



**UNIVERSIDAD DE CUENCA
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL**

**APLICACIÓN DEL METODO DE ELEMENTOS
FINITOS AL FENOMENO DE PÉRDIDA DE
ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS**

Tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Civil

Autor

Juan Pablo Zárate Falconí

Director

Ing. Ángel Pino

Asesor

Ing. Marcelo Tamayo

Cuenca-Ecuador

2010

RESPONSABILIDAD

Los conceptos, afirmaciones, conclusiones y recomendaciones, emitidos en este informe son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Juan Pablo Zárate Falconí

DEDICATORIA

El presente trabajo va dedicado especialmente a mis padres Gustavo y Martha quienes han sido un apoyo incondicional a lo largo de mi carrera y en cada etapa de mi vida siendo un claro ejemplo de honestidad, sacrificio y fortaleza.

A mis hermanos Patricio, Diego y Mayra, así como a mis sobrinos por el apoyo y el cariño brindado día a día.

Quisiera dedicar este trabajo a cada una de las personas que en diferentes etapas de mi vida han mostrado su interés, apoyo y lealtad incondicional, con mucho amor dedico esta tesis a esa persona que siempre deposito su confianza en mi , y me enseñó que la inteligencia no solo se encuentra en la mente sino también en el corazón.

Para ti Fer.

Juan Pablo Z.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar quiero agradecer a Dios por colocarme en un hogar lleno de amor y comprensión, agradezco a mis padres por el sacrificio realizado a lo largo de mi vida, por el apoyo recibido y la confianza brindada en cada uno de los momentos trascendentales que he vivido, y gracias también por ser una guía y un ejemplo de sabiduría, humildad y sacrificio.

Quiero expresar gratitud a mis profesores por los conocimientos brindados día a día, por las experiencias y criterios compartidos que me han enseñado lo importante de nuestra profesión, y los beneficios que brinda a nuestra sociedad.

Especialmente quiero agradecer al Ingeniero Ángel Pino y dedicar este trabajo a la memoria del Ingeniero Bolívar Peñafiel, quienes depositaron su confianza y el apoyo en mi persona.

Juan Pablo Z.

ÍNDICE

CONTENIDO	PÁGINA
Responsabilidad.....	II
Dedicatoria.....	III
Agradecimiento.....	IV
Índice.....	V
INTRODUCCION.....	VII
Capítulo 1. Análisis de Primer Orden de Estructuras Reticulares.....	1
1.1 – Análisis de Pórticos Planos.....	1
1.1.1 – Matriz Rigidez de una barra.....	1
1.1.2 – Matriz Rigidez Modificada.....	1
1.1.2.1 – Ejemplo Ilustrativo.....	3
1.1.3 – Matriz Rigidez de toda la Estructura.....	4
1.1.3.1 – Ejemplo Ilustrativo.....	4
1.1.4 – Transformación de Coordenadas.....	6
1.1.5 – Momentos de Extremo Fijo.....	7
1.1.5.1 – Ejemplo Ilustrativo.....	9
1.1.5.2 - Casos generales.....	12
1.1.6 – Ejemplo Ilustrativo. Análisis de un Pórtico Plano.....	21
1.1.6.1-Cálculo de la matriz de rigidez elástica de cada barra.....	22
1.1.6.2-Cálculo de la matriz de rotación de cada barra.....	24
1.1.6.3-Cálculo de la matriz de rigidez de cada barra en ejes generales....	24
1.1.6.4-Matriz rigidez de toda la estructura en ejes generales.....	25
1.1.6.5-Formacion del vector P.....	30
1.1.6.6-Formacion del vector Z.....	30
1.1.6.7-Formacion del vector P_e	31
1.1.6.8-Planteamiento de la Ecuación $k\tilde{Z} = \tilde{P} - \tilde{P}_E$	34
1.1.6.9-Desplazamientos en los extremos de las barras en ejes locales.....	36
1.1.6.10-Fuerzas Interiores en los extremos de las barras en ejes locales...	36

Capítulo 2. Análisis de Segundo Orden de Estructuras Reticulares. Pérdida de Estabilidad.....	37
2.1 – Introducción al Análisis de Segundo Orden.....	37
2.2 – Pórtico Plano. Estudio de la Barra Plana.....	38
2.2.1- Deducción de la Matriz Geométrica.....	38
2.2.2-Ejemplo Ilustrativo.....	51
2.2.3-Calculo de la Matriz de Rigidez Geométrica de cada Barra.....	52
2.2.4-Suma de la Rigidez Elástica y la Geométrica de cada Barra.....	54
2.3 – Obtención de la Carga Crítica para Pórticos.....	58
2.3.1 – Aspectos Generales.....	59
2.3.2 – Ejemplo Ilustrativo. Plano.....	60
2.3.2.1-Calculo de las matrices de Rigidez Elástica y Geométrica de cada barra...	61
2.3.2.2-Matriz de rigidez elástica.....	61
2.3.2.3- Matriz de Rigidez Geométrica.....	62
2.3.2.4-Cálculo de la matriz de rotación de cada barra.....	63
2.3.2.5-Suma de la rigidez elástica y la geométrica de cada barra.....	63
2.3.2.6-Obtencion de la matriz de rigidez de toda la estructura.....	64
2.3.2.7-Obtencion de la matriz de rigidez reducida de toda la estructura.....	66
2.3.2.8-Hallar el determinante de k reducida.....	66
Capítulo 3. Solución del Análisis de Estructuras Planas mediante un Programa de Computación.....	68
3.1 – Introducción.....	68
3.2 – Secuencia de pasos.....	69
3.3 – Programa de Análisis Estructural.....	70
3.3.1 – Manual para su Uso.....	70
3.3.2 – Especificaciones de la Aplicación.....	74
3.3.3 – Programa para la Obtención de la Carga Crítica de una estructura Plana.....	75
4. Observaciones y conclusiones.....	79
5. Bibliografía.....	81

Introducción.

Reseña Histórica:

Con anterioridad al año 1900, el trabajo de los científicos en la disciplina del análisis estructural, se dirigió fundamentalmente hacia el cálculo de las fuerzas interiores, en elementos de armaduras metálicas, tanto isostáticas como hiperestáticas.

Surge el método de las fuerzas y los pórticos comienzan a calcularse por este método o por métodos aproximados.

No es hasta el año 1914, en que aparece en Alemania, formulado por Axel Bendixen el llamado “Slope – Deflection Method”, y se empieza a enfocar el método de los desplazamientos, en elementos lineales, tales como armaduras y pórticos, donde las ecuaciones de equilibrio, son en términos de fuerzas, se parte a priori de una distribución de tensiones, ya sea constante (armaduras) o lineales (pórticos), originándose un sistema de ecuaciones algebraicas.

Dado el enfoque escalar del método, cuando se desea abordar el análisis de estructuras continuas, el problema pasaba a ser mucho más complejo, pues había que recurrir a un análisis diferencial del fenómeno y en las ecuaciones de equilibrio, en lugar de aparecer fuerzas aparecen tensiones, dando lugar a ecuaciones diferenciales.

Con el surgimiento de la computación, aparece el método de los desplazamientos y el de las fuerzas en su enfoque matricial y de esta forma desaparece, la incongruencia existente en el enfoque de estructuras reticulares y continuas, ya que una estructura en vez de considerarse como un continuo de elementos diferenciales, se toma idealmente, como un conjunto de un cierto número de piezas finitas, pudiéndose abordar:

- ✓ Cerchas, vigas, arcos y pórticos.
- ✓ Placas y cáscaras con forma y carga arbitraria.
- ✓ Recipientes a presión.
- ✓ Torsión en barras de sección irregular.
- ✓ Análisis dinámico de pórticos.
- ✓ Análisis de estabilidad en pórticos.
- ✓ etc.

La formulación que se desarrolla, se ajusta, a las hipótesis clásicas de la resistencia de materiales, o sea:

- ✓ Proporcionalidad entre cargas y desplazamientos.
- ✓ Principio de superposición.
- ✓ Principio de las deformaciones pequeñas.

En las últimas décadas el desarrollo de los ordenadores ha estimulado sobremanera el trabajo de investigación en muchas ramas de la matemática. La mayor parte de esta actividad ha estado naturalmente relacionada con el desarrollo de los procedimientos numéricos apropiados para el uso de estos, y en el caso del análisis de estructuras ha conducido al desarrollo de métodos que utilizan las ideas del álgebra matricial.

El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos de cálculo de una forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de las estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean oscurecidos por operaciones de cálculo, por un lado, o diferencias físicas entre estructuras, por otro. Desde el punto de vista práctico, proporciona un sistema apropiado de análisis de las estructuras y determina una base muy conveniente para el desarrollo de programas de computación.

En contraste con estas ventajas, debe admitirse que los métodos matriciales se caracterizan por una gran cantidad de cálculos sistemáticos, y su valor en el cálculo práctico de estructuras se basa en la adecuación de los ordenadores para llevar a cabo el trabajo numérico. Se desprende de esto que el principal campo de aplicación está en el cálculo de grandes y complejas estructuras, en las que los métodos manuales tradicionales requieren una dosis excesiva de esfuerzo humano. En problemas simples, en los que los métodos existentes son plenamente satisfactorios, se gana muy poco con un tratamiento matricial.

Aunque los métodos matriciales son de general aplicación, sus características esenciales se demuestran fácilmente en la mayoría de los casos por su aplicación a tipos particulares de estructuras en ingeniería.

Por estructuras reticulares se entenderá aquellas que pueden ser esquemáticamente representadas por una serie de líneas (correspondientes a las barras), que se cruzan en puntos (correspondientes a los nudos). Así se considerarán las estructuras formadas por piezas como por ejemplo, las vigas, soportes, barras y tensores, no así las compuestas tal es el caso de las placas o láminas. Aunque se puede argumentar que el análisis completo de una estructura lleva consigo la determinación de los esfuerzos y movimientos en cualquiera de sus puntos, en el caso de las estructuras reticulares este interés se centra fundamentalmente en los movimientos de los nudos así como las solicitaciones en los elementos que concurren en estos. La razón de esto estriba en que el estado completo tensional y deformacional de cada elemento de una estructura lineal puede determinarse completamente si son conocidos los esfuerzos (fuerzas y momentos) que actúan en sus extremos. Una vez que estos han sido hallados, el cálculo detallado de las condiciones de puntos intermedios de un elemento depende exclusivamente de las características del mismo, y no de la posición que ocupa en la estructura.

En general se supondrá que un cálculo ha sido concluido cuando los movimientos de los nudos son conocidos y las fuerzas y los momentos en los extremos de las barras han sido determinados. Excepto en las estructuras más simples, los valores de los esfuerzos y movimientos no pueden hallarse exclusivamente sustituyendo números en fórmulas algebraicas conocidas. Se requieren cálculos más complejos, y en muchos casos el ingeniero se encuentra con una amplia gama de

posibles procedimientos. La elección del método a seguir está normalmente condicionada en parte por el grado de aproximación requerido y, en parte, por su práctica y preferencia.

Cuando se comparan métodos que son igualmente precisos, la elección se basa en dos consideraciones; el trabajo numérico que llevan consigo y la facilidad con que pueden detectarse y rectificarse los posibles errores. En general se da preferencia a un método que pueda hacer uso de la experiencia adquirida en el análisis previo de estructuras semejantes, especialmente si dicho método permite emplear la capacidad de juicio ingenieril para efectuar aproximaciones y reducir pasos intermedios.

El conjunto de instrucciones se denomina programa y el trabajo de preparación es conocido como un conjunto de pasos condicionados a operar con un conjunto fijo de números (esto conduce al ordenador a efectuar las mismas operaciones cada vez que se empleara), donde los números que forman el material característico de cálculo pueden ser diferente en cada ocasión. Por lo anterior, si existe un programa para un determinado proceso de cálculo, todos los problemas para los que dicho cálculo proporciona los medios para su solución pueden considerarse “resueltos”.

Decir en este sentido, que existe un solución, significa considerablemente más que la mera existencia de una teoría matemática o una teoría numérica, significa en efecto que cualquier problema cubierto por el programa puede ser resuelto completamente en términos numéricos introduciendo simplemente los resultados del problema, junto con el programa, en el ordenador. Los resultados del problema serán correctos, aunque quien produjo el problema sea ignorante del método matemático utilizado en el programa, es decir, que todo el proceso de análisis se reduce a una operación rutinaria de relleno de datos.

El hecho de que los métodos matriciales están ligados con los ordenadores y que se emplee en los mismos una notación no familiar a algunos ingenieros ha llevado a la creencia de que incluyen nuevos y difíciles conceptos matemáticos y estructurales. Esto no es cierto. Un conocimiento de las operaciones básicas del álgebra matricial es todo cuanto se requiere, y los únicos principios estructurales necesarios son los elementos tratados en todos los textos de estructuras. De hecho, los métodos matriciales, tales como los que serán tratados en este curso, están mucho más directamente vinculados con ideas de hombres como Maxwell, Mohr y Muller-Breslau, que con muchos de los procedimientos empleados hoy día en el cálculo manual de estructuras.

Los métodos clásicos del análisis estructural, desarrollados en las postrimerías del siglo XIX, tienen las cualidades de la generalidad, simplicidad lógica y elegancia matemática. Desgraciadamente, conducían a menudo a cálculos muy laboriosos cuando se aplicaban a los casos prácticos, y en aquella época, en la que incluso las máquinas de calcular eran raras, estos ingenieros consagraron gran parte de su esfuerzo a reducir el número de cálculos precisos. Muchas técnicas ingeniosas de gran valor práctico fueron apareciendo, pero la mayor parte de las mismas eran solamente aplicables a tipos determinados de estructuras, e inevitablemente el incremento en el número de métodos superficialmente diferentes llevaron a oscurecer la simplicidad de las ideas fundamentales, de las que originalmente todos ellos provenían.

La primera objeción a los primeros métodos de análisis fue, que los mismos conducían a sistemas con gran número de ecuaciones lineales, difíciles de resolver manualmente. Con los ordenadores, capaces de realizar el trabajo numérico, esta objeción no tuvo ya la misma fuerza, mientras que las ventajas de la generalidad de los métodos permanecen. Esto explica por qué, los métodos matriciales deben en su tratamiento básico de las estructuras más al siglo XIX que al siglo XX, sin embargo es en este último a partir de la década del 50 donde estos toman un poderoso desarrollo con el surgimiento y desarrollo de los nuevos y modernos a la par de poderosos equipos de cómputo.

Es en esta primera parte introductoria del curso en que debe señalarse una diferencia fundamental que usualmente tiende a confundirse, y es lo relativo al concepto de **análisis matricial** y el concepto de **análisis escalar con matrices**. El primero brinda un procedimiento de análisis sistemático en el cual un determinado problema es totalmente programado y abordado por el sistema o conjunto de técnicas desarrolladas, así como aplicado a cualquier tipo de estructura y número de nudos y elementos. El segundo efectúa el análisis por los métodos clásicos de análisis escalar y resuelve los sistemas de ecuaciones que en estos surgen mediante conjunto de matrices, utilizando también en ocasiones los ordenadores.

Fundamentalmente en el análisis matricial existen dos métodos: **el método de las fuerzas y el método de los desplazamientos**

CAPITULO 1

ANÁLISIS DE PRIMER ORDEN DE ESTRUCTURAS RETICULARES. ANÁLISIS LINEAL

1.1 – Análisis de Pórticos Planos.

1.1.1 – Matriz Rigidez de una barra.

La Matriz Rigidez Elástica de la barra plana empotrada-empotrada teniendo en cuenta el efecto del cortante es:

$$\bar{K}_{Ei} = \frac{1}{(1+\Phi)} \begin{bmatrix} \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & \frac{(4+\Phi)EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & \frac{(2-\Phi)EIz}{L} \\ -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & \frac{12EIz}{L^3} & -\frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & \frac{(2-\Phi)EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & \frac{(4+\Phi)EIz}{L} \end{bmatrix} \quad (1.1.1.1)$$

1.1.2 – Matriz Rigidez Modificada.

En las estructuras generalmente se presentan barras de diferentes condiciones de sujeción en los extremos, dando esto lugar, a que exista la necesidad de modificar la matriz rigidez de la barra empotrada-empotrada cuando la barra a estudiar tenga diferentes condiciones de apoyo; es decir que a una barra con cualquier condición de borde se le puede obtener su matriz de rigidez haciéndole determinadas operaciones a la matriz de rigidez que le correspondería si fuera empotrada-empotrada.

Haciendo referencia en la barra plana, ésta posee tres grados de libertad en el origen y tres grados de libertad en el destino; la barra espacial posee seis grados de libertad en el origen y seis grados de libertad en el destino.

Utilizando la siguiente nomenclatura para la barra plana:

D₁: Indica que el grado de libertad horizontal en el origen no está impedido.

D₂: Indica que el grado de libertad vertical en el origen no está impedido.

D₃: Indica que el grado de libertad de giro en el origen no está impedido.

D₄: Indica que el grado de libertad horizontal en el destino no está impedido.

D₅: Indica que el grado de libertad vertical en el destino no está impedido.

D₆: Indica que el grado de libertad de giro en el destino no está impedido.

Se pueden presentar los siguientes casos en el plano:

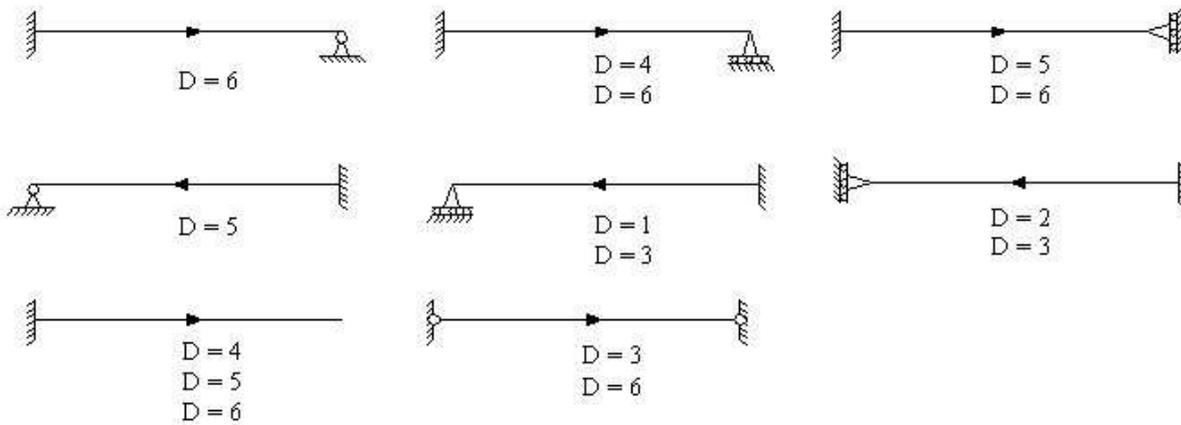


Fig. 1.1

Utilizando la siguiente nomenclatura para la barra espacial:

- D_1 : Indica que el grado de libertad horizontal "x" en el origen no está impedido.
- D_2 : Indica que el grado de libertad vertical "y" en el origen no está impedido.
- D_3 : Indica que el grado de libertad perpendicular "z" en el origen no está impedido.
- D_4 : Indica que el grado de libertad de giro "x" en el origen no está impedido.
- D_5 : Indica que el grado de libertad de giro "y" en el origen no está impedido.
- D_6 : Indica que el grado de libertad de giro "z" en el origen no está impedido.
- D_7 : Indica que el grado de libertad horizontal "x" en el destino no está impedido.
- D_8 : Indica que el grado de libertad vertical "y" en el destino no está impedido.
- D_9 : Indica que el grado de libertad perpendicular "z" en el destino no está impedido.
- D_{10} : Indica que el grado de libertad de giro "x" en el destino no está impedido.
- D_{11} : Indica que el grado de libertad de giro "y" en el destino no está impedido.
- D_{12} : Indica que el grado de libertad de giro "z" en el destino no está impedido.

Pueden presentarse un gran número de casos en el espacio por lo que no es de importante mostrarlos sino que se comprenda el concepto de explicado y que se pueda obtener la rigidez de una barra sea plana o espacial a partir de su barra correspondiente empotrada-empotrada y del valor de la discontinuidad "D".

A continuación se abordará la forma de obtener la rigidez automáticamente de cualquier tipo barra a partir de la rigidez que le correspondería a dicha barra si fuera empotrada-empotrada.

Este procedimiento consiste en:

Dada la matriz rigidez de la barra empotrada-empotrada correspondiente a la barra analizada, considerar la fila "D" de la misma como pivote, para por medio de transformaciones elementales eliminar la columna "D", una vez que todos los términos de la columna "D" (excepto t_{DD}), tomaron valor cero, se sustituye la fila "D" por los ceros y queda de esta forma definida la rigidez modificada.

1.1.2.1 – Ejemplo Ilustrativo:

Obtener de forma automática la matriz rigidez de la siguiente barra volada-empotrada:

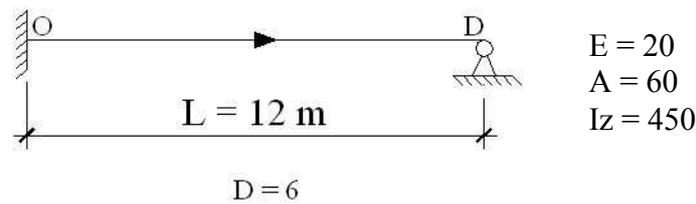


Fig. 1.2

a) Obtención de la matriz rigidez que tendría la barra analizada si fuera empotrada-empotrada.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 62.5 & 375 & 0 & -62.5 & 375 \\ 0 & 375 & 3000 & 0 & -375 & 1500 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -62.5 & -375 & 0 & 62.5 & -375 \\ 0 & 375 & 1500 & 0 & 375 & 3000 \end{bmatrix}$$

b) Definir el valor de la discontinuidad. (D)

D = 6. Hay que tomar la fila 6 de la anterior matriz como pivote, para efectuar transformaciones elementales que hagan cero los elementos de la columna 6.

c) Eliminación de la columna 6.

$$\begin{array}{l} \text{Fila 6} \left(-\frac{375}{3000} \right) + \text{Fila 2} \\ \text{Fila 6} \left(-\frac{1500}{3000} \right) + \text{Fila 3} \end{array} \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 15.625 & 187.5 & 0 & -15.625 & 0 \\ 0 & 375 & 3000 & 0 & -375 & 1500 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -62.5 & -375 & 0 & 62.5 & -375 \\ 0 & 375 & 1500 & 0 & 375 & 3000 \end{bmatrix} \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 15.625 & 187.5 & 0 & -15.625 & 0 \\ 0 & 187.5 & 2250 & 0 & -187.5 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -62.5 & -375 & 0 & 162.5 & -375 \\ 0 & 375 & 1500 & 0 & 375 & 3000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Fila 6} \left(\frac{375}{3000} \right) + \text{Fila 5} \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 15.625 & 187.5 & 0 & -15.625 & 0 \\ 0 & 187.5 & 2250 & 0 & -187.5 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -15.625 & -187.5 & 0 & 15.625 & 0 \\ 0 & 375 & 1500 & 0 & 375 & 3000 \end{bmatrix}$$

d) Haciendo cero los elementos de la fila 6, tenemos:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 15.625 & 187.5 & 0 & -15.625 & 0 \\ 0 & 187.5 & 2250 & 0 & -187.5 & 0 \\ -100 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & -15.625 & -187.5 & 0 & 15.625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo está la matriz rigidez modificada que se deseaba.

1.1.3 – Matriz Rigidez de toda la Estructura.

En el análisis matricial se garantiza que todas las barras que lleguen a un nudo de la estructura posean el mismo desplazamiento, debido a esto su formulación está muy vinculada con la formación de la matriz k , dado que hay que compatibilizar las matrices rigidez de las barras que llegan a un mismo nudo, a este proceso se le denomina ensamblaje de la matriz rigidez de toda la estructura.

1.1.3.1 – Ejemplo ilustrativo:

Obtener la Matriz Rigidez de toda la Estructura que se muestra a continuación:

Dicha estructura está formada por cuatro barras y por cinco nudos, por tanto habrá cinco matrices rigidez y la Matriz Rigidez de toda la Estructura será de orden 15×15 .

Se conoce que la matriz rigidez de una barra se puede particionar de la siguiente manera:

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{OO}^i & K_{OD}^i \\ K_{DO}^i & K_{DD}^i \end{bmatrix} \quad (1.1.3.1)$$

En base a lo anterior las matrices rigidez de nuestra estructura analizada serán:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{13}^1 \\ K_{31}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix}; K_2 = \begin{bmatrix} K_{22}^2 & K_{24}^2 \\ K_{42}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix}; K_3 = \begin{bmatrix} K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix}; K_4 = \begin{bmatrix} K_{44}^4 & K_{45}^4 \\ K_{54}^4 & K_{55}^4 \end{bmatrix}$$

El supra índice indica a que barra pertenece. Para garantizar la necesaria continuidad o compatibilidad de los desplazamientos es necesario definir la forma y orden en que se ensamblarán estas cuatro matrices para lo cual se seguirá el siguiente proceder:

Las filas de k indicarán el nudo donde se originan las fuerzas. Las columnas de k indicarán el nudo que se desplazó unitariamente para originar las fuerzas.

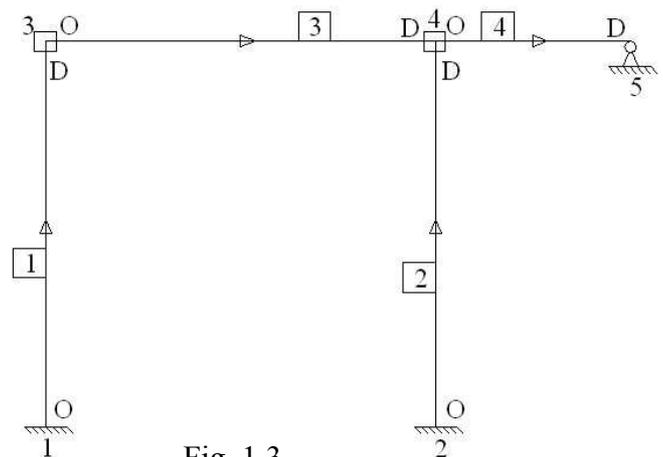


Fig. 1.3

Aporte a k de la Barra 1.

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & \Theta & K_{13}^1 & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\ K_{31}^1 & \Theta & K_{33}^1 & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Añadiendo a k el Aporte de la Barra 2.

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & \Theta & K_{13}^1 & \Theta & \Theta \\ \Theta & K_{22}^2 & \Theta & K_{24}^2 & \Theta \\ K_{31}^1 & \Theta & K_{33}^1 & \Theta & \Theta \\ \Theta & K_{42}^2 & \Theta & K_{44}^2 & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Añadiendo a k el Aporte de la Barra 3.

