Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Maestría en Educación mención Enseñanza de la Matemática

La Teoría de las Situaciones Didácticas como metodología de enseñanza para la modelación matemática de ecuaciones en el Tercero de BGU de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Magíster en Educación mención en Enseñanza de la Matemática

Autor:

Mateo Felipe Sacaquirín García

Director:

Sonia Janneth Guzñay Padilla

ORCID: 0000-0002-2984-9265

Cuenca, Ecuador

2024-03-21

Resumen

La modelización matemática es una destreza que ocupa un sitio preponderante dentro del currículo educativo ecuatoriano y contribuye a la formación integral de los estudiantes. No obstante, la carencia de recursos didácticos y la falta de metodologías de enseñanza efectivas impiden su correcto aprendizaje. En este contexto, el objetivo principal de la presente investigación fue medir el impacto en el rendimiento académico que tiene una propuesta de enseñanza para la modelación matemática de funciones y ecuaciones empleando la metodología de situaciones didácticas de Brousseau en los estudiantes del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral ubicada en la parroquia rural La Asunción del cantón Girón, Azuay. Se llevó a cabo un estudio cuasi-experimental con alcance correlacional en el que previamente los estudiantes siguieron una rutina de estudio convencional de los temas de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Posteriormente, se realizó un pretest para evaluar el rendimiento del grupo. A continuación, se llevaron a cabo ocho sesiones de trabajo durante las cuales se aplicaron las situaciones didácticas. Finalmente, se procedió a realizar el postest para evaluar los resultados después de la intervención. De esta manera, mediante la prueba t de student y el análisis de varianza (ANOVA), se obtuvo una diferencia significativa entre las calificaciones del pretest y el postest (p-valor < 0,05). Por lo tanto, se determinó que la aplicación de las situaciones didácticas como estrategia didáctica influyó significativamente en la mejora del rendimiento académico.

Palabras clave del autor: modelación matemática, situaciones didácticas, funciones cuadráticas, funciones exponenciales, funciones logarítmicas

Abstract

Mathematical modeling is a skill that holds a prominent place within the Ecuadorian educational curriculum and contributes to the comprehensive education of students. However, the lack of educational resources and the absence of effective teaching methodologies hinder its proper learning. In this context, the main objective of the present research was to measure the impact on academic performance of a teaching proposal for mathematical modeling of functions and equations using the didactical situations methodology of Brousseau on students in the Third Year of High School at the Remigio Crespo Toral Educational Unit located in the rural village of La Asunción in Girón, Azuay. A quasi-experimental study with correlational scope was conducted, in which students previously followed a conventional study routine for topics such as linear, quadratic, exponential, and logarithmic functions. Subsequently, a pretest was conducted to assess the group's performance. Next, eight working sessions were carried out during which the didactical situations were applied. Finally, a postest was conducted to evaluate the results after the intervention. In this way, through the student's t-test and the analysis of variance (ANOVA), a significant difference was obtained between the pretest and postest scores (p-value < 0.05). Therefore, it was determined that the application of didactical situations as a teaching strategy significantly influenced the improvement of academic performance.

Author Keywords: mathematical modelling, didactical situations, linear functions, quadratic functions, exponential functions, logarithmic functions

Índice de contenido

UCUENCA

Índice de figuras

Índice de tablas

Dedicatoria

A mi familia, a la que le debo todo lo que soy. En ella residen los ideales en los que creo y por los que lucho.

UCUENCA

Agradecimientos

A la facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación por haberme permitido ser parte de este programa de maestría que me ha ayudado a crecer en el ámbito profesional y humano.

A mi tutora, la profesora Sonia Guzñay, por su guía y por compartir con pasión y generosidad sus conocimientos.

A las personas que eventualmente dejaron su aporte en este trabajo: compañeros, amigos, estudiantes. Sin ellos yo no podría haber logrado esto.

Introducción

En esta época de transición en la que somos testigos de cómo los avances tecnológicos influyen en áreas cada vez más sensibles del desarrollo humano, la enseñanza de la Matemática debe brindar su contingente para formar seres humanos con un pensamiento crítico y matemático capacitado para entender y resolver la diversidad de problemas que involucra una sociedad en constante evolución. En este contexto, la modelización es considerada como una actividad matemática idónea en la cual los estudiantes deben dar un significado a los conceptos aprendidos y extender su uso más allá del ámbito memorístico (Oswalt, 2012).

Las reformas implementadas en el currículo educativo ecuatoriano han buscado, durante varios años, la integración de la modelización en los niveles de educación básica y superior, con el objetivo de que los estudiantes de bachillerato la manejen con solvencia. Trelles y Alsina (2017) enfatizan en la importancia que tiene la modelización en los planes de estudio de diversos países, esto debido al papel que juega esta destreza en el desarrollo de aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida), así como dentro de la propia educación matemática.

La realidad evidenciada en la práctica educativa demuestra lo complejo y demandante que resulta trabajar esta destreza en el aula de clase. De este modo, se puede hacer hincapié en diversos factores que abonan a esta problemática, entre ellos: la complejidad de los contenidos de modelización, falta de conocimientos previos en los estudiantes o la escasez de recursos didácticos. Desde el ámbito del docente, también resulta evidente la ausencia de metodologías eficientes para liderar actividades de modelización que se acoplen al entorno educativo. Por tanto, se vuelve relevante implementar soluciones que promuevan una mejora en el rendimiento de esta destreza.

Trigueros y Gaisman (2006) manifiestan que la enseñanza de la modelización implica plantear a los estudiantes problemas abiertos y complejos que exijan la aplicación de conocimientos previos y habilidades para elaborar hipótesis y desarrollar modelos pertinentes que expliquen el fenómeno en cuestión. En este contexto, la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) se presenta como una estrategia coherente con los requisitos de la modelación. Según Chavarría (2006), su objetivo es que el alumno internalice, integre y comprenda los conocimientos para abordar de manera independiente situaciones problemáticas, prescindiendo de una intervención didáctica directa, concepto conocido como "situación a-didáctica".

Consecuentemente, diversas propuestas pedagógicas para la modelización con TSD han demostrado tener un impacto positivo en el rendimiento de los estudiantes. Sánchez y Jiménez (2018) plantean una investigación cualitativa en la que se propone resolver un problema de estadística enmarcado en una situación didáctica. De la misma manera Danisman y Güler (2019) proponen el estudio cualitativo y cuantitativo de una situación didáctica para obtener el modelo matemático del problema denominado “los 500 casilleros”. En ambos casos los resultados indican una mejora significativa en el rendimiento de los estudiantes, así como un aumento en su motivación para resolver problemas contextualizados y que presentan un mayor nivel de complejidad.

De esta manera, el presente trabajo se enfoca en la elaboración de situaciones didácticas destinadas a la modelación matemática de funciones en el tercer año de bachillerato de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral. Además, se pretende evaluar el impacto que tiene esta propuesta didáctica en la destreza de modelación matemática de los estudiantes en el corto plazo. Con este propósito, se lleva a cabo un estudio cuasiexperimental que evalúa el rendimiento académico de los estudiantes mediante un pretest y un postest, este último administrado después de la intervención en el aula.

En este contexto, la hipótesis planteada en la presente investigación sostiene que la implementación de situaciones didácticas en el aula tiene un impacto positivo en el rendimiento de los estudiantes en el área de modelación matemática de funciones. En este sentido, se pretende contrastar el promedio de los 22 estudiantes que conforman la muestra utilizando pruebas inferenciales como ANOVA y la prueba t de Student, además de realizar una comparación de los indicadores de modelización, es decir las técnicas utilizadas para resolver los problemas planteados.

El desarrollo del trabajo sigue un orden estructurado. En el primer capítulo, se aborda el marco teórico, focalizándose en un análisis bibliográfico que explora el modelo pedagógico adoptado en el estudio, la conceptualización de la modelación matemática y el desarrollo de la teoría de situaciones didácticas. El segundo capítulo presenta el diseño de la propuesta metodológica, detallando las ocho situaciones didácticas diseñadas para la modelización de funciones.

En el tercer capítulo se detallan aspectos de la metodología que describe la población, técnicas e instrumentos empleados durante la intervención de la propuesta. En el cuarto capítulo se muestra el análisis estadístico de los resultados obtenidos en la intervención seguido de la discusión de resultados. Finalmente, en el quinto capítulo, que aborda las conclusiones, se lleva a cabo una revisión de los aspectos más relevantes de la investigación realizada. Además, se proporciona un espacio para la reflexión y las recomendaciones basadas en el trabajo realizado.

Capítulo I

1. Marco teórico

Durante las últimas décadas la actividad de modelización concita el interés de distintas propuestas didácticas concernientes al aprendizaje de las ciencias y matemáticas. Así, la modelización es considerada como un enfoque competitivo dentro de la educación científica, o al menos como una dimensión de la investigación científica, otorgando relevancia al involucramiento en el desarrollo de distintas capacidades a partir de la modelización en ciencias (Aragón et al., 2018).

Partiendo de esta premisa, se sostiene que el proceso de aprendizaje de la modelización posibilita la creación de conocimientos contextualizados y orientados hacia el avance del saber, además de propiciar la formulación de tareas matemáticas con significado y la integración de recursos en el aula. En este sentido, se plantea una revisión de la literatura que se enfoca en aspectos tanto matemáticos como didácticos, con el propósito de comprender la posición de la modelación matemática en el ámbito educativo.

1.1 Estado del arte

En lo concerniente a las propuestas enfocadas en fortalecer la competencia de modelización en los estudiantes se cuenta, por un lado, con autores que promueven su aprendizaje mediante el uso de las matemáticas para solucionar problemas en contextos determinados. Asimismo, se hace el empleo de recursos tecnológicos como software matemático o Tics para modelar situaciones específicas. En lo referente a la aplicación concreta de la metodología de situaciones didácticas, (TSD), se cuenta con investigaciones que hacen hincapié en el fortalecimiento de la modelación matemática a través de la resolución de problemas.

En primera instancia, Trelles et al. (2021) plantean y analizan los resultados de una tarea dirigida en el contexto de la pandemia del COVID 19 a un grupo de estudiantes de primaria de una escuela pública de la ciudad de Girona, España. El objetivo primordial fue generar, a partir de datos reales, modelos de predicción del número de infectados y fallecidos por Coronavirus. La investigación se basó en un estudio de caso múltiple que supervisó el trabajo individual de siete estudiantes quienes cumplieron exitosamente con la tarea asignada. Entre los logros destacados de la investigación, se encuentra el desarrollo intuitivo de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, así como el fortalecimiento de procesos claves en la labor de modelización como son la matematización y transnumeración de datos.

Por su parte Moukhliss et al. (2023) examinan la efectividad de modelar problemas con GeoGebra para fortalecer las habilidades algebraicas, así como analizar el impacto del software en el interés por resolver problemas contextualizados. El estudio de tipo cuasiexperimental estuvo dirigido a 56 estudiantes de entre trece y catorce años de una secundaria en Marruecos. Se comparó el proceso de modelización entre un grupo experimental que usó GeoGebra y otro grupo de control que siguió una rutina de clases normal. Los resultados revelaron que el grupo experimental obtuvo calificaciones significativamente más altas (77,67 frente a 63,90 en el grupo de control) y se notó un aumento en el interés por estudiar problemas contextualizados.

