

REFLEXIÓN SOBRE CÓMO INCORPORAR LA COMPLEJIDAD DE LAS FUNCIONES PARA MEJORAR SU PROCESO DE ENSEÑANZA. UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES EN ACTIVO

REFLECTION ON HOW TO INCORPORATE THE COMPLEXITY OF FUNCTIONS TO IMPROVING TEACHING PROCESS. AN EXPERIENCE WITH ACTIVE TEACHERS

Eulalia Calle ¹, Adriana Breda ²

¹Universidad de Cuenca, ²Universitat de Barcelona

eulalia.calle@ucuenca.edu.ec, adriana.breda@ub.edu

Resumen

Es importante que los docentes tengan conocimientos y competencias didáctico-matemáticas para realizar procesos de instrucción idóneos. En esta línea, un grupo de profesores participó en un curso de formación continua, desarrollando propuestas de mejora para la enseñanza y aprendizaje de las funciones que tuviesen en cuenta su complejidad (pluralidad de significados). El objetivo de este trabajo es analizar estas propuestas, realizadas a partir de la reflexión sobre sus prácticas docentes. Como resultado, por un lado, se observa el interés por la mejora en aspectos como la conexión entre el objeto matemático proporción y el objeto función, la resolución de problemas contextualizados, el uso de tecnología para la representación gráfica de las funciones y, por último, la reflexión sobre la complejidad de la pendiente de una recta. Sin embargo, por otro lado, no se tuvieron en cuenta la conversión de las diferentes formas de representación de una función, sus significados y los problemas que se puedan derivar para su aplicación y comprensión.

Idoneidad Epistémica, complejidad de las Funciones, reflexión y propuesta de mejora.

Abstract

It is important that teachers have didactic-mathematical knowledge and skills to carry out suitable instruction processes. In this line, a group of teachers participated in a continuous training course, developing improvement proposals for the teaching and learning of the functions that took into account their complexity (plurality of meanings). The objective of this work is to analyze these proposals, made from the reflection on their teaching practices, demonstrating the interest in improvement in aspects such as: connection between the proportion mathematical object and the function object, resolution of contextualized problems, use of technology for the graphical representation of the functions and, finally, the reflection on the complexity of the slope of a straight line; however, the following were not taken into account: the conversion of the different forms of representation of a function, their meanings and the problems that may arise for their application and understanding.

Epistemic Suitability, complexity of functions, reflection and proposal for improvement.

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos primordiales en la formación de profesores, es la reflexión sobre su propia práctica, siendo una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza (Godino et al., 2018). Con esta intención, nuevos enfoques teóricos se han centrado en desarrollar herramientas y promover métodos de investigación que ofrecen amplias perspectivas para este fin (Gellert et al., 2013). El modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino et al., 2007, 2017), es una teoría que considera necesario que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la

complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida ésta como pluralidad de significados) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción, propiciando la reflexión de la complejidad de los objetos matemáticos. En esta virtud, el presente estudio busca analizar propuestas de mejora a la práctica docente realizadas por los profesores de los niveles de Educación General Básica Superior y el Bachillerato y sus reflexiones en torno a la complejidad del objeto matemático funciones.

MARCO TEÓRICO

Los Criterios de Idoneidad Didáctica, propuesto por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticas (EOS) (Font et al., 2010, 2013; Godino et al., 2007) es una herramienta que puede ser muy útil no sólo para organizar y analizar las prácticas discursivas del profesorado sobre cómo debería ser el proceso de instrucción, sino también para valorar las prácticas que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado.

El EOS considera los siguientes criterios (Godino et al., 2007): 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son buenas matemáticas. 2) Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar. 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos. 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5) Idoneidad afectiva, para valorar la implicación (intereses, motivaciones, etc.) de los alumnos durante el proceso de instrucción. 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La Idoneidad Epistémica a su vez, se desagrega en componentes e indicadores para hacerla operativa y valorar el diseño y la implementación de secuencias didácticas, siendo uno de los componentes, el de Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos (entendida como pluralidad de significados parciales) y que se exponen en la siguiente tabla (Breda et al., 2018; Font et al., 2017; Giacomone et al., 2018):

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. 2. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. 3. Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? 4. Para uno o varios significados parciales, seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Tabla 1: Componente de Representatividad de la complejidad de la Idoneidad Epistémica.

