitud de uno de los lados del triángulo rectángulo y que asociaron esta tarea o bien con el significado geométrico o bien con el aritmético-algebraico. Los profesores que asociaron este tipo de tarea con el significado geométrico lo hicieron porque había un triángulo y se tenían que calcular longitudes (o alturas o distancias si era un problema contextualizado), mientras los que asociaron la tarea con el significado aritmético-algebraico lo hicieron porque la tarea propone para su la resolución el uso de operaciones algébricas a partir de una relación entre números. Como la tarea del profesor 13 (ver Figura 3).

Dos tareas propuestas por dos profesores utilizaron una representación geométrica para hacer una comprobación algebraica del teorema de Pitágoras (ver Figura 4).

Dos profesores, para el significado geométrico, proponen un tipo de tarea en la que se trata de comprobar que el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos (ver Figura 5), pero para ello se propone implícitamente que se haga una demostración de tipo algebraica. En este caso se puede considerar que el profesor, al proponer este tipo de tarea, usa un significado geométrico generalizado del teorema de Pitágoras: el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos.

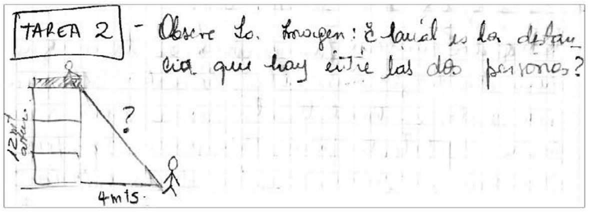
d) Tareas propuestas para el significado aritmético-algébrico.

Treinta y tres tareas fueron propuestas para este significado. Se trata de tareas relacionadas con la presentación de ternas de números en los que los alumnos debían comprobar o encontrar que un número al cuadrado era igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. En este caso, también hay correspondencia entre el significado señalado y la tarea propuesta. Hay que resaltar que de estas 33, seis piden encontrar la regularidad en lugar de comprobarla. Como la tarea del profesor 8 (ver Figura 6).

Un primer resultado es que las respuestas dadas permiten inferir que los profesores tienen dificultades para crear una tarea y señalar el tipo del significado del teorema de Pitágoras que se debe usar para resolverla. Avala esta conclusión el hecho de que, de los 95 participantes, 32 (una tercera parte) dejó la respuesta en blanco, que otros diez, si bien proponen tareas, no especifican ni justifican si la tarea está relacionada con un significado u otro y que 16 no han propuesto ninguna tarea para trabajar uno de los dos significados (15 para el significado aritmético-algebraico y uno para el significado geométrico). Dicho de otra manera,

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470



Observe la imagen ¿Cuál es la distancia que hay entre las dos personas?

Figura 3. *Problema creado por el profesor 13 para el significado aritmético-algébrico*.
Nota: Fuente propia de la investigación.

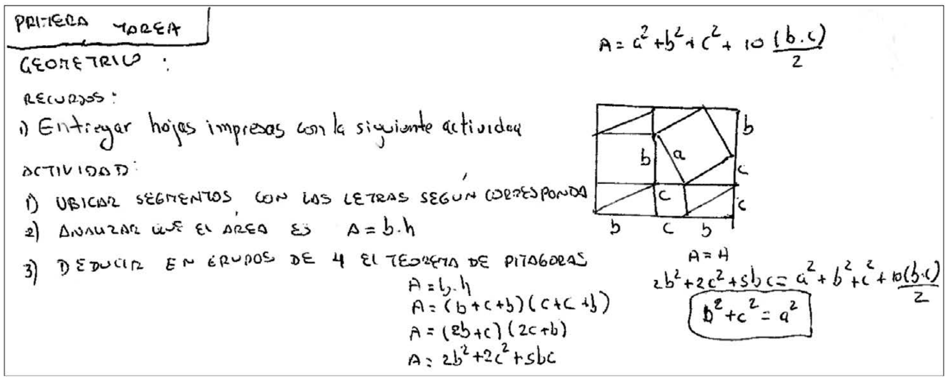


Figura 4. *Problema creado por el profesor 9 para el significado geométrico*.
Nota: Fuente propia de la investigación.