Asimismo, Sánchez et al. (2020) desarrollan una propuesta de modelación matemática de funciones con la ayuda de GeoGebra, esta vez con un enfoque cualitativo. El estudio contó con la participación de 18 estudiantes de la especialidad en docencia de las Matemáticas en un instituto superior de República Dominicana. Los resultados del estudio pusieron de manifiesto una comprensión de los elementos conceptuales de una función, así como la influencia positiva del software en la interpretación gráfica del problema planteado.

Se pueden evidenciar propuestas enfocadas en otros ámbitos como la trigonometría. Por ejemplo, Tong et al. (2019) desarrollaron un estudio mixto para fortalecer la competencia de modelización matemática a través del uso de los teoremas de seno y coseno en problemas contextualizados. El grupo de intervención lo conformaron 46 estudiantes de décimo grado de secundaria de una escuela en la provincia de Ben Tre, Vietnam. Tras la aplicación del pre test se implementó la propuesta en el aula, que implicaba un proceso de modelización dividido en siete etapas. Las mediciones basadas en criterios cuantitativos y cualitativos evidenciaron que en el post- test más del 80% de los estudiantes cumplieron de manera satisfactoria con los criterios de resolución y obtención de respuestas de los problemas planteados. Además, en la evaluación cualitativa, los estudiantes evidenciaron mayor motivación para estudiar temas de modelización y coligieron sobre la utilidad de la matemática para resolver problemas en otros campos de aplicación.

En el contexto de la modelización a partir de la metodología de situaciones didácticas de Brousseau, Sánchez y Jiménez (2018) diseñaron una investigación de enfoque cualitativo -

interpretativo enfocada en la resolución de un problema de estadística aplicando situaciones a-didácticas. Así, se llevó a cabo en el aula un trabajo colaborativo con el enfoque de investigación- acción. En los resultados se evidenció que el grupo de trabajo conformado por estudiantes de docencia de la universidad de Tunja en Boyacá, Colombia, empleó de forma exitosa diferentes estrategias para llegar a la resolución del ejercicio. No obstante, en su análisis descriptivo, los investigadores, advirtieron sobre el deficiente desempeño que tuvieron los docentes para liderar discusiones alrededor de las tareas de modelización.

Por último, Danisman y Güler (2019) realizaron un estudio de caso para analizar las habilidades matemáticas de pensamiento de un grupo de 16 estudiantes de docencia de las matemáticas en Turquía al trabajar la resolución de una tarea desafiante denominada “el problema de los 500 casilleros” mediante el proceso de situaciones didácticas. Entre los logros resaltados por los investigadores se destaca el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas en los estudiantes al emplear métodos de prueba y error hasta llegar a obtener modelos de representaciones algebraicas complejas. Además, la discusión de grupo sostenida durante el proceso de validación fortaleció la capacidad argumentativa de los estudiantes y en general los participantes valoraron positivamente la experiencia de trabajar bajo esta modalidad.

Al cotejar estas investigaciones se establece que la modelización matemática es una destreza que se articula mediante metodologías de trabajo que emplean recursos de diversa índole y permiten enlazar conceptos matemáticos con situaciones del mundo real. En el caso particular de la modelización a partir de situaciones didácticas, se puede ponderar el impacto positivo en el desarrollo de estrategias para resolver problemas, así como la motivación hacia el aprendizaje de contenidos matemáticos. No obstante, se requiere la preparación y familiarización del docente con la metodología para mediar eficazmente los procesos y la discusión de los resultados obtenidos.

1.2 Modelización matemática

En la actualidad, las investigaciones con respecto a la modelización matemática ayudan a favorecer el proceso enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas. Este hecho ha repercutido de forma directa al desarrollo del diseño curricular que se mantiene en diferentes países, en donde se busca insertar la modelización dentro de planes de estudio en distintos niveles o años (Trelles et al., 2022). Los documentos curriculares ecuatorianos sostienen que es relevante contextualizar el aprendizaje a partir de la práctica en la vida diaria y la utilización de recursos de un entorno cercano (instrumentos) que permitan asociar la experiencia generada por el estudiante con los aprendizajes escolares del mismo. De esta manera el Ministerio de educación del Ecuador (2016) plantea que el estudiante adquiera herramientas que le permitan resolver problemas de su contexto a partir del procesamiento adecuado de la información y la aplicación de modelos algebraicos complejos que se apoyen en el uso de algoritmos y de las Tic.

Dentro de la literatura no existe un único criterio que permita conceptualizar el termino de modelización matemática, pues existen diversos autores que otorgan aportes relevantes y multidisciplinarios. Con este enfoque Kaiser y Sriraman (2006) evidencian que la perspectiva educacional de la modelización está centrada en objetivos de carácter pedagógico y disciplinario, ya sea que aborde conceptos de introducción o de desarrollo de conceptos matemáticos como base en la estructuración de los procesos de aprendizaje.

Existen varios planteamientos con respecto al concepto de modelización matemática, en donde se considera que "la modelización matemática es un proceso de resolución de problemas contextualizados en donde se elabora un modelo matemático para describir el fenómeno real que se está estudiando" (Aymerich y Albarracín, 2022, p.5). Asimismo, Rojas et al. (2017) manifiestan que la modelización matemática surge como un medio que ayuda al desarrollo o uso de modelos matemáticos a partir del planteamiento de problemas en contexto. Es así que la implementación de estrategias en la resolución de problemas de modelización dentro de diversos niveles educativos tiene el potencial de desarrollar habilidades matemáticas y a su vez aporta en el trabajo de competencias de pensamiento crítico sobre el contexto de los estudiantes.

La definición de modelización matemática fue tomando impacto desde que Pollak (1969) puntualizó las etapas que conformaban a esta actividad:

- Identificar una interrogante del mundo actual que se quiere comprender.
- Escoger objetos comunes y relevantes para la interrogante generada y evaluar las posibles relaciones entre ellos.
- Definir cuál interrogante es necesaria y descartar aquellas que no se necesitan.
- Cambiar esta versión a términos matemáticos, generar fórmulas matemáticas para la interrogante seleccionada y resolver el problema.

Posteriormente, la consideración de Zaldívar et al. (2017) permite contemplar a la modelización matemática como un proceso en donde se transita un problema planteado desde una situación real hasta llegar al modelo matemático. Para una investigación son tres los momentos principales que deben ejecutarse en clase para una modelización matemática:

- Momento 1: Introducción a la situación real
- Momento 2: Matematización del contexto en base a los datos seleccionados
- Momento 3: Análisis y explicación de la situación real.

Una de las consignas dentro de la modelización es crear escenarios que permitan a los estudiantes ser autónomos y tomar de decisiones a lo largo del proceso de resolución. Oswalt (2012) manifiesta que en el aula de clase donde se trabaja con modelización matemática, los profesores deben precisar que son los estudiantes los responsables de elaborar métodos para resolver los problemas presentados y que el profesor apoyará y guiará en el trabajo, pero no facilitará las respuestas. Para este fin, resulta imprescindible elaborar problemas que sean relevantes y complejos para el estudiante. La transformación de un problema estrictamente matemático a un problema de modelización se evidencia en la figura 1.

Figura 1

Vía de transformación de un problema matemático a problema de modelización

Fuente: Comap y Siam (2019)

Finalmente, para Ortiz (2002) la modelización matemática es aquel proceso a partir del cual se desarrolla y se analiza la relación entre algún fenómeno y una estructura en base a una situación o contexto de la vida diaria con el fin de razonar y comprender este problema. En esta instancia, el uso de estrategias como el trabajo en grupo o el uso de las Tics permiten que la comprensión y análisis del contexto vaya desarrollando en el estudiante mayor criterio y razonamiento de la modelización matemática.

1.3 La modelización matemática en la educación secundaria

En la coyuntura actual el aprendizaje de la modelización matemática constituye un objetivo de sumo interés dentro de la educación secundaria. Al insertarla en la planificación curricular del aula se promueven destrezas valiosas y estratégicas en el aprendiz para su desenvolvimiento cognitivo y social. De esta manera, la modelización contribuye al desarrollo de competencias y habilidades esenciales en el contexto moderno, tales como la creatividad, la innovación, el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la comunicación de conceptos matemáticas y la colaboración en el aula.

En una clase típica, a menudo se plantean problemas rutinarios que solo promueven la memorización y la repetición, sin contribuir a la comprensión de los conceptos matemáticos. En contraste, la modelización en el aula se enfoca en problemas cognitivamente desafiantes, lo que cambia la forma en que los estudiantes se relacionan con las matemáticas. De esta manera, la modelación matemática fomenta una comprensión más profunda de los conceptos y capacita a los estudiantes en la reflexión, interpretación y formulación de un plan cuando se enfrentan a problemas no convencionales (Oswalt, 2012).

En el proceso de modelización en el aula, el trabajo colaborativo se convierte en un elemento esencial. Según Smith y Kay (2016), la interacción social proporciona la oportunidad de compartir ideas con los demás miembros del equipo, permitiendo así la construcción conjunta del conocimiento. Trabajar en equipo en la resolución y discusión de problemas de modelización crea un entorno propicio que también fomenta el desarrollo de habilidades sociales en los estudiantes.

Además, es responsabilidad del docente facilitar un espacio para la exposición y discusión de las ideas matemáticas de los estudiantes. Estas discusiones contribuyen significativamente al aprendizaje en matemáticas, ya que ayudan a los estudiantes a comunicar sus ideas y pensamientos de manera que tengan un valor matemático significativo (Smith & Kay, 2016).

Por otra parte, al plantear problemas desafiantes, se involucra a los estudiantes con contextos diversos que enriquecen su comprensión de las matemáticas. Según Asempapa y Sturgill (2019), la modelización es una habilidad matemática que se desarrolla de manera significativa en prácticas educativas innovadoras como STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas). Por lo tanto, cuando se aplica la modelización de manera adecuada, los estudiantes dejan de percibir las matemáticas como simples técnicas y procedimientos, y comienzan a entenderlas como una herramienta para resolver problemas (Biembengut & Hein, 2010).

Kaiser y Sriraman (2006), mencionan que las tareas de la modelización matemática se sustentan bajo el proceso completo de resolución de problema real, en donde el desarrollo de un modelo en base a un contexto específico se concentra en un factor principal, es así que las tareas de modelización deben cumplir todas las etapas del ciclo de modelización:

a) Convertirse en un reto relevante para los estudiantes,
b) Considerarse innovadoras o auténticas o a su vez que incluya datos auténticos,
c) Plantearse como un problema macro en el que exista distintas vías de resolución,
d) Que sean complejas, es decir, que el proceso de resolución no sea conocido,
e) Generar crítica del modelo y en base a los resultados,
f) Desafiar a los estudiantes para la utilización de métodos y conceptos matemáticos que permitan elevar el aprendizaje de los estudiantes.

1.4 Dificultades en el aprendizaje de la modelización

Las experiencias de aprendizaje basadas en la modelización matemática y llevadas a cabo en diversos contextos escolares han puesto en evidencia lo complejo que resulta su adecuada implementación en el aula. De esta manera, dificultades de tipo pedagógico y cognitivo se hacen recurrentes entre docente y estudiantes al momento de afrontar clases con una temática de modelización.