La complejidad de las funciones ha generado gran interés entre los expertos en la didáctica de las matemáticas (Pino-Fan, et al., 2011; Parra-Urrea, 2015; Biehler, 2005), motivado por la diversidad de significados, que vamos obteniendo a medida que abordamos el tema de funciones. Pino-Fan, et al. (2019) proponen seis significados parciales que deben ser considerados en las prácticas docentes: *la función como correspondencia* entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar; *la función como relación entre magnitudes variables*, dependientes e independientes; *la función como representación gráfica*, expresada como curva; *la función como expresión analítica*, obtenidas mediante operaciones algebraicas, potencias, raíces, exponenciales, logarítmicas y trascendentes; *la función como correspondencia arbitraria*, que podrían involucrar a las relaciones discontinuas; *la función a partir de la teoría de conjuntos*, en donde a cada elemento de un conjunto X , se le hace corresponder un único elemento de otro conjunto Y . Estos significados parciales dan la pauta para resolver un determinado grupo de problemas, lo que justifica la importancia de tener en cuenta la representatividad de la complejidad de las funciones a fin de mejorar los aprendizajes.

METODOLOGÍA

Se trata de una metodología de tipo cualitativa en donde se analizan tres propuestas de mejora para la práctica docente, en el tema de Funciones. Los docentes que realizan estas propuestas son profesores en activo de instituciones públicas y privadas del Ecuador, quienes se encuentran participando del programa de maestría de formación de profesores de matemáticas en el nivel de Educación General Superior (EGB) y el Bachillerato General Unificado (BGU). El programa en mención tenía como enfoque la formación continua y profesionalización docente con una duración de dos años, divididos en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos ECTS) que incluye asignaturas de psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de prácticum y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica. Este grupo de docentes debían hacer propuestas educativas (TFM) en donde debían demostrar la mejora de la práctica docente, con el tema de Funciones. De este grupo de TFM, se han seleccionado de manera aleatoria, tres trabajos con la finalidad de analizar, mediante el constructo de *Representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar* del EOS, la propuesta planteada y su consecuente reflexión.

Los trabajos seleccionados corresponden a dos profesores del nivel décimo de Educación General Básica Superior y un profesor del primero de Bachillerato General Unificado. De acuerdo con el currículo ecuatoriano, el tema de funciones inicia su estudio en el décimo año de EGB (jóvenes de 14 años, aproximadamente), en donde se centran las bases, mediante el desarrollo de la destreza: Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes. En la continuación del tema funciones, el currículo del BGU (estudiantes de 15 años, aproximadamente), apunta las siguientes destrezas a ser desarrolladas: Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC. Los trabajos seleccionados, para el análisis, contemplan la planificación de una unidad didáctica con actividades que buscan desarrollar estas destrezas. Las propuestas seleccionadas para el análisis se resumen en la siguiente tabla:


Propuesta 1	Diseño de una Unidad Didáctica Funciones Lineales y Afines para Décimo Año EGB
Propuesta 2	Diseño de la Unidad Didáctica “Función Lineal con GeoGebra” para Décimo Año EGB
Propuesta 3	Diseño de la Unidad Didáctica “Funciones Reales y Racionales” para Primer Año de BGU

Tabla 2: Propuestas de Mejora de la Práctica Docente.

A modo de ejemplo, se presenta un extracto de la propuesta 2, en donde el docente expone y realiza la reflexión de su práctica:

Figura 1.

Extracto tomado de la Propuestas de Mejora 2.