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & \Theta & K_{13}^1 & \Theta & \Theta \\ \Theta & K_{22}^2 & \Theta & K_{24}^2 & \Theta \\ K_{31}^1 & \Theta & K_{33}^1 + K_{33}^3 & K_{34}^3 & \Theta \\ \Theta & K_{42}^2 & K_{43}^3 & K_{44}^2 + K_{44}^3 & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Añadiendo a k el Aporte de la Barra 4 y quedando como resultado:

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & \Theta & K_{13}^1 & \Theta & \Theta \\ \Theta & K_{22}^2 & \Theta & K_{24}^2 & \Theta \\ K_{31}^1 & \Theta & K_{33}^1 + K_{33}^3 & K_{34}^3 & \Theta \\ \Theta & K_{42}^2 & K_{43}^3 & K_{44}^2 + K_{44}^3 + K_{44}^4 & K_{45}^4 \\ \Theta & \Theta & \Theta & K_{54}^4 & K_{55}^4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Donde:

K_{ij} = Submatriz de la matriz rigidez de la barra de orden 3x3.

Θ = Matriz Nula de orden 3x3.

k = Matriz rigidez de toda la estructura.

1.1.4 – Transformación de Coordenadas.

Dada la existencia de dos sistemas de referencia, el local y el general, es necesario poder expresar las fuerzas de un sistema en el otro con el fin de compatibilizar la referencia, para este fin, se utilizará la matriz de rotación, la cual permite efectuar la rotación tanto de fuerzas como de desplazamientos de un sistema de referencia a otro.

En la Figura 1.3 se muestran los ejes generales para cualquier estructura y se muestran los ejes locales para un elemento de la estructura tipo barra.

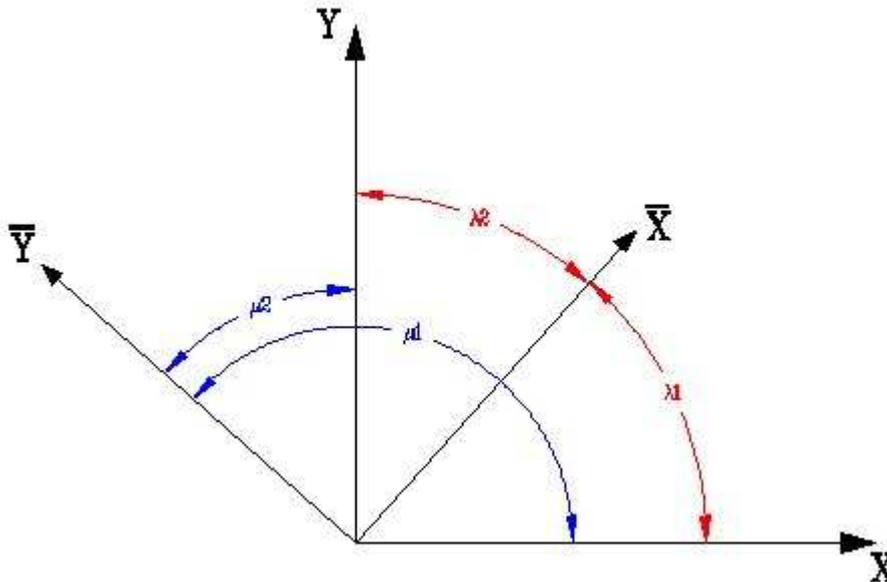


Fig. 1.4 Elemento tipo barra de una estructura en el Plano.

Donde R_i es la Matriz Rotación del elemento que estamos analizando. Dicha matriz permite llevar las fuerzas interiores en ejes locales a generales y viceversa, de la misma forma también los desplazamientos.

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1.4.1)$$

Donde:

$$R_i = \begin{bmatrix} \Lambda_i & \Theta \\ \Theta & \Lambda_i \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

λ_1 : coseno director del eje x local con x general

λ_2 : coseno director del eje x local con y general

μ_1 : coseno director del eje y local con x general

μ_2 : coseno director del eje y local con y general

R_i : Es una matriz ortogonal tal que: $R_i^{-1} = R_i^t$ (su inversa y su transpuesta son iguales).
Y permite efectuar la rotación tanto de fuerzas como de desplazamientos de un sistema de referencia a otro.

A efectos de la programación para determinar la matriz Rotación de una barra recta y plana se utiliza:

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} e & -f & 0 \\ f & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1.4.2)$$

Siendo: $e = \frac{X_D - X_O}{L}$; $f = \frac{Y_D - Y_O}{L}$ (1.1.4.3)

X_D : Coordenada X del destino de la barra en ejes generales.
 X_O : Coordenada X del origen de la barra en ejes generales.
 Y_D : Coordenada Y del destino de la barra en ejes generales.
 Y_O : Coordenada Y del origen de la barra en ejes generales.
 L : Longitud de la barra.

1.1.5 – Momentos de Extremo Fijo.

Se definen como fuerzas de empotramiento, a aquellas que surgen en el origen y destino de una barra producto a la acción de cargas externas actuando a lo largo de la misma, o sea entre nudos. A manera de ilustración se presentan algunos casos particulares en la Figura 1.5:

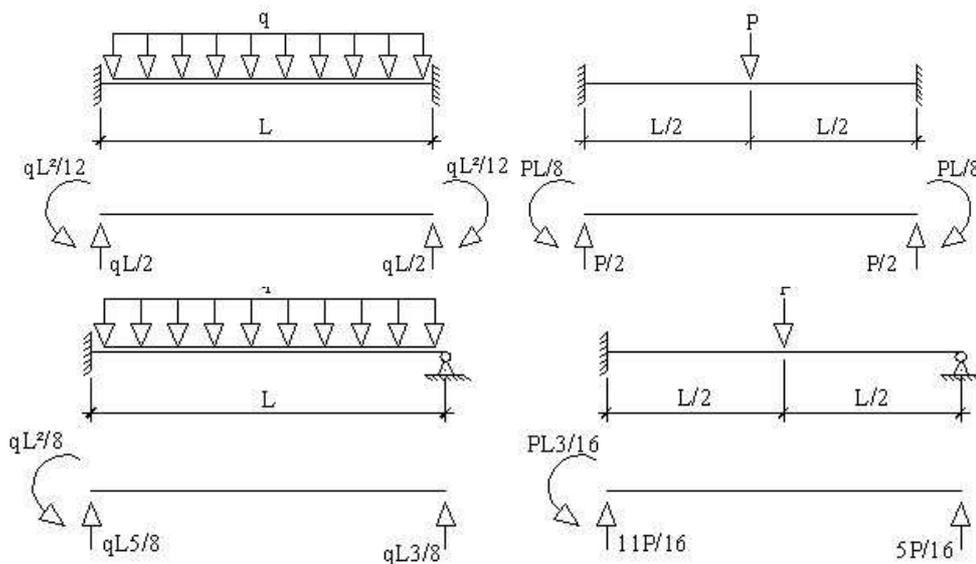


Fig. 1.5

Dado:

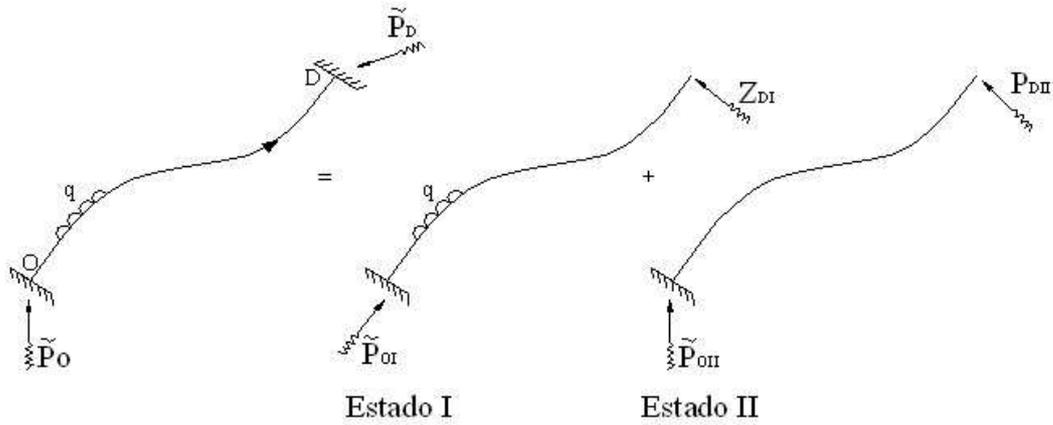


Fig. 1.6

Si se tiene una barra en el caso más general Figura 1.1.5.2, o sea, una curva y espacial, solicitada por una carga genérica (q), se pueden obtener las reacciones en el origen y destino de la barra, suponiendo los efectos del estado I y II, es decir:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{EO} &= \tilde{\mathbf{P}}_{OI} + \tilde{\mathbf{P}}_{OII} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{ED} &= \tilde{\mathbf{P}}_{DI} + \tilde{\mathbf{P}}_{DII} \end{aligned} \quad (1.1.5.1)$$

Donde:

$\tilde{\mathbf{P}}_{EO}$: Fuerzas de Empotramiento en el Origen.

$\tilde{\mathbf{P}}_{ED}$: Fuerzas de Empotramiento en el Destino.

$\tilde{\mathbf{P}}_{OI}$: Reacciones en el origen de la barra debidas a la carga externa en el Estado I.

$\tilde{\mathbf{z}}_{EI}$: Desplazamientos del destino de la barra debidos a la carga externa en el Estado I.

$\tilde{\mathbf{P}}_{DII}$: Fuerza que se aplica en el destino de la barra para que provoque $-\tilde{\mathbf{z}}_{DI}$.

$\tilde{\mathbf{P}}_{OII}$: Reacciones en el Origen de la barra debidas a $\tilde{\mathbf{P}}_{DII}$.

Recordando las ecuaciones:

$$\tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{z}}_i$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_O \\ \tilde{\mathbf{P}}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OO} & \mathbf{K}_{OD} \\ \mathbf{K}_{DO} & \mathbf{K}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_O \\ \tilde{\mathbf{z}}_D \end{bmatrix} \quad (1.1.5.2)$$

Planteando la anterior ecuación para el estado II queda:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{OII} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{DII} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OO} & \mathbf{K}_{OD} \\ \mathbf{K}_{DO} & \mathbf{K}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{0}} \\ -\tilde{\mathbf{z}}_{DI} \end{bmatrix} \quad (1.1.5.3)$$

En un caso más general (no para nuestro estado II) sería:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{OII} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{DII} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OO} & \mathbf{K}_{OD} \\ \mathbf{K}_{DO} & \mathbf{K}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{z}}_{OI} \\ -\tilde{\mathbf{z}}_{DI} \end{bmatrix} \quad (1.1.5.4)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_{EO} \\ \tilde{P}_{ED} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{OI} \\ \tilde{P}_{DI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P}_{OII} \\ \tilde{P}_{DII} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{OI} \\ \tilde{P}_{DI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{OO} & K_{OD} \\ K_{DO} & K_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_{OI} \\ -z_{DI} \end{bmatrix} \quad (1.1.5.5)$$

$$\begin{bmatrix} N_O \\ V_O \\ M_O \\ N_D \\ V_D \\ M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{OI} \\ \tilde{V}_{OI} \\ \tilde{M}_{OI} \\ \tilde{N}_{DI} \\ \tilde{V}_{DI} \\ \tilde{M}_{DI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X_O \\ -Y_O \\ -\text{Giro}_{ZO} \\ -X_D \\ -Y_D \\ -\text{Giro}_{ZD} \end{bmatrix} \quad (1.1.5.6)$$

Siendo las expresiones anteriores las necesarias para obtener las fuerzas de empotramiento en el origen y en el destino de una barra, aunque no con ellas lo resolvemos todo, nos encontraremos con infinidad de casos particulares en los cuales habrá que calcular los desplazamientos en los extremos de la barra que se analice, desplazamientos que serán los que ella tendría si fuera empotrada-volada.

A continuación mostraremos un caso particular sobre cómo sería el procedimiento y después mostraremos los casos generales para los cuales se han obtenido las expresiones para obtener los desplazamientos en el extremo del voladizo; casos más generales a partir de los cuales se derivan todos los demás.

1.1.5.1 - Ejemplo ilustrativo:

Calcular las fuerzas de empotramiento de la siguiente viga de sección constante.

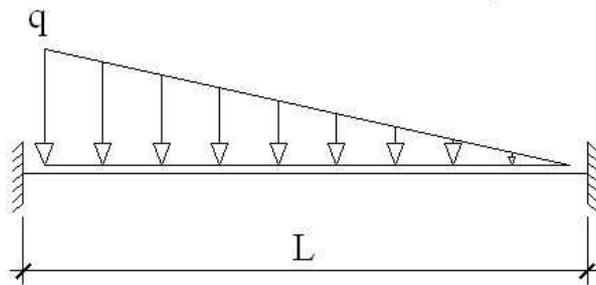


Fig. 1.7
Solución:

$$\begin{bmatrix} N_O \\ V_O \\ M_O \\ N_D \\ V_D \\ M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{OI} \\ \tilde{V}_{OI} \\ \tilde{M}_{OI} \\ \tilde{N}_{DI} \\ \tilde{V}_{DI} \\ \tilde{M}_{DI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ \text{Giro}_{ZO} \\ X_D \\ Y_D \\ \text{Giro}_{ZD} \end{bmatrix} \quad (1.1.5.6)$$

a) Cálculo de \tilde{P}_{O1}

$$q(x) = \frac{q x}{L}$$

$$M(x) = \frac{1}{2} q(x)x \frac{1}{3} x = \frac{1}{6} q(x)x^2 = \frac{1}{6} \frac{q x}{L} x^2 = \frac{q x^3}{6L}$$

$$V(x) = \frac{q x^2}{2L}$$

Evaluando en $x = L$ tenemos:

$$M(L) = \frac{q L^2}{6}$$

$$V(L) = \frac{q L}{2}$$

$$\tilde{P}_{O1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{6} \end{bmatrix}$$

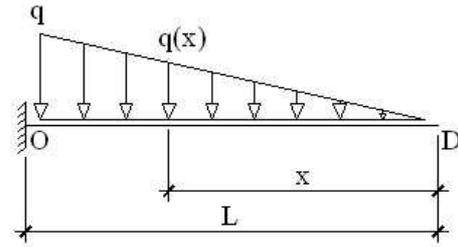


Fig. 1.8

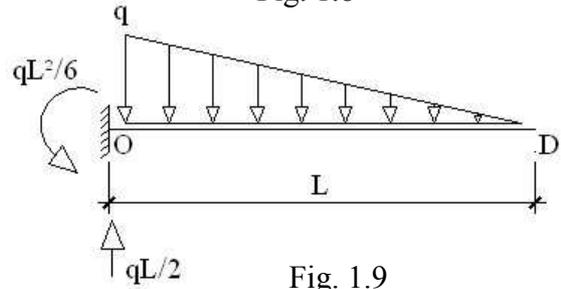


Fig. 1.9

b) Cálculo de \tilde{Z}_{D1} .

Cálculo de f_y :

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$\Delta K m_x = \sum_{i=0}^N \left[\int_0^L \frac{M m \bar{M} k}{EI} dx \right] = \int_0^L \frac{M m \bar{M} k}{EI} dx$$

$$\bar{M} k(x) = P x = x$$

$$f_y = \int_0^L \left[\frac{q x^3}{6L} x dx \right] \frac{1}{EI} = \left[\frac{q L^5}{30L} \right] \frac{1}{EI} = \frac{q L^4}{30EI}$$

$$f_y = \frac{q L^4}{30EI}$$

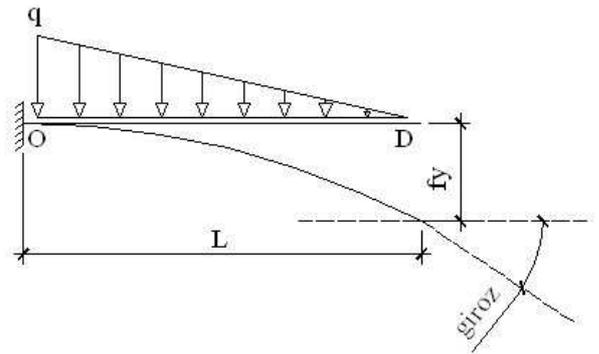


Fig. 1.10

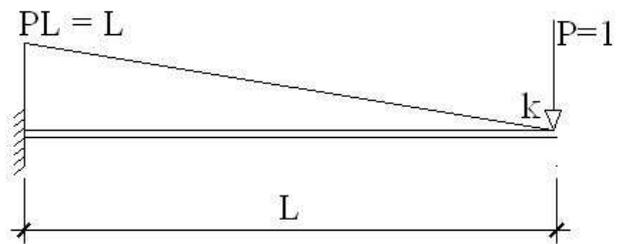


Fig. 1.11

Cálculo de giroz:

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$\Delta K m_x = \sum_{i=0}^N \left[\int_0^L \frac{M m \bar{M} k}{EI} dx \right] = \int_0^L \frac{M m \bar{M} k}{EI} dx$$

$$\bar{M} k(x) = 1$$

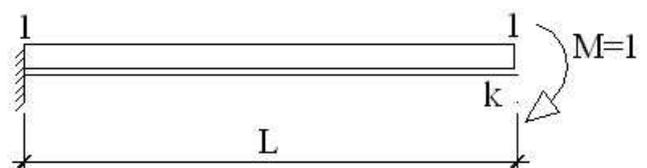


Fig. 1.12

$$\text{Giroz}_K = \int_0^L \left[\frac{qx^3}{6L} - 1 \right] dx \frac{1}{EI} = \left[\frac{qL^4}{24L} \right] \frac{1}{EI} = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\text{Giroz}_K = \frac{qL^3}{24EI} \quad \begin{bmatrix} fx = 0 \\ fx = -\frac{qL^4}{30EI} \\ \text{giroz} = -\frac{qL^3}{24EI} \end{bmatrix} ; \quad \mathcal{Z}_{DI} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^4}{30EI} \\ -\frac{qL^3}{24EI} \end{bmatrix}$$

c) Cálculo de las Fuerzas de Empotramientos (Momentos de Extremos Fijos).

$$\begin{bmatrix} N_o \\ V_o \\ M_o \\ N_D \\ V_D \\ M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIx}{L^3} & \frac{6EIx}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIx}{L^2} & \frac{4EIx}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIx}{L^3} & -\frac{6EIx}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIx}{L^2} & \frac{2EIx}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIx}{L^3} & -\frac{6EIx}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EIx}{L^2} & \frac{4EIx}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^4}{30EI} \\ -\frac{qL^3}{24EI} \end{bmatrix} \quad (1.1.5.7)$$

$$N_o = 0 - \left[\frac{AE}{L} 0 + 0 + 0 - \frac{AE}{L} 0 - \frac{qL^4}{30EI} 0 - \frac{qL^3}{24EI} 0 \right] = 0$$

$$V_o = \frac{qL}{2} - \left[0 + \frac{12EIx}{L^3} 0 + \frac{6EIx}{L^2} 0 + 0 - \frac{12EIx}{L^3} \left(-\frac{qL^4}{30EI} \right) + \frac{6EIx}{L^2} \left(-\frac{qL^3}{24EI} \right) \right] = \frac{7qL}{20}$$

$$M_o = \frac{qL^2}{6} - \left[0 + \frac{6EIx}{L^2} 0 + \frac{4EIx}{L} 0 + 0 - \frac{6EIx}{L^2} \left(-\frac{qL^4}{30EI} \right) + \frac{2EIx}{L} \left(-\frac{qL^3}{24EI} \right) \right] = \frac{qL^2}{20EI}$$

$$N_D = 0 - \left[-\frac{AE}{L} 0 + 0 + 0 + \frac{AE}{L} 0 - \frac{qL^4}{30EI} 0 - \frac{qL^3}{24EI} 0 \right] = 0$$

$$V_D = 0 - \left[0 - \frac{12EIx}{L^3} 0 - \frac{6EIx}{L^2} 0 + 0 + \frac{12EIx}{L^3} \left(-\frac{qL^4}{30EI} \right) - \frac{6EIx}{L^2} \left(-\frac{qL^3}{24EI} \right) \right] = \frac{3qL}{20}$$

$$M_D = 0 - \left[0 + \frac{6EIx}{L^2} 0 + \frac{2EIx}{L} 0 + 0 - \frac{6EIx}{L^2} \left(-\frac{qL^4}{30EI} \right) + \frac{4EIx}{L} \left(-\frac{qL^3}{24EI} \right) \right] = -\frac{qL^2}{30}$$

Quedando:

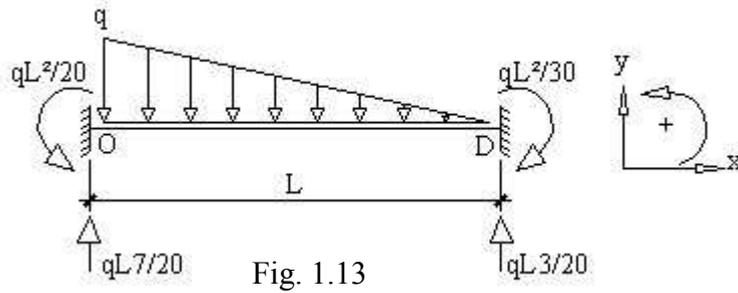


Fig. 1.13

1.1.5.2 - Casos generales:

Los casos que se verán a continuación son los más generales y a partir de ellos se pueden obtener los momentos de extremos fijos de cualquier tipo de barra plana con cargas distribuidas, concentradas, momentos concentrados, momentos distribuidos. De haber una barra que contenga varios estados de carga a la vez se resolverían por superposición de efectos. Para cada caso se obtendrán fórmulas para obtener los desplazamientos en “x”, “y”, “giro”, los signos de los desplazamientos estarán dados según el sentido de los ejes de referencia.

a) Caso 1.

Con este caso se pueden obtener los desplazamientos y por consiguiente los momentos de extremos fijos de las barras empotrada-empotrada, empotrada-articulada, empotrada-simple apoyo “y”, empotrada-volada que presenten una carga distribuida.

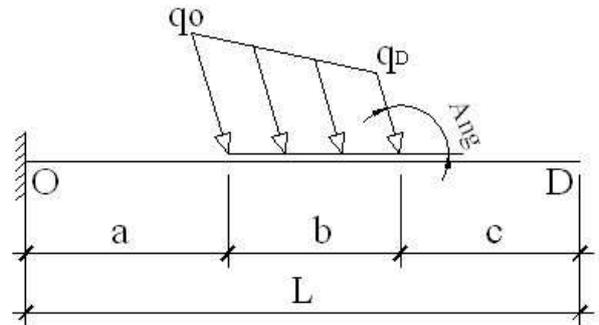


Fig. 1.14

$$q_{OX} = q_0 \cos(\text{Ang}); q_{DX} = q_D \cos(\text{Ang})$$

$$q_{OY} = q_0 \sin(\text{Ang}); q_{DY} = q_D \sin(\text{Ang})$$

$$q_X(x) = q_{DX} + \frac{x}{b}(q_{OX} - q_{DX})$$

- Efecto de la componente en el eje “x”.

Tramo A: $Nm = \frac{q_{OX} + q_{DX}}{2} b$

Tramo B: $Nm = \frac{q_{(x)} + q_{DX}}{2} x$

Tramo C: $Nm = 0$

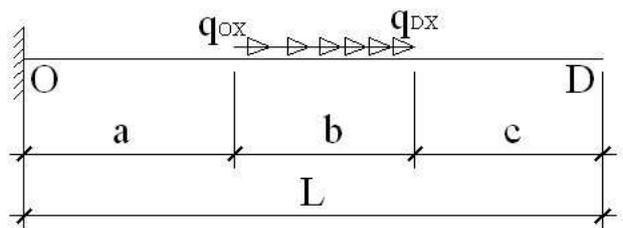


Fig. 1.15

Efecto unitario en el eje “x”.

Cálculo del desplazamiento en “x”.

Tramo A: $\bar{N} = 1$

Tramo B: $\bar{N} = 1$

Tramo C: $\bar{N} = 1$

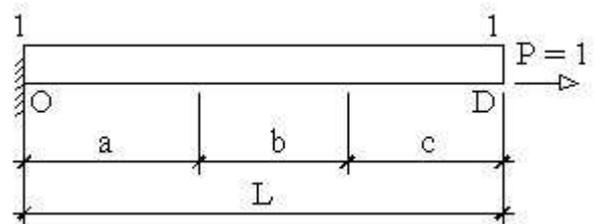


Fig. 1.16

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$f_{XD} = \sum_{I=0}^N \left[\int_0^L \frac{Nm\bar{N}k}{EA} dx \right] = \int_0^A \frac{Nm\bar{N}k}{EA} dx + \int_0^B \frac{Nm\bar{N}k}{EA} dx + \int_0^C \frac{Nm\bar{N}k}{EA} dx$$

$$f_{XD} = \int_0^A \frac{q_{OX} + q_{DX}}{2} \frac{b}{EA} dx + \int_0^B \frac{q(x) + q_{DX}}{2} \frac{x}{EA} dx + \int_0^C \frac{0}{EA} dx$$

$$f_{XD} = \int_0^A \frac{q_{OX} + q_{DX}}{2} \frac{b}{EA} dx + \int_0^B \frac{q_{DX} + \frac{x}{b}(q_{OX} - q_{DX}) + q_{DX}}{2} \frac{x}{EA} dx$$

$$f_{XD} = \frac{(q_{OX} + q_{DX})ba}{2EA} + \frac{q_{DX} \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{6b}(q_{OX} - q_{DX})}{EA}$$

$$f_{XD} = \frac{ba}{2EA}(q_{OX} + q_{DX}) + \frac{b^2(q_{OX} + 2q_{DX})}{6EA} \quad (1.14)$$

- Efecto de la componente en el eje “y”.