En primer lugar, las dificultades pedagógicas se relacionan principalmente con la falta de preparación de los docentes. Según Asempapa y Sturgill (2019), en un estudio realizado en escuelas secundarias del este de Estados Unidos con 62 profesores en práctica y 18 docentes en formación sobre modelización matemática, se concluyó que la gran mayoría de ellos tienen escasa o nula experiencia en prácticas de modelización matemática y pedagogías relacionadas con este enfoque. Curiosamente, en el contexto educativo estadounidense, como señalan los mismos autores, existen políticas que requieren el desarrollo de competencias en modelización para los estudiantes a lo largo de sus doce años de escolaridad.

En el contexto educativo latinoamericano la formación docente en temas de modelización también muestra inconvenientes. Villa (2015) reporta los resultados de un estudio realizado con docentes colombianos, en el cual se determina como en la mayoría de los casos, la labor pedagógica del maestro frente a la enseñanza de la modelización se hallaba limitada a la traducción y resolución de problemas rutinarios que no respondían al contexto vivenciado por los estudiantes.

Por otro lado, es importante tener en cuenta las falencias pedagógicas relacionadas con el componente curricular que afecta la labor del docente. Trelles et al. (2022) realizaron un análisis porcentual del número de actividades de modelización presentes en los libros de matemáticas utilizados en el bachillerato ecuatoriano, los cuales son editados por el Ministerio de Educación. Este análisis reveló que, en el período entre 2016 y 2019, estas actividades representaban menos del 5% del contenido. En ediciones posteriores de los libros, esta escasez de material aún persiste.

Otro desafío importante se refiere a las demandas intelectuales asociadas con la modelización matemática para los estudiantes. Blum y Borromeo (2009) sostienen que la modelización implica el ejercicio de diversas habilidades cognitivas y, por lo tanto, está estrechamente relacionada con competencias adicionales, como la lectura, la comunicación y la aplicación de estrategias para la resolución de problemas. Blum (2015), en su estudio con estudiantes de noveno grado, observó que estos a menudo carecían de estrategias para abordar problemas de la vida real y tenían dificultades para transferir su conocimiento y habilidades de un contexto a otro, incluso cuando las estructuras de los problemas posteriores eran similares a las de los problemas previamente resueltos.

Finalmente, se evidencia la complejidad que representa para el docente abordar los contenidos de modelación. Los profesores deben poseer diversas competencias, tanto en conocimiento matemático como en aspectos extra matemáticos, además de la capacidad de concebir tareas y enseñar temas relacionados con la modelación (Blum, 2015). De este modo, Arseven (2015) enfatiza que no existen estándares definidos sobre cómo enseñar matemáticas y ciencias utilizando eventos de la vida real a través de actividades auténticas.

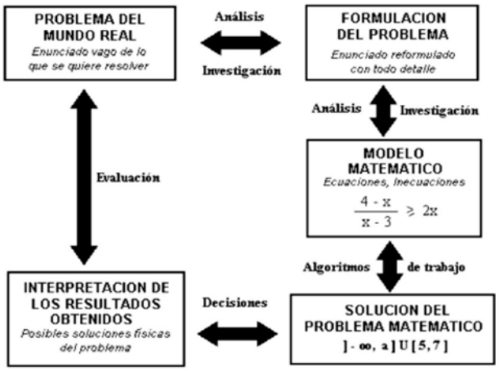
1.5 Uso de la tecnología en la modelización

Al dimensionar la importancia de la modelización en la educación matemática, es importante considerar las implicaciones de su aplicación en el aula. Esta competencia matemática se convierte en un enfoque pedagógico central que facilita la conexión entre el conocimiento, el contexto y los recursos disponibles (Morales et al., 2021). En este escenario, es crucial mencionar el uso de la tecnología de la información y la comunicación (Tics), que desempeña un papel fundamental en la educación moderna.

La modelización implica un proceso en el que cada etapa conlleva un objetivo específico, y es precisamente en ese contexto donde la experticia de docente y alumnos debe ponerse en juego para hacer uso de los recursos tecnológicos que ayuden en aquella labor. Así en el esquema de modelización matemática elemental, figura 2, se pueden analizar los momentos idóneos en los que se puede emplear las Tics: ya sea para implementar el uso de una hoja de cálculo que lleve a cabo las operaciones para determinar la solución matemática o un software para comprobar y evaluar los resultados del modelo obtenido:

Figura 2

Modelación matemática elemental



Fuente: Morales et al. (2021)

De hecho, la mayoría de los problemas de modelización requieren el uso de tecnología y como menciona Oswalt (2012) aquello implica que el profesor tenga una variedad de recursos a disposición de los alumnos o que los estudiantes tengan acceso a internet para investigar o que ellos sean capaces de usar calculadoras gráficas, hojas de cálculo u otros softwares matemáticos que ayuden a encontrar la solución. Esta dinámica de trabajo puede además estimular el desarrollo de aquellos estudiantes que tengan una vocación para el área científica.

El uso interactivo de recursos en el aprendizaje no debe presentarse de manera desarticulada entre la parte práctica y el análisis pedagógico. En caso contrario, se reduciría a un simple uso de instrumentos, omitiendo el impacto real en la construcción de conocimientos digitales y teóricos (Ortiz, 2002). Por tanto, el uso de las TIC en la modelización matemática debe ser considerado como una opción relevante que respalda todas las etapas de este enfoque. Sin embargo, es esencial que el docente medie la interpretación de los datos generados a través de las TIC para lograr impactos significativos.

1.6 El constructivismo

En el ámbito del desarrollo de la educación matemática, el constructivismo ha emergido como un modelo educativo sólido que respalda propuestas innovadoras y enfocadas en las necesidades del alumno. Dentro de esta teoría, el estudiante no es considerado simplemente como un receptor pasivo de contenidos, sino como un individuo que participa activamente en la construcción de su propio conocimiento. De acuerdo con Ortiz (2015), el constructivismo se define como un proceso de interacción dialéctica entre los conocimientos del docente y los del estudiante. Estos conocimientos se someten a discusión, confrontación y diálogo, lo que, a su vez, conduce a un aprendizaje significativo.

En la formación de los ejes del constructivismo, Ortiz (2015) sintetiza la aportación de algunos autores trascendentes. Por un lado, la teoría cognitiva de Piaget manifiesta que la maduración biológica del estudiante propicia el desarrollo de estructuras cognitivas más complejas, lo cual permite una mejor relación con el ambiente que rodea al sujeto y por ende un mayor aprendizaje que mejora la adaptación al medio. Asimismo, Ausubel afirma que el aprendizaje se crea a partir de la relación entre los conocimientos previos que posee el aprendiz con los recibidos por el docente y que la mediación de los mismos depende de aspectos lógicos, cognitivos y afectivos establecidos durante la interacción.

Un componente esencial en el paradigma constructivista es la influencia del entorno social en la construcción de aprendizajes. En este contexto, destaca la relevante contribución de un referente educativo como Vygotsky. Según lo sintetiza Ortiz (2015), en la teoría de Vygotsky, el aprendizaje se configura como el resultado de la interacción del individuo con su entorno. Loyes (2006) refuerza esta noción al coincidir en que el conocimiento, incluso el matemático, es un producto cultural que se genera y controla en el contexto de la interacción social. Las implicaciones del constructivismo social se materializan en el establecimiento de didácticas que han tenido un aporte relevante en la reforma educativa.

1.7 La escuela francesa de didáctica de las matemáticas

La escuela francesa nace como una corriente pedagógica de principios constructivistas que sienta sus bases a inicios de los setenta y que se presenta como una alternativa innovadora a la perspectiva antigua y clásica de la educación matemática. De este modo, en la concepción antigua la enseñanza de las matemáticas se concibe como un arte centrado exclusivamente a las habilidades del alumno y profesor, y en donde prima el dominio de los contenidos matemáticos y la habilidad del docente para enseñar (Ruiz et al.,2004). En contraste, la etapa clásica fija su atención en analizar los procesos psico-cognitivos de Piaget, establecidos durante el aprendizaje del estudiante y se muestra como una concepción que, en cierta medida, supera la visión antigua (Loyes, 2006).

Los defensores de la escuela francesa argumentan que la concepción clásica subordina lo didáctico a lo psicológico, obstaculizando que la didáctica de las matemáticas progrese como una disciplina científica (Ruiz et al.,2004). En este contexto, proveniente de la didáctica francesa, surge la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, que reformula las ideas piagetianas. Loyes (2006) señala que mientras Piaget se centra en los procesos psicológicos (asimilación y acomodación) de quien aprende matemáticas, la TSD introduce un factor clave: el medio. A partir de ahí, estudia cómo el aprendiz gestiona un saber matemático específico en una situación determinada.

1.8 Teoría de las situaciones didácticas

Al referirse sobre el término situaciones didácticas, en un inicio se debe considerar dos enfoques: el tradicional y el enfoque de la teoría de Brousseau, los cuales están relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A partir del primer enfoque se conserva la relación vertical docente - alumno, en donde el profesor otorga (deposita) los contenidos del tema, educa al alumno, quien adquiere todos los conceptos y lo plasma de la misma manera que fue enseñado (Chavarría, 2006).

Dentro del enfoque tradicional no se contextualiza el conocimiento, asimismo no se propicia un aprendizaje significativo, de tal manera que bajo este enfoque se considera que “La educación sufre de la enfermedad de la narrativa que transforma a los estudiantes en receptores que deben ser llenados de conocimiento por los profesores, en donde cuanto mayor sea el recipiente para llenar, mejor aprendizaje mantendrá el alumno” (Chavarría, 2006, p.2).

Por otra parte, Mantagud (2020) manifiesta que la teoría de situación didáctica de Brousseau es un modelo derivado de la filosofía, considerando que a más de explicar la teoría matemática y verificar si los estudiantes presentan un adecuado conocimiento, se mantiene una situación más adaptable como el debate de posibles soluciones y el concientizar que puede ser la misma persona quien debe llegar a descubrir distintos métodos y resoluciones ante un contexto real.

1.9 Relación: situación didáctica / situación a-didáctica

Dentro de las relaciones que se presentan en la teoría de situación didáctica Chavarría (2006) resalta que se encuentran dos situaciones:

Situación A-didáctica: Es aquel proceso en el que el profesor plantea al alumno un problema que proviene de un contexto cotidiano, mismo que puede ser abordado a partir de conocimientos previos, y que además le permita desarrollar hipótesis y conjeturas que sean similares al trabajo de la comunidad científica, es decir, el alumno estará inmerso en una micro comunidad científica, en donde resolverá problemas sin la ayuda o intervención del docente, con la finalidad de poner en práctica el conocimiento adquirido.

Situación didáctica*:* Esta situación engloba el proceso en donde el docente otorga el recurso didáctico para que el estudiante construya su conocimiento, es decir, se considera que la situación didáctica abarca o conlleva a las situaciones a-didácticas de esta manera; situación didáctica, se trata de las interrelaciones de los tres individuos que lo componen, en resumen, la interacción entre los elementos de la situación didáctica surge o nace en el medio didáctico que el profesor diseña para que se ejecute el desarrollo de nuevo conocimiento (situación didáctica) y pueda el alumno asimismo afrontar diferentes situaciones descritas en la dinámica sin la intervención del docente (situación a-didáctica).