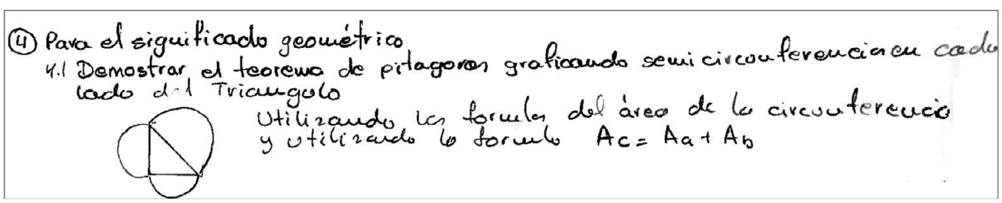
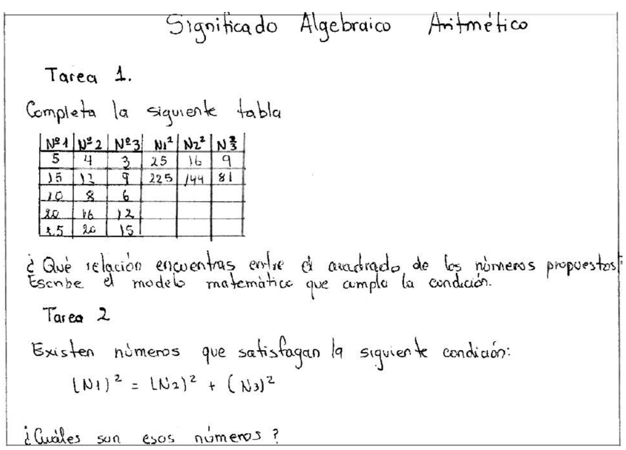


Figura 5. *Problema creado por el profesor 15 para el significado geométrico*.
Nota: Fuente propia de la investigación.


Significado Algebraico Aritmético

Tarea 1.

Completa la siguiente tabla

Nº1	Nº2	Nº3	N1²	N2²	N3²
5	4	3	25	16	9
15	12	9	225	144	81
10	8	6			
20	16	12			
25	20	15			

¿Qué relación encuentras entre el cuadrado de los números propuestos? Escribe el modelo matemático que cumpla la condición.

Tarea 2

Existen números que satisfagan la siguiente condición:

$(N1)^2 = (N2)^2 + (N3)^2$

¿Cuáles son esos números?

Figura 6. *Problema creado por el profesor 8 para el significado aritmético-algébrico*.
Nota: Fuente propia de la investigación.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

más de la mitad del profesorado es incapaz de dar una respuesta completa (sea correcta o incorrecta) a la pregunta. Lo cual, teniendo en cuenta que la pregunta trata sobre el teorema de Pitágoras, que es uno de los contenidos matemáticos, de cierta complejidad, más conocido por personas con una formación básica, resulta muy significativo.

Por una parte, se trata de un resultado esperado y coherente con la información que se tenía sobre el conocimiento y competencias de estos profesores en las otras materias del máster, lo cual, a su vez, está relacionado con la débil formación matemática y didáctica de los profesores ecuatorianos, tal como se documenta (Martínez et al., 2018) en el reporte sobre Ecuador incluido en el informe, coordinado por Yamamoto y Malaspina (2018), sobre la educación matemática en la región andina. Pero, por otra parte, hay que tener en cuenta un aspecto que relativiza la relevancia de esta conclusión, nos referimos a que estas respuestas se dieron en un examen de una asignatura del máster que estaban cursando, donde el tiempo era limitado y esta pregunta era la última del examen. Es plausible que algunos profesores no respondiesen por falta de tiempo o por no considerar que fuese necesario responderla para superar el examen.

Ahora bien, consideramos que este resultado es una evidencia de que el tipo de instrucción realizada no consiguió que los profesores pudiesen crear tareas en las que se tenga que usar un determinado significado del objeto matemático que se pretende enseñar, al menos para la media aritmética y el teorema de Pitágoras. Se trata de un resultado preocupante ya que las orientaciones curriculares de Ecuador conllevan que estos profesores deberían poder presentar a sus alumnos diferentes significados (y conectarlos adecuadamente) de los objetos matemáticos que enseñan.

Un segundo resultado es que el significado geométrico, entendido como una relación de áreas de los cuadrados construidos sobre los lados, es el que los participantes mejor relacionan con la tarea que proponen, ya que hubo 43 tareas propuestas para este significado. Mientras que son menos, 33 tareas, las propuestas para el significado aritmético-algebraico, se trata de tareas relacionadas con la presentación de ternas de números en los que los alumnos debían comprobar o encontrar que un número al cuadrado era igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. Este mejor manejo del significado geométrico por parte de los profesores participantes era, en cierta manera, un resultado esperado ya que, en los libros de texto que ellos usan para explicar el teorema de Pitágoras, no se pone especial énfasis en explicar una visión aritmética-algebraica a partir de ternas de números.