2018

UNIVERSITAT DE BARCELONA

UNAE

Ministerio de Educación

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL ECUADOR
UNIVERSITAT DE BARCELONA
MÀSTER DE FORMACIÓ DEL PROFESORADO DE SECUNDARIA ECUADOR

TRABAJO FINAL DE MÁSTER:
DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA "FUNCIÓN LINEAL CON GEOGEBRA"

El tema **función lineal y afín** está considerado dentro del bloque de álgebra y geometría denominado Funciones Lineales para décimo año de educación general básica según la última reforma curricular, el cual está conformado por los siguientes temas:

1. Funciones lineal y afín
Función lineal / Función afín / Características y gráficas
2. Pendiente de una recta
3. Ecuación de la recta
 - Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto
 - Ecuación de la recta conociendo dos puntos
4. Relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendicular
5. Matema -TICS mediante el uso de GeoGebra.

3.4 Resultados de aprendizaje

Los resultados de aprendizaje constituyen las habilidades medibles y conocimientos que los estudiantes logran desarrollar después de la implementación, en función de los objetivos planteados y las destrezas, se espera que los estudiantes del décimo año de educación general básica paralelo "E" de la Unidad Educativa Nicolás Infante Díaz, sean capaces de:

- Diferenciar una función lineal de una afín
- Comprender el significado de la pendiente y punto de intersección de la ordenada.
- Analizar las diferentes formas de representación de una función lineal/afín.
- Relacionar una función lineal con problemas de proporcionalidad.
- Resolver problemas relacionados con funciones lineal/afín.
- Usar GeoGebra para la resolver diversos planteamientos sobre funciones lineales y afín.
- Modela y representa problemas del diario vivir mediante la función lineal/afín.
- Soluciona situaciones de su entorno mediante funciones lineales/afín.

FUNCIÓN AFÍN: es aquella cuya expresión algebraica es $y = f(x) = mx + b$ (MINISTERIO DE EDUCACION DEL ECUADOR, 2016).

Características

- Su gráfica en el plano cartesiano es una línea recta que no pasa por el origen.
- El número m se llama constante de proporcionalidad. Si $m > 0$, la función es creciente y si $m < 0$, la función es decreciente.
- Es una función continua.

DIRERENCIAS

	Función Lineal	Función Afín
Proporcionalidad	Variables directamente proporcionales	Variables indirectamente proporcionales
Gráfica	Pasa por el origen	No pasa por el origen
Expresión algebraica	$Y = mx$	$Y = mx + b$
Ordenada en el origen	$B = 0$	$B =$ al punto cortante con el eje y

Representación gráfica, analítica de la función: Respecto a la representación de la función, de la expresión algebraica a la gráfica no se detectan mayores deficiencias, pero de la forma gráfica a la expresión algebraica se observó que el 23% presentaron dificultad para hacerlo; más aún, al enunciar la expresión algebraica de un contexto extra matemático el 35 % no lograron realizarlo.

Aplicación de conceptos en problemas matemáticos. En relación a los conceptos y la aplicación de estos en contextos extra matemáticos; el 89% de los estudiantes comprenden e identifican lo que es una función afín y lineal; sin embargo, les resulta difícil para 8 de ellos poder identificar estos temas en planteamientos de la vida cotidiana, esto se puede evidenciar en una evaluación que se receptó después de la implementación (Anexo 6).

Idoneidad epistémica: En la implementación se desarrolló el contenido referente a funciones lineales con la utilización de GeoGebra, abordando el tema desde una perspectiva constructivista, partiendo del concepto de funciones, características para introducir el tema funciones lineal y afín, pendiente de la recta, rectas paralelas, perpendiculares y por último ecuación de la recta. Los criterios que se debieron considerar en esta valoración fueron siguientes:

- En la realización de la práctica no se cometieron errores, además no se incurrió en ambigüedades de trascendencia que pudieron haber perjudicado el proceso de aprendizaje de los estudiantes.
- La metodología constructivista permitió que las actividades diseñadas dieran paso a la riqueza de procesos, para que los estudiantes pudieran resolver las actividades se debió implementar la institucionalización correspondiente al tema.
- En relación al desarrollo de las matemáticas se abordaron el estudio de la pendiente desde la perspectiva geométrica, algebraica y funcional, sin embargo, se dejó de lado el abordaje de la pendiente desde la perspectiva trigonométrica.