1.10 Situación didáctica de Brousseau

La Teoría de situaciones didácticas planteada por Guy Brousseau, es una teoría de la enseñanza que está inmersa en la didáctica de la matemática. Se sustenta en la hipótesis de que el conocimiento matemático no se desarrolla de manera fortuita, sino a partir de la búsqueda de soluciones por mérito propio del aprendiz, considerando el debate con el resto de estudiantes y el análisis y reflexión del camino que escogió para llegar a la situación ante cualquier contexto (Trigueros, 2009).

La consideración de esta teoría es que el proceso de enseñanza-aprendizaje del conocimiento matemático, más que un enfoque meramente lógico, es tomado como una construcción colaborativa dentro de la comunidad educativa, en la cual, a partir de la discusión o el debate de un problema matemático, se alcanzan soluciones que generan mayores estrategias en el estudiante y establecen diferentes vías para la comprensión de la teoría matemática (Montagud, 2020).

La teoría de situación didáctica de Guy Brousseau nace en el año de 1970, periodo en el que paralelamente en Francia aparece la didáctica en la matemática (Godino et al., 2020). En este enfoque se consideran la intervención de tres objetos (elementos fundamentales): el docente, el alumno y el medio didáctico. En este proceso el docente es quien otorga el recurso con el cual el alumno construye el conocimiento, de tal manera que la situación didáctica, está basado en el conjunto de interrelaciones entre tres elementos: docente, alumno y medio didáctico.

1.10.1 Efectos de la situación didáctica

A partir de diversos hechos que emergen en la situación didáctica, Guy Brousseau advierte efectos que pueden interrumpir el desarrollo del conocimiento que el estudiante está generando dentro del medio didáctico que el docente diseñó. Según Guzmán et al. (2020), manifiestan que específicamente son atributos que originan efectos negativos dentro del proceso enseñanza-aprendizaje:

Efecto Topaze: Es aquella circunstancia en la cual el alumno llega a la solución del problema, pero no fue por mérito propio, sino porque el docente adjudica la resolución de la situación, es decir, el docente advierte las dificultades que los alumnos están presentando para llegar a la solución, por lo cual se ve en la necesidad de mostrar el proceso a seguir para llegar a la resolución. Evidentemente, con este efecto no se llega al desarrollo de conocimiento del estudiante.

Efecto Jourdain: Este efecto consiste en la actitud del docente ante una respuesta incorrecta del alumno, en el cual para no generar desmotivación el docente procede a manifestar que “está bien”, sin considerar que este es un comportamiento banal del estudiante y que es asumido como conocimiento válido para el docente.

Deslizamiento Meta-cognitivo: Este enfoque considera tomar una heurística (método para aumentar el conocimiento) para la resolución de una situación y considerarlo como un objeto de estudio, en donde se podría hacer el uso de diagramas (teoría de conjuntos) para la ejemplificación. Cuando se utiliza los diagramas se está dejando a un lado la teoría de situación didáctica para abarcar la teoría de conjuntos, a este fenómeno se lo denomina deslizamiento meta-cognitivo.

Uso excesivo de la analogía: Se considera que para la resolución de problemas es fundamental el uso de analogías; sin embargo, no es adecuado suplantar la noción de un estudio por un caso análogo, es decir, no se puede ejecutar un problema análogo, sino considerar el problema real.

1.10.2 Tipología de la situación didáctica

Según Ortiz (2002), se evidencia que, a partir de la Teoría de Guy Brousseau, el autor clasifica las situaciones didácticas, en diversos momentos para la retención del conocimiento en el estudiante, los cuales son:

1. Situación acción: Consiste específicamente en que el alumno trabaja únicamente con un problema, aplica los conocimientos adquiridos y desarrolla un determinado aprendizaje.
2. Situación de formulación: Consiste en el trabajo en equipo, en donde es fundamental la comunicación entre los alumnos y compartir experiencias para la construcción del conocimiento, es decir, en esta situación es relevante el control comunicativo de las ideas.
3. Situación de validación: Consiste en que, una vez desarrollado la interacción de forma individual o grupal con el recurso didáctico, se sustenta todo el conocimiento a juicio de un interlocutor, es decir, se comparte lo trabajado, se genera una retroalimentación con el docente y él valida si está correcto.
4. Institucionalización del saber: Este factor representa una actividad importante para el cierre de la situación didáctica, aquí los estudiantes ya construyeron su conocimiento y en este punto el profesor reúne el conocimiento obtenido y lo socializa.
5. Evaluación: Es importante considerar que tanto la evaluación que genera el docente y la auto evaluación que presenta el alumno, se consideran como procesos de aprendizaje, de tal manera que el aula, el aprendizaje y la evaluación deben estar juntos como un proceso recursivo. Para esta tipología el seguimiento del docente desde el inicio de borradores hasta el final de los bocetos es una forma de evaluación del desempeño de los alumnos; asimismo, el docente puede presentar trabajos adicionales para poder obtener más calificaciones a ser promediados.

1.10.3 Etapas de Dienes frente a situaciones didácticas

Según Cubas (2007), con esta teoría se pretende que el aprendizaje del alumno en las matemáticas sea abastecido en tres procesos: abstracción, generalización y comunicación. De ahí que en el primero se visibilizan seis etapas que son equiparables a las etapas descritas en las etapas de Guy Brousseau. Por tanto, se tiene:

a. Etapa I. Adaptación: Se ejecuta esta etapa a partir de un juego libre.
b. Etapa II: Estructuración: En esta etapa se otorga las reglas o normas del juego con sus respectivas restricciones, los cuales conllevan al objetivo del juego.
c. Etapa III. Abstracción: Los estudiantes se les otorga la estructura estándar del juego y se desligan de aspectos sin interés.
d. Etapa IV. Representación: Se genera una representación gráfica o por esquemas de la estructura estándar del juego.
e. Etapa V. Descripción de las representaciones: Se estudia las propiedades de la estructura abstracta, de tal manera que es necesario diseñar un lenguaje.
f. Etapa VI. Formulación: Se limita la descripción a un número exacto de palabras, con el fin de generar mejor crítica y ser concretos en el resultado.

1.10.4 El contrato didáctico

En el análisis de la teoría de situaciones didácticas, las acciones que despliegan tanto el docente como el estudiante están ceñidas al denominado contrato didáctico. En términos de Chavarría (2006) el contrato didáctico de Brousseau comprende las acciones que el alumno espera del docente y de la misma forma el conjunto de comportamientos que el docente busca que el alumno ejecute durante el desarrollo de la actividad. Este conjunto de reglas implícitas permite equilibrar el trabajo y evita que se caiga en los efectos negativos de las situaciones didácticas como el Topaze o Jourdain.

D´Amore et al. (2018) menciona que el contrato didáctico explica la necesidad de que exista una relación adecuada entre el estudiante y el docente, ya que el docente es quien domina el saber matemático y debe comunicarlo y el estudiante es quien lo aprende, y de forma inversa: sin la colaboración activa de los estudiantes el docente no puede llevar a cabo la situación didáctica. De esta manera se llega a tener un sistema de acuerdo reciproco; no obstante, es posible que ciertas dificultades en el desarrollo de la situación didáctica obliguen a pautar ciertos acuerdos. Al respecto Radford (2008) acota que, si bien puede existir cierta flexibilidad al momento de llevar a cabo la actividad en clase, debe prevalecer la división de roles prevista en el acuerdo, esto es: que el docente provea la situación problema a resolver y los estudiantes tomen la responsabilidad de su solución y sean parte activa de la situación didáctica.

1.11 Modelización con tablas.

Las tablas han tenido un valor de uso didáctico indispensable dentro de diferentes campos de la Matemática; mediante ellas se pueden mostrar los resultados de un estudio estadístico de población, ubicar los pares ordenados de una función o diseñar la prueba de una función lógica. No obstante, resulta necesaria la revalorización de esta herramienta, pues la capacidad de interpretar la información presentada en tablas es una habilidad clave de la cultura científica, lo que a su vez requiere un énfasis en la educación matemática de las personas para dominar esta temática (Estrella, 2014).

Al buscar una definición de tabla se tiene varias acepciones, pero de manera general se puede considerar a una tabla como un arreglo rectangular de filas y columnas en donde hay un encabezado y donde se colocan datos numéricos (Estrella, 2014). Existen diferentes formas de presentar una tabla. De esta manera, en la figura 3, se tiene una tabla horizontal en donde se colocan los datos de una función en dos filas, la primera de ella corresponde a la variable independiente, y en la segunda fila se ubican los valores de la variable dependiente. El mismo caso se tiene con la tabla vertical, figura 4, en donde igualmente se colocan los valores de una función en sus respectivas columnas.

Figura 3

Tabla de valores (horizontal)

Función 1							
$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	x_n
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_n)$

Elaboración: Propia

Figura 4

Tabla de valores (vertical)

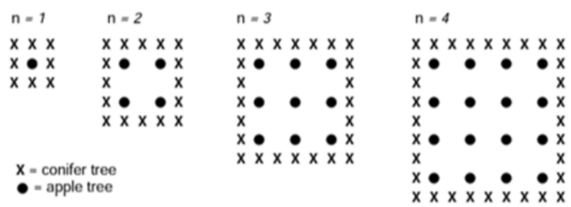
Función 2	
x	**F(x)**
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
…	…
…	…
x_n	$f(x_n)$

Elaboración: Propia

Las tablas constituyen el punto de referencia para realizar conjeturas, y obtener elementos de juicio para establecer un modelo matemático. Al analizar el ejemplo de la figura 5, se busca contabilizar el número de árboles de conífera necesarios para cercar a los árboles de manzana. Al levantar la información a partir de la tabla se visualiza un patrón de la relación que existe entre el incremento de manzanas y coníferas:

Figura 5

Modelización del número de árboles de un huerto



Filas (n)	Número de árboles manzana (m)	Número de árboles de conífera (c)
1	1	8
2	4	16
3	9	24
n	n^2	$8n$

Fuente: Elaboración Propia

De este modo, al organizar los datos en gráficas y tablas se genera un valioso mecanismo para representar los datos y encontrar relaciones entre las variables con el fin de determinar patrones, propiedades y relaciones (Glazer, 2011). De la misma manera, Ellenberg (2014) propone un problema a través de una tabla en la que se visualiza el número de impactos de bala recibidos en la estructura de un avión de combate de la segunda guerra mundial:

Figura 6

Problema de modelación en tabla

Sección del avión	Agujeros de bala por pie cuadrado
Motor	1,11
Fuselaje	1,73
Sistema de combustible	1,55
Resto del avión	1,8

Fuente: Tabla traducida de Ellenberg (2014)

El problema, inicialmente planteado al matemático Abraham Wald, tiene como objetivo determinar qué sección del avión debe ser blindada para lograr una protección óptima. La importancia educativa de esta situación radica en que los estudiantes analicen los datos de la tabla y sean capaces de establecer elementos de juicio. De este modo, se destaca la utilidad de las tablas para desarrollar modelos y realizar inferencias.