En cuanto al significado geométrico, hay que remarcar que, para un grupo de profesores, basta que los símbolos representen los lados del triángulo para considerar que se usa el significado geométrico del teorema de Pitágoras, a pesar de que la resolución de la tarea parte de una relación entre números o símbolos y el lado que hay que calcular se obtiene por manipulación simbólica.

En relación con el uso explícito o implícito de otros significados del teorema de Pitágoras, se tiene, por una parte, que un profesor muestra, implícitamente, que conoce lo que se podría llamar el significado vectorial del teorema de Pitágoras, ya que utiliza que en la geometría vectorial-analítica este teorema permite relacionar el módulo y las componentes de un vector del plano, pero parece que no lo considera como un significado diferente o autónomo de la interpretación geométrica del teorema.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Por otra parte, en dos casos ha aparecido, implícitamente, una versión generalizada del significado geométrico ya que se usa que el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos (semicírculos en las dos tareas detectadas). La generalización del teorema de Pitágoras para áreas de figuras semejantes es una buena situación para establecer una conexión entre el significado geométrico y el aritmético-algebraico. Ahora bien, no queda claro si realmente los dos profesores reconocen esta generalización del teorema para cualquier figura o bien solo para los semicírculos, ni si son conscientes del potencial de esta generalización para conectar los dos significados.

Conclusiones

La descripción del proceso de enseñanza y aprendizaje realizado, desde la perspectiva del formador que ha impartido el curso, ha permitido que se elabore un discurso sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual se explica los motivos por los cuales se seleccionaron y secuenciaron las tareas propuestas. En este sentido, queremos destacar la pertinencia e importancia del desarrollo de estas investigaciones en la comunidad de educación matemática, ya que se da voz al discurso profesional del profesor. Se trata de una narración temporal en la que se argumentan las acciones y decisiones tomadas.

Por otra parte, el segundo objetivo, relacionado con la pregunta, ¿dado un significado parcial del teorema de Pitágoras fijado previamente, pueden los profesores crear una tarea en la que este significado parcial sea indicado para su resolución?, informa sobre cómo los profesores se apropian de los conocimientos didáctico-matemáticos implementados, ya que se ha evidenciado el aprendizaje logrado respecto a la complejidad del teorema de Pitágoras. Las dificultades observadas en los profesores ecuatorianos para reflexionar sobre la complejidad del teorema de Pitágoras (y más en general, de los objetos matemáticos) es un resultado coherente con la investigación sobre la formación de los profesores en la región andina (Yamamoto y Malaspina, 2018) y, también, con una amplia investigación internacional sobre el conocimiento y las competencias del profesorado de matemáticas, la cual ha evidenciado que los profesores tienen dificultades para interpretar aspectos epistémicos de las tareas y para identificar su potencial educativo (Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016).

Los resultados sobre la complejidad del teorema de Pitágoras (y más en general todo el proceso de instrucción implementado) fueron útiles para retroalimentar el proceso de instrucción de estos profesores en el máster, más allá de comentar sus respuestas con ellos. En particular, fue útil en sus trabajos de fin de máster.

Los profesores que realizaron el máster, a pesar de las dificultados que tuvieron, consideraron interesante la reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su relación con el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos. Dicha consideración coincide con las conclusiones de la investigación de Calle y Breda (2019; 2021; 2022), donde futuros profesores de matemáticas ecuatorianos fueron cuestionados sobre los diferentes significados de algunos objetos matemáticos, y se concluyó que los participantes presentaron, en las tareas que diseñaron, diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra como extra matemáticos, y consideraron importante

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, manifestando que los diferentes significados se deben ir presentando de forma gradual a los alumnos.

Financiamiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Consentimiento informado

Los participantes fueron informados y dieron su consentimiento.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: E. C. 33 %, A. B. 33 % y V. F. 33 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [**A.B**], previa solicitud razonable.

Referencias

Australian Curriculum *Assessment and Reporting Authority. (2012). Australian Curriculum Mathematics*. ACARA. https://www.australiancurriculum.edu.au/

Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema, 31*(59), 1061-1081. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11

Barroso, R. y Gavilán, J. M. (2001). Diversas perspectivas del teorema de Pitágoras. *Epsilon, 50,* 283-251.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *25*, 41-58.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* 1-22. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema. 34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: Una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, *78*(275), 27-49. https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Unpublished PhD Thesis]. Faculty of Education-Simon Fraser University, Canada.