Cálculo del desplazamiento en el eje “y”.

$$\frac{q_y(x) - q_{DY}}{x} = \frac{q_{Oy} - q_{DY}}{b}$$

$$q_y(x) = q_{DY} + \frac{x}{b}(q_{Oy} - q_{DY})$$

Cálculo de la $X_c(x)$:

$$X_c(x) = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{1}{2}x(q_{y(x)} - q_{DY}) \frac{1}{3}x + q_{DY}x \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x(q_{y(x)} - q_{DY}) + q_{DY}x}$$

$$X_c(x) = \frac{x(q_{y(x)} + 2q_{DY})}{3(q_{y(x)} + q_{DY})}$$

$$X_c(b) = \frac{b(q_{Oy} + 2q_{DY})}{3(q_{Oy} + q_{DY})}$$

Tramo A:

$$Mm = \frac{q_{Oy} + q_{DY}}{2} b [X_c(b) + x] = \frac{q_{Oy} + q_{DY}}{2} b \left[\frac{b(q_{Oy} + 2q_{DY})}{3(q_{Oy} + q_{DY})} + x \right]$$

$$Mm = \frac{b^2}{6} (q_{Oy} + q_{DY}) \frac{q_{Oy} + q_{DY}}{2} bx$$

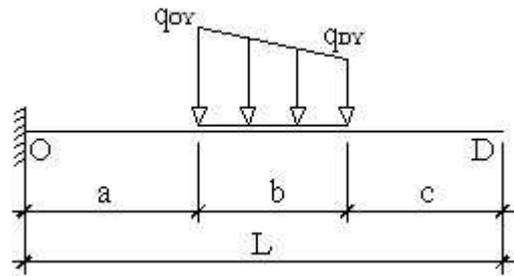


Fig. 1.17

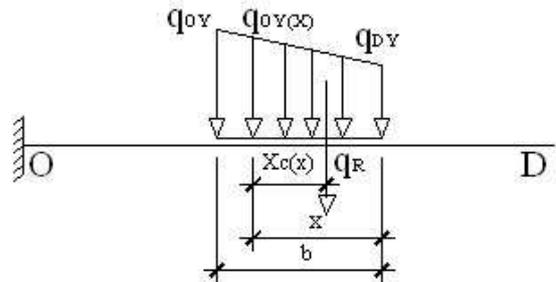


Fig. 1.18

Tramo B:

$$Mm = \frac{x^2}{6} (q_{y(x)} + 2q_{DY}) = \frac{x^2}{6} (q_{DY} + \frac{x}{b} (q_{OY} - q_{DY}) + 2q_{DY})$$

$$Mm = \frac{x^3 q_{OY}}{6b} - \frac{x^3 q_{DY}}{6b} + \frac{x^2 q_{DY}}{2}$$

Tramo C: $Mm = 0$

Efecto unitario en el eje “y”.

Tramo A: $\bar{M} = c + b + x$

Tramo B: $\bar{M} = c + x$

Tramo C: $\bar{M} = x$

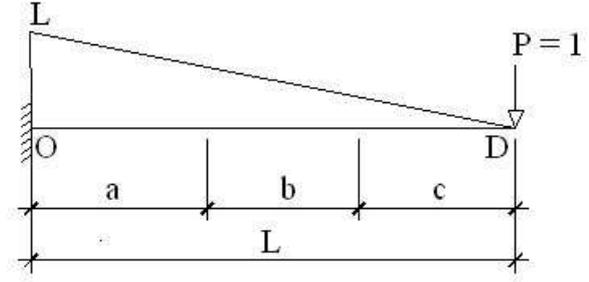


Fig. 1.19

$$q_y(x) = q_{DY} + \frac{x}{b} (q_{OY} - q_{DY})$$

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$f_{YD} = \sum_{I=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^C \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx$$

$$f_{YD} = \int_0^A \left(\frac{\frac{b^2}{6} (q_{OY} + q_{DY}) \frac{q_{OY} + q_{DY}}{2} bx}{EI} \right) (c + b + x) dx + \int_0^B \left(\frac{\frac{x^3 q_{OY}}{6b} - \frac{x^3 q_{DY}}{6b} + \frac{x^2 q_{DY}}{2}}{EI} \right) (c + x) dx + \int_0^C \frac{0 \cdot x}{EI} dx$$

$$f_{YD} = \frac{1}{EI} \left[c \left(\frac{b^4}{24b} q_{OY} - \frac{b^4}{24b} q_{DY} + \frac{b^3}{6} q_{DY} \right) + \frac{b^5}{30b} q_{OY} - \frac{b^5}{30b} q_{DY} + \frac{b^4}{8} q_{DY} \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \left[(c + b) \left(\frac{ab^2}{2} (q_{OY} + 2q_{DY}) + \frac{q_{OY} + q_{DY}}{4} ba^2 \right) + \frac{a^2 b^2}{4} (q_{OY} + 2q_{DY}) + \frac{q_{OY} + q_{DY}}{6} a^3 b \right]$$

$$f_{YD} = \frac{1}{EI} \left[\frac{cb^3}{24} (q_{OY} + 3q_{DY}) + \frac{b^4}{240} (8q_{OY} + 22q_{DY}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \left[(c + b) \left(\frac{ab^2}{2} (q_{OY} + 2q_{DY}) + \frac{q_{OY} + q_{DY}}{4} ba^2 \right) + \frac{a^2 b^2}{4} (q_{OY} + 2q_{DY}) + \frac{q_{OY} + q_{DY}}{6} a^3 b \right] \quad (1.1.5.8)$$

- **Cálculo del Giro en el eje “z”.**

Efecto unitario alrededor del eje “z”.

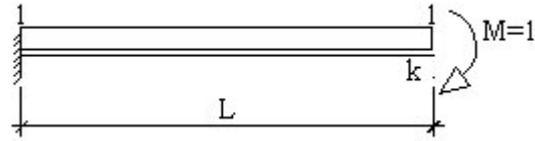


Fig. 1.20

Tramo A: $\bar{M} = 1$

Tramo B: $\bar{M} = 1$

Tramo C: $\bar{M} = 1$

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$\text{Giro}_z = \sum_{i=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^C \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx$$

$$\text{Giro}_z = \int_0^A \left(\frac{b^2}{6} (q_{OY} + q_{DY}) \frac{q_{OY} + q_{DY}}{2} bx \right) \frac{1}{EI} dx + \int_0^B \left(\frac{x^3 q_{OY}}{6b} - \frac{x^3 q_{DY}}{6b} + \frac{x^2 q_{DY}}{2} \right) \frac{1}{EI} dx + \int_0^C \frac{0 \cdot 1}{EI} dx$$

$$\text{Giro}_z = \frac{1}{EI} \left[\frac{b^3}{24} q_{OY} - \frac{b^3}{24} q_{DY} + \frac{b^3}{6} q_{DY} + \frac{ab^2}{2} (q_{OY} + 2q_{DY}) + \frac{ba^2}{4} (q_{OY} + q_{DY}) \right]$$

$$\text{Giro}_z = \frac{1}{24EI} [b^3 (q_{OY} + 3q_{DY}) + 12ab^2 (q_{OY} + 2q_{DY}) + 6ba^2 (q_{OY} + q_{DY})] \quad (1.1.5.9)$$

- **Resumiendo:**

$$f_{xD} = \frac{ba}{2EA} (q_{OX} + q_{DX}) + \frac{b^2 (q_{OX} + 2q_{DX})}{6EA}$$

$$f_{yD} = \frac{1}{EI} \left[\frac{cb^3 (q_{OY} + 3q_{DY})}{24} + \frac{b^4 (8q_{OY} + 22q_{DY})}{240} \right] + \frac{1}{EI} \left[(c+b) \left(\frac{ab^2 (q_{OY} + 2q_{DY})}{2} + \frac{a^2 (q_{OY} + q_{DY})}{4} \right) + \frac{a^2 b^2 (q_{OY} + 2q_{DY})}{4} + \frac{a^3 b (q_{OY} + q_{DY})}{6} \right]$$

$$\text{Giro}_z = \frac{1}{24EI} [b^3 (q_{OY} + 3q_{DY}) + 12ab^2 (q_{OY} + 2q_{DY}) + 6ba^2 (q_{OY} + q_{DY})]$$

Para el caso donde $q_O < q_D$ las expresiones son las mismas, gráficamente se ven una mayor que otra, pero en los cálculos sin $q_O < q_D$ automáticamente cambian los resultados ya que cambiaron las cargas, este ejemplo está resuelto para que $q_O > q_D$ o para que $q_O < q_D$.

b) Caso 2.

Con este caso se pueden obtener los desplazamientos y por consiguiente los momentos de extremos fijos de las barras empotrada-empotrada, empotrada-articulada, empotrada-simple apoyo "y", empotrada-volada que presenten una carga distribuida.

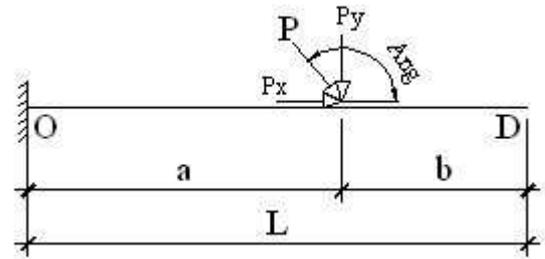


Fig. 1.21

$$P_x = P \cos(\text{Ang})$$

$$P_y = P \sin(\text{Ang})$$

- Efecto de la componente en el eje "x".

Cálculo del desplazamiento en el eje "x".

Tramo A: $N_m = P_x$

Tramo B: $N_m = 0$

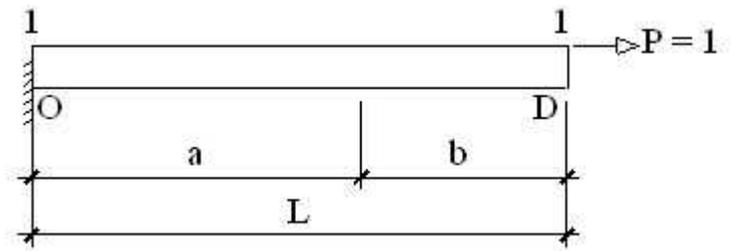


Fig. 1.22

Efecto unitario en el eje "x".

Tramo A: $\bar{N} = 1$

Tramo B: $\bar{N} = 0$

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$f_{XD} = \sum_{i=0}^N \left[\int_0^L \frac{N_m \bar{N}_k}{EA} dx \right] = \int_0^A \frac{N_m \bar{N}_k}{EA} dx + \int_0^B \frac{N_m \bar{N}_k}{EA} dx$$

$$f_{XD} = \int_0^A \frac{P_x}{EA} 1 dx + \int_0^B \frac{0}{EA} 1 dx = \frac{P_x a}{EA}$$

$$f_{XD} = \frac{P_x a}{EA} \quad (1.16)$$

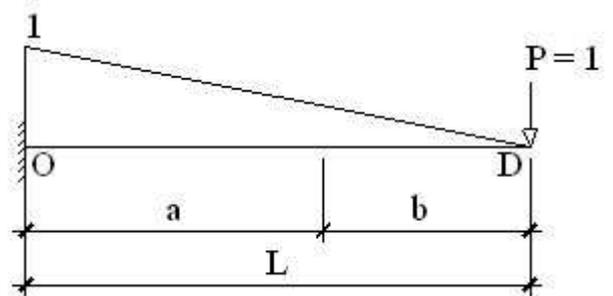


Fig. 1.23

- Cálculo del desplazamiento en el eje "y".

Tramo A: $M_m = P_y x$

Tramo B: $M_m = 0$

Efecto unitario en el eje "y".

Tramo A: $\bar{M} = b + x$

Tramo B: $\bar{M} = x$

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$f_{yD} = \sum_{I=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx$$

$$f_{yD} = \int_0^A \frac{P_Y x (b+x)}{EI} dx + \int_0^B \frac{0 x}{EI} dx$$

$$f_{yD} = \frac{P_Y a^2 (3b+2a)}{6EI}$$

Sustituyendo $b = L - a$ tenemos:

$$f_{yD} = \frac{P_Y a^2 (3L - a)}{6EI} \quad (1.1.5.10)$$

- **Cálculo del Giro en el eje “z”.**

Efecto unitario alrededor del eje “z”.

Tramo A: $\bar{M} = 1$

Tramo B: $\bar{M} = 1$

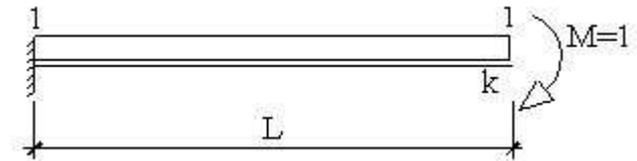


Fig. 1.24

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$\text{Giro}_z = \sum_{I=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^C \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx$$

$$\text{Giro}_z = \int_0^A \frac{P_Y x \cdot 1}{EI} dx + \int_0^B \frac{0 \cdot 1}{EI} dx = \frac{P_Y a^2}{2EI}$$

$$\text{Giro}_z = \frac{P_Y a^2}{2EI} \quad (1.1.5.11)$$

- **Resumiendo:**

$$f_{xD} = \frac{P_x a}{EA}$$

$$f_{yD} = \frac{P_Y a^2 (3L - a)}{6EI}$$

$$\text{Giro}_z = \frac{P_Y a^2}{2EI}$$

c) Caso 3.

Con este caso se pueden obtener los desplazamientos y por consiguiente los momentos de extremos fijos de las barras empotrada-empotrada, empotrada-articulada, empotrada-simple apoyo “y”, empotrada-volada que presenten un momento concentrado.

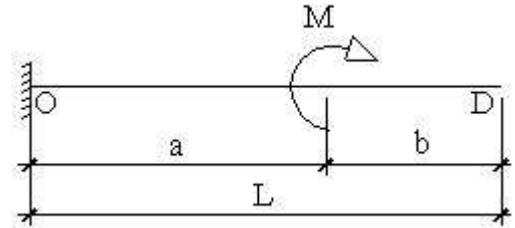


Fig. 1.25

$f_{xD} = 0$, no hay fuerza axial producida por el Momento Concentrado.

- **Cálculo del desplazamiento en el eje “y”.**

Tramo A: $Mm = M$

Tramo B: $Mm = 0$

Efecto unitario en el eje “y”.

Tramo A: $\bar{M} = b + x$

Tramo B: $\bar{M} = x$

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$f_{yD} = \sum_{l=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx$$

$$f_{yD} = \int_0^A \frac{M(b+x)}{EI} dx + \int_0^B \frac{0 \cdot x}{EI} dx$$

$$f_{yD} = \frac{M a (2b + a)}{2EI}$$

Sustituyendo $b = L - a$ tenemos:

$$f_{yD} = \frac{M a (2L - a)}{2EI} \tag{1.1.5.12}$$

- **Cálculo del Giro en el eje “z”.**

Efecto unitario alrededor del eje “z”.

Tramo A: $\bar{M} = 1$

Tramo B: $\bar{M} = 1$

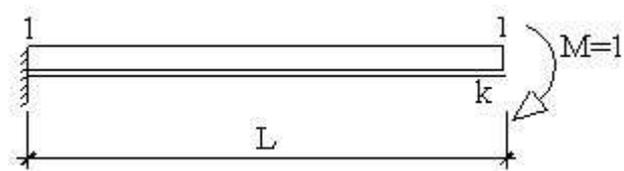


Fig. 1.26

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Giro}_z &= \sum_{i=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^C \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \\ \text{Giro}_z &= \int_0^A \frac{M1}{EI} dx + \int_0^B \frac{0x}{EI} dx \\ \text{Giro}_z &= \frac{Ma}{EI} \end{aligned} \quad (1.1.5.13)$$

• **Resumiendo:**

$$\begin{aligned} f_{XD} &= 0 \\ f_{YD} &= \frac{Ma(2L-a)}{2EI} \\ \text{Giro}_z &= \frac{Ma}{EI} \end{aligned}$$

d) Caso 4.

Con este caso se pueden obtener los desplazamientos y por consiguiente los momentos de extremos fijos de las barras empotrada-empotrada, empotrada-articulada, empotrada-simple apoyo “y”, empotrada-volada que presenten un momento distribuido.

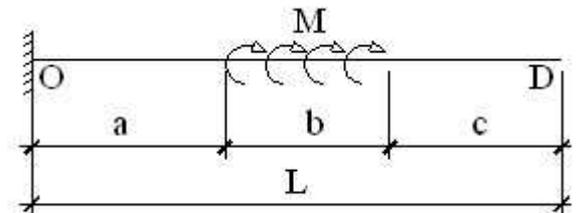


Fig. 1.27

$f_{XD} = 0$, no hay fuerza axial producida por el Momento distribuido.

• **Cálculo del desplazamiento en el eje “y”.**

- Tramo A: $Mm = Mb$
- Tramo B: $Mm = Mx$
- Tramo C: $Mm = 0$

Efecto unitario en el eje “y”.

- Tramo A: $\bar{M} = c + b + x$
- Tramo B: $\bar{M} = c + x$
- Tramo C: $\bar{M} = x$

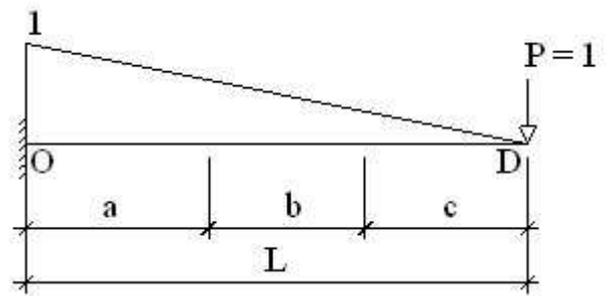


Fig. 1.28

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$\begin{aligned} f_{YD} &= \sum_{i=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^C \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \\ f_{YD} &= \int_0^A \frac{Mb(b+c+x)}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mx(c+x)}{EI} dx + \int_0^C \frac{0x}{EI} dx \end{aligned}$$

$$f_{yD} = \frac{1}{EI} \left[\frac{cMb^2}{2} + \frac{Mb^3}{3} + \frac{Mba^2}{2} + Mab(c+b) \right] \quad (1.1.5.14)$$

$$f_{yD} = \frac{Mb}{6EI} [3cb + 2b^2 + 3a^2 + 6a(c+b)]$$

- **Cálculo del Giro en el eje “z”.**

Efecto unitario alrededor del eje “z”.

Tramo A: $\bar{M} = 1$

Tramo B: $\bar{M} = 1$

Tramo C: $\bar{M} = 1$

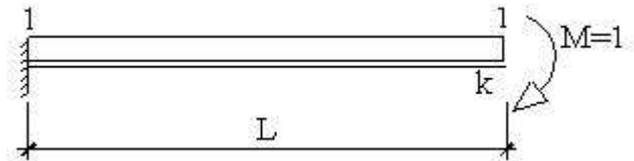


Fig. 1.29

Aplicando la Fórmula de Mohr y teniendo en cuenta solo el efecto del Momento, tenemos:

$$\text{Giro}_z = \sum_{i=0}^N \left[\int_0^L \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx \right] = \int_0^A \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^B \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx + \int_0^C \frac{Mm\bar{M}k}{EI} dx$$

$$\text{Giro}_z = \int_0^A \frac{Mb \cdot 1}{EI} dx + \int_0^B \frac{M \cdot x \cdot 1}{EI} dx + \int_0^C \frac{0 \cdot x}{EI} dx = \frac{Mb^2}{2EI} + \frac{Mba}{EI}$$

$$\text{Giro}_z = \frac{M b}{2EI} [b + 2a] \quad (1.1.5.14)$$

- **Resumiendo:**

$$f_{xD} = 0$$

$$f_{yD} = \frac{Mb}{6EI} [3cb + 2b^2 + 3a^2 + 6a(c+b)]$$

$$\text{Giro}_z = \frac{M b}{2EI} [b + 2a]$$

Hasta ahora se han visto los casos generales para barras donde su origen esta empotrado; las barras donde el destino es empotrado que serían la articulado-empotrada y volada-empotrada se analizan de forma análoga. Las distancias de a, b, c se invierten según sea el caso, si aparecen la “a, b, c” entonces donde esté la “a” se pondrá una “c” manteniendo la “b” sin modificar y donde aparecen la “a, b” entonces donde esté la “a” se pondrá una “b”, o de otra manera se tendrían que resolver todos los casos de cargas anteriores para la barra volada-empotrada.

Por ejemplo:

Caso 4.

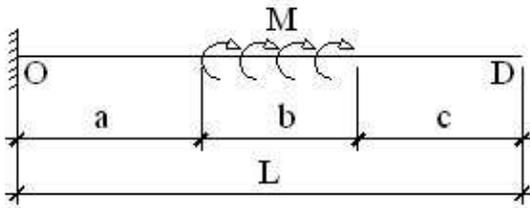


Fig. 1.27

$$f_{yD} = \frac{Mb}{6EI} [3cb + 2b^2 + 3a^2 + 6a(c + b)]$$

$$\text{Giro}_z = \frac{M b}{2EI} [b + 2a]$$

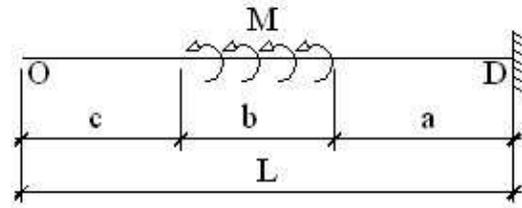


Fig. 1.30

$$f_{yD} = \frac{Mb}{6EI} [3ab + 2b^2 + 3c^2 + 6c(a + b)]$$

$$\text{Giro}_z = \frac{M b}{2EI} [b + 2c]$$

1.1.6 – Ejemplo Ilustrativo. Análisis de un Pórtico Plano.

Obtener las fuerzas en los extremos de cada barra del pórtico mostrado en la Fig. 1.31

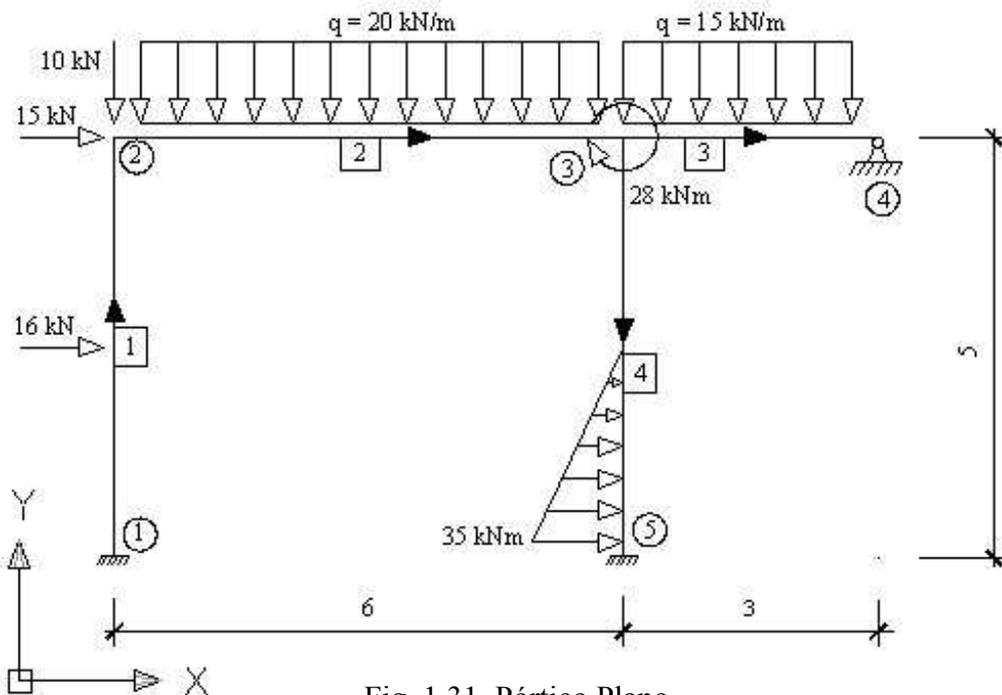


Fig. 1.31. Pórtico Plano.

Datos de las Secciones y de los Materiales.

Tipo de Secciones			
Barras	Az (m ²)	Ac (m ²)	Iz (m ⁴)
1, 4	0,12	0,096	0,0016
2, 3	0,15	0,12	0,003125

Tipo de Materiales			
Barras	E (kN/m ²)	G (kN/m ²)	Peso Esp. (kN/m ³)
1, 4	20000000	8000000	24
2, 3	25000000	10000000	24

1.1.6.1 – Cálculo de la matriz de rigidez elástica de cada barra:

$$\Phi_{1,4} = \frac{12EIz}{GA_cL^2} = \frac{12 \times 20\,000\,000 \times 0,0016}{8\,000\,000 \times 0,096 \times 5^2} = 0,02$$

$$\Phi_2 = \frac{12EIz}{GA_cL^2} = \frac{12 \times 25\,000\,000 \times 0,003125}{10\,000\,000 \times 0,12 \times 6^2} = 0,021701$$

$$\Phi_3 = \frac{12EIz}{GA_cL^2} = \frac{12 \times 25\,000\,000 \times 0,003125}{10\,000\,000 \times 0,12 \times 3^2} = 0,086806$$

Para las barras 1, 2, 4 la Matriz Rigidez es la siguiente ya que son barras E-E:

$$\bar{K}_{Ei} = \frac{1}{(1+\Phi)} \begin{bmatrix} \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & \frac{(4+\Phi)EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & \frac{(2-\Phi)EIz}{L} \\ -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & \frac{12EIz}{L^3} & -\frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & \frac{(2-\Phi)EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & \frac{(4+\Phi)EIz}{L} \end{bmatrix}$$

La matriz rigidez elástica de la barra 1:

$$\bar{K}_{E1} = \begin{bmatrix} 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 & 0 \\ 0 & 3011.76 & 7529.411 & 0 & -3011.76 & 7529.411 \\ 0 & 7529.411 & 25223.53 & 0 & -7529.411 & 12423.53 \\ -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 & 0 \\ 0 & -3011.76 & -7529.411 & 0 & 3011.76 & -7529.411 \\ 0 & 7529.411 & 12423.53 & 0 & -7529.411 & 25223.53 \end{bmatrix}$$

La matriz rigidez elástica de la barra 2:

$$\bar{K}_{E2} = \begin{bmatrix} 625000 & 0 & 0 & -625000 & 0 & 0 \\ 0 & 4248.1 & 12744.27 & 0 & -4248.1 & 12744.27 \\ 0 & 12744.27 & 51253.63 & 0 & -12744.27 & 25211.96 \\ \hline -625000 & 0 & 0 & 625000 & 0 & 0 \\ 0 & -4248.1 & -12744.27 & 0 & 4248.1 & -12744.27 \\ 0 & 12744.27 & 25211.96 & 0 & -12744.27 & 51253.63 \end{bmatrix}$$

La matriz rigidez elástica de la barra 4:

$$\bar{K}_{E4} = \begin{bmatrix} 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 & 0 \\ 0 & 3011.76 & 7529.411 & 0 & -3011.76 & 7529.411 \\ 0 & 7529.411 & 25223.53 & 0 & -7529.411 & 12423.53 \\ \hline -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 & 0 \\ 0 & -3011.76 & -7529.411 & 0 & 3011.76 & -7529.411 \\ 0 & 7529.411 & 12423.53 & 0 & -7529.411 & 25223.53 \end{bmatrix}$$

Para la barra 3 la Matriz Rigidez es la siguiente ya que es una barra E-A:

$$K_{E3}^{\Phi} = \frac{1}{(1+\Phi)} \begin{bmatrix} \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & \frac{12EI}{L^2} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^2} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & \frac{12EI}{L} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & 0 & -\frac{12EI}{L^2} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & 0 \\ \hline -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & -\frac{12EI}{L^2} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & 0 & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1+\Phi}{4+\Phi} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.6.1)$$

La matriz rigidez elástica de la barra 3:

$$\bar{K}_{E3} = \begin{bmatrix} 1250000 & 0 & 0 & -1250000 & 0 & 0 \\ 0 & 8496.18 & 25488.53 & 0 & -8496.18 & 0 \\ 0 & 25488.53 & 76465.59 & 0 & -25488.53 & 0 \\ \hline -1250000 & 0 & 0 & 1250000 & 0 & 0 \\ 0 & -8496.18 & -25488.53 & 0 & 8496.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.6.2 – Cálculo la matriz de rotación de cada barra:

La matriz rotación de la barra 1:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz rotación de la barra 2:

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz rotación de la barra 3:

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz rotación de la barra 4:

$$\Lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.6.3 – Cálculo de la matriz rigidez de cada barra en ejes generales:

Para obtener la matriz rigidez de cada barra expresada en ejes generales es necesario utilizar la siguiente expresión:

$$(1.1.6.2) \quad k_i = R_i \bar{K}_i R_i^t$$

Efectuando la multiplicación de dichas matrices obtenemos la rigidez de cada barra en ejes generales lista para ser ensamblada en la Matriz Rigidez de toda la Estructura.