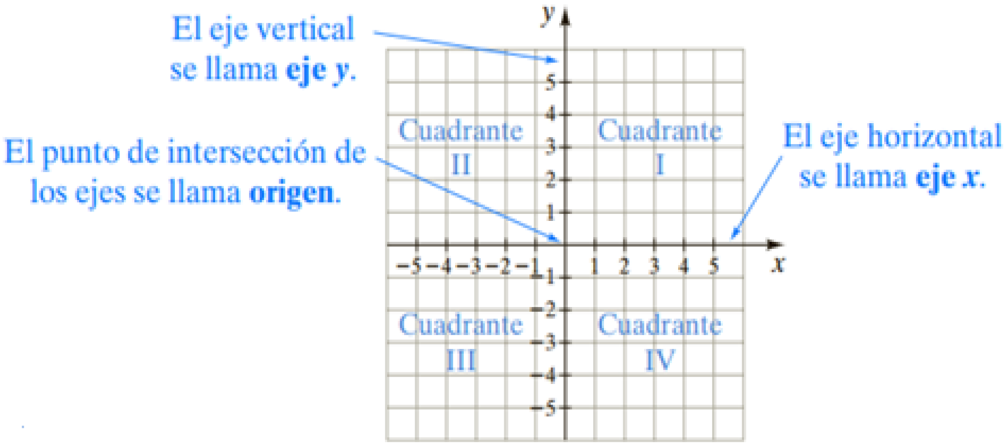
1.12 Modelización con gráficas

Las gráficas, al igual que las tablas, permiten llevar a cabo la modelización de un problema. En este caso, la situación es representada mediante una curva específica. De este modo resulta más fácil comprender las relaciones que hay entre las variables de un problema si se puede generar una representación visual de ellas, siendo que la gráfica indica cómo va cambiando una variable con respecto a otra. (Angel y Runde, 2013).

Para llevar a cabo la representación de una gráfica se emplea un sistema de ejes perpendiculares, denominado plano cartesiano, (en honor a René Descartes), en el cual van indicados los ejes con sus nombres y los cuadrantes correspondientes como se muestra en la figura 7. La forma que tienen estas gráficas está sujeta al tipo de función o relación que enlace a las variables de estudio. Entre los modelos de curvas más comunes, se pueden tener lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. En la figura 8, se muestra la gráfica de un modelo cuadrático.

Figura 7

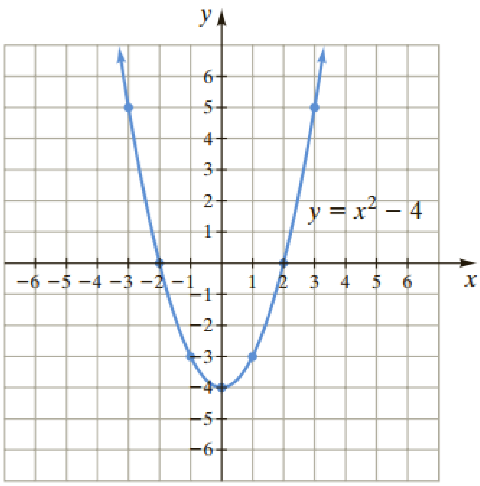
Plano cartesiano y sus partes



Fuente: Ángel y Runde *(2013)*

Figura 8

Gráfica de una función cuadrática



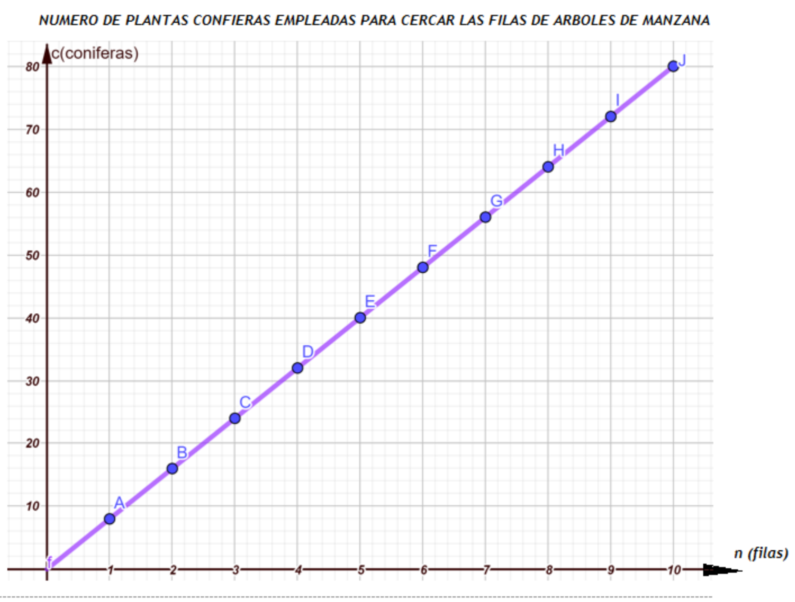
Fuente: Ángel y Runde *(2013)*

En el contexto práctico de un problema de modelización, se suele realizar el gráfico a partir de una tabla de datos. Como ejemplo, se toma la tabla que indica el crecimiento de las plantas de conífera con respecto a filas de árboles de manzana, ver figura 9. Cada par ordenado se coloca en el plano cartesiano para luego trazar la gráfica que corresponde a una recta. A partir del modelo graficado el estudiante con la mediación del docente debe elaborar inferencias que permitan medir el nivel de comprensión del problema.

Figura 9

Modelización de una gráfica Lineal

	Filas de árboles de manzana (n)	Número de árboles de conífera (c)
Par ordenado	1	8
	2	16
	3	24
	4	32
	5	40
	6	48
	7	56
	8	64
	9	72
	10	80



Fuente: Elaboración propia

1.13 La modelización con ecuaciones

Según Cervantes (2015) una ecuación o función matemática se constituye en un modelo cuantitativo que sustentado en la definición de una función y sus elementos permite la modelización de un problema. Al determinar la solución de un problema de modelización en forma de ecuación, se debe emplear lenguaje algebraico para poder expresar las soluciones. No obstante, el correcto uso del álgebra resulta ser un problema neurálgico para los estudiantes de nivel secundario. De este modo Pramesti y Retnawati (2019) manifiestan que los alumnos se encuentran todavía en la etapa de transición de un pensamiento concreto a un pensamiento abstracto en el que se utiliza el álgebra.

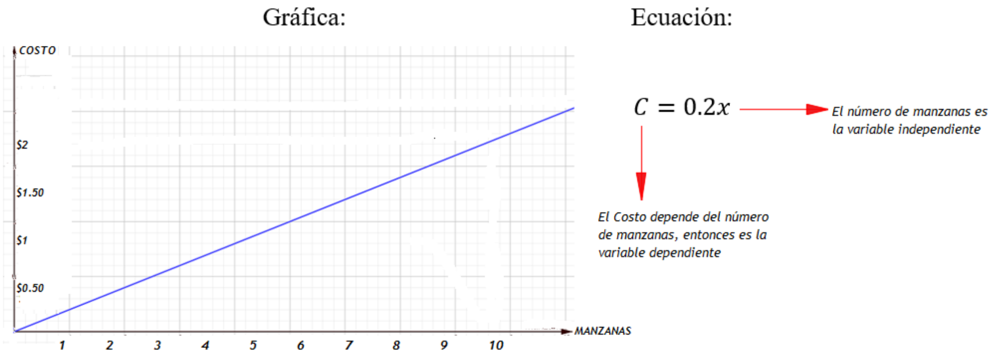
En la modelización de un problema mediante una ecuación, se busca establecer una expresión algebraica que pueda generalizar la relación secuencial entre dos variables. Como ejemplo, se puede suponer que se intenta determinar un modelo para el Costo de unas manzanas, donde cada una cuesta 20 centavos (0,2$). Por consiguiente, dos manzanas costarán 40 centavos y tres llegarán a valer 60 centavos, etc. De esta manera se podrían generar tablas o gráficas, que conduzcan a obtener dicho modelo, ver figura 10.

Figura 10

Modelización de la ecuación

Tabla:

manzanas (x)	Costo (C)
1	0,2 $
2	0,4$
3	0,6$
.....	......



Fuente: Elaboración propia

Como puntos clave para modelar una ecuación o función se presenta las siguientes:

- Identificar las variables
- Construir otros modelos como tablas o gráficas que permitan visualizar la relación
- Elaborar una expresión algebraica de acuerdo a los otros modelos.

1.14 Modelización de funciones

A partir del reconocimiento de las formas en las que se puede modelizar una situación matemática (tablas, gráficas o ecuaciones). Se debe plantear los diversos tipos de modelos bajos los cuales se llevan cabo las resoluciones. Estos modelos se conocen como funciones.

1.14.1 Modelización de funciones lineales

La función lineal está dada por la expresión algebraica:

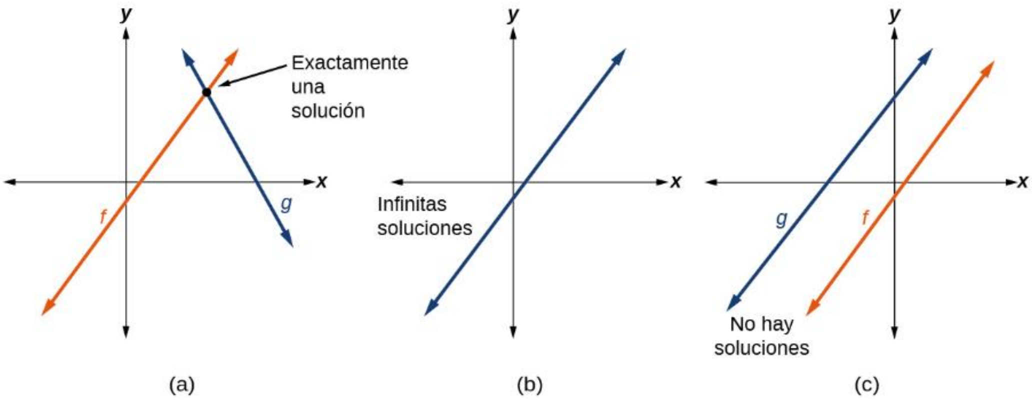
$$f(x) = mx + b \qquad \text{ó} \qquad y = mx + b$$

La gráfica que se obtiene es una línea recta. Los parámetros m y b son números reales. En este caso m representa la pendiente de la recta, mientras que el valor de b es el corte con el eje vertical del plano cartesiano. Esta forma de la expresión también es denominada pendiente - intersección cuyo dominio (valores de x), son aquellos números reales y el rango (valores de y), son asimismo los números reales.

La gráfica de una función lineal o un sistema de funciones lineales se establece partir de un plano cartesiano en donde se colocan los pares ordenados obtenidos en la resolución del problema. A partir de la figura 11 se contemplan distintos casos: exactamente una solución cuando dos rectas cruzan por un solo punto, infinitas soluciones cuando una recta es el múltiplo de la otra, tendiéndose la una sobre la otra y finalmente no existen soluciones cuando en un sistema de funciones no cruzan por un punto determinado. Se evidencia de igual manera que cuando el valor de la pendiente es positivo se origina una función creciente y cuando se presenta una pendiente negativa la función que se genera será decreciente.