Para el análisis de los datos obtenidos, se han revisado las propuestas de mejora de la práctica docente y en concreto, las reflexiones que realizan los profesores a la luz de los Criterios de Idoneidad Epistémica y su componente de representatividad de la complejidad. Estas reflexiones constituyen una parte del trabajo de fin de máster (TFM), del programa de maestría de formación de profesores de matemáticas. El análisis de los resultados se presenta en el siguiente acápite.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Atendiendo a los indicadores del componente de *Representatividad de la complejidad de la noción que se quiere enseñar* de la Idoneidad Epistémica, podemos afirmar que en la propuesta 1, el docente aborda los contenidos previstos para desarrollar las destreza y objetivos del currículo ecuatoriano; enmarca a la función en la historia de las matemáticas y se asegura de diferenciar los conceptos de relación y de función (mediante un vídeo). Si bien, el maestro inicia la clase con problemas de contexto (relación entre magnitudes), en donde se pide a los estudiantes que construyan una tabla con el volumen de la arena que obtienen en cada tiempo que transcurre, pidiendo que mencionen las características de una función lineal; no se puede ver un paso razonable entre la relación de magnitudes y la de variables. Más bien el docente va directamente a las variables y de ahí a las gráficas de las funciones que obtiene utilizando *software* matemático y pide realizar el análisis de las funciones, definiendo los intervalos de crecimiento o decrecimiento, las simetrías de la función y la paridad. El docente justifica la mejora de su práctica, utilizando recursos como geoplano o *GeoGebra*. Finalmente, no hay reflexión epistémica (Representatividad de la complejidad) ya que no se mencionan diferentes significados de la función, ni siquiera las diferentes formas de representar las funciones.

En la propuesta 2, el docente aborda de igual manera los contenidos planteados en el currículo, dando importancia a tareas que relacionan la función lineal con problemas de proporcionalidad y trabajando en la representación de una función: de una expresión algebraica a la gráfica; indicando que no detecta mayores deficiencias pero que hacerlo de la forma gráfica a la expresión algebraica, los estudiantes presentaron dificultad “más aún, al enunciar la expresión algebraica de un contexto extra matemático, un alto porcentaje no logran realizarlo”. Visibilizando que, en esta propuesta, al menos se abordan dos formas de representar una función. El docente justifica su propuesta indicando que contempla situaciones tomadas de contextos extra matemáticos que ayudan al proceso de enseñanza-aprendizaje; presentando problemas contextualizados y reforzando el tema, mediante el uso de *GeoGebra*. En este marco, el docente realiza una reflexión epistémica cuando menciona que “se han abordado varios significados de pendiente: geométrica, algebraica y funcional, sin trabajar el significado trigonométrico”.

En la propuesta 3, se evidencian contenidos abordados en el currículo ecuatoriano y que el profesor explica a través del planteamiento de un problema, lo que es la proporcionalidad y guía a los estudiantes en búsqueda de la gráfica que represente la función algebraica del enunciado del problema. Lo importante de la propuesta es que el docente parte de un problema de contexto, elabora una tabla de valores relacionado a la proporcionalidad, para luego establecer la expresión algebraica y graficar; termina reforzando los problemas, mediante el uso de *GeoGebra*. No se expone la manera de pasar de una relación entre magnitudes, a la relación entre variables. El profesor justifica su propuesta indicando que se ha preocupado por valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son “buenas matemáticas”, planificando las sesiones para evitar en lo posible que surjan errores o ambigüedades al momento de explicar al estudiante y que creen confusión. Sin embargo, al analizar la práctica, el docente considera que carece de algunos indicadores en la riqueza de procesos que deben ser experimentados en el aula de clases, como son una mayor cantidad de ejercicios que permitan modelizar, resolver problemas y promover la argumentación por parte de los estudiantes. Finalmente, se evidencia una reflexión epistémica: El profesor indica la importancia de fortalecer la representatividad del lenguaje matemático mediante el uso de actividades integradas para que los

estudiantes puedan pasar de una expresión verbal, a la gráfica, simbólica, etc.; aunque en el desarrollo de estas actividades, no se demuestre este proceso.