La matriz rigidez elástica de la barra 1 expresada en ejes generales:

$$k_{E1} = \begin{bmatrix} 3011.76 & 0 & -7529.411 & -3011.76 & 0 & -7529.411 \\ 0 & 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 \\ -7529.411 & 0 & 25223.53 & 7529.411 & 0 & 12423.53 \\ -3011.76 & 0 & 7529.411 & 3011.76 & 0 & 7529.411 \\ 0 & -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 \\ -7529.411 & 0 & 12423.53 & 7529.411 & 0 & 25223.53 \end{bmatrix}$$

La matriz rigidez elástica de la barra 2 expresada en ejes generales:

$$k_{E2} = \begin{bmatrix} 625000 & 0 & 0 & -625000 & 0 & 0 \\ 0 & 4248.1 & 12744.27 & 0 & -4248.1 & 12744.27 \\ 0 & 12744.27 & 51253.63 & 0 & -12744.27 & 25211.96 \\ -625000 & 0 & 0 & 625000 & 0 & 0 \\ 0 & -4248.1 & -12744.27 & 0 & 4248.1 & -12744.27 \\ 0 & 12744.27 & 25211.96 & 0 & -12744.27 & 51253.63 \end{bmatrix}$$

La matriz rigidez elástica de la barra 3 expresada en ejes generales:

$$k_{E3} = \begin{bmatrix} 1250000 & 0 & 0 & -1250000 & 0 & 0 \\ 0 & 8496.18 & 25488.53 & 0 & -8496.18 & 0 \\ 0 & 25488.53 & 76465.59 & 0 & -25488.53 & 0 \\ -1250000 & 0 & 0 & 1250000 & 0 & 0 \\ 0 & -8496.18 & -25488.53 & 0 & 8496.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz rigidez elástica de la barra 4 expresada en ejes generales:

$$k_{E4} = \begin{bmatrix} 3011.76 & 0 & 7529.411 & -3011.76 & 0 & 7529.411 \\ 0 & 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 \\ 7529.411 & 0 & 25223.53 & -7529.411 & 0 & 12423.53 \\ -3011.76 & 0 & -7529.411 & 3011.76 & 0 & -7529.411 \\ 0 & -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 \\ 7529.411 & 0 & 12423.53 & -7529.411 & 0 & 25223.53 \end{bmatrix}$$

1.1.6.4 – Matriz rigidez de toda la estructura en ejes generales:

Dicha estructura está formada por cuatro barras y por cinco nudos, por tanto habrá cuatro matrices rigidez y la Matriz Rigidez de toda la Estructura será de orden 15 x 15. Se conoce que la matriz rigidez de una barra se puede particionar de la siguiente manera:

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{OO}^i & K_{OD}^i \\ K_{DO}^i & K_{DD}^i \end{bmatrix}$$

En base a lo anterior las matrices rigidez de nuestra estructura analizada serán:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix}; K_2 = \begin{bmatrix} K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}; K_3 = \begin{bmatrix} K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix}; K_4 = \begin{bmatrix} K_{33}^5 & K_{35}^5 \\ K_{53}^5 & K_{55}^5 \end{bmatrix}$$

Para garantizar la necesaria continuidad o compatibilidad de los desplazamientos es necesario definir la forma y orden en que se ensamblarán estas tres matrices para lo cual se seguirá el siguiente proceder:

Aporte a k de la barra 1.

$$k = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & \Theta & \Theta & \Theta \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Añadiendo a k el aporte de la barra 2.

$$k = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & \Theta & \Theta & \Theta \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & \Theta & \Theta \\ \Theta & K_{32}^2 & K_{33}^2 & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Añadiendo a k el aporte de la barra 3.

$$k = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & \Theta & \Theta & \Theta \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & \Theta & \Theta \\ \Theta & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^3 & \Theta \\ \Theta & \Theta & K_{43}^3 & K_{44}^3 & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Añadiendo a k el aporte de la barra 4.

$$k = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & \Theta & \Theta & \Theta \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & \Theta & \Theta \\ \Theta & K_{32}^2 & K_{33}^2 + K_{33}^3 + K_{33}^4 & K_{34}^3 & K_{35}^4 \\ \Theta & \Theta & K_{43}^3 & K_{44}^3 & \Theta \\ \Theta & \Theta & K_{53}^4 & \Theta & K_{55}^4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Aporte a k de la barra 1.

$$k = \begin{bmatrix} 3011.76 & 0 & -7529.411 & -3011.76 & 0 & -7529.411 & & & \\ 0 & 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 & \ominus & \ominus & \ominus \\ -7529.411 & 0 & 25223.53 & 7529.411 & 0 & 12423.53 & & & \\ -3011.76 & 0 & 7529.411 & 3011.76 & 0 & 7529.411 & & & \\ 0 & -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 & \ominus & \ominus & \ominus \\ -7529.411 & 0 & 12423.53 & 7529.411 & 0 & 25223.53 & & & \\ & & & & & & \ominus & \ominus & \ominus \\ & & & & & & \ominus & \ominus & \ominus \\ & & & & & & \ominus & \ominus & \ominus \end{bmatrix}$$

Aporte a k de la barra 2.

$$k = \begin{bmatrix} 3011.76 & 0 & -7529.411 & -3011.76 & 0 & -7529.411 & & & & & & & \\ 0 & 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 & & & \ominus & & \ominus & \ominus & \\ -7529.411 & 0 & 25223.53 & 7529.411 & 0 & 12423.53 & & & & & & & \\ -3011.76 & 0 & 7529.411 & 628011.76 & 0 & 7529.411 & -625000 & & & & & & \\ 0 & -480000 & 0 & 0 & 484248.1 & 12744.27 & & -4248.1 & 12744.27 & \ominus & \ominus & & \\ -7529.411 & 0 & 12423.53 & 7529.411 & 12744.27 & 76477.16 & & -12744.27 & 25211.96 & & & & \\ & & & -625000 & & & 625000 & & & & & & \\ & & & & -4248.1 & -12744.27 & & 4248.1 & -12744.27 & \ominus & \ominus & & \\ & & & & 12744.27 & 25211.96 & & -12744.27 & 51253.63 & & & & \\ & & & & & & & & & \ominus & \ominus & & \\ & & & & & & & & & \ominus & \ominus & & \\ & & & & & & & & & \ominus & \ominus & & \end{bmatrix}$$

Aporte a k de la barra 3.

k =	3011.76	0	-7529.411	-3011.76	0	-7529.411								
	0	480000	0	0	-480000	0								
	-7529.411	0	25223.53	7529.411	0	12423.53								
	-3011.76	0	7529.411	628011,76	0	7529.411	-625000	0	0					
	0	-480000	0	0	484248.1	12744.27	0	-4248.1	12744.27					
	-7529.411	0	12423.53	7529.411	12744.27	76477,16	0	-12744.27	25211.96					
				-625000	0	0	1730000	0	0	-1250000	0	0		
		⊖		0	-4248.1	-12744.27	0	12744,28	12744.26	0	-8496.18	0	⊖	
				0	12744.27	25211.96	0	12744.26	127719,22	0	-25488.53	0		
							-1250000	0	0	1250000	0	0		
							0	-8496.18	-25488.53	0	8496.18	0	⊖	
							0	0	0	0	0	0		

1.1.6.5 – Formación del vector P. Cargas externas en los nudos.

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2 \\ \tilde{\mathbf{P}}_3 \\ \tilde{\mathbf{P}}_4 \\ \tilde{\mathbf{P}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \end{array} \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -28 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ 0 \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \end{bmatrix} \quad (1.1.6.3)$$

1.1.6.6 – Formación del vector Z. Desplazamientos extremos en los nudos.

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_1 \\ \tilde{\mathbf{Z}}_2 \\ \tilde{\mathbf{Z}}_3 \\ \tilde{\mathbf{Z}}_4 \\ \tilde{\mathbf{Z}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{10} \\ Z_{11} \\ Z_{12} \\ Z_{13} \\ Z_{14} \\ Z_{15} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} \end{array} \quad \tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ 0 \\ 0 \\ Z_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.6.3)$$

1.1.6.7 – Formación del Vector P_e . Fuerzas de Empotramiento o Momentos de Extremos Fijos. MEF.

Fuerzas de Empotramiento en la Barra 1:

$$\tilde{P}_{E1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \\ 0 \\ 8 \\ -10 \end{bmatrix}$$

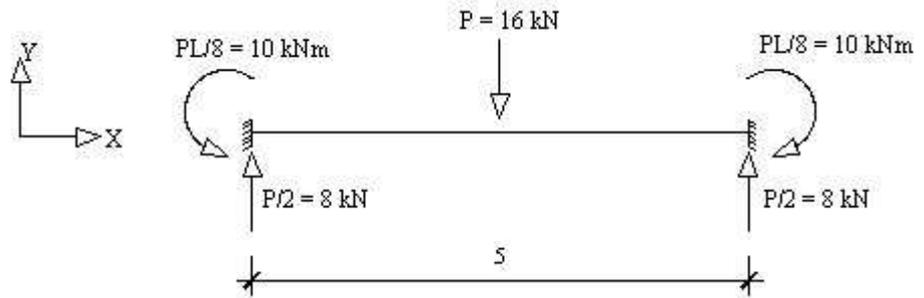


Fig. 1.32. MEF

El vector P_{E1} debe ser expresado en ejes generales, y por lo tanto se procede a su rotación:

$$P_{E1} = R_1 \tilde{P}_{E1} \quad (1.1.6.4)$$

$$P_{E1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \\ 0 \\ 8 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 10 \\ -8 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \end{array} \right\}$$

Fuerzas de Empotramiento en la Barra 2:

$$\tilde{P}_{E2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ 60 \\ 0 \\ 60 \\ -60 \end{bmatrix}$$

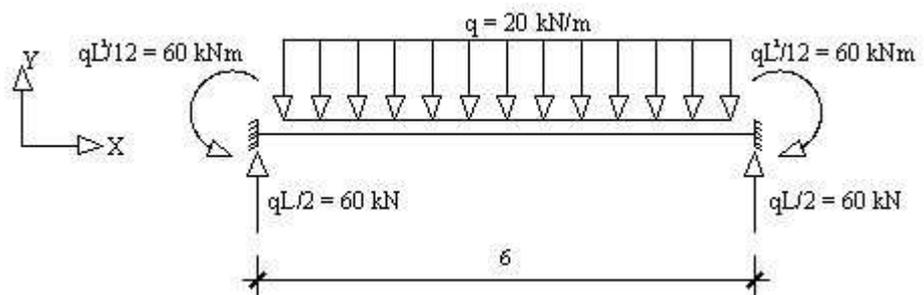


Fig. 1.33. MEF

El vector P_{E2} debe ser expresado en ejes generales, y por lo tanto se procede a su rotación:

$$P_{E2} = R_2 \tilde{P}_{E2} \quad (1.1.6.5)$$

$$P_{E2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \Theta & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & \Theta & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 60 \\ 60 \\ 0 \\ 60 \\ -60 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 60 \\ 60 \\ 0 \\ 60 \\ -60 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \end{array} \right\}$$

Fuerzas de Empotramiento en la Barra 3:

$$\tilde{P}_{E3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 28.125 \\ 16.875 \\ 0 \\ 16.875 \\ 0 \end{bmatrix}$$

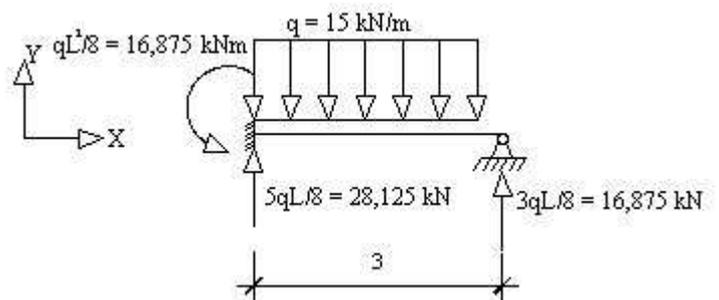


Fig. 1.33. MEF

El vector P_{E3} debe ser expresado en ejes generales, y por lo tanto se procede a su rotación:

$$P_{E3} = R_3 \tilde{P}_{E3} \quad (1.1.6.6)$$

$$P_{E3} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \Theta & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & \Theta & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 28.125 \\ 16.875 \\ 0 \\ 16.875 \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 28.125 \\ 16.875 \\ 0 \\ 16.875 \\ 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \end{array} \right\}$$

Fuerzas de Empotramiento en la Barra 4:

$$\tilde{P}_{E4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.38 \\ -6.38 \\ 0 \\ -39.38 \\ 20.96 \end{bmatrix}$$

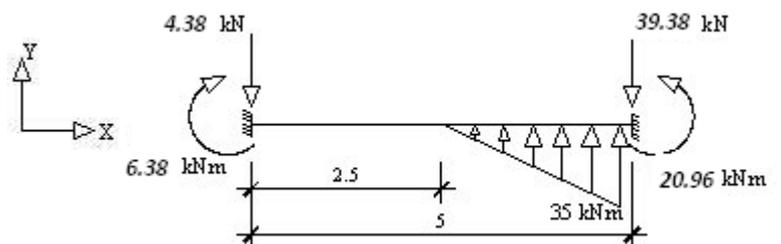


Fig. 1.34. MEF

El vector P_{E3} debe ser expresado en ejes generales, y por lo tanto se procede a su rotación:

$$P_{E4} = R_4 \tilde{P}_{E4} \quad (1.1.6.7)$$

$$P_{E4} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & \Theta & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 \\ & \Theta & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} 0 \\ -4.38 \\ -6.38 \\ 0 \\ -39.38 \\ 20.96 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -4.38 \\ 0 \\ -6.38 \\ -39.38 \\ 0 \\ 20.96 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\}$$

Para obtener el P_E de toda la estructura es necesario sumar algebraicamente los P_E del nudo 2 de la barra 1 con los de la barra 2 ya que ambas coinciden en el nudo 2, también en el nudo 3 sumar los de la barra 2 con los de la barra 3 y con los de la barra 4 ya que ambas coinciden en el nudo 3.

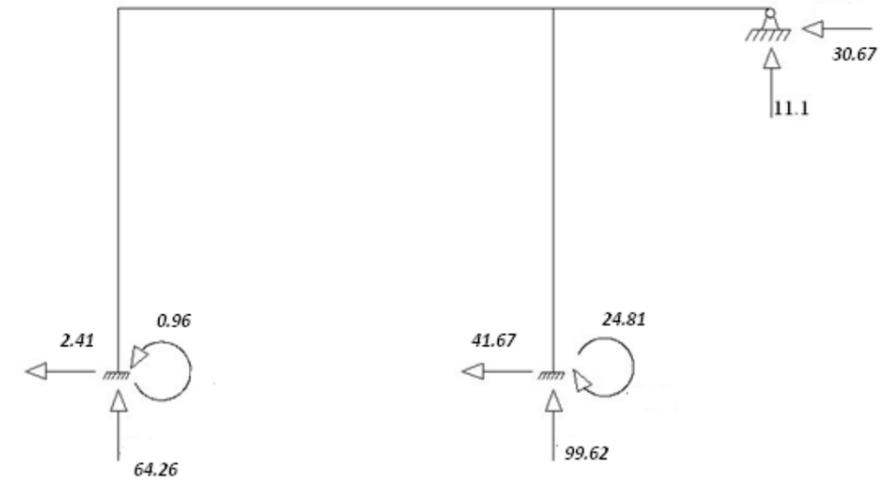
$$P_E = \left[\begin{array}{c} -8 \\ 0 \\ 10 \\ \hline -8 \\ 0 + 60 \\ -10 + 60 \\ \hline 0 + -4.38 \\ 60 + 28.125 \\ -60 + 16.875 - 6.38 \\ \hline 0 \\ 16.875 \\ 0 \\ \hline -39.38 \\ 0 \\ 20.96 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} -8 \\ 0 \\ 10 \\ \hline -8 \\ 60 \\ 50 \\ \hline -4.38 \\ 88.125 \\ -49.51 \\ \hline 0 \\ 16.875 \\ 0 \\ \hline -39.38 \\ 0 \\ 20.96 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \text{Nudo 2} \\ \text{Nudo 3} \\ \text{Nudo 4} \\ \text{Nudo 5} \end{array} \right\}$$

1.1.6.8 – Planteamiento de la Ecuación:

$$k\tilde{Z} = \tilde{P} - \tilde{P}_E \quad (1.1.6.8)$$

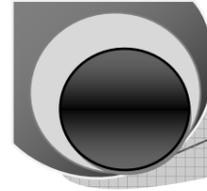
k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	*	0	=	$P_1 + 8$
k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}		0		P_2
k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}		0		$P_3 - 10$
k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}		Z_4		$15 + 8$
k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}		Z_5		$-10 - 60$
						Z_6	-50	
						Z_7	4.38	
						Z_8	-88.125	
						Z_9	$-28 + 49.51$	
						0	P_{10}	
						0	$P_{11} - 16.875$	
						Z_{12}	0	
						0	$P_{13} + 39.38$	
						0	P_{14}	
						0	$P_{15} - 20.96$	

Resolviendo el Sistema de Ecuaciones tenemos:



1.1.6.9 – Desplazamientos en los extremos de las barras en ejes locales:

1.1.6.10 – Fuerzas Interiores en los extremos de las barras en ejes locales:



CAPITULO 2

ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN DE ESTRUCTURAS RETICULARES. PÉRDIDA DE ESTABILIDAD

En los cuerpos elásticos, así como en los cuerpos rígidos, se pueden distinguir dos tipos de equilibrio, estable o inestable.

Supongamos que un sistema elástico fue sometido a cierta desviación respecto a su posición de equilibrio. Si al eliminar la carga el sistema vuelve a ocupar su posición inicial, este equilibrio se le llama estable. Si el sistema no vuelve a ocupar su posición inicial, este equilibrio se llama inestable.

En condiciones normales siempre existen causas por la que el sistema se desvía de la posición de equilibrio. Es por eso que ningún sistema puede permanecer durante mucho tiempo en un equilibrio inestable. Siempre tiene lugar el paso relativamente rápido a una nueva forma de equilibrio. En este caso se dice que ha habido una pérdida de estabilidad.

Un sistema que pierde la estabilidad puede comportarse de distintas maneras. Generalmente el sistema pasa a ocupar una nueva forma de equilibrio estable. Este paso en la mayoría de los casos va acompañado de grandes desplazamientos, del surgimiento de grandes deformaciones plásticas o de la destrucción completa del sistema. En algunos casos, al perder la estabilidad, la estructura sigue trabajando y cumple como antes sus funciones básicas, como por ejemplo la placa delgada que cubre la estructura de los aviones. Pueden ocurrir, por último, casos en los cuales el sistema, después de perder la estabilidad y de no encontrar otra forma estable, permanece oscilando sin amortiguamiento. El fenómeno de pérdida de estabilidad en el caso de cuerpos elásticos se puede observar en toda una serie de ejemplos.

El ejemplo más simple es la pérdida de estabilidad de una barra comprimida axialmente. La forma rectilínea de equilibrio de la barra comprimida es estable solamente mientras la carga no pase de cierto valor que se le llama crítico. Cuando la carga aplicada es mayor que la carga crítica, la barra no puede mantener largo tiempo su forma rectilínea y se combe. Entonces es cuando tiene lugar la pérdida de estabilidad.

2.1 – Introducción al Análisis de Segundo Orden.

El comportamiento no lineal de las estructuras se debe en general a:

- ✓ Al material del que se componen los electos de la estructura que presenta un comportamiento no lineal en su ley tensión-deformación, es decir el material no es linealmente elástico sino plástico o visco elástico.
- ✓ Las deformaciones alcanzan valores tales que originan cambios considerables en la geometría de la estructura, de modo que las ecuaciones de equilibrio hay que referenciarlas al estado deformado y no al no deformado como ocurre en el análisis lineal.

En nuestro trabajo nos centraremos en el análisis no lineal debido al cambio de geometría de la estructura.

Existen tres técnicas fundamentales:

- 1- Uso de la matriz rigidez elástica K_E obtenida en el análisis lineal más una matriz rigidez geométrica K_G .
- 2- Uso de la matriz rigidez elástica K_E afectando sus términos de algunos coeficientes que toman en cuenta el efecto de la fuerza axial.
- 3- Análisis mediante iteraciones del equilibrio de la estructura deformada.

En nuestro trabajo nos centraremos en la primera técnica.

2.2 – Pórtico Plano. Estudio de la Barra Plana.

2.2.1 – Deducción de la matriz Geométrica.

- Planteamiento del Problema:

Cálculo de la rigidez geométrica de una barra prismática, de eje recto, tomando en cuenta la influencia de la fuerza cortante y de la fuerza axial en las deformaciones transversales.

Sea la barra de eje recto AB de la Fig. 2.1a solicitada como se indica; en la Fig. 2.1b se muestra la misma barra deformada y se indican los corrimientos generalizados u_1, u_2, u_3 , siendo u_2 y u_3 independientes entre sí ya que tiene en cuenta la deformación por fuerza cortante; en la Fig. 2.1c se indica un elemento diferencial de la misma barra después de la deformación.

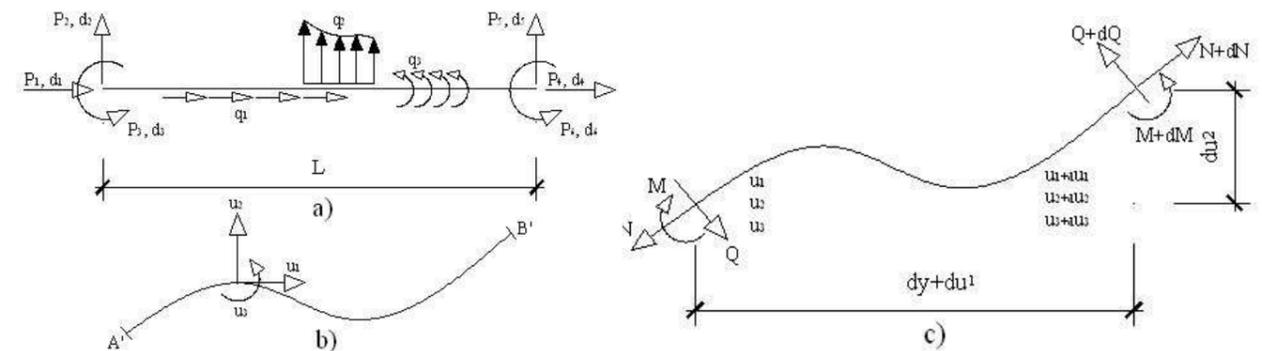


Fig. 2.1

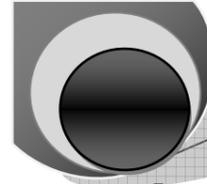
Las cargas y desplazamientos en los extremos de la barra pueden ordenarse:

$$(2.2.1.1)$$

$$(2.2.1.2)$$

Las cargas distribuidas:

$$(2.2.1.3)$$



Las solicitaciones de una sección genérica:

$$\tilde{S}^t = \langle N, Q, M \rangle \quad (2.2.1.4)$$

- Ecuaciones de Campo:

Ecuaciones de Equilibrio:

Se supone que u_3 es tan pequeño que $u_3^2 < 1$, y por tanto, se pueden hacer las siguientes modificaciones:

$$\begin{aligned} \cos u_3 &= 1 - u_3^2/2 = 1 \\ \text{sen } u_3 &= u_3 \\ \cos (u_3 + du_3) &= 1 - u_3^2/2 - u_3 du_3 = 1 - u_3 du_3 \\ \text{sen } (u_3 + du_3) &= u_3 + du_3 - u_3^2 du_3/2 = u_3 + du_3 \end{aligned} \quad (2.2.1.5)$$

De la fig. 2.1 puede establecerse :

$$dy q_1 = - N \cos(u_3 + du_3) - dN \cos(u_3 + du_3) + N \cos(u_3) + Q \text{sen}(u_3 + du_3) + dQ \text{sen}(u_3 + du_3) - Q \text{sen}(u_3) \quad (2.2.1.6)$$

$$dy q_2 = N \text{sen}(u_3) - N \text{sen}(u_3 + du_3) - dN \text{sen}(u_3 + du_3) + Q \cos(u_3) - Q \text{sen}(u_3 + du_3) - dQ \text{sen}(u_3 + du_3) \quad (2.2.1.7)$$

$$dy q_3 = - N \text{sen} u_3 (dy + du_1) + N \cos u_3 (du_2) - Q \cos u_3 (dy + du_1) - Q \text{sen} u_3 (du_2) + M - M - dM \quad (2.2.1.8)$$

Sustituyendo 2.2.1.1 y despreciando los términos de orden superior se obtiene:

$$q_1 = - \frac{dN}{dy} + u_3 \frac{dQ}{dy} + Q \frac{du_3}{dy} \quad (2.2.1.9)$$

$$q_2 = - \frac{dQ}{dy} + N \frac{du_3}{dy} - u_3 \frac{dN}{dy} \quad (2.2.1.10)$$

$$q_3 = - \frac{dM}{dy} - Q + N \frac{du_2}{dy} - Nu_3 - Q \frac{du_1}{dy} \quad (2.2.1.11)$$

- Ecuaciones Geométricas:

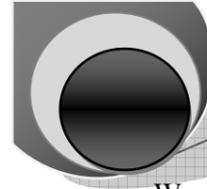
Las deformaciones son:

$$\delta' = \langle \varepsilon \ \gamma \ \kappa \rangle \quad (2.2.1.12)$$

Siendo $\varepsilon \ \gamma \ \kappa$ las deformaciones axial, de cortante y la curvatura respectivamente.

La relación entre las deformaciones δ y los corrimientos u puede establecerse aplicando desplazamientos virtuales $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$ al elemento dy . Es claro que:

$$(2.2.1.13)$$



$$W_e = W_i$$

Siendo:

W_e : Trabajo virtual dado por las fuerzas extremas en los desplazamientos virtuales $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$.