Figura 11

Sistema de modelos lineales



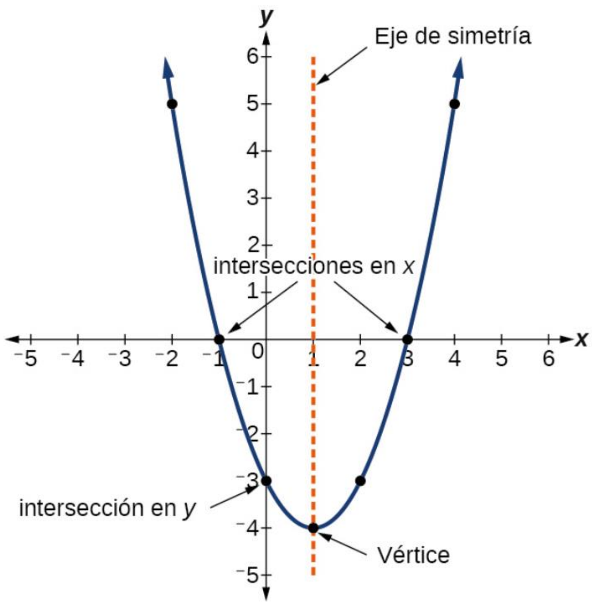
Fuente: Rise University (2010)

1.14.2 Modelación de funciones cuadráticas

El gráfico de esta función es una curva en forma de U (parábola) la misma que tiene un punto extremo (vértice) el cual, al abrirse para arriba tiene un punto bajo, un mínimo, y se denomina curva cóncava, y cuando los extremos se abren hacia abajo se mantiene un punto máximo alto y esta curva se denomina convexa.

Figura 12

Gráfico de función cuadrática



Fuente: Rise University (2010)

La intersección que se genera en el eje vertical es el punto en donde la parábola corta con y, mientras que las intersecciones en x son aquellos puntos en los cuales la parábola cruza al eje x, si existen intersecciones en x estos representan los ceros o raíces de la función cuadrática, es decir, los valores de x cuando $y = 0$.

La ecuación que modela una función cuadrática está dada determinada de la siguiente forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

En donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$; si $a > 0$ la parábola es cóncava, mientras que si $a < 0$ la parábola es convexa. Por otra parte, se puede considerar la fórmula general para hallar la ecuación del eje de simetría, y se define como:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Asimismo, si se utiliza la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, para resolver una función cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se pueden determinar las raíces de la función cuadrática, las cuales permiten establecer la ubicación del vértice que se encuentra en el punto medio de las dos.

1.14.3 Modelación de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales juegan un rol importante en la modelación matemática. Así, muchas aplicaciones o situaciones son modelables a partir de la función exponencial, siendo que algunos incluyen el crecimiento de una población, la duplicación de un virus o el valor acumulado de dinero en una cuenta bancaria (Angel y Runde, Álgebra Intermedia: Educación Media Superior, 2013). La forma algebraica de la función exponencial está dada por:

$$f(x) = ar^x$$

En donde a es cualquier número distinto de 0 y r es un número real positivo que no es igual a 1. El valor de r también suele ser conocido como la razón. Esta atribución radica en que r equivale al cociente de dos valores consecutivos de la función exponencial, así:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ar^{x+1}}{ar^x} = \frac{(ar^x) \cdot r}{ar^x} = r$$

Si $r > 1$, entonces la función obtenida será creciente.

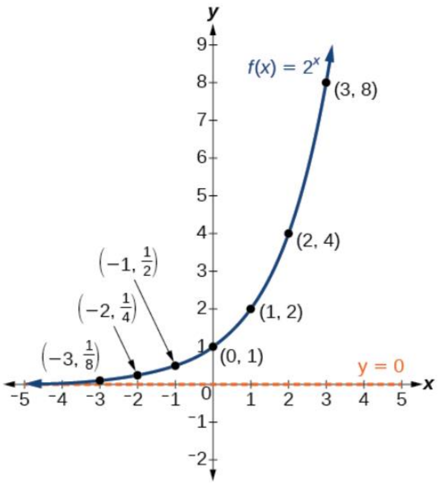
Si $0 < r < 1$, la función será decreciente.

El parámetro r permite entender la diferencia fundamental entre función lineal frente a una función exponencial. Mientras que el crecimiento en una función lineal es constante y aditivo, es decir, que se debe sumar un valor constante para obtener los valores del rango, en el caso de una función exponencial, se debe ir multiplicando por un valor constante para obtener los valores siguientes del rango.

Se puede observar en la figura 13, la función exponencial $f(x) = 2^x$. En este caso $a = 1$, mientras que $r = 2$

Figura 13

Gráfico de una función exponencial



Fuente: Rise University (2010)

En resumen, la función exponencial utiliza cualquier número real x, con una forma

$$f(x) = ar^x$$

En el cual, a será un número real distinto de 0 (valor inicial),
La razón, r será cualquier número real positivo a excepción de 1 ($r \neq 1$),
El dominio de la función exponencial todos los números reales,
El rango de la función comprende los números reales positivos cuando $a > 0$. Además, el rango de la función corresponde a todos los números reales negativos cuando $a < 0$,
La intersección en y será $(0, a)$, y la asíntota horizontal será $y = 0$.

1.14.4 Modelización de funciones logarítmicas

Una base logarítmica a de un número positivo x debe cumplir la siguiente definición:
Para todo $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, se tiene:
$y = log_a(x)$ equivale a la expresión: $a^y = x$
En donde, se lee $log_a(x)$ cómo, "el logaritmo con base a de x" o a su vez "base logarítmica a de x". Por tanto, en el logaritmo lo que se busca es el valor del exponente y al que hay que elevar a para obtener x.
Debido a que las funciones logarítmicas y exponenciales cambian los valores de la x como y, el dominio y el rango de una función exponencial se intercambia por la función logarítmica, es así:

- El dominio de una función logarítmica con base a es (0, ∞)
- El rango de una función logarítmica con base a es (-∞, ∞)

La definición de un logaritmo común es un logaritmo con base 10, se escribe $log_{10}(x)$ simplemente con $log(x)$, este logaritmo es un número positivo x que cumple con la siguiente definición, para x > 0,

$$y = \log(x) \quad equivale \;\; 10^y = x$$

- En donde se lee $log(x)$ como "el logaritmo con base 10 de x" o a su vez "base logarítmica 10 de x".
- El logaritmo y es el exponente al que se necesita elevar 10 para la obtención de x.

Por otra parte, un logaritmo natural se considera como un logaritmo con base e, se escribe $log_e(x)$ y simplemente se define como $ln(x)$. El logaritmo natural es un número positivo que cumple la siguiente función, para $x > 0$,

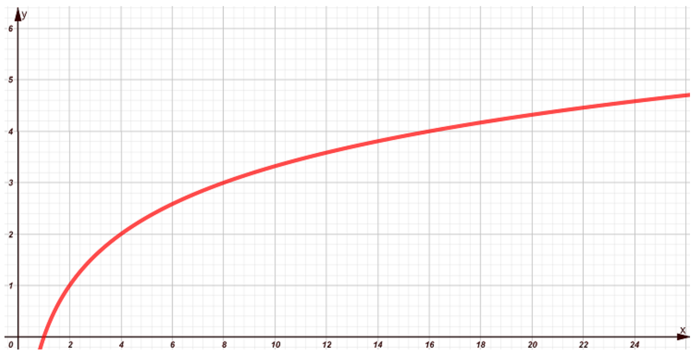
$$y = \ln(x) \quad equivale\ a\ e^y = x$$

- En donde se lee $ln(x)$ como "el logaritmo con base e de x" o a su vez "el logaritmo natural de x".
- El valor y es el exponente al que se necesita elevar e para obtener x .

Debido a que las funciones $y = ex$ como $y = ln(x)$ son unas funciones inversas, $ln(e^x) = x$ para todos los valores de x y $eln(x) = x$ para $x > 0$.

Figura 14

Gráfico de una función logarítmica y=ln(2x)



Fuente: Elaboración propia

Capítulo II

2. Propuesta didáctica

2.1 Introducción

La implementación de cualquier propuesta didáctica en matemática debe lidiar con ciertas concepciones empleadas en la metodología tradicional que prevalecen en el aula e interfieren en el aprendizaje. Por lo tanto, se vuelve imprescindible establecer una guía de trabajo que regule las relaciones entre el docente, los estudiantes y la situación didáctica planteada.

Para implementar una metodología basada en situaciones didácticas de manera efectiva, es esencial seguir ciertos principios. En primer lugar, según Oswalt (2012), los docentes deben fomentar la responsabilidad de los estudiantes en la creación de sus propios enfoques para resolver problemas, desempeñando un papel de facilitador en lugar de simplemente proporcionar soluciones instantáneas. Por otro lado, es fundamental que cada actividad de modelización establezca objetivos claros que orienten las acciones tanto del docente como de los estudiantes. Como señala Hiebert et al. (2007), sin metas de aprendizaje explícitas, no se puede evaluar adecuadamente lo que se espera que los estudiantes aprendan ni se puede establecer una conexión efectiva entre el aprendizaje y las actividades específicas. Por lo tanto, la definición de objetivos claros es esencial para el proceso de enseñanza y evaluación.

2.2 Estructura de las situaciones didácticas

De acuerdo al contenido analizado previamente, se estableció trabajar con ocho situaciones didácticas para la modelización de las cuatro funciones matemáticas fundamentales: lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica. De esta manera, se fijaron dos sesiones de trabajo por cada tipo de función. Cada actividad de modelización está estructurada de la siguiente forma:

Objetivos de Aprendizaje

Ficha de Trabajo

Organización de Trabajo

2.2.1 Objetivos de aprendizaje

Establecen las metas concretas que se esperan alcanzar durante el desarrollo de cada sesión de trabajo. Los objetivos presentados siguen el esquema de la taxonomía de Bloom para establecer su coherencia con las destrezas que se trabajan en el aula.

2.2.2 Ficha de trabajo

Contiene las actividades con los pasos que deben ser ejecutados por cada grupo. La ficha de trabajo aborda el desarrollo de los diferentes tipos de modelización analizadas como: la elaboración de tablas, el trazo y análisis de gráficas y la obtención final de la representación algebraica del modelo. Se incluye una sección de conclusiones las cuales juegan un papel preponderante, pues son la base para la validación posterior que realiza cada grupo de su trabajo.

2.2.3 Organización de trabajo

Detalla los pasos a seguir por el docente a lo largo del proceso de modelización. En este caso se emplea el modelo de Brousseau que implica las siguientes etapas: formulación, acción, validación e institucionalización.

2.3 Implementación y evaluación de las situaciones didácticas.

La implementación de la propuesta contó con la participación de 22 estudiantes que conforman el Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral. Previamente se procedió a dividir a los estudiantes en cuatro grupos de cinco y de cuatro integrantes respectivamente. A cada grupo se le pidió crear un nombre, así como asignar un rol para cada uno de sus miembros. Se empleó un contrato de acuerdo entre docente y estudiantes que, además incluía la forma de evaluar cada actividad de modelización, como se puede ver en la hoja de anexo 4.

2.4 El rol del docente

Siguiendo los principios del marco de trabajo de la situación didáctica, se espera que el estudiante se enfrente a desafíos en el entorno del aula para crear un desequilibrio cognitivo que favorezca su aprendizaje. Sin embargo, esta guía reconoce las posibles dificultades que puedan experimentar los estudiantes. Por lo tanto, se ha ajustado la actividad de manera que el docente oriente el trabajo de los alumnos y se evite el riesgo de fracaso en el desarrollo de las actividades de modelación.