Calle, E. y Breda, A. (2019). Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores. En D. Aguilar, M. Cobos, L. Claudio, E. Campozano (Eds), *La investigación educativa en un mundo en constante transformación* (pp. 29-50). ASEFIE. https://doi.org/10.12795/ie.2018.i95.03

Calle, E. C., Breda, A., & Font, V. (2021). Reflection on the complexity of mathematical items in initial teacher education. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 21, 197-214, 2021. https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801

Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2022). La complejidad de la noción a enseñar en la valoración de la práctica preprofesional de futuros profesores de matemáticas ecuatorianos. J*ournal of Research in Mathematics Education*, 11(3), 218-249. https://doi.org/10.17583/redimat.10986

Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., Castillo-Céspedes, M. J. Vallejos-Meléndez, D. y Picado-Alfaro, M. (2020). ¿Qué modos de uso propone el profesorado de matemáticas en formación inicial para la enseñanza del teorema de Pitágoras en educación secundaria? *Uniciencia, 34*(1), 88-110. https://doi.org/10.15359/ru.34-1.6

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema, 26*(42B), 667-690. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200013

Espinoza, R. F. y Pochulu, M. D. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, *34*(66), 294-313. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a14

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta idoneidad didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Ferreres, S. y Vanegas, Y. M. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 196,* 219-225. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.032

Flores, C. D., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: Un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema*, *31*(57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Font, V., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia*, *10*(2), 1-23. https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Generalitat de Catalunya. (2015). Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria, DOGC núm. 6945 de 28.8.2015. http://dogc.gencat.cat/ca/pdogc_canals_interns/pdogc_resultats_fitxa/?action=fitxa&documentId=701354&language=ca_ES

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Burgos, M. & Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión, 19,* 34-46.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

González, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4 000 años. *SIGMA*, *32*, 103-130.

Gordillo, W., Pino-Fan, L., Font, V. y Ponce-Campuzano, J. (2018). Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y virtualidad, 11*(2), 1- 17. https://doi.org/10.18359/ravi.2983

Hamilton, M. L., Smith, L., & Worthington, K. (2008). Fitting the methodology with the research: An exploration of narrative, self-study and auto-ethnography. *Studying teacher education*, *4*(1), 17-28. https://doi.org/10.1080/17425960801976321

Loomis, E. S. (1968). *The pithagorean proposition*. Washington, D.C.: NCTM.

Malaspina, U. V., Torres, C. y Rubio, N. V. (2019). How to Stimulate In-Service Teachers Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7

Martínez, A. (2000). Teorema de Pitágoras: Originalidad de las demostraciones de E. García.

Martínez, M., Castillo, P., Trelles, C., Calle, E., Ayala, A., Rivadeneira, F. y Auccahuallpa, R. (2018). Report on Mathematics Teacher Preparation in Ecuador. En Y. Yamamoto y U. Malaspina, (Eds.). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges* (pp. 19-45). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_2

Martínez Jara, M., Castillo Domenech, P., Trelles Zambrano, C., Calle Palomeque, E., Ayala Trujillo, A., Rivadeneira Loor, F., & Auccahuallpa Fernández, R. (2018). Report on mathematics teacher preparation in Ecuador. En *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay* (pp. 19-45). Springer.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: MEN.

Ministry of National Education. (2013). Secondary level mathematics curriculum: Grades 9–12. Ankara: Directorate of State Books.

Monje, Y., Seckel, M. J. y Breda, A. (2018). Tratamiento de la inecuación en el currículum y textos escolares chilenos. *Bolema, 32*(61), 480-502. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a09

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2013). Connecting the NCTM process standards and the CCSSM practices. Reston, VA: NCTM.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma, 34*(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources: advances and issues* (pp. 69-88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M. & Font, V. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1231–1256. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Barcelona, España.

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr

DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1
E-ISSN: 2215-3470
CC: BY-NC-ND

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 48(1), 1-27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Torres, C. (2020). Developing teachers' didactic analysis competence by means of a problem-posing strategy and the quality of posed mathematical problems. In K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F. J. García-Peñalvo, J. Lavonen, Lung-Hsiang Wong & Tzu-Hua Wang (Eds.). *Education and Technology in Sciences. First International Congress, CISETC 2019 Arequipa, Peru, December 10–12, 2019. Revised Selected Papers* (pp. 88 - 100). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-45344-2_8

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77 - 120.

Yamamoto, Y., & Malaspina, U. (2018). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97544-3_5

Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, *24*(3), 2175-219. https://doi.org/10.1007/s10639-019-09870-x

UNICIENCIA Vol. 37, N°. 1, pp. 1-23. January-December, 2023 • www.revistas.una.ac.cr/uniciencia • revistauniciencia@una.cr