W_i : Trabajo virtual dado por las acciones internas N, Q, M , en los desplazamientos correspondientes $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta \kappa$.

$$q_1 \delta u_1 dy + q_2 \delta u_2 dy + q_3 \delta u_3 dy = (N \delta \epsilon + Q \delta \gamma + M \delta \kappa) dy \quad (2.2.1.14)$$

Introduciendo los valores de q (2.2.1.9 a 2.2.1.10) en 2.2.1.14, integrando para toda la longitud de la barra y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_A^B q_1 \delta u_1 dy + \int_A^B q_2 \delta u_2 dy + \int_A^B q_3 \delta u_3 dy + [Q \delta u_2]_A^B - [Q u_3 \delta u_1]_A^B + [N \delta u_1]_A^B + [N u_3 \delta u_2]_A^B + [M \delta u_3]_A^B \\ & = \int_A^B N \delta \left(\frac{du_1}{dy} \right) dy - \int_A^B N \delta \left(\frac{du_3^2}{2} \right) dy + \int_A^B N \delta \left(du_3 \frac{du_2}{dy} \right) dy + \int_A^B Q \delta \left(\frac{du_2}{dy} \right) dy - \int_A^B Q \delta \delta_3 dy - \int_A^B Q \delta \left(du_3 \frac{du_1}{dy} \right) dy \\ & + \int_A^B M \delta \left(\frac{du_3}{2} \right) dy \end{aligned} \quad (2.2.1.15)$$

El primer miembro de 2.2.1.15 representa el trabajo de las fuerzas exteriores en la viga AB y el segundo el de las acciones interiores S; por lo tanto es inmediato que:

$$\epsilon = \frac{du_1}{dy} - \frac{u_3^2}{2} + u_3 \frac{du_2}{dy} \quad (2.2.1.16)$$

$$\gamma = \frac{du_2}{dy} - u_3 - u_3 \frac{du_1}{dy} \quad (2.2.1.17)$$

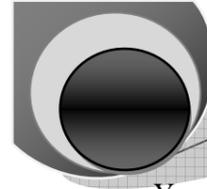
$$\kappa = \frac{du_3}{dy} \quad (2.2.1.18)$$

Como es lógico, a partir de las ecuaciones geométricas (2.2.1.16 a 2.2.1.18) pueden obtenerse las de equilibrio correspondientes (2.2.1.9 a 2.2.1.11) en forma totalmente similar, aplicando ahora desplazamientos virtuales $\delta \epsilon, \delta \gamma, \delta \kappa$.

Por ejemplo de 2.2.1.16:

$$\delta \epsilon = \delta \left(\frac{du_1}{dy} \right) - \delta \left(\frac{du_3^2}{2} \right) + \delta \left(du_3 \frac{du_2}{dy} \right) = \delta \left(\frac{du_1}{dy} \right) - u_3 \delta u_3 + u_3 \delta \left(\frac{du_2}{dy} \right) + \frac{du_2}{dy} \delta u_3 \quad (2.2.1.19)$$

$$\therefore \int_A^B N \delta \epsilon dy = \int_A^B N \frac{d}{dy} \delta u_1 dy - \int_A^B N u_3 \delta u_3 dy + \int_A^B N u_3 \frac{d}{dy} (\delta u_2) dy - \int_A^B N \frac{du_2}{dy} \delta u_3 dy \quad (2.2.1.20)$$



Y realizando las integrales:

$$\int_A^B N \delta \varepsilon dy = [N \delta u_1]_A^B - \int_A^B (\delta u_1) \frac{dN}{dy} dy - \int_A^B (\delta u_3) N u_3 dy + [N u_3 \delta u_2]_A^B - \int_A^B (\delta u_2) N \frac{du_3}{dy} dy - \int_A^B (\delta u_2) u_3 \frac{dN}{dy} dy + \int_A^B (\delta u_3) N du_2 dy \quad (2.2.1.21)$$

De modo similar, se obtiene:

$$\int_A^B Q \delta \gamma dy = [Q \delta u_2]_A^B - \int_A^B (\delta u_2) \frac{dQ}{dy} dy - \int_A^B (\delta u_3) Q dy - [Q u_3 \delta u_1]_A^B + \int_A^B (\delta u_1) Q \frac{du_3}{dy} dy + \int_A^B (\delta u_1) u_3 \frac{dQ}{dy} dy - \int_A^B (\delta u_3) Q \frac{du_1}{dy} dy \quad (2.2.1.22)$$

y

$$\int_A^B M \delta \kappa dy = [M \delta u_3]_A^B - \int_A^B (\delta u_3) \frac{dM}{dy} dy \quad (2.2.1.23)$$

Igualando estos trabajos al desarrollo por q_1, q_2, q_3 , podemos establecer:

$$\delta u_1 \left[-\frac{dN}{dy} + \frac{d}{dy} (Q u_3) \right] = q_1 \delta u_1 \quad (2.2.1.24)$$

$$\delta u_2 \left[-\frac{dQ}{dy} - \frac{d}{dy} (N u_3) \right] = q_2 \delta u_2 \quad (2.2.1.25)$$

$$\delta u_3 \left[-N u_3 + N \frac{du_2}{dy} - Q - Q \frac{du_1}{dy} - \frac{dM}{dy} \right] = q_3 \delta u_3 \quad (2.2.1.26)$$

$$q_1 = -\frac{dN}{dy} + \frac{d}{dy} (Q u_3) \quad (2.2.1.27)$$

$$q_2 = -\frac{dQ}{dy} - \frac{d}{dy} (N u_3) \quad (2.2.1.28)$$

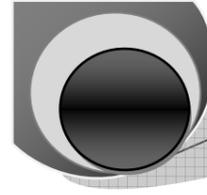
$$q_3 = -\frac{dM}{dy} - Q + N \frac{du_2}{dy} - N u_3 - Q \frac{du_1}{dy} \quad (2.2.1.29)$$

Ecuaciones idénticas a 2.2.1.9 a 2.2.1.11.

- Ecuaciones Físicas:

Las deformaciones δ y las acciones S están relacionadas por:

$$\varepsilon = \frac{N}{AE}; \gamma = \frac{Q}{AG} u = \frac{Q}{A_s G}; \kappa = \frac{M}{EI} \quad (2.2.1.30)$$



- **Energía de Deformación:**

La energía de deformación puede calcularse como:

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_A^B (N \varepsilon + Q \gamma + M \kappa) dy \right] \quad (2.2.1.31)$$

Sustituyendo 2.2.1.30 en 2.2.1.31:

$$U = \frac{1}{2} \left[AE \int_A^B \varepsilon^2 dy + A_s G \int_A^B \gamma^2 dy + EI \int_A^B \kappa^2 dy \right] \quad (2.2.1.32)$$

Introduciendo 2.2.1.16 a 2.2.1.18 en 2.2.1.32, eliminando términos de orden superior y agrupando, tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ AE \int_A^B \left(\frac{du_1}{dy} \right)^2 dy + A_s G \int_A^B \left[\left(\frac{du_2}{dy} \right)^2 + u_3^2 - 2u_3 \frac{du_2}{dy} \right] dy + EI \int_A^B \left(\frac{du_3}{2} \right)^2 dy + AE \left[\int_A^B \left(2u_3 \frac{du_1}{dy} \frac{du_2}{dy} - u_3^2 \frac{du_1}{dy} \right) dy \right] + A_s G \left[\int_A^B \left(2u_3^2 \frac{du_1}{dy} - 2u_3 \frac{du_2}{dy} \frac{du_1}{dy} \right) dy \right] \right\} \quad (2.2.1.33)$$

En la ecuación anterior los tres primeros términos del segundo miembro representan la energía de deformación si no se toma en cuenta el efecto de la fuerza axial en las deformaciones transversales.

- **Funciones de Interpolación.**

Los corrimientos generalizados “u” pueden relacionarse con los desplazamientos extremos “d” en una primera aproximación mediante los polinomios que se obtienen en el análisis lineal.

Las ecuaciones de equilibrio y geométricas correspondientes al análisis lineal pueden obtenerse fácilmente como:

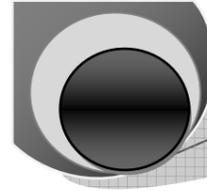
$$q_1 = -\frac{dN}{dy}; q_2 = -\frac{dQ}{dy}; q_3 = -\frac{dM}{dy} - Q \quad (2.2.1.34)$$

y

$$\varepsilon = \frac{du_1}{dy}; \gamma = \frac{du_2}{dy} - u_3; \kappa = \frac{du_3}{dy} \quad (2.2.1.35)$$

y a partir de éstos, haciendo $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ las ecuaciones diferenciales de los corrimientos u:

$$EA \frac{du_1^2}{dy^2} = 0 \quad (2.2.1.36)$$



$$A_s G \left(\frac{du_2^2}{dy^2} - \frac{du_3}{dy} \right) = 0 \text{ o' } A_s G \frac{d}{dy} \gamma = 0 \quad (2.2.1.37)$$

$$EI \frac{du_3^2}{dy^2} + A_s G \left(\frac{du_2}{dy} - u_3 \right) = 0 \quad (2.2.1.38)$$

Integrando las expresiones anteriores:

$$u_1 + ay + b = 0 \quad (2.2.1.39)$$

$$EIu_3 + \frac{A_s G}{2} \gamma y^2 + cy + d = 0 \quad (2.2.1.40)$$

$$u_2 = \gamma y - \frac{1}{EI} \left[\frac{A_s G}{G} \gamma y^3 + \frac{e}{2} y^2 + dy \right] + e \quad (2.2.1.41)$$

Donde:

a, b, c, d, e , son constantes de integración a determinar en cada caso. Haciendo:

$$\Phi = \frac{12EI}{A_s GL^2} \quad (2.2.1.42)$$

$$u_1 = -ay - b = 0 \quad (2.2.1.43)$$

$$u_2 = \gamma y - \frac{12}{\Phi A_s GL^2} \left[\frac{A_s G}{6} \gamma y^3 + \frac{c}{2} y^2 + dy \right] + e \quad (2.2.1.44)$$

$$u_3 = \frac{12}{\Phi A_s GL^2} \left[\frac{A_s G}{2} \gamma y^2 + cy + d \right] \quad (2.2.1.45)$$

A continuación se calculan los u para cada uno de los desplazamientos d .

A modo de ejemplo calcularemos u para d_1 y d_2

✓ Desplazamientos d_2 (mantenimiento impedidos el resto de d)

Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} y = 0: d_2 \neq 0, d_2 = d_3 = 0 \\ y = L_2: d_4 = d_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1.46)$$

De 2.2.1.43:

$$\begin{aligned} y = 0: u_1 = d_3 = 0 = d \\ y = L: u_1 = d_4 = 0; a = 0 \\ u_1 = 0 \quad d_4 \end{aligned} \quad (2.2.1.47)$$

De 2.2.1.45:

$$\begin{aligned} y = 0: u_3 = d_3 = 0 = d \\ y = L: u_3 = d_6 = 0 = \frac{A_s G}{2} \gamma L + cL = -\frac{A_s G}{2} \gamma L \end{aligned}$$

De 2.2.1.44:

$$y = 0: u_2 = d_5 = 0 = \gamma L - \frac{12}{\Phi A_s G L^2} \left(\frac{A_s G}{6} \gamma L^3 - \frac{A_s G}{4} L^3 \right) + d_2$$

$$\therefore \gamma = -\frac{\Phi}{(1+\Phi)L} d_2$$

$$c = \frac{A_s G}{2} \frac{\Phi}{(1+\Phi)} d_2 \quad (2.2.1.48)$$

$$\therefore u_2 = -\frac{\Phi}{(1+\Phi)L} d_2 y - \frac{12}{\Phi A_s G L^2} \left(\frac{A_s G}{6} \left(-\frac{\Phi}{(1+\Phi)L} d_2 \right) y^3 + \frac{A_s G}{4} \frac{\Phi}{(1+\Phi)} d_2 y^2 \right) + d_2$$

$$\text{Haciendo } \eta = \frac{y}{L}$$

$$u_2 = \frac{1}{(1+\Phi)} (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + (1+\eta)\Phi) d_2 \quad (2.2.1.49)$$

De la segunda de 2.2.1.35:

$$u_3 = \frac{du_2}{dy} - \gamma \quad (2.2.1.50)$$

Sustituyendo 2.2.1.48 y 2.2.1.49 en 2.2.1.50:

$$u_3 = \frac{1}{(1+\Phi)} (-6\eta + 6\eta^2) \frac{d_2}{L} \quad (2.2.1.51)$$

✓ Desplazamientos d_3 (mantenimiento impedidos el resto de d)

Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} y = 0: d_3 &> 0, \quad d_1 = d_2 = 0 \\ y = L: d_4 = d_5 = d_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1.52)$$

De 2.2.1.43 se obtiene inmediatamente:

$$u_1 = 0 \quad d_3 \quad (2.2.1.53)$$

De 2.2.1.45:

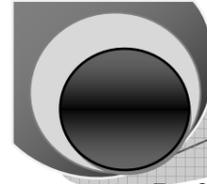
$$y = 0, u_3 = d_3 \quad (2.2.1.54)$$

$$d_3 = -\frac{12}{\Phi A_s G L^2} d; \therefore d = -\frac{\Phi A_s G L^2}{12} d_3$$

$$y = L: u_3 = d_6 = 0$$

$$0 = -\frac{12}{\Phi A_s G L^2} \left[\frac{\gamma A_s G L^2}{2} + cL - \frac{\Phi A_s G L^2}{12} d_3 \right]$$

$$\therefore c = -\frac{\Phi A_s G L}{12} d_3 - \frac{A_s G}{2} \gamma L \quad (2.2.1.55)$$



De 2.2.1.44:

$$y = 0: u_2 = d_2 = 0; \therefore e = 0$$

$$y = L: u_2 = d_5 = 0$$

$$0 = \gamma L - \frac{12}{\Phi A_s G L^2} \left[\frac{\gamma A_s G L^3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi A_s G L}{12} d_3 - \frac{A_s G}{2} \gamma L \right) L^2 - \frac{\Phi A_s G L^2}{12} L d_3 \right]$$

$$0 = \gamma L - \frac{2}{\Phi} \gamma L - \frac{1}{2} L d_3 + \frac{3}{\Phi} \gamma L + L d_3$$

$$\therefore \gamma = -\frac{\Phi}{2(1+\Phi)} d_3 \quad (2.2.1.56)$$

Sustituyendo 2.2.1.56 en 2.2.1.55:

$$c = \frac{\Phi A_s G L}{12} d_3 + \frac{A_s G}{2} \frac{\Phi}{2(1+\Phi)} L d_3 \quad (2.2.1.57)$$

Sustituyendo 2.2.1.54, 2.2.1.56 y 2.2.1.57 en 2.2.1.44 y teniendo en cuenta $\eta = \frac{y}{L}$ se obtiene:

$$u_2 = \frac{1}{(1+\Phi)} \left(\eta - 2\eta^3 + \eta^5 + \frac{1}{2}(\eta - \eta^2)\Phi \right) L d_3 \quad (2.2.1.58)$$

y de la segunda de 2.35:

$$u_3 = \frac{1}{(1+\Phi)} (1 - 4\eta + 3\eta^2 + \Phi(1 - \eta)) d_3 \quad (2.2.1.59)$$

Procediendo de forma similar se obtienen las funciones de interpolación indicadas en la tabla.

- **Matrices Rigidez:**

Los coeficientes de las matrices rigidez pueden obtenerse mediante el Teorema de Castigliano diferenciando la fórmula de la energía de deformación, en función de u_1 , u_2 y u_3 respecto a cada uno de los desplazamientos extremos d.

Sabemos que, en general:

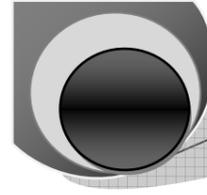
$$P_j = \frac{\partial U}{\partial d_j} (\forall j = d_1, d_2 \dots d_6) \quad (2.2.1.60)$$

Donde:

P_j : Reacciones en las ligaduras extremas, correspondientes a cada uno de los desplazamientos extremos.

Antes de calcular los valores dados por 2.2.1.60 conviene introducir la siguiente simplificación:

De la primera ecuación de la tabla 1



$$u_1 = (1 - \eta)d_1 + \eta d_4 \quad (2.2.1.61)$$

$$\therefore \frac{du_1}{dy} = \frac{1}{L}(d_4 - d_1) \quad (2.2.1.62)$$

$$\left(\frac{du_1}{dy}\right)^2 = \frac{1}{L^2}(d_4^2 + d_1^2 - 2d_4d_1) \quad (2.2.1.63)$$

Haciendo

$$\frac{AE}{L}(d_4 - d_1)P = \text{cte} \quad (2.2.1.64)$$

$$GAs = \frac{du_1}{dy} = \frac{PGAs}{AE} \quad (2.2.1.65)$$

Donde P es fuerza axial en la barra.

Sustituyendo 2.2.1.62 a 2.2.1.65 en 2.2.1.33 y ordenando, se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ AE \int_A^B \frac{1}{L^2} (d_4^2 + d_1^2 - 2d_4d_1) dy - AE \int_A^B u_3^2 \frac{P}{AE} dy + AE \int_A^B 2u_3 \frac{du_2}{dy} \frac{P}{AE} dy + GAs \int_A^B \left(\frac{du_2}{dy}\right)^2 dy + GAs \int_A^B u_3^2 dy \right. \\ \left. + GAs \int_A^B \left(-2u_3 \frac{du_2}{dy}\right) dy + GAs \int_A^B \left(-2u_3 \frac{du_2}{dy}\right) \frac{P}{AE} dy + GAs \int_A^B \left(2u_3^2 \frac{P}{AE} dy\right) \frac{P}{AE} dy + EI \int_A^B \left(\frac{du_3}{dy}\right)^2 dy \right\} \quad (2.2.1.66)$$

Ecuación que, en forma simplificada, podemos escribir:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ AE \int_A^B M - \frac{PAE}{AE} \int_A^B N + \frac{PAE}{AE} \int_A^B \tilde{N} + GAs \int_A^B O + GAs \int_A^B N + GAs \int_A^B -\tilde{N} + \frac{PGAs}{AE} \int_A^B -\tilde{N} + \frac{PGAs}{AE} \int_A^B 2N + EI \int_A^B Q \right\} \quad (2.2.1.67)$$

Siendo:

$$M = \frac{1}{L^2} (d_4^2 + d_1^2 - 2d_4d_1) dy$$

$$N = u_3^2 dy$$

$$\tilde{N} = 2u_3 \frac{du_2}{dy} dy$$

$$O = \left(\frac{du_2}{dy} \right)^2 dy$$

$$Q = \int_A^B \left(\frac{du_3}{dy} \right)^2 dy$$

Y la ecuación 2.2.1.60 quedará:

$$P_j = \frac{\partial U}{\partial j} = \frac{1}{2} \left\{ AE \int_A^B \frac{\partial M}{\partial j} - \frac{PAE}{AE} \int_A^B \frac{\partial N}{\partial j} + \frac{PAE}{AE} \int_A^B \frac{\partial \tilde{N}}{\partial j} + GAs \int_A^B \frac{\partial O}{\partial j} + GAs \int_A^B \frac{\partial N}{\partial j} + GAs \int_A^B \frac{\partial \tilde{N}}{\partial j} + \frac{PGAs}{AE} \int_A^B \frac{\partial \tilde{N}}{\partial j} + \frac{PGAs}{AE} \int_A^B 2 \frac{\partial N}{\partial j} + EI \int_A^B \frac{\partial Q}{\partial j} \right\} \quad (2.2.1.68)$$

A continuación, y a modo de ejemplo, calcularemos las reacciones P_1 y P_2 debidas a los desplazamientos d_1 y d_2 .

- Cálculo de P_1 :

$$\frac{\partial M}{\partial j} = \frac{1}{L^2} 2(d_1 - d_4) dy; \frac{\partial N}{\partial j} = 0; \frac{\partial \tilde{N}}{\partial j} = 0; \frac{\partial O}{\partial j} = 0; \frac{\partial Q}{\partial j} = 0$$

$$\int_A^B \frac{\partial M}{\partial j} = \frac{2}{L^2} (d_1 - d_4) dy$$

$$\therefore P_1 = \frac{AE}{L} (d_1 - d_4) + EI(0) + AsG(0) + \frac{PAsG}{AE} (0) \quad (2.2.1.69)$$

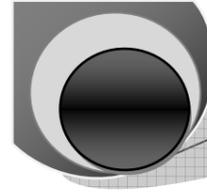
- Cálculo de P_2 :

Términos que son función de AE

$$\frac{\partial M}{\partial_2} = 0 \quad (2.2.1.70)$$

$$\frac{\partial N}{\partial_2} = 2u_3 \frac{du_3}{d_2} = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + (36\eta^2 + 36\eta^4 - 72\eta^3) \frac{1}{L^2} d_2 + [-6\eta + 30\eta^2 - 42\eta^3 + 18\eta^4 + (-6\eta + 12\eta^2 - 6\eta^3)\Phi] \frac{1}{L} d_3 + 0 d_4 + (-36\eta^2 - 36\eta^4 + 72\eta^3) \frac{1}{L^2} d_5 + [12\eta^2 - 30\eta^3 + 18\eta^4 + (-6\eta^2 + 6\eta^3)\Phi] \frac{1}{L} d_6 \right\} dy$$

$$\int_B^A \frac{\partial N}{\partial_2} = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \frac{6}{5L} d_2 + \left[\frac{1}{10} + \left(-\frac{1}{2} \Phi \right) \right] d_3 + \frac{1}{L} d_3 + 0 d_4 + \left(-\frac{6}{5L} \right) \frac{1}{L} d_5 + \left[\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{2} \Phi \right) \right] d_6 \right\} \quad (2.2.1.71)$$



$$\int_B^A \frac{\partial \tilde{N}}{\partial_2} = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + (72\eta^2 + 72\eta^4 - 144\eta^3 + 12\eta\Phi - 12\eta^2\Phi) d_2 + [-12\eta + 60\eta^2 - 84\eta^3 - 5\eta\Phi + 18\eta^3 + 36\eta^4 - 12\eta^3\Phi - \Phi - \Phi^2 + \eta\Phi^2] \frac{1}{L} d_3 + 0 d_4 + (-72\eta^2 - 72\eta^4 + 144\eta^3 - 12\eta\Phi + 12\eta^2\Phi) \frac{1}{L^2} d_5 + [24\eta^2 - 60\eta^3 - 12\eta^2\Phi + \eta\Phi + 36\eta^4 + 12\eta^3\Phi + \eta^2\Phi] \frac{1}{L^2} d_6 \right\}$$

$$\int_B^A \frac{\partial \tilde{N}}{\partial_2} = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \left(\frac{12}{5} + 2\Phi \right) \frac{1}{L} d_2 + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 \right] d_3 + 0 d_4 + \left[-\frac{12}{5} - 2\Phi \right] \frac{1}{L^2} d_5 + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 \right] d_6 \right\} \quad (2.2.1.72)$$

Sumando 2.2.1.70, 2.2.1.71 y 2.2.1.72:

$$P_2^{AE} = \frac{P}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \left(\frac{6}{5} + 2\Phi \right) \frac{1}{L} d_2 + \left[\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi^2 \right] d_3 + 0 d_4 + \left[-\frac{6}{5} - 2\Phi \right] \frac{1}{L^2} d_5 + \left[\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi^2 \right] d_6 \right\} \quad (2.2.1.73)$$

Términos que son función de GAs

$$\frac{\partial}{\partial_2} 0 = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + (36\eta^2 + 36\eta^4 + \Phi^2 - 72\eta^3 + 12\eta\Phi - 12\eta^2\Phi) \frac{1}{L^2} d_2 + [-6\eta + 30\eta^2 - 42\eta^3 + 18\eta^4 + \eta\Phi + 6\eta^2\Phi - 6\eta^3\Phi + \eta\Phi^2 - \Phi - \frac{\Phi^2}{2}] \frac{1}{L} d_3 + 0 d_4 + (-36\eta^2 - 36\eta^4 - \Phi^2 + 72\eta^3 - 12\eta\Phi + 12\eta^2\Phi) \frac{1}{L^2} d_5 + [12\eta^2 - 30\eta^3 + 5\eta\Phi - 12\eta^2\Phi + 18\eta^4 + 6\eta^3\Phi + \frac{\Phi^2}{2} - \eta\Phi^2] \frac{1}{L} d_6 \right\}$$

$$\int_B^A \frac{\partial}{\partial_2} 0 = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right) \frac{1}{L^2} d_2 + \left[\frac{1}{10} \right] d_3 + 0 d_4 + \left(-\frac{6}{5} - 2\Phi - \Phi^2 \right) \frac{1}{L^2} d_5 + \frac{1}{10} d_6 \right\} \quad (2.2.1.74)$$

$$\int_B^A \frac{\partial}{\partial_2} N = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \frac{6}{5} \frac{1}{L} d_2 + \left[\frac{1}{10} + \left(\frac{-\Phi}{2} \right) \right] d_3 + 0 d_4 - \frac{6}{5} \frac{1}{L} d_5 + \left[\frac{1}{10} - \left(\frac{\Phi}{2} \right) \right] d_6 \right\} \quad (2.2.1.75)$$

$$\int_B^A \frac{\partial}{\partial_2} \tilde{N} = \frac{-2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \left(\frac{12}{5} + 2\Phi \right) \frac{1}{L} d_2 + \left[\frac{1}{5} - \frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi^2}{2} \right] d_3 + 0 d_4 + \left(-\frac{12}{5} - 2\Phi \right) \frac{1}{L} d_5 + \left[\frac{1}{5} - \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi^2}{2} \right] d_6 \right\} \quad (2.2.1.76)$$

Sumando las tres expresiones anteriores:

$$P_2^{AE} = \frac{AsG}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \frac{\Phi^2}{L} d_2 + \frac{1}{2}\Phi^2 d_3 + 0 d_4 - \frac{\Phi^2}{L^2} d_5 + \frac{1}{2}\Phi^2 d_6 \right\} \quad (2.2.1.77)$$

$$\text{Pero: } AsG = \frac{12EI}{\Phi L^2}$$

Y la ecuación 2.2.1.77 queda:

$$P_2^{AE} = \frac{12EI}{(1+\Phi)^2 \Phi L^2} \left\{ 0 d_1 + \frac{\Phi^2}{L} d_2 + \frac{1}{2} \Phi^2 d_3 + 0 d_4 - \frac{\Phi^2}{L^2} d_5 + \frac{1}{2} \Phi^2 d_6 \right\} \quad (2.2.1.78)$$

A los valores anteriores de 2.2.1.78 habrá que sumarles los correspondientes al último término de 2.2.1.60:

$$\frac{\partial}{\partial_2} Q = \frac{2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + (36 - 144\eta + 144\eta^2) \frac{1}{L^4} d_2 + (24 - 84\eta + 6\Phi + 72\eta^2 - 12\eta\Phi) \frac{1}{L^3} d_3 + 0 d_4 + (-36 + 144\eta - 144\eta^2) \frac{1}{L^4} d_5 + (12 - 60\eta - 6\Phi + 72\eta^2 + 12\eta\Phi) \frac{1}{L^3} d_6 \right\}$$

$$\frac{1}{2} EI \int \frac{\partial}{\partial_2} Q = \frac{EI}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \frac{12}{L^3} d_2 + \frac{6}{L^2} d_3 + 0 d_4 - \frac{12}{L^3} d_5 + \frac{6}{L^2} d_6 \right\} \quad (2.2.1.79)$$

Sumando 2.2.1.78 y 2.2.1.79 se obtiene:

$$P_2^{EI} = \left\{ 0 d_1 + \frac{12EI}{(1+\Phi)L^3} d_2 + \frac{6EI}{(1+\Phi)L^2} d_3 + 0 d_4 - \frac{12EI}{(1+\Phi)L^2} d_5 + \frac{6EI}{(1+\Phi)L^2} d_6 \right\} \quad (2.2.1.80)$$

Términos en función de $\frac{AsG}{AE}$

$$-\int_B^A \frac{\partial}{\partial_2} \tilde{N} = \frac{-2}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \left(\frac{12}{5} + 2\Phi \right) \frac{1}{L} d_2 + \left[\frac{1}{5} - \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi^2}{2} \right] d_3 + 0 d_4 + \left(-\frac{12}{5} - 2\Phi \right) \frac{1}{L} d_5 + \left[\frac{1}{5} - \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi^2}{2} \right] d_6 \right\} \quad (2.2.1.81)$$

$$\int_B^A 2 \frac{\partial}{\partial_2} N = \frac{4}{(1+\Phi)^2} \left\{ 0 d_1 + \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right) \frac{1}{L} d_2 + \frac{1}{10} d_3 + 0 d_4 + \left(-\frac{6}{5} - 2\Phi - \Phi^2 \right) \frac{1}{L} d_5 + \frac{1}{10} d_6 \right\} \quad (2.2.1.82)$$

$$P_2^{\frac{AsG}{AE}} = \frac{AsG}{(1+\Phi)^2 AE} \left\{ 0 d_1 - 2\Phi \frac{1}{L} d_2 + \left(-\frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 \right) d_3 + 0 d_4 + 2\Phi \frac{1}{L} d_5 + \left(-\frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 \right) \Phi^2 d_6 \right\} \quad (2.2.1.83)$$

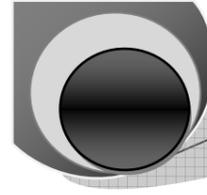
Procediendo de forma similar son los demás desplazamientos se obtienen los distintos valores de P_j , que pueden expresarse como:

$$P = K_E^\Phi d + K_{G1}^\Phi d + K_{G2}^\Phi d \quad (2.2.1.84)$$

Donde K_E^Φ , K_{G1}^Φ , K_{G2}^Φ son las matrices dadas en 2.2.1.86, 2.2.1.87 y 2.2.1.88

Si no se toma en cuenta la deformación producida por la fuerza cortante, la ecuación 2.2.1.84 se reduce a:

$$P = K_E^\Phi d + K_G^\Phi d \quad (2.2.1.85)$$



Donde K_E^Φ, K_G^Φ son las matrices de rigidez elástica y geométrica respectivamente.