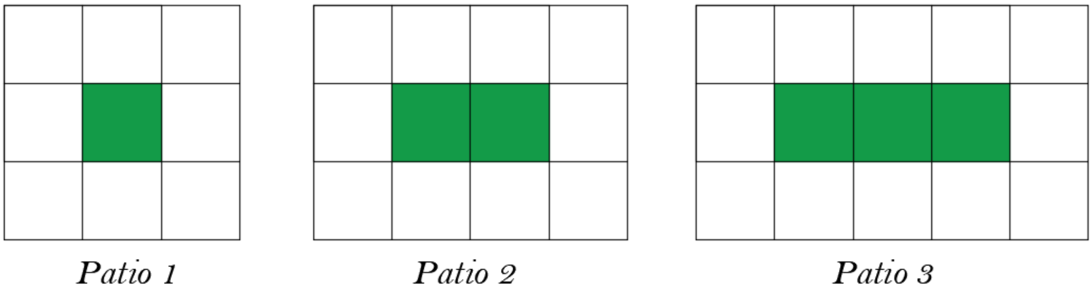
En este sentido, es esencial que el docente brinde un acompañamiento constante en todas las etapas de la situación didáctica, ofreciendo orientación específica cuando sea necesario. En la ficha de trabajo, se incluyen preguntas de sondeo que tienen como objetivo respaldar la reflexión de los estudiantes y proporcionarles una guía en la formulación de sus planteamientos. Por otro lado, las preguntas abiertas promueven la colaboración entre los estudiantes, en un espacio donde el docente no interviene en la solución del problema. Finalmente, la sección de conclusiones les brinda la oportunidad a los estudiantes de compartir sus experiencias de trabajo y destacar los conocimientos adquiridos a lo largo de la situación didáctica

2.5 Sesiones de modelización

Tabla 1

Funciones lineales

Tema: Funciones lineales	**Tiempo:** 120 min	**Nivel:** 3^{ro} BGU
Objetivos de Aprendizaje	-Calcular el patrón numérico de crecimiento presente en el embaldosado de un patio a partir de la construcción de una tabla del número de baldosas $(\boldsymbol{b})$ y el número de patio $(\boldsymbol{n})$. -Establecer la tasa de cambio entre el número de baldosas $(\boldsymbol{b})$ y el número de patios $(\boldsymbol{n})$. -Elaborar la gráfica de la función lineal del embaldosado del patio. - Obtener el modelo de una función lineal para el embaldosado que relacione las dos variables $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{n}$. -Elaborar conclusiones del trabajo realizado	
Problema:	*Embaldosado de un patio*	
Métodos y Técnicas Empleadas	Análisis gráfico, Análisis Algebraico, Generalización de patrones.	
Medios y Materiales:	Cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo.	
FICHA DE TRABAJO: *Lea con atención el siguiente problema:* **Embaldosado de un patio:** Un arquitecto se dedica al diseño de patios; cada uno tiene un jardín en el área central que se representa con cuadritos verdes; alrededor de cada jardín verde están dispuestos cuadritos blancos que representan las baldosas que lo rodean. Los dibujos de abajo muestran tres patios pequeños y su respectivo diseño:		



Actividades:

En la hoja de trabajo realice lo siguiente:

(a) Trace los patios 4 y 5.

(b) Conteste: ¿Cuántas baldosas tendrá el patio 4 y 5?

(c) Trace un patio más, el número 6.

(d) Elabore una tabla en la que se muestre cuantas baldosas han sido empleadas para poder diseñar cada patio.

patio (n)	baldosas (b)
1	…..
2	…..
3	…..
4	…..
5	…..
6	…..

(e) Trace una recta en un plano cartesiano con los datos de la tabla. En el eje horizontal colocar los datos del número de patios (n) y en el eje vertical el número de baldosas (b) .

(f) Responda las siguientes preguntas:

- ¿El patrón numérico observado en el número de baldosas $(\boldsymbol{b})$ a medida que aumentan los patios $(\boldsymbol{n})$ es creciente o decreciente?, Cuando el número de patio **($\boldsymbol{n}$)** aumenta en 1, ¿en cuánto aumenta el número de baldosas? **(g)** Describa en un párrafo un método para calcular el número total de baldosas que se requieren para el patio 50 (sin dibujarlo). **(h)** Escriba un modelo o función lineal en el que se pueda conocer el número de baldosas, $\boldsymbol{b}$**,** a comprar a partir del número de patio, $\boldsymbol{n}$. $$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{n}) =$$ **(i)** Pregunta abierta: A partir del modelo obtenido, calcule cual sería la cantidad de baldosas empleadas en el patio 100. **(j)** Escriba las conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado: **1.** **2.** **3.**

Nota: Tarea "Embaldosado de un patio" adaptada de Smith y Kay (2016)

Tabla 2

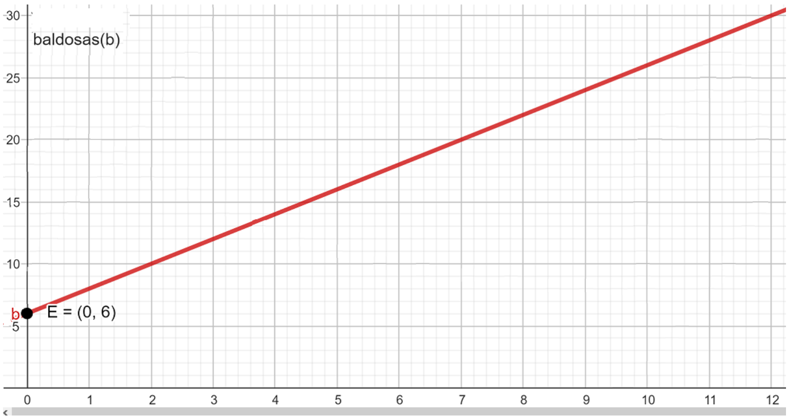
Organización de Trabajo para funciones lineales

ETAPA	*Actividades*	*Recomendaciones para el docente*
Acción ***(20 min)***	**-**Dar lectura al problema. -Trabajar de manera individual en la comprensión del enunciado planteado.	-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes para medir la comprensión del problema: ¿Qué tipo de forma geométrica tiene el patio? ¿De qué manera se realiza el embaldosado del patio?
Formulación ***(60 min)***	-Resolver en el papelógrafo la ficha de trabajo en grupos.	-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, calculador cronometrador, observador)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>-Escribir las conclusiones principales del trabajo.</td>
<td>-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias.
-Monitorear los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:
<table>
<tr><th>Estrategia</th><th>¿Quién propone? ¿Como?</th><th>Secuencia de participación</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
-En el caso de las estrategias previstas, en la secuencia se propone trabajar con dibujos, tablas y modelos de funciones lineales.</td>
</tr>
<tr>
<td>Validación (30 min)</td>
<td>-Exponer por grupo la solución al problema planteado.</td>
<td>-Seleccionar a los estudiantes de cada grupo que realizarán la exposición del trabajo.
-Secuenciar la participación de cada grupo.
-Realizar un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Institucionalización (10 min):</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Se tienen las siguientes conclusiones sobre la función lineal trabajada en la situación didáctica:

Se considera como función lineal a cualquier modelo que relacione a dos magnitudes que son proporcionales. Es decir, el crecimiento de la una variable implica el crecimiento uniforme de la otra. En este caso se tiene que por cada valor de (n), número de patio, el valor de $(\boldsymbol{b})$, baldosas, aumenta en 2.
La tabla y la gráfica del modelo son las siguientes:
</td>
</tr>
</table>

patio (n)	baldosas (b)
1	8
2	10
3	12
4	14
5	16
6	18



- Para obtener la representación algebraica del modelo lineal se debe establecer la pendiente (m) y la intersección con el eje vertical (b). El modelo es el siguiente:

$$y = mx + b$$

La pendiente o tasa de cambio es el valor que mide el cambio de una variable con respecto a otra. Se puede calcular a partir de: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Para el caso mostrado la tasa de cambio es:

$$m = \frac{b_2 - b_1}{n_2 - n_1} = \frac{10 - 8}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2\ baldosas/patio$$

(2 baldosas por cada patio)

- Se debe establecer el valor del corte, el cual es: $(0; 6)$

- El modelo matemático del número de baldosas en función del número de patio está dado por:

$$\boldsymbol{b(n) = 2n + 6}$$

- El número de baldosas que se emplea para el patio 100 es:

$$b(100) = 2(100) + 6$$
$$b(100) = 206 \text{ baldosas}$$

El costo será $206 * 5 = \$1030$

Tabla 3

Funciones lineales

Tema: Funciones lineales	**Tiempo:** 120 min	**Nivel:** 3 BGU
Objetivos de Aprendizaje	-Calcular el patrón de crecimiento lineal del costo de una tarifa telefónica a partir de una tabla. -Modelar las funciones lineales del costo de una tarifa telefónica en función de la cantidad de minutos de un plan telefónico. -Determinar el punto de intersección de dos funciones lineales. -Elaborar conclusiones del trabajo realizado.	
Problema:	*Planes tarifarios*	
Métodos y Técnicas Empleadas	Análisis gráfico, Análisis Algebraico, Generalización de patrones.	
Medios y Materiales:	Cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo.	

FICHA DE TRABAJO:

Lea con atención el siguiente problema:

Planes tarifarios

La compañía A ofrece un plan de celular e internet. Cobra un valor fijo de $\$10$ mensuales más 4 centavos por cada minuto de llamada; la compañía B en cambio cobra una cuota de sólo $\$4$ al mes, pero recarga 10 centavos por el minuto utilizado.

En la hoja de trabajo realice lo siguiente:

(a) Elabore una tabla en la que se puede visualizar el valor a cancelar para el plan A y el plan B:

minutos (x)	**Costo del plan A** $(\boldsymbol{A})$	**Costo del plan B** $(\boldsymbol{B})$
0		
10		
20		
30		
40		
50		

(b) Determine el modelo lineal de costo del plan A en función del número de minutos, x:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) =$$

(c) Determine el modelo lineal de costo del plan B, en función del número de minutos, x :

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) =$$

(d) Si Leslie es una estudiante que habla un promedio mensual de 2 horas ¿Cuál es el plan que le permite ahorrar más dinero? Justifique su respuesta.

(e) Pregunta abierta: ¿Cuánto tiempo se debe emplear mensualmente el plan A para que este resulte más barato?

(f) Grafique las dos funciones de costo (A y B) en un plano cartesiano.

(g) Conteste**:** ¿Cuál es la condición para que los dos planes (rectas) se corten en un punto?

(h) Conteste: ¿Qué ocurre después de que dos rectas se cortan en un punto?