CONCLUSIONES

Los profesores participantes de este estudio, están conscientes de la importancia de enseñar funciones a sus estudiantes e inician sus actividades, planificando situaciones de contexto y apoyándose en temas de proporcionalidad entre las magnitudes que intervienen en el problema; sin embargo, pasan directamente a consignar los valores obtenidos de manera tabular, en el sistema de coordenadas para obtener la gráfica y tratar de analizar el comportamiento de la función, coincidiendo con lo mencionado por Font y Godino (2006) cuándo argumentan que el concepto de función se presenta de una manera descontextualizada y las situaciones problemas, son ejemplos que sirven para ilustrar la definición de función; es decir, las situaciones problema sólo buscan concretar el concepto de función, en ningún caso sirven para que se construya dicho concepto a partir de ellas. Además, en ninguna de las tres propuestas se contemplan las conversiones - tan importantes por el nivel de abstracción que los estudiantes van alcanzando - entre diferentes formas de representación y, en los pocos casos que esto sucede, siempre es la conversión de expresión simbólica a la gráfica; o más específicamente, de la expresión algebraica a la gráfica, como en la propuesta 2, en donde el docente también trabaja con los diferentes significados de pendiente, para justificar de alguna manera, la complejidad de los objetos matemáticos.

En las tres propuestas analizadas, se puede evidenciar el limitado trabajo realizado para enseñar las diferentes representaciones de la noción de función: verbal, gráfica, simbólica, tabular e icónica; considerando que las representaciones deben ser interpretadas y decodificadas por el estudiante, con la finalidad de abordar y comprender la tarea (Pino-Fan et al., 2019). La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología; la representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos; la expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal, se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres (Pimm, 1990). Situación que explica, además, la poca capacidad de los docentes para proponer una muestra representativa de problemas, que aporten a la comprensión de uno o varios significados parciales del objeto matemático función, peor contemplar el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.), tratamientos y conversiones entre los mismos; como propone el EOS.

Las propuestas desarrolladas por los profesores de los niveles de Educación General Básica Superior y el Bachillerato, demuestran el interés por la mejora de la práctica docente considerando los siguientes aspectos: conexión entre el objeto matemático proporción y el objeto función, resolución de problemas contextualizados, uso de tecnología para la representación gráfica de las funciones y, por último, la reflexión sobre la complejidad de la pendiente de una recta. Sin embargo, no se tuvieron en cuenta otros aspectos tales como: la conversión de las diferentes formas de representación de una función, sus significados y los problemas que se puedan derivar para su aplicación y comprensión. En esta virtud, se torna necesario continuar con la formación de profesores en activo, en donde la complejidad dé cuenta de que en cada una de estas “maneras diferentes” de entenderla, se utilizan propiedades, representaciones, definiciones y argumentos diversos y se resuelven diferentes tipos de problema.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 1(1), 40-55.

- Biehler, R. (2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: the Concept of Function as an Example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*, 61-81. Dordrecht: Kluwer.
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(60). <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Font, M. V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1).
- Font, V., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 10(2). <https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981>
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1). <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1). <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Gellert, U., Hernández, R. B. y Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. In *Third International Handbook of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_11
- Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, 44. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2). <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 31(57). <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 13. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224>
- Parra-Urrea, Y. E. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. [Tesis de magíster, Universidad de Los Lagos] http://edumat.ulagos.cl/portal/wp-content/uploads/2018/09/TESIS-MAGI%CC%81STER_YO_CELYN-PARRA.pdf
- Pimm, D. (1990). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 21(1). <https://doi.org/10.1007/bf00311018>
- Pino-Fan, L. R.; Godino, J. D. y Font Moll, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L. R., Parra-Urrea, Y. E. y Castro-Gordillo, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación En Educación*, 11(23). <https://doi.org/10.11144/javeriana.m11-23.sfpc>