El utilizar la ecuación 2.2.1.84 o la ecuación 2.2.1.86 depende del tipo de estructura. En general con 2.2.1.84 se obtiene bastante aproximadamente, excepto en las columnas ladeadas.

Funciones de Interpolación:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1+\Phi)} \begin{bmatrix} (1-\eta)(1+\Phi) & 0 & 0 \\ 0 & (1-3\eta^2+2\eta^3+(1-\eta)\Phi) & \left(\eta-2\eta^2+\eta^3+\frac{1}{2}(\eta-\eta^2)\Phi\right)L \\ 0 & (-6\eta+6\eta^2)\frac{1}{L} & 1-4\eta+3\eta^2+(1-\eta)\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta(1+\Phi) \\ 3\eta^2+2\eta^3+\eta\Phi \\ (6\eta-6\eta^2)\frac{1}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Donde: } \eta = \frac{y}{L}; \Phi = \frac{12EI}{GAsL^2}$$

Matriz Rigidez Elástica. Barra Plana.

$$K_E^\Phi = \frac{1}{(1+\Phi)} \begin{bmatrix} \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & \frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & \frac{(4+\Phi)EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & \frac{(2-\Phi)EIz}{L} \\ -\frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 & \frac{AE(1+\Phi)}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & \frac{12EIz}{L^3} & -\frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & \frac{(2-\Phi)EIz}{L} & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & \frac{(4+\Phi)EIz}{L} \end{bmatrix} \quad (2.2.1.86)$$

Matriz Rigidez Geométrica 1. Barra Plana.

$$K_{G1}^\Phi = \frac{P}{(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{5}+2\Phi\right)\frac{1}{L} & \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\Phi^2\right) & 0 & \left(-\frac{6}{5}-2\Phi\right)\frac{1}{L} & \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\Phi^2\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{15}+\frac{1}{6}\Phi-\frac{1}{2}\Phi^2\right)L & 0 & \left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\Phi^2\right) & \left(-\frac{1}{30}-\frac{1}{6}\Phi-\frac{1}{3}\Phi^2\right)L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{6}{5}-2\Phi\right)\frac{1}{L} & \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\Phi^2\right) & 0 & \left(\frac{6}{5}+2\Phi\right)\frac{1}{L} & \left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\Phi^2\right) \\ 0 & \left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\Phi^2\right) & \left(-\frac{1}{30}-\frac{1}{6}\Phi-\frac{1}{3}\Phi^2\right)L & 0 & \left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\Phi^2\right) & \left(\frac{2}{15}+\frac{1}{6}\Phi-\frac{1}{2}\Phi^2\right)L \end{bmatrix}$$

$$(2.2.1.87)$$

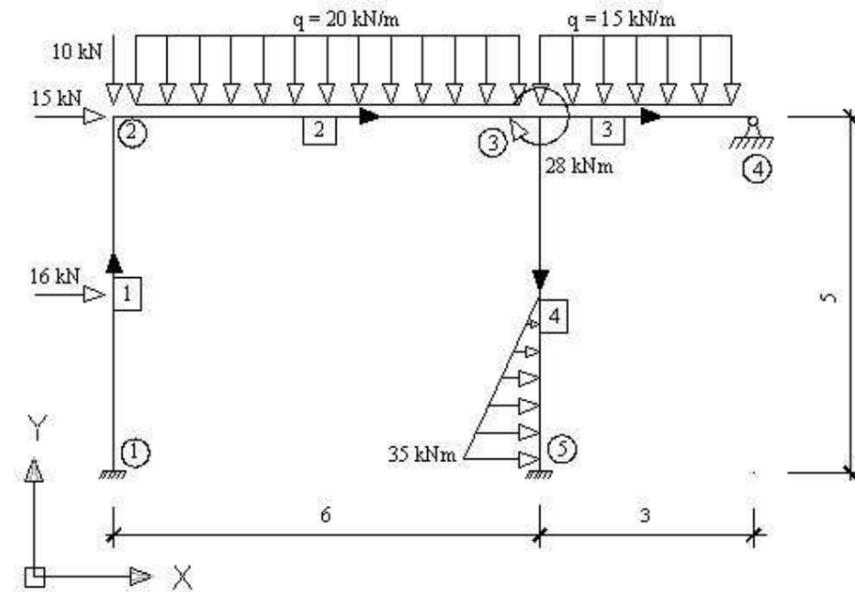
Matriz Rigidez Geométrica 2. Barra Plana.

(2.2.1.88)

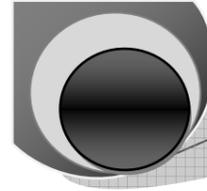
Matriz de Rigidez Geométrica de la Barra Plana teniendo en cuenta el efecto del Cortante: (2.87)

2.2.2 – Ejemplo Ilustrativo.

Realizar el Análisis no Lineal del pórtico de la figura:



En el Capítulo 1 se le realizó el análisis lineal a esta estructura y tomaremos los resultados para resolver nuestro problema.



Fuerzas Interiores en los extremos de las barras en ejes locales:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \begin{bmatrix} 64.28 \text{ kN} \\ 2.41 \text{ kN} \\ 0.95 \text{ kN} \\ -64.28 \text{ kN} \\ 13.588 \text{ kNm} \\ -28.90 \text{ kNm} \end{bmatrix} & \tilde{P}_2 &= \begin{bmatrix} 28.33 \text{ kN} \\ 54.26 \text{ kN} \\ 28.91 \text{ kN} \\ -28.33 \text{ kN} \\ 65.74 \text{ kNm} \\ -63.36 \text{ kNm} \end{bmatrix} & \tilde{P}_3 &= \begin{bmatrix} 30.31 \text{ kN} \\ 33.88 \text{ kN} \\ 34.12 \text{ kN} \\ -30.31 \text{ kN} \\ 11.12 \text{ kNm} \\ 0 \text{ kNm} \end{bmatrix} & \tilde{P}_4 &= \begin{bmatrix} 99.668 \text{ kN} \\ -2.082 \text{ kN} \\ -1.239 \text{ kN} \\ -99.668 \text{ kN} \\ -41.668 \text{ kNm} \\ 24.809 \text{ kNm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nota: Como se observa por los resultados todas las barras trabajan a compresión.

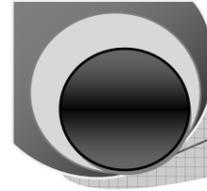
2.2.3 – Cálculo de la Matriz de Rigidez Geométrica de cada barra:

Como las barras 1, 2, 4 son empotradas – empotradas su matriz geométrica sin tener en cuenta el efecto de cortante es:

$$\bar{K}_{Gi} = P^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{15}L & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}L \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30}L & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}L \end{bmatrix}$$

Barra 1. Para P = - 64.28 kN (fuerza axial a compresión)

$$\bar{K}_{G1} = -64.28 \text{ kN} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & 0.1 & 0 & -0.24 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.67 & 0 & -0.1 & -0.17 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 & -0.1 & 0 & 0.24 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.17 & 0 & -0.1 & 0.67 \end{bmatrix}$$



Barra 2. Para P = -28.33 kN (fuerza axial a compresión)

$$\bar{K}_{G2} = -28.33 \text{ kN} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0 & -0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & 0 & -0.1 & -0.2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.2 & 0 & -0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Barra 4. Para P = -99.68 kN (fuerza axial a compresión)

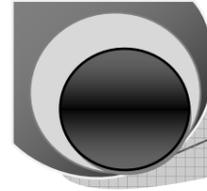
$$\bar{K}_{G4} = -99.68 \text{ kN} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.24 & 0.1 & 0 & -0.24 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.67 & 0 & -0.1 & -0.17 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.24 & -0.1 & 0 & 0.24 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.17 & 0 & -0.1 & 0.67 \end{bmatrix}$$

Como las barras 3 es empotradas – articulada su matriz geométrica sin tener en cuenta el efecto de cortante es:

$$\bar{K}_{Gi} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{L}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 3. Para P = -30.31kN (fuerza axial a compresión)

$$\bar{K}_{G3} = -30.31 \text{ kN} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.38 & 0.13 & 0 & -0.38 & 0 \\ 0 & 0.13 & 0.38 & 0 & -0.13 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.38 & -0.13 & 0 & 0.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



2.2.4 – Suma de la Rigidez Elástica y la Geométrica de cada Barra:

Sumando la rigidez elástica obtenida en el capítulo 1 con la rigidez geométrica obtenida anteriormente tenemos:

Matriz Rigidez de la Barra 1:

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 & 0 \\ 0 & 2996.34 & 7522.98 & 0 & -2996.34 & 7522.98 \\ 0 & 7522.98 & 25180.68 & 0 & -7522.98 & 12434.24 \\ -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 & 0 \\ 0 & -2996.34 & -7522.98 & 0 & 2996.34 & -7522.98 \\ 0 & 7522.98 & 12434.24 & 0 & -7522.98 & 25193.66 \end{bmatrix}$$

Rotando la Matriz K_1 tenemos:

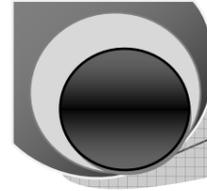
$$K_1 = \begin{bmatrix} 2996.34 & 0 & -7522.98 & -2996.34 & 0 & -7522.98 \\ 0 & 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 \\ -7522.98 & 0 & 25180.68 & 7522.98 & 0 & 12430.99 \\ -2996.34 & 0 & 7522.98 & 2996.34 & 0 & 7522.98 \\ 0 & -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 \\ -7522.98 & 0 & 12430.99 & 7522.98 & 0 & 25180.68 \end{bmatrix}$$

Matriz Rigidez de la Barra 2:

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 625000 & 0 & 0 & -625000 & 0 & 0 \\ 0 & 4242.42 & 12741.43 & 0 & -4242.42 & 12741.43 \\ 0 & 12741.43 & 51230.97 & 0 & -12741.43 & 25217.63 \\ -625000 & 0 & 0 & 625000 & 0 & 0 \\ 0 & -4242.42 & -12741.43 & 0 & 4242.42 & -12741.43 \\ 0 & 12741.43 & 25217.63 & 0 & -12741.43 & 51230.97 \end{bmatrix}$$

Rotando la Matriz K_{E2} tenemos:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 625000 & 0 & 0 & -625000 & 0 & 0 \\ 0 & 4242.42 & 12741.43 & 0 & -4242.42 & 12741.43 \\ 0 & 12741.43 & 51230.97 & 0 & -12741.43 & 25217.63 \\ -625000 & 0 & 0 & 625000 & 0 & 0 \\ 0 & -4242.42 & -12741.43 & 0 & 4242.42 & -12741.43 \\ 0 & 12741.43 & 25217.63 & 0 & -12741.43 & 51230.97 \end{bmatrix}$$



Matriz Rigidez de la Barra 3:

$$\bar{K}_3 = \begin{bmatrix} 1250000 & 0 & 0 & -1250000 & 0 & 0 \\ 0 & 8507.54 & 25492.32 & 0 & -8507.54 & 0 \\ 0 & 25492.32 & 76476.96 & 0 & -25492.32 & 0 \\ -1250000 & 0 & 0 & 1250000 & 0 & 0 \\ 0 & -8507.54 & -25492.32 & 0 & 8507.54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotando la Matiz K_{E3} tenemos:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1250000 & 0 & 0 & -1250000 & 0 & 0 \\ 0 & 8507.54 & 25492.32 & 0 & -8507.54 & 0 \\ 0 & 25492.32 & 76476.96 & 0 & -25492.32 & 0 \\ -1250000 & 0 & 0 & 1250000 & 0 & 0 \\ 0 & -8507.54 & -25492.32 & 0 & 8507.54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

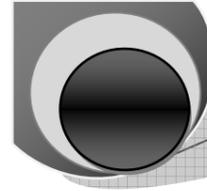
Matriz Rigidez de la Barra 4:

$$\bar{K}_4 = \begin{bmatrix} 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 & 0 \\ 0 & 2987.84 & 7519.44 & 0 & -2987.84 & 7519.44 \\ 0 & 7519.44 & 25157.08 & 0 & -7519.44 & 12440.14 \\ -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 & 0 \\ 0 & -2987.84 & -7519.44 & 0 & 2987.84 & -7519.44 \\ 0 & 7519.44 & 12440.14 & 0 & -7519.44 & 25157.08 \end{bmatrix}$$

Rotando la Matiz K_{E4} tenemos:

$$K_4 = \begin{bmatrix} 2987.84 & 0 & -7519.44 & -2987.84 & 0 & -7519.44 \\ 0 & 480000 & 0 & 0 & -480000 & 0 \\ -7519.44 & 0 & 25157.08 & 7519.44 & 0 & 12440.14 \\ -2987.84 & 0 & 7519.44 & 2987.84 & 0 & 7524.93 \\ 0 & -480000 & 0 & 0 & 480000 & 0 \\ -7519.44 & 0 & 12440.14 & 7519.44 & 0 & 25157.08 \end{bmatrix}$$

Como se muestra la mayoría de los términos de la matriz rigidez de cada barra, estos disminuyeron sus valores debido a que están sometidas a un esfuerzo de compresión.



Después de ensamblar la Matriz Rigidez de toda la estructura, formar y rotar el vector de Momentos de Extremos Fijos, formar los vectores de los desplazamientos y fuerzas nodales y conformar el sistema de ecuaciones como se ha mostrado en el capítulo 1, se obtienen los resultados.

Este proceso de afectar la rigidez de cada barra sumándole una geométrica se realiza hasta que las deformaciones entre una iteración y otra sean lo más próximas posible.

Además de mostrar los resultados de esta iteración mostraremos unas iteraciones más para ver el comportamiento de las deformaciones nodales y de las solicitaciones nodales de cada barra.

Desplazamientos en los extremos de las barras en ejes locales:

$$\tilde{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0001379 \\ -0.000072 \\ -0.00078 \end{bmatrix} \quad \tilde{z}_2 = \begin{bmatrix} 0.00007223 \\ -0.0001379 \\ -0.00078 \\ 0.00002611 \\ -0.00020635 \\ 0.00028693 \end{bmatrix} \quad \tilde{z}_3 = \begin{bmatrix} 0.00002611 \\ -0.00020635 \\ 0.00028693 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{z}_4 = \begin{bmatrix} -0.00020635 \\ 0.00002611 \\ 0.00028693 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fuerzas Interiores en los extremos de las barras en ejes locales:

$$\tilde{p}_1 = \begin{bmatrix} 64.24 \text{ kN} \\ 2.42 \text{ kN} \\ 0.96 \text{ kN} \\ -64.24 \text{ kN} \\ 13.82 \text{ kNm} \\ -30.04 \text{ kNm} \end{bmatrix} \quad \tilde{p}_2 = \begin{bmatrix} 28.82 \text{ kN} \\ 54.01 \text{ kN} \\ 30.04 \text{ kN} \\ -28.82 \text{ kN} \\ 64.98 \text{ kNm} \\ -61.11 \text{ kNm} \end{bmatrix} \quad \tilde{p}_3 = \begin{bmatrix} 32.64 \text{ kN} \\ 34.06 \text{ kN} \\ 34.64 \text{ kN} \\ -32.64 \text{ kN} \\ 10.93 \text{ kNm} \\ 0 \text{ kNm} \end{bmatrix} \quad \tilde{p}_4 = \begin{bmatrix} 99.04 \text{ kN} \\ -3.81 \text{ kN} \\ 1.522 \text{ kN} \\ -99.04 \text{ kN} \\ -39.93 \text{ kNm} \\ 23.17 \text{ kNm} \end{bmatrix}$$

Ahora mostraremos los resultados después de iterar tres veces:

Deformaciones Locales de cada Barra					
Barra	Fuerzas	Análisis Lineal	Análisis No Lineal 1	Análisis No Lineal 2	Análisis No Lineal 3
Barra 1	Flecha X	0	0	0	0
	Flecha Y	0	0	0	0
	Giro Z	0	0	0	0
	Flecha X	-1,33207146E-04	-1,37914679E-05	-1,37909244E-05	-1,37909202E-05
	Flecha Y	-7,16220971E-05	-7,22306886E-05	-7,22294404E-05	-7,22294465E-05
	Giro Z	-8,27568946E-04	-8,31991717E-04	-8,31987680E-04	-8,31987658E-04

Barra 2	Flecha X	7,16220971E-05	7,22306886E-05	7,22294404E-05	7,22294465E-05
	Flecha Y	-9,33207146E-05	-9,37914679E-05	-9,37909244E-05	-9,37909202E-05
	Giro Z	-8,27568946E-04	-8,31991717E-04	-8,31987680E-04	-8,31987658E-04
	Flecha X	2,54484400E-05	2,61121896E-05	2,61115163E-05	2,61115220E-05
	Flecha Y	-2,06471804E-04	-2,06352776E-04	-2,06354403E-04	-2,06354407E-04
	Giro Z	2,81349977E-04	2,86932136E-04	2,86926936E-04	2,86926958E-04
Barra 3	Flecha X	2,54484400E-05	2,61121896E-05	2,61115163E-05	2,61115220E-05
	Flecha Y	-2,06471804E-04	-2,06352776E-04	-2,06354403E-04	-2,06354407E-04
	Giro Z	2,81349977E-04	2,86932136E-04	2,86926936E-04	2,86926958E-04
	Flecha X	0	0	0	0
	Flecha Y	0	0	0	0
	Giro Z	-0.00002639329	-0.00002639329	-0.00002639329	-0.00002639329
Barra 4	Flecha X	2,06471804E-04	2,06352776E-04	2,06354403E-04	2,06354407E-04
	Flecha Y	2,54484400E-05	2,61121896E-05	2,61115163E-05	2,61115220E-05
	Giro Z	2,81349977E-04	2,86932136E-04	2,86926936E-04	2,86926958E-04
	Flecha X	0	0	0	0
	Flecha Y	0	0	0	0
	Giro Z	0	0	0	0

Solicitaciones Locales de cada Barra					
Barra	Fuerzas	Análisis Lineal	Análisis No Lineal 1	Análisis No Lineal 2	Análisis No Lineal 3
Barra 1	Axial	64,79394300	65,01990461	65,01964373	65,01964167
	Cortante	2,14146429	2,17593815	2,17629741	2,17629722
	Momento	0,65010198	0,63403079	0,63424457	0,63424470
	Axial	-44,79394300	-45,01990461	-45,01964373	-45,01964167
	Cortante	13,85853571	13,82406185	13,82370259	13,82370278
	Momento	-29,94278053	-30,04273180	-30,04260407	-30,04260349
Barra 2	Axial	28,85853571	28,82406185	28,82370259	28,82370278
	Cortante	54,79394300	55,01990461	55,01964373	55,01964167
	Momento	29,94278053	30,04273180	30,04260407	30,04260349
	Axial	-28,85853571	-28,82406185	-28,82370259	-28,82370278
	Cortante	65,20605700	64,98009539	64,98035627	64,98035833
	Momento	-61,17912251	-61,11687698	-61,11688867	-61,11688556
Barra 3	Axial	31,81054999	32,64023706	32,63939534	32,63940250
	Cortante	33,90040890	34,06923726	34,06975701	34,06975687
	Momento	34,20122670	34,63930788	34,63908296	34,63908433
	Axial	-31,81054999	-32,64023706	-32,63939534	-32,63940250
	Cortante	11,09959110	10,93076274	10,93024299	10,93024313
	Momento	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000

Barra 4	Axial	99,10646590	99,04933265	99,05011329	99,05011519
	Cortante	-2,95201428	-3,81617520	-3,81569275	-3,81569972
	Momento	-1,02210418	-1,52243090	-1,52219429	-1,52219878
	Axial	-99,10646590	-99,04933265	-99,05011329	-99,05011519
	Cortante	-40,79798572	-39,93382480	-39,93430725	-39,93430028
	Momento	22,72036611	23,17204687	23,17175960	23,17176289

2.3 - Obtención de la Carga Crítica.

En el sistema que se halla en el estado deformado entre cargas exteriores y fuerzas de elasticidad originadas por ellas puede ser no solo estable, sino también inestable.

El equilibrio elástico es *estable* si el cuerpo deformado durante cualquier desviación pequeña del estado de equilibrio tiende a regresar al estado original y lo hace después de eliminar la influencia exterior que perturbó el estado de equilibrio inicial.

El equilibrio elástico es *inestable* si el cuerpo deformado, una vez sacado de él por alguna influencia, sigue deformándose en dirección a la desviación provocada y después de quitar la influencia no regresa al estado original. Entre estos dos estados de equilibrio se encuentra un estado transitorio que denominamos *crítico*.

Durante el estado crítico el cuerpo deformado se halla en equilibrio indiferente; puede conservar la forma dada a él originalmente, pero también puede perderla a causa de la influencia más insignificante.

La estabilidad de la forma de equilibrio del cuerpo deformado depende de la magnitud de la carga aplicada a él. *La carga, cuya superación origina la pérdida de estabilidad de la forma original del cuerpo se denomina carga crítica.*

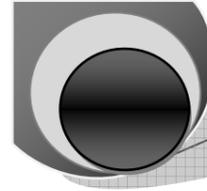
Cuando las cargas aplicadas a una estructura alcanzan valores críticos esto equivale a la destrucción de la estructura, porque la forma inestable de equilibrio será inevitablemente perdida, lo que prácticamente está ligado con el crecimiento ilimitado de las deformaciones y de las tensiones. La destrucción sucede, por regla general, de repente a causa de la flexión, siendo pequeñas las tensiones de compresión cuando la resistencia del elemento a la compresión está lejos de agotarse. Para garantizar cierta seguridad por pandeo es necesario que se satisfaga la condición:

$$P \leq [P]$$

Siendo P la carga que actúa en la estructura; la carga admisible que para el coeficiente de seguridad por pandeo n_e es igual a:

$$[P] = \frac{P_{cr}}{n_e}$$

Así pues, durante el cálculo de sistemas elásticos (en particular, tales sistemas típicos, como lo son barras comprimidas) al pandeo es necesario. Ante todo, saber determinar la magnitud de la fuerza crítica P_{cr} .



2.3.1 - Aspectos Generales.

Definimos como carga crítica P_{cr} aquella que origina en la estructura desplazamientos que tienden a infinito. Dentro del rango elástico, la relación entre las fuerzas nodales y los desplazamientos nodales esta dada por:

$$\tilde{P} = k \tilde{Z} \quad (2.3.1.1)$$

Ecuación que puede escribirse:

$$\lambda \tilde{P}^* = k \tilde{Z} \quad (2.3.1.2)$$

donde:

λ : en una constante

\tilde{P}^* : el vector de los valores relativos de las vargas aplicadas.

La matriz K_E permanece constante para un amplio rango de valores de desplazamientos nodales, variando la matriz K_G , de modo que la relación entre fuerzas nodales y desplazamientos nodales cuando la estructura sufre deformaciones grandes, puede escribirse:

$$\lambda \tilde{P}^* = (K_E + \lambda K_G^*) \tilde{Z} \quad (2.3.1.3)$$

Siendo:

K_G^* la matriz K_G correspondiente a valores de cargas externas ($\lambda = 1$).

De la expresión anterior despajamos los desplazamientos:

$$\tilde{Z} = (K_E + \lambda K_G^*)^{-1} \lambda \tilde{P}^* \quad (2.3.1.4)$$

Si definimos la matriz inversa como el cociente de la adjunta y el determinante de la matriz, en inmediato que:

$$\tilde{Z} = \infty \text{ si } |K_E + \lambda K_G^*| = 0 \quad (2.3.1.5)$$

El valor menor da la carga crítica o la carga de pandeo. $P_{cr} = \lambda_{cr} P^*$

En aquellos casos en que la ecuación (2.3.1.5) dé lugar a una ecuación de un grado muy alto, puede procederse de las siguientes maneras:

- a) Sobre un sistema de ejes se llevan distintos valores de P y los correspondientes de $(K_E + P K_G^*)$. Con un número suficiente de puntos puede trazarse la curva correspondiente y encontrar el valor para el que $(K_E + \lambda K_G^*) = 0$ al cual corresponderá la P_{cr} . (Fig. 2.3.1.1).