(i) Escriba las conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado: **1.** **2.** **3.**

Nota: Tarea "Planes Tarifarios" adaptada de Smith y Kay (2016)

Tabla 4

Organización de trabajo para funciones lineales

<table>
<tr><th>ETAPA</th><th>Actividades</th><th>Recomendaciones para el docente</th></tr>
<tr><td>Acción
(20 min)</td><td>-Dar lectura al problema.
-Trabajar de manera individual en la comprensión del enunciado planteado.</td><td>-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes para medir la comprensión del problema:
- ¿Cuál es el costo inicial de cada plan?
- ¿Cuál plan telefónico ahorra más dinero?</td></tr>
<tr><td>Formulación
(60 min)</td><td>-Resolver de manera grupal la ficha de trabajo.
-Escribir las conclusiones principales del trabajo.</td><td>-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, calculador cronometrador, observador)
-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias
-Monitorear los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:
<table>
<tr><th>Estrategia</th><th>¿Quién propone? ¿Como?</th><th>Secuencia de participación</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

UCUENCA

		-En el caso de las estrategias previstas, en la situación se propone trabajar con, **tablas, modelos de funciones lineales** y **gráficas de las rectas.** En el caso de las soluciones a los incisos **(d)** y **(e)** resulta importante considerar el potencial uso de **tablas y gráficas** para llegar a la solución. Así como el uso de **modelos lineales**
Validación ***(30 min)***	-Exponer por grupos las respuestas de la ficha de trabajo.	**-**Seleccionar a los estudiantes de cada grupo que socializarán el trabajo y las conclusiones. **-**Secuenciar la participación de cada grupo. -Emplear GeoGebra para graficar las rectas de los planes telefónicos y su intersección. -Realizar un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo
Institucionalización (10 min)		
A continuación, se presenta conclusiones sobre la función lineal trabajada en la situación didáctica: -El modelo lineal del costo del plan A en función de x, minutos, es: $A(x) = mx + b$ Donde $m = 0.04$ y b es el corte o valor inicial $b = 10$. Entonces: $A(x) = 10 + 0{,}04x$ **-** El modelo lineal del de costo del plan B en función de x, minutos, es: $B(x) = mx + b$ Donde $m = 0.1$ y b es el corte o valor inicial $b = 4$. Entonces:		

$$B(x) = 4 + 0{,}1x$$

-El plan más conveniente para Leslie es el plan A, pues es más barato si se usa durante 2 horas.

$$A(120) = 10 + 0{,}04(120) = \$14{,}8$$

$$B(120) = 4 + 0{,}1(120) = \$16$$

$$A(120) < B(120)$$

-La diferencia de costos entre el Plan A y el Plan B disminuye a medida que transcurre el tiempo. Este hecho se da como consecuencia del mayor costo por minuto que tiene el plan B.

De esta manera, en algún momento el plan A será más barato que el plan B. Para calcular, primero se debe conocer el valor en el cual los dos planes tienen el mismo costo

$$A(x) = B(x)$$

$$10 + 0{,}04x = 4 + 0,1x$$

$$10 - 4 = 0{,}1x - 0{,}04x$$

$$6 = 0{,}06x$$

$$x = 100\ minutos$$

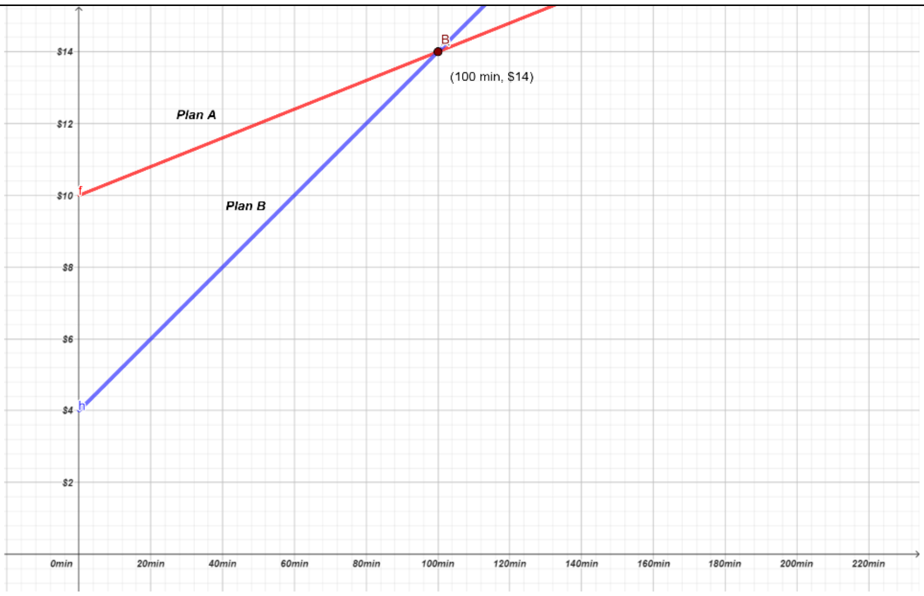
Sin embargo, deben transcurrir un tiempo mínimo de 101 minutos para que el plan A represente un ahorro.

-Cuando se tiene dos rectas, en este caso funciones lineales, la intersección de las rectas implica que $\forall\ x_1, y_1 de\ l_1\ y\ \forall\ x_2, y_2 de\ l_2$:

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

En este caso, empleando el software GeoGebra se puede trazar las gráficas de ambas funciones lineales y establecer la solución que se tiene después de la intersección de las dos soluciones.



-Después de la intersección de las dos rectas, el valor de la tarifa B es mayor a la tarifa A, $(B > A)$.

Tabla 5

Funciones cuadráticas

Tema: Funciones cuadráticas	**Tiempo:** 120 min	**Nivel:** 3 BGU
Objetivo de Aprendizaje	-Identificar las variables empleadas en el perímetro y área de un terreno -Modelar la función matemática del área de un terreno. - Optimizar el valor de una función para calcular el área máxima de un terreno.	
Problema:	*Área de un terreno*	
Métodos y Técnicas Empleadas	Análisis gráfico, Análisis Algebraico, Generalización de patrones.	
Medios y Materiales:	Cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo	

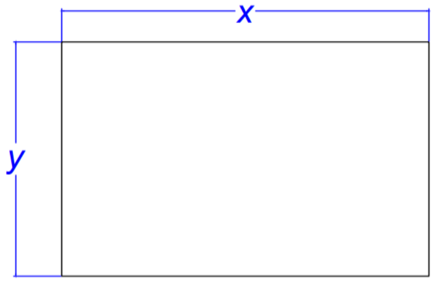
UCUENCA

FICHA DE TRABAJO

Lea cuidadosamente:

Área de un terreno

Una compañía que se especializa en construir cerramientos tiene un cliente que compró 100 metros de alambre para cercar el área rectangular más grande posible.



(a) Conteste: Si el largo, x, del rectángulo es de $40\ m$,

¿Cuál debe ser su ancho, y?

¿Cuál es el área de este rectángulo?

(b) Determine el ancho y el área correspondiente del terreno rectangular a partir de tres datos de longitud. Complete la siguiente tabla:

longitud (x)	*ancho* (y)	*área* (A)	*Gráfica*

(c) Conteste:

¿Qué ocurre con y cuando aumenta x?

¿Cuál es el valor máximo que puede tener $\boldsymbol{x}$?

(d) En base a los datos obtenidos. Calcule si es posible para un rectángulo con un perímetro de 100 metros, tener una de las siguientes áreas:

Área	*¿Es posible?*		*Explicación*
	Si	*No*	
$400\ m^2$			
$500\ m^2$			
$700\ m^2$			

(e) Escriba el modelo matemático que exprese el *ancho* (y) del terreno rectangular en función de la *longitud* (***x***):

$$y(x) =$$

(f) Escriba el modelo matemático que exprese el área de un rectángulo $A(x)$ como el producto de ancho y longitud. (Coloque el valor obtenido en función de x)

$$A(x) =$$

(g) Pregunta abierta: Determine la máxima área (A), que puede tener el terreno.

(h) Escriba las conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado:

1.

2.

3.

Nota: Tarea "Área de un Terreno" adaptada de Oswalt (2012)

Tabla 6

Organización de trabajo para funciones cuadráticas

ETAPA	*Actividades*	*Recomendaciones para el docente*
Acción (20 min)	-Dar lectura al problema. -Trabajar de manera individual en la	-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes sobre el problema:

<table>
<tr><td></td><td>comprensión del enunciado planteado.</td><td>¿Cuáles son las variables que intervienen al momento de trazar un rectángulo?
¿Qué tipo de función modela el área rectangular del terreno?</td></tr>
<tr><td>Formulación (60 min)</td><td>-Resolver de manera grupal la ficha de trabajo.
-Escribir las conclusiones principales de la situación didáctica.</td><td>-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, calculador, cronometrador, observador)
-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias
-Tomar nota de los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:<table><tr><td>Estrategia</td><td>¿Quién propone? ¿Como?</td><td>Secuencia de participación</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Validación (30 min)</td><td>-Exponer por grupo la solución al problema siguiendo el orden establecido por la matriz de observación.</td><td>-Seleccionar a los estudiantes de cada grupo que realizarán la exposición del trabajo.
-Secuenciar la participación de cada grupo.
-Emplear GeoGebra para graficar la función de optimización de la mayor área que puede cercar el alambre.
-Realizar un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Institucionalización (10 min):</td></tr>
</table>

A continuación, se presenta conclusiones sobre la modelación de funciones cuadráticas trabajada en la situación didáctica:

-El modelo matemático que expresa el *ancho* (y) del terreno rectangular en función de la *longitud(**x**) es*:

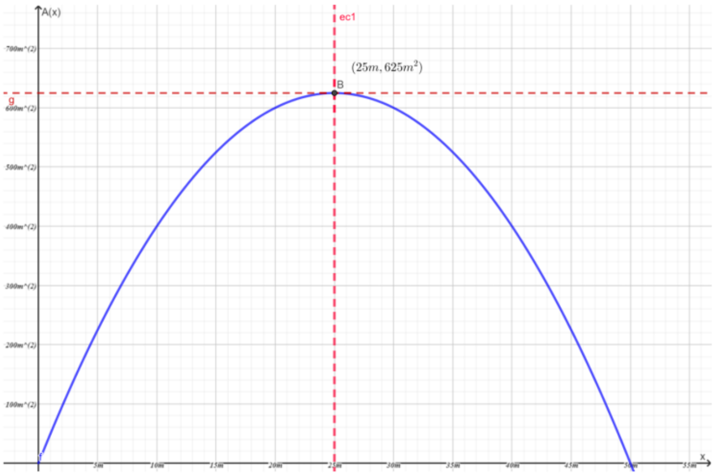
$$y(x) = 50 - x$$

-El modelo matemático que expresa el área de un rectángulo $A(x)$ como el producto de ancho y longitud es:

$$A(x) = (50 - x) \cdot (x)$$

$$A(x) = 50x - x^2$$

Empleamos el software de *GeoGebra* para graficar la función resultante, la cual se muestra como una función cuadrática:



Por lo tanto, la dimensión de x con la que se obtiene la máxima área del terreno es: $25\ m$

Tabla 7

Funciones cuadráticas

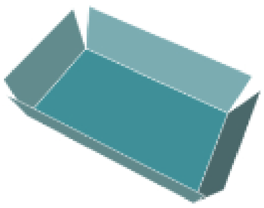
Tema: Funciones cuadráticas	**Tiempo:** 120 min	**Nivel:** 3 BGU
Objetivo de Aprendizaje	-Identificar las variables empleadas en el perímetro y área de un terreno	

	-Modelar la función matemática del área de un terreno. Optimizar el valor de una función para calcular el área máxima de un terreno.
Problema:	*Construcción de una caja*
Métodos y Técnicas Empleadas	Análisis gráfico, Análisis Algebraico, Generalización de patrones.
Medios y Materiales:	