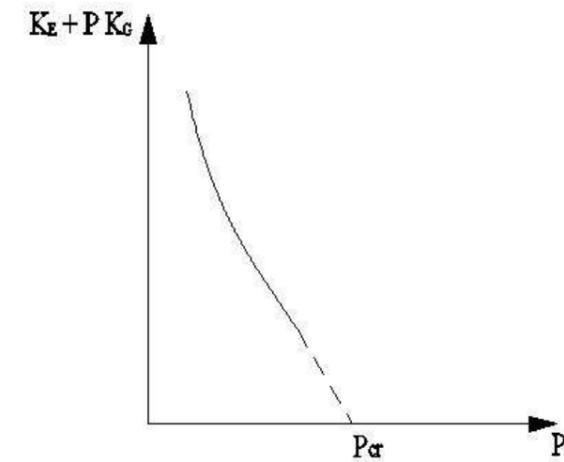


Fig. 2.3.1.1

b) Realizar un proceso iterativo donde se comience por valores pequeños de P_{cr} , y poco a poco aumentar este valor hasta que cambie de signo el determinante para este momento volver al valor anterior calculado en la iteración anterior y disminuir el incremento de P_{cr} y así llegar hasta el valor donde el determinante que queremos tienda lo más posible a cero o la diferencia entre dos valores consecutivos de P_{cr} sea tan pequeña que no sea necesaria tenerla en cuenta.

Por ejemplo, si la P_{cr} esta en unidades de kN y los dos valores consecutivos en la iteración esta por 2582.62325 kN y el otro por 2582.62543 kN la diferencia esta en las milésimas nos quedamos con 2582.62 kN aunque el determinante aun no sea cero, ya que la P_{cr} esta tendiendo a 2582.62 kN.

2.3.2 - Ejemplo Ilustrativo. Pórtico Plano.

Calcular el valor crítico de la carga P que actúa sobre el sistema de la Figura 2.3.2.1:

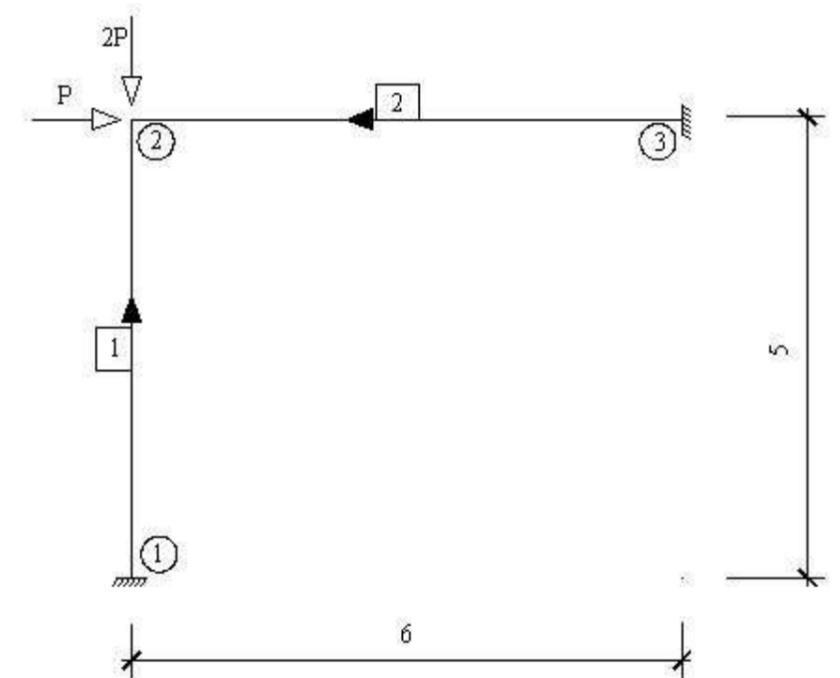


Fig. 2.3.2.1

Sección de la Barra	Area (m ⁴)	Area Cort(m ⁴)	Iz (m ⁴)	Iy (m ⁴)	E (kN/m ²)	G (kN/m ²)
1	0.08	0.0666	0.00106	0.00026	20000000	8000000
2	0.075	0.0625	0,00156	0,00014	20000000	8000000

2.3.2.1 Cálculo las matrices de Rigidez Elástica y Geométrica de cada barra tenemos:

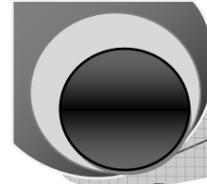
$$\Phi_1 = \frac{12EIz}{GA_cL^2} = \frac{12 \times 20\,000\,000 \times 0.00026}{8\,000\,000 \times 0.0666 \times 5^2} = 0.00468468$$

$$\Phi_2 = \frac{12EIz}{GA_cL^2} = \frac{12 \times 20\,000\,000 \times 0.00014}{8\,000\,000 \times 0.0625 \times 6^2} = 0.00186666$$

2.3.2.2 Matriz de rigidez elástica.

Para nuestro ejemplo las dos barras son empotrada-empotrada. La Matriz Rigidez Elástica de la barra plana empotrada-empotrada teniendo en cuenta el efecto del cortante es:

Para la barra 1 tenemos:



Para la barra 2 tenemos:

$$\bar{K}_{E2} = \begin{bmatrix} 250\,000 & 0 & 0 & -250\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 155.26 & 465.79 & 0 & -155.26 & 465.79 \\ 0 & 465.79 & 1864.05 & 0 & -465.79 & 930.72 \\ -250\,000 & 0 & 0 & 250\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -155.26 & -465.79 & 0 & 155.26 & -465.79 \\ 0 & 465.79 & 930.72 & 0 & -465.79 & 1864.05 \end{bmatrix}$$

2.3.2.3 Matriz de rigidez geométrica.

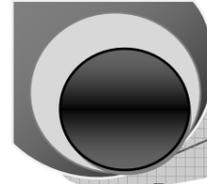
Para nuestro ejemplo las dos barras son empotrada-empotrada. La Matriz de Rigidez Geométrica de la barra plana empotrada-empotrada teniendo en cuenta el efecto del cortante es:

$$\bar{K}_{Gi} = \frac{P}{(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{5} + 2\Phi\right)L & \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi^2\right) & 0 & \left(-\frac{6}{5} - 2\Phi\right)L & \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi^2\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi^2\right) & \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\Phi - \frac{1}{2}\Phi^2\right)L & 0 & \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\Phi^2\right) & \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{6}\Phi - \frac{1}{3}\Phi^2\right)L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{6}{5} - 2\Phi\right)L & \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi^2\right) & 0 & \left(\frac{6}{5} + 2\Phi\right)L & \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\Phi^2\right) \\ 0 & \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\Phi^2\right) & \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{6}\Phi - \frac{1}{3}\Phi^2\right)L & 0 & 0 & \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\Phi - \frac{1}{2}\Phi^2\right)L \end{bmatrix}$$

Evaluando para $P = -30$

Para la barra 1 tenemos:

$$\bar{K}_{G1} = \frac{-60}{1.009} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2418 & 0.0999 & 0 & -0.2418 & 0.0999 \\ 0 & 0.0999 & 0.67055 & 0 & -0.0999 & 0.1706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2418 & -0.0999 & 0 & 0.2418 & -0.0999 \\ 0 & 0.0999 & 0.1706 & 0 & -0.0999 & 0.67055 \end{bmatrix}$$



Para la barra 2 tenemos:

$$\bar{K}_{G2} = \frac{-30}{1.0037} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20062 & 0.0999 & 0 & -0.20062 & 0.0999 \\ 0 & 0.0999 & 0.8018 & 0 & -0.0999 & 0.2019 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.20062 & -0.0999 & 0 & 0.20062 & -0.0999 \\ 0 & 0.0999 & 0.2019 & 0 & -0.0999 & 0.8018 \end{bmatrix}$$

2.3.2.4 Cálculo la matriz de rotación de cada barra:

La Matriz Rotación de la barra plana es:

$$R_i = \begin{bmatrix} \frac{x_D - x_O}{L} & -\frac{y_D - y_O}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y_D - y_O}{L} & \frac{x_D - x_O}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_D - x_O}{L} & -\frac{y_D - y_O}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{y_D - y_O}{L} & \frac{x_D - x_O}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la barra 1:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la barra 2:

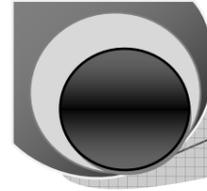
$$R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2.5 Suma de la rigidez elástica y la geométrica de cada barra:

Para la barra 1 tenemos:

Evaluando para P = -30 y sumando $k_E + P k_G$ tenemos:

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 320\,000 & 0 & 0 & -320\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 482.49 & 1236.24 & 0 & -482.49 & 1236.24 \\ 0 & 1236.24 & 4105.59 & 0 & -1236.24 & 2075.59 \\ -320\,000 & 0 & 0 & 320\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -482.49 & -1236.24 & 0 & 482.49 & -1236.24 \\ 0 & 1236.24 & 2075.59 & 0 & -1236.24 & 4105.59 \end{bmatrix}$$



Rotando la Matriz K_1 tenemos:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 482.49 & 0 & -1236.24 & -482.49 & 0 & -1236.24 \\ 0 & 320000 & 0 & 0 & -320000 & 0 \\ -1236.24 & 0 & 4105.59 & 1236.24 & 0 & 2075.59 \\ -482.49 & 0 & 1236.24 & 482.49 & 0 & 1236.24 \\ 0 & -320000 & 0 & 0 & 320000 & 0 \\ -1236.24 & 0 & 2075.59 & 1236.24 & 0 & 4105.59 \end{bmatrix}$$

Para la barra 2 tenemos:

Evaluando para $P = -30$:

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 \\ 0 & 149.26 & 462.81 & 0 & -149.26 & 462.81 \\ 0 & 462.81 & 1840.09 & 0 & -462.81 & 936.76 \\ -250000 & 0 & 0 & 250000 & 0 & 0 \\ 0 & -149.26 & -462.81 & 0 & 149.26 & -462.81 \\ 0 & 462.81 & 936.76 & 0 & -462.81 & 1840.09 \end{bmatrix}$$

Rotando la Matriz K_{E2} tenemos:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 250000 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 \\ 0 & 149.26 & -462.81 & 0 & -149.26 & -462.81 \\ 0 & -462.81 & 1840.09 & 0 & 462.81 & 936.76 \\ -250000 & 0 & 0 & 250000 & 0 & 0 \\ 0 & -149.26 & 462.81 & 0 & 149.26 & 462.81 \\ 0 & -462.81 & 936.76 & 0 & 462.81 & 1840.09 \end{bmatrix}$$

Como se puede apreciar, si hacemos una comparación entre la rigidez inicial que tenían las barras de la estructura (K_E) es menor que la rigidez actual que ahora tienen cada barra; esto se debe a que sumamos la rigidez geométrica a la rigidez elástica y a que las barras están sometidas a esfuerzo axial de compresión.

Los esfuerzos de compresión en aumento disminuyen la rigidez de una barra hasta hacerla perder la estabilidad es decir su rotura, sin embargo cuando una barra esta sometida a esfuerzos de tracción su rigidez aumenta ya que dista de perder la estabilidad.

2.3.2.6 Obtención de la matriz rigidez de toda la estructura.

Dicha estructura esta formada por dos barras y por tres nudos, por tanto habrá dos matrices rigidez y la Matriz Rigidez de toda la Estructura será de orden 6×6 . Se conoce que la matriz rigidez de una barra se puede particionar de la siguiente manera:

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{OO}^i & K_{OD}^i \\ K_{DO}^i & K_{DD}^i \end{bmatrix}$$

En base a lo anterior las matrices rigidez de nuestra estructura analizada serán:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{12}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix}; K_2 = \begin{bmatrix} K_{33}^2 & K_{32}^2 \\ K_{23}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Para garantizar la necesaria continuidad o compatibilidad de los desplazamientos es necesario definir la forma y orden en que se ensamblarán estas dos matrices para lo cual se seguirá el siguiente proceder:

Aporte a k de la barra 1.

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & \Theta \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & \Theta \\ \Theta & \Theta & \Theta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Añadiendo a k el aporte de la barra 2.

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & \Theta \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ \Theta & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

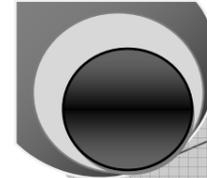
Siendo la matriz $k = k_E + P k_G$

Aporte a k de la barra 1.

$$k = \begin{bmatrix} 482.49 & 0 & -1236.24 & -482.49 & 0 & -1236.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 320000 & 0 & 0 & -320000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1236.24 & 0 & 4105.59 & 1236.24 & 0 & 2075.59 & 0 & 0 & 0 \\ -482.49 & 0 & 1236.24 & 482.49 & 0 & 1236.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -320000 & 0 & 0 & 320000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1236.24 & 0 & 2075.59 & 1236.24 & 0 & 4105.59 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Añadiendo a k el aporte de la barra 2.

$$k = \begin{bmatrix} 482.49 & 0 & -1236.24 & -482.49 & 0 & -1236.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 320000 & 0 & 0 & -320000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1236.24 & 0 & 4105.59 & 1236.24 & 0 & 2075.59 & 0 & 0 & 0 \\ -482.49 & 0 & 1236.24 & 482.49 + 250000 & 0 & 1236.24 & -250000 & 0 & 0 \\ 0 & -320000 & 0 & 0 & 320000 + 149.26 & 462.81 & 0 & -149.26 & 462.81 \\ -1236.24 & 0 & 2075.59 & 1236.24 & 462.81 & 4105.59 + 1840.09 & 0 & -462.81 & 936.76 \\ 0 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 250000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -149.26 & -462.81 & 0 & 149.26 & -462.81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 462.81 & 936.76 & 0 & -462.81 & 1840.09 \end{bmatrix}$$



Quedando la matriz rigidez de toda la estructura k:

$$k = \begin{bmatrix} 482.49 & 0 & -1236.24 & -482.49 & 0 & -1236.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 320000 & 0 & 0 & -320000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1236.24 & 0 & 4105.59 & 1236.24 & 0 & 2075.59 & 0 & 0 & 0 \\ -482.49 & 0 & 1236.24 & 250482.49 & 0 & 1236.24 & -250000 & 0 & 0 \\ 0 & -320000 & 0 & 0 & 320149.26 & 462.81 & 0 & -149.26 & 462.81 \\ -1236.24 & 0 & 2075.59 & 1236.24 & 462.80 & 5945.68 & 0 & -462.81 & 936.76 \\ 0 & 0 & 0 & -250000 & 0 & 0 & 250000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -149.26 & -462.81 & 0 & 149.26 & -462.81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 462.81 & 936.76 & 0 & -462.81 & 1840.09 \end{bmatrix}$$

2.3.2.7 Hallar matriz rigidez reducida de toda la estructura:

Como los nudos 1 y 3 tienen restringidos “x”, “y” y “giro” sus desplazamientos son cero por lo tanto las filas y columnas 1, 2, 3, 7, 8, 9 se eliminan quedando la matriz rigidez reducida:

$$k = \begin{bmatrix} 250482.49 & 0 & 1236.24 \\ 0 & 320149.26 & 462.81 \\ 1236.24 & 462.81 & 5945.68 \end{bmatrix}$$

2.3.2.8 Hallar el determinante de k reducida:

$$\text{Determinante} = \begin{vmatrix} 250137.43 & 0 & 1236.24 \\ 0 & 319939.40 & 462.81 \\ 1236.24 & 462.81 & 5945.68 \end{vmatrix}$$

Determinante (P = -30) = 476 252 179 112 905

Para obtener el valor de Pcr hay que repetir este proceso hasta hacer el determinante cero o que la $Pcr^N - Pcr^{N-1} < 0.01$ (para fijar el fin de la iteración).

P (kN)	-1000	-2000	-3000	-2500
$k_E + Pk_G$	3,10E+14	1,398E+14	-2,9813E+13	5,4868E+13
P (kN)	-2750	-2820	-2823,8290381	
$k_E + Pk_G$	1,2502E+13	6,4826E+11	0,19	

Quedando Pcr = - 2823,69382145863 kN = - 2823,829 kN

Quedando Pcr = -282,383 t

P = Pcr/1.6 = -2823.82 kN/1.6 = -1764,8875 kN = -1765 Kn

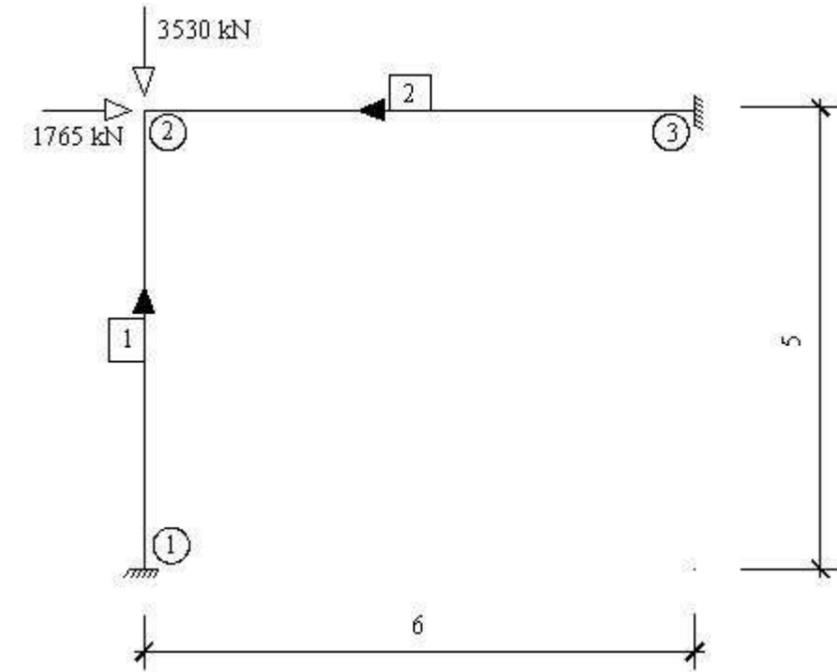


Fig. 2.3.2.2

Los resultados de la iteración fueron presentados en un gráfico para ver el comportamiento del determinante $|k_E + Pk_G|$ con respecto a P.

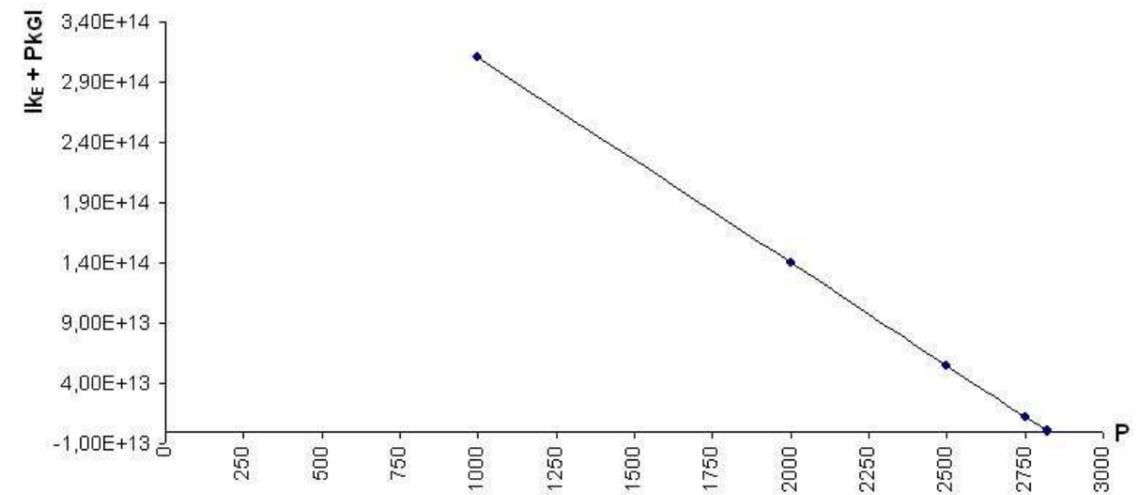
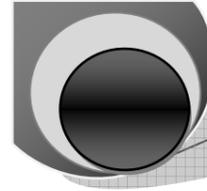


Fig. 2.3.2.3



CAPITULO 3

Solución del Análisis de Estructuras mediante un Programa de Computación.

3.1 – Introducción.

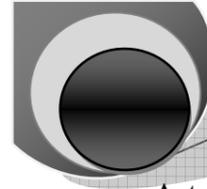
En el siglo pasado y comienzos del actual los métodos iterativos se fueron desarrollando como una necesidad para poder abordar estructuras las cuales por los métodos rigurosos eran inaccesibles basado en la extensión de las mismas así como de los complejos sistemas de ecuaciones a que conducían. En este sentido se desarrolló el Método de Cross que surge como una forma de abordar problemas estructurales aplicando el método de los desplazamientos en forma iterativa. Es decir, los métodos rigurosos fueron dando paso a métodos simplificados que permitían obtener en forma relativamente rápida la solución de problemas estructurales complejos.

Es en este sentido que partiendo de estos conceptos y en función del desarrollo de los sistema de cómputo, mediante la aparición de las computadoras digitales aproximadamente a mediados del siglo XX, vuelven a tener una vigencia total estos métodos rigurosos, ya que es mediante el uso de los ordenadores que los mismos podrán ser resueltos en una forma rápida, precisa y segura. Para poder abordar un problema estructural a través de métodos computacionales es necesario en primera instancia desarrollar, el algoritmo matemático que dará solución al problema. En este estilo de trabajo es que se basan los métodos matriciales para el cálculo estructural; vale decir; generar los algoritmos que permitirán obtener la solución de un problema estructural en forma totalmente general y su posterior programación con vistas a la elaboración del programa de computación correspondiente.

En los Capítulos 1 y 2 se desarrollaron ejemplos de análisis lineal y no lineal planos y espaciales. Por ejemplo, En un pórtico espacial que cuenta con cuatro nudos, la matriz rigidez de toda esta estructura es de 24×24 , el sistema de ecuaciones lineales a que se llega para resolver el problema es de igual dimensión, resolver este sistema de ecuaciones a mano llevaría bastante tiempo para no decir que sería imposible, es imprescindible si se quieren llegar a resultados lo más cerca de la realidad realizarlo con un programa de computación.

Solamente estamos hablando de resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al final del proceso de análisis, pero los pasos anteriores hacerlos a mano llevaría un tiempo considerable, eso sin hablar de los posibles errores de cálculo, se realizan cientos de operaciones solo para una estructura de 4 nudos y tres barras. Si nos presentamos una estructura espacial de 30 barras con 28 nudos sería casi imposible desarrollar nuestro método manualmente. Es vital recurrir a un programa de computación.

Por lo general los programas de análisis resuelven sistemas grandes en poco tiempo, hablamos de segundos, en ocasiones se necesita varias corridas si es que quedaron detalles en los datos de entrada, este proceso no demora.



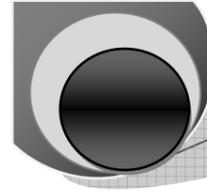
Actualmente no solo puede resolverse los problemas de análisis estructural, es decir obtener las solicitaciones en los extremos de las barras de una estructura y en su interior, también se puede diseñar estos elementos, después de obtener las solicitaciones en el interior de las barras se pueden diseñar dando los datos pertinentes al diseño sea de hormigón o de acero, pero esto no queda aquí, también se pueden dibujar los planos de los elementos diseñados.

3.2 – Secuencia de pasos.

- ✓ Lectura de datos generales.
 - 1- Coordenadas de los Nudos.
 - 2- Datos de las Secciones y de los Materiales.
 - 3- Restricciones de Apoyo.
 - 4- Características de las Barras.
 - 5- Cargas en las Barras.
 - 6- Cargas en los Nudos.
- ✓ Formación de la Rigidez de toda la Estructura.
 - 1- Rigidez de cada barra E-E.
 - 2- Rigidez Modificada de cada barra.
 - 3- Cálculo de la Matriz Rotación de cada barra.
 - 4- Rotación de cada barra.
 - 5- Ensamblaje de la matriz rigidez de toda la estructura.
- ✓ Momentos de Extremos Fijos.
 - 1- Cálculo de los MEF de cada barra.
 - 2- Rotación de los MEF.
 - 3- Formación del Vector P_e .
- ✓ Formación del Vector Cargas Nodales.
- ✓ Formación del Vector Desplazamientos Nodales.
- ✓ Formación del Sistema de Ecuaciones Lineales y su resolución.
- ✓ Obtención de las solicitaciones y desplazamientos en los extremos de cada.

Fin del Análisis Lineal.

Como se puede apreciar se procede de la misma manera en que se resolvieron ejemplos de pórticos plano y espacial, así mismo sucede con el análisis no lineal y con la obtención de la carga crítica.



3.3 – Programa de Análisis Estructural.

La aplicación fue implementada con la herramienta de desarrollo Matlab 7.6.0 que corre sobre la plataforma Windows.

El programa fue creado como objetivo de esta tesis para dar solución a los problemas Análisis no Lineal y la obtención de la Carga Crítica de estructuras reticulares, por supuesto que para lo anterior hubo que pasar por el Análisis Lineal.

El programa tiene un fichero para guardar los datos de la estructura con extensión “.sal”.

3.3.1 – Manual para su Uso.

El programa presenta dos ventanas principales, una la de entrada de los datos y otra la de obtención de los resultados del análisis.

✓ Entrada de los Datos.

La entrada de datos es simple, los datos se entran por lo general en tablas, sobre las restricciones puede escribirse “Sí” representa que existe una restricción en una dirección general o escribirse “1” si no existe restricción se escribe “No” o “0”. Si se realiza un análisis plano o espacial debe seleccionar la opción para esto. También debe seleccionar el tipo de análisis a realizar.

Tipos de Análisis:

- a) Análisis Lineal.
- b) Análisis No Lineal.

Para realizar Análisis No Lineal primero debe realizar el Análisis Lineal.

- c) Análisis por Cargas Concentradas.

Obtiene la Carga Crítica que hace perder la estabilidad de la estructura que se quiere analizar.

✓ Pantalla Principal:

Para cargar los datos de entrada se pulsa sobre cada uno de los botones de comando “Cargar datos”
Matlab es una herramienta que nos permite guardar los datos de entrada en forma de tabla en archivos con extensión *.dat

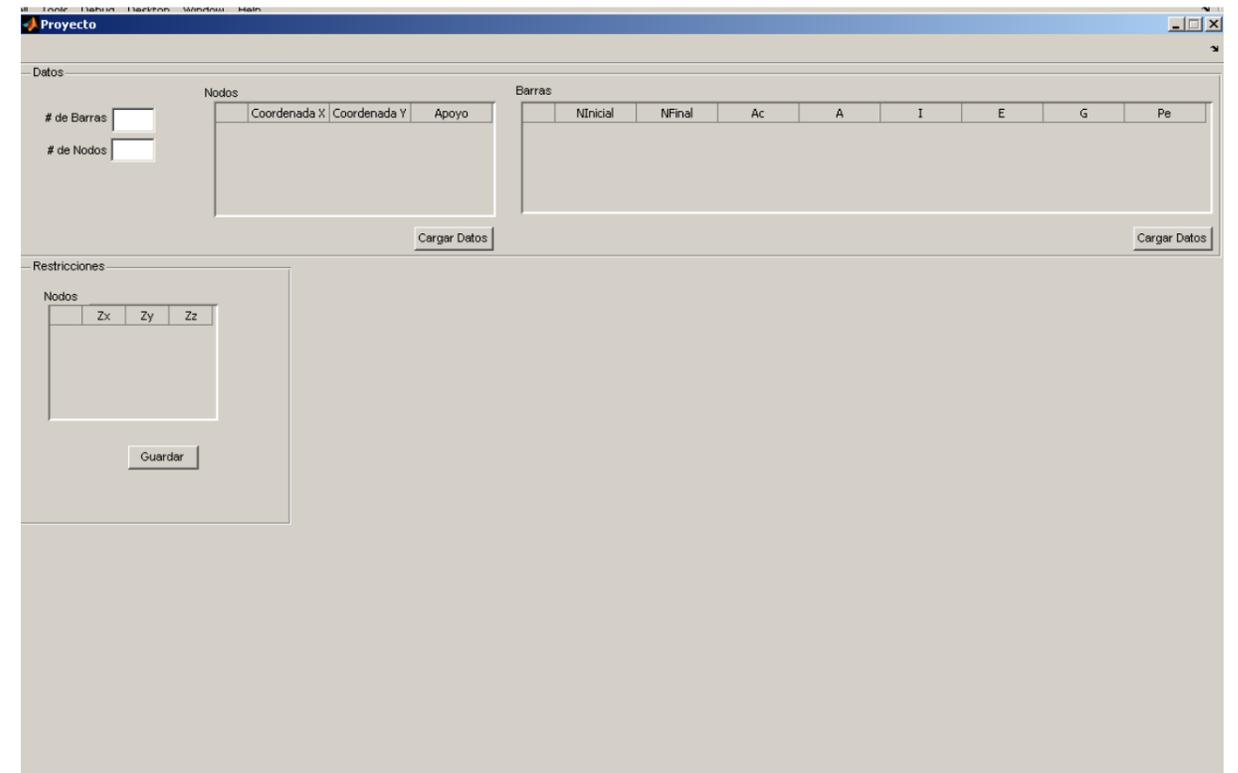


fig. 3.3.1.1
Pantalla principal del programa

✓ Cargar los datos para un proyecto nuevo

Matlab es una herramienta que nos proporciona la capacidad de poder almacenar datos en un archivo en forma de tabla con la extensión *.dat.

Pulsamos sobre la tecla “cargar datos” localizada debajo de la ventana de nudos, Una ventana emergente aparecerá y seleccionamos el archivo nodos.dat.

Ahora pulsamos el botón de “cargar datos” ubicada debajo de la ventana de barras, Una ventana emergente aparecerá y seleccionamos el archivo barras.dat.

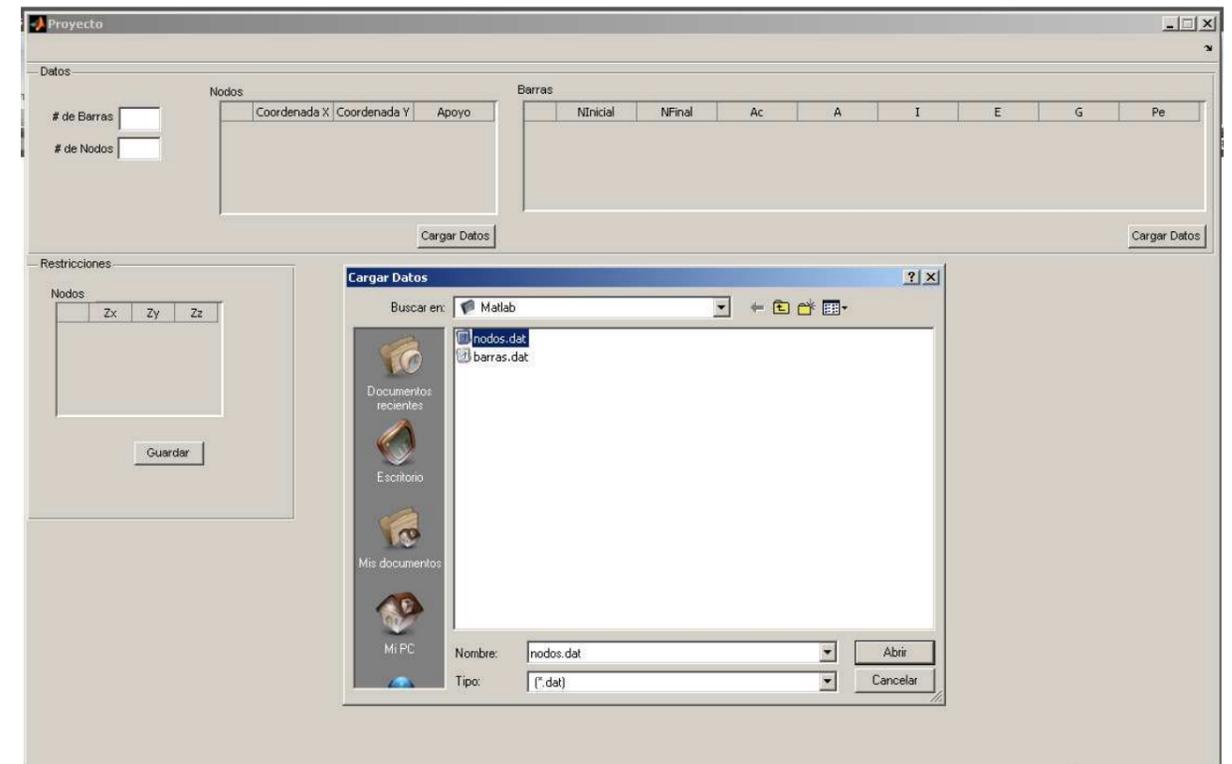


fig. 3.3.1.2

Automáticamente el programa da lectura de los datos de entrada del pórtico plano.

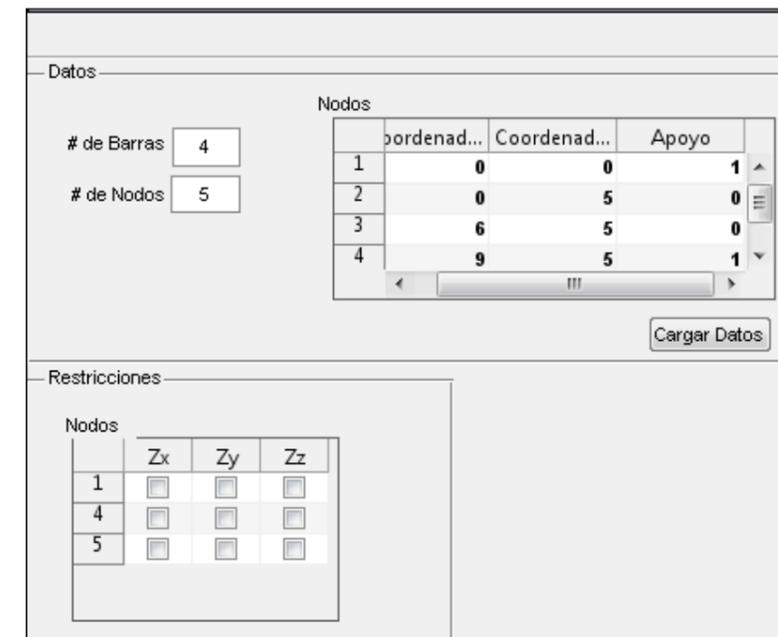


fig. 3.3.1.3

Barras								
	NInicial	NFinal	Ac	A	I	E	G	Pe
1	1	2	0.0960	0.1200	0.0016	20000000	8000000	24
2	2	3	0.1200	0.1500	0.0031	25000000	10000000	24
3	3	4	0.1200	0.1500	0.0031	25000000	10000000	24
4	3	5	0.0960	0.1200	0.0016	20000000	8000000	24

Cargar Datos

fig. 3.3.1.4

Luego de cargar los datos de entrada en programa comienza a realizar el cálculo respectivo:

```

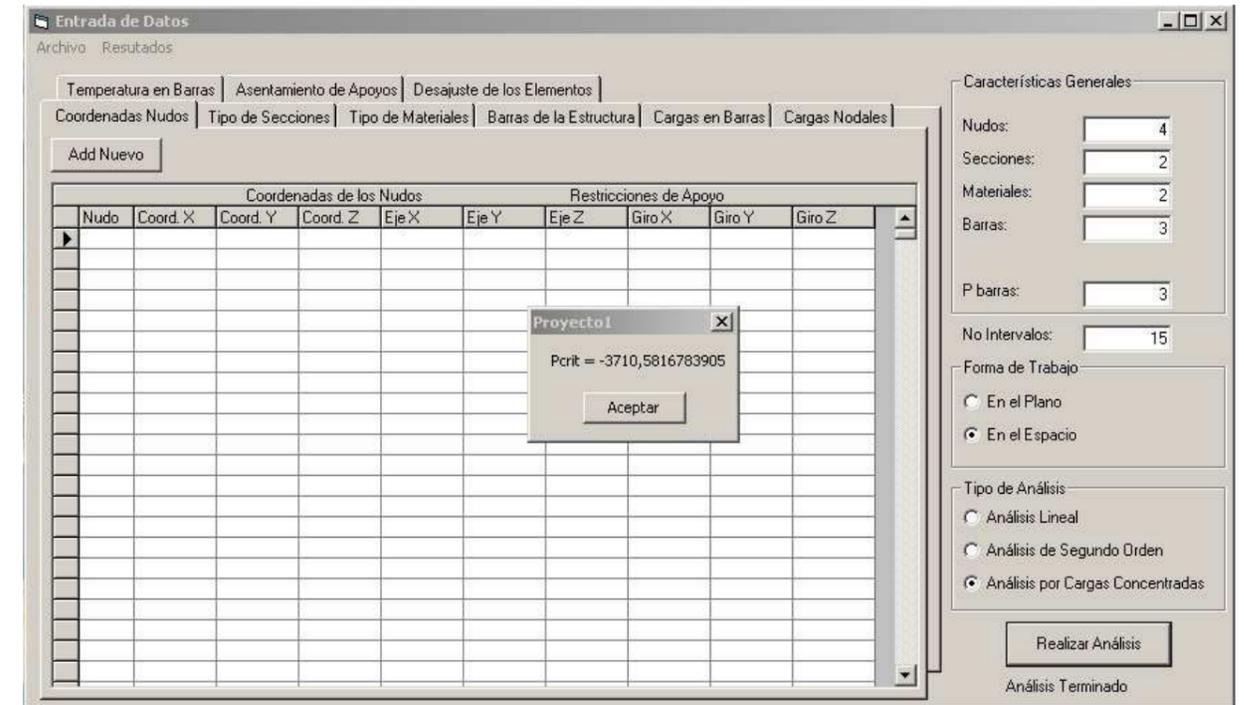
ans =
o4 = 2.000000e-002
ans =
3011.76      0      -7529.41      -3011.76      0      -7529.41
0      480000.00      0      0      -480000.00      0
-7529.41      0      25223.53      7529.41      0      12423.53
-3011.76      0      7529.41      3011.76      0      7529.41
0      -480000.00      0      0      480000.00      0
-7529.41      0      12423.53      7529.41      0      25223.53

ans =
625000.00      0      0      -625000.00      0      0
0      4248.09      12744.27      0      -4248.09      12744.27
0      12744.27      51253.63      0      -12744.27      25211.96
-625000.00      0      0      625000.00      0      0
0      -4248.09      -12744.27      0      4248.09      -12744.27
0      12744.27      25211.96      0      -12744.27      51253.63
    
```

fig. 3.3.1.5

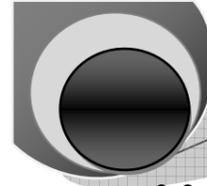
Calculo de matrices de rigidez

En la obtención de la carga crítica el proceso es similar, se ingresan los datos de entrada de la misma manera que para el análisis de primer y segundo orden se carga el ejercicio a calcular y el programa realiza el análisis y cálculo de la carga crítica. En nuestro caso escogeremos el ejercicio que se ha estado realizando el análisis tanto de primer orden como de segundo orden.



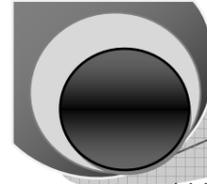
3.3.2 – Especificaciones de la Aplicación.

- ✓ Realiza análisis lineal plano obteniendo las solicitaciones y deformaciones en el interior de cada barra.
- ✓ Realiza análisis no lineal plano obteniendo las solicitaciones y deformaciones en los extremos de cada barra.
- ✓ Se pueden realizar cualquier número de iteraciones a la hora de realizar el análisis no lineal, el programa propone cuatro.
- ✓ Se pueden aplicar a las barras cualquier tipo de cargas, las distribuidas solo de variación lineal.
- ✓ Obtiene la Carga Crítica que hace perder la estabilidad a una estructura plana.
- ✓ En la obtención de los MEF de una barra se realiza por superposición de efectos, se trabaja cada estado de carga independiente. Los estados de carga se expusieron en el Capítulo 1.



3.3.3 – Programa para la Obtención de la Carga Crítica de una estructura Plana.

```
'***** Después de realizada la Lectura de los Datos *****'  
  
For I = 1 To NodosTotal ' *** Restricciones de apoyo  
  
    If CoorNudo(I, 4) <> 0 Or CoorNudo(I, 4) = "Sí" Then  
        Za(0, I, 1) = -1E+21  
        Z(3 * I - 2) = Za(0, I, 1)  
    End If  
    If CoorNudo(I, 5) <> 0 Or CoorNudo(I, 5) = "Sí" Then  
        Za(0, I, 2) = -1E+21  
        Z(3 * I - 1) = Za(0, I, 2)  
    End If  
    If CoorNudo(I, 9) <> 0 Or CoorNudo(I, 9) = "Sí" Then  
        Za(0, I, 3) = -1E+21  
        Z(3 * I) = Za(0, I, 3)  
    End If  
  
Next I  
  
IteraCrit = 1 '***** IteraCrit variable que toma el valor del número de  
iteraciones  
Determinante(IteraCrit) = 0  
Paso(1) = 31  
  
Pcrit(0) = 0  
Pcrit(1) = 1  
  
Do Until (Abs(Pcrit(IteraCrit)) - Abs(Pcrit(IteraCrit - 1))) < 0.0001  
  
'***** Inicio del Proceso Iterativo  
  
    If Determinante(IteraCrit) < 0 Then  
        Pcrit(IteraCrit) = Pcrit(IteraCrit - 1)  
        IteraCrit = IteraCrit - 1  
    End If  
  
    Determinante(IteraCrit) = 0  
    IteraCrit = IteraCrit + 1  
    Pcrit(IteraCrit) = Pcrit(IteraCrit - 1) - Paso(1)  
  
    For J = 1 To 3 * NodosTotal '*** Anula la Rigidez de cada Barra  
        For K = 1 To 3 * NodosTotal  
            KgcritG(2, J, K) = 0  
        Next K  
    Next J  
  
    For I = 1 To Nbarra
```



```
**** Obtiene la Rigides de cada barra y ensambla la de toda la estructura
***** Rigidez de la Barra E-E Ejes Locales *****

Call RigidezPlana(I)  **** Subprograma para el cálculo de la Rigidez Elástica de
la barra I

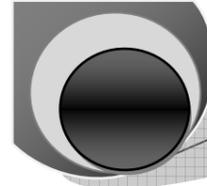
Call RigidezGeomPlanaCrítica(I) )  **** Subprograma para el cálculo de la
Rigidez Geométrica más la Elástica de la barra I

***** Matriz Rotación de la Barra I *****

Call RotaciónPlana(I) )  **** Subprograma para el cálculo de la Matriz Rotación
de la barra I

***** Matriz Rigidez de la Barra I Ejes Generales *****

For J = 1 To 6
    For K = 1 To 6
        Temp(1, J, K) = 0
        For M = 1 To 6
            Temp(1, J, K) = Temp(1, J, K) + Rr(I, J, M) * Krc(2,
I, M, K) 'Producto Kr *Rr
        Next M
        Temp(2, J, K) = Rr(I, K, J) 'Transpuesta de Rr
    Next K 'Matriz de rigidez en ejes generales Krg
Next J
For J = 1 To 6
    For K = 1 To 6
        Krcg(2, I, J, K) = 0
        For M = 1 To 6 'Matriz de rigidez en ejes generales Krg
            Krcg(2, I, J, K) = Krcg(2, I, J, K) + Temp(1, J, M) *
Temp(2, M, K) 'Producto Kr *Rr
        Next M
    Next K
Next J
**** Ensambla Matriz Rigidez en ejes Generales de toda la estructura
For J = 1 To 3
    For K = 1 To 3
        KgcritG(2, (J + 3 * (NudoO(I) - 1)), (K + 3 * (NudoO(I) - 1))) =
Krcg(2, I, J, K) + KgcritG(2, (J + 3 * (NudoO(I) - 1)), (K + 3 * (NudoO(I) -
1)))
    Next K
Next J
For J = 1 To 3
    For K = 4 To 6
        KgcritG(2, (J + 3 * (NudoO(I) - 1)), ((K - 3) + 3 * (NudoD(I) -
1))) = Krcg(2, I, J, K) + KgcritG(2, (J + 3 * (NudoO(I) - 1)), ((K - 3) + 3 *
(NudoD(I) - 1)))
    Next K
Next J
For J = 4 To 6
    For K = 1 To 3
        KgcritG(2, ((J - 3) + 3 * (NudoD(I) - 1)), (K + 3 * (NudoO(I) -
1))) = Krcg(2, I, J, K) + KgcritG(2, ((J - 3) + 3 * (NudoD(I) - 1)), (K + 3 *
(NudoO(I) - 1)))
    Next K
Next J
For J = 4 To 6
```



```
For K = 4 To 6
    KgcritG(2, ((J - 3) + 3 * (NudoD(I) - 1)), ((K - 3) + 3 *
(NudoD(I) - 1))) = Krcg(2, I, J, K) + KgcritG(2, ((J - 3) + 3 * (NudoD(I) - 1)),
((K - 3) + 3 * (NudoD(I) - 1)))
Next K
Next J

Next I
'***** Formación de la Matriz del Determinante *****
For K = 3 * NodosTotal + 1 To 2 * 3 * NodosTotal - 1
    For M = 1 To 3 * NodosTotal
        KgcritG(2, K, M) = KgcritG(2, K - 3 * NodosTotal, M)
    Next M
Next K

'***** Formación de la Matriz Reducida del Determinante *****
Ndeter = 0

For K = 1 To 3 * NodosTotal
    If Z(K) <> -1E+21 Then
        ZReducidos(K) = K
        Ndeter = Ndeter + 1
    End If
Next K

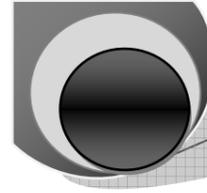
For K = 1 To 3 * NodosTotal
    For M = 1 To 3 * NodosTotal
        If ZReducidos(K) = K Then
            If ZReducidos(M) = M Then
                KReducida(K - Ndeter, M - Ndeter) = KgcritG(2, K, M)
            End If
        End If
    Next M
Next K

'***** Cálculo del Determinante *****
Call CalculaDeterminante '****SubPrograma para el Cálculo del Determinante
*****

If Determinante(IteraCrit) < 0 Then
    Paso(1) = Paso(1) / 2
Else
    Paso(1) = Paso(1) * 2
End If
Loop

MsgBox "Pcrit = " & Pcrit(IteraCrit) '**** Mensaje que muestra el valor de P
crítica.
'***** Fin *****

'***** SubPrograma para el Cálculo del Determinante *****
```



```
Sub CalculaDeterminante()

Dim Ldeter(10, 10) As Double
Dim Ideter, Jdeter, Kdeter, rdeter As Integer
Dim Udeter(10, 10) As Double
Dim sumadeter As Double

For Ideter = 1 To Ndeter
    Ldeter(Ideter, 1) = KReducida(Ideter, 1)
Next Ideter

KReducida(1, Jdeter) = 1

For Jdeter = 1 To Ndeter
    Udeter(1, Jdeter) = KReducida(1, Jdeter) / Ldeter(1, 1)
Next Jdeter

For Kdeter = 2 To Ndeter

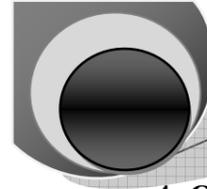
    For Ideter= Kdeter To Ndeter
        sumadeter = 0
        For rdeter = 1 To Kdeter - 1
            sumadeter=sumadeter+Ldeter(Ideter,rdeter)* Udeter(rdeter, Kdeter)
        Next rdeter
        Ldeter(Ideter,Kdeter)=KReducida(Ideter,Kdeter)-sumadeter
    Next Ideter

    For Jdeter = Kdeter To Ndeter
        sumadeter = 0
        For rdeter = 1 To Kdeter - 1
            sumadeter=sumadeter+Ldeter(Kdeter,rdeter)*Udeter(rdeter, Jdeter)
        Next rdeter
        Udeter(Kdeter,Jdeter)=(KReducida(Kdeter,Jdeter)-sumadeter)/Ldeter(Kdeter, Kdeter)
    Next Jdeter
Next Kdeter

Determinante(IteraCrit) = 1

For Ideter = 1 To Ndeter
    Determinante(IteraCrit)=Ldeter(Ideter,Ideter)*Determinante(IteraCrit)
Next Ideter

End Sub
```



4. Observaciones y conclusiones.

4.1 – Observaciones.

En este capítulo se ha mostrado un programa creado para resolver al análisis de primero y segundo orden de estructuras reticulares planas y espaciales, además de la obtención de la carga crítica de iguales estructuras.

En los Capítulos 1 y 2 se mostró como se resuelven a mano algunos ejemplos, esto llevaría bastante tiempo sin embargo este programa como cualquier otro resuelve este problema en segundos. Se gana bastante tiempo en el desarrollo de un proyecto al realizar el análisis de la estructura utilizando

un programa de computación esto ayuda a que el ingeniero dedique más atención a la entrada de datos y a revisar los resultados que da cualquier programa de análisis. En la entrada de datos pueden presentarse problemas y los resultados estar incorrectos.

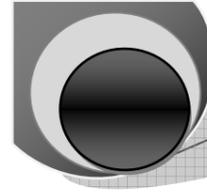
Por ejemplo, la rotación de cada barra parece ser algo insignificante pero de estar incorrecta conlleva a grandes errores. Si el usuario no conoce de donde sale o como se obtiene la matriz de rotación de una barra está expuesto a cometer errores y no saber donde están y responsabilizar al programa que realizó los cálculos. Si la orientación con respecto a un eje sea general o local de la sección de una barra en el espacio no es la correcta el análisis da graves errores.

Lo planteado anteriormente es un pequeño problema que se pudiera enfrentar entre los posibles en la modelación de una estructura, por lo que se recomienda no solo aprender a trabajar con un programa de análisis estructural sino también a profundizar en como el programa resuelve el análisis de las estructuras.

Muchos profesionales en la actualidad dominan programas como el SAP, CYPECAD, ETABS, entre otros que utilizan el Método de los Elementos Finitos que es lo único que diferencia al Método de los Desplazamientos en la obtención de la rigidez del elemento de la estructura o la barra (para el caso de estructuras reticulares la rigidez es la misma por ambos métodos) pero no dominan el método de análisis, no conocen lo que hace el programa, introducen datos y obtienen resultados. Si los datos se entraron correctamente los resultados estarán bien, pero si no, se obtendrán resultados incorrectos.

El programa realizado para dar solución a los problemas planteados en esta tesis solo realiza al análisis, pero se pudiera mejorarlo y añadirle el diseño de cada elemento de la estructura sea de hormigón o de acero, este proceso duraría segundos, también se le pudiera añadir el dibujo de los planos de los elementos diseñados sea directamente sobre AutoCAD en adelante o con salida en ficheros de intercambio “.dxf”, de ser sobre AutoCAD llevaría más tiempo que realizarlo sobre “.dxf”, pero los dibujos sobre “.dxf” están limitados.

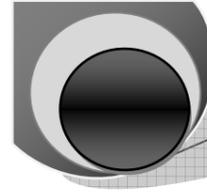
Todo lo planteado anteriormente es posible; en la actualidad existen algunos programas que realizan todo este trabajo y pronto los ingenieros a penas tendrán que pasar por el análisis o el diseño y mucho menos pasar por el AutoCAD para dibujar los planos de los elementos diseñados, por lo que es de vital importancia que los profesionales se preparen en el análisis de cualquier estructura y su el diseño para poder aceptar correctamente en los resultados que se obtengan con cualquier programa de computación.



4.2 – Conclusiones

Como resultado de la realización de este trabajo se arriban a las siguientes conclusiones:

- ✓ Para realizar el análisis de estructuras es imprescindible en la actualidad usar un programa de computación, para realizar el análisis más rápido, con mayor exactitud y con menos probabilidad de errores. Los programas le facilitan a los ingenieros el introducirse en temas de mayor rigor y complejidad ya que brindan la posibilidad de resolverse por métodos bastante exactos y en pocos segundos.
- ✓ El Análisis no Lineal por la parte de la geometría o el Análisis de Segundo Orden se hace significativo en estructuras donde los elementos de estas presenten secciones donde sus inercias con respecto a los ejes “y” y “z” locales presenten diferencias considerables, mientras mayor sea esta diferencia el Análisis de Segundo Orden será más significativo, como ejemplo se encuentran las estructuras metálicas donde muchas de sus secciones cumplen a la perfección lo planteado.
- ✓ Los ejemplos resueltos paso a paso, demuestran en forma clara la aplicación conceptual y el trabajo numérico y operacional que tiene que desarrollar un computador provisto de un programa basado en el análisis matricial sea en la técnica del Método de los Desplazamientos o en la técnica del Método de los Elementos Finitos.
- ✓ Se da un método para el Análisis de Segundo Orden de una estructura, por el Método de los Desplazamientos. Este es aplicable al cálculo de la carga crítica y a la determinación de la influencia de las fuerzas axiales en las deformaciones transversales.
- ✓ El Método aplicado para el Análisis de Segundo Orden es de fácil aplicación y da valores bastante aproximados para cargas que están lejos de las cargas críticas.



5. Bibliografía:

- Ferdinand Singer, “Resistencia de Materiales” 1971.
- S. Timoshenko, “Resistencia de Materiales” 1957.
- James M. Gere y William Weaver, Jr.: “Análisis de Estructuras Reticulares”, 1967
- Penado M: Análisis Matricial de Estructuras “Método de los Desplazamientos”. Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría”. La Habana, Cuba: 1987.
- Hartz, J. Billy: “Matrix formulation of structural stability problems”, Proc. ASCE, Vol. 91, No. ST6, Diciembre 1965.
- Eugenio Oñate Ibáñez: “Calculo de estructuras por el método de elementos finitos”. 1995
- Bolívar Peñafiel González: “Calculo de estructuras por el método de elementos finitos” 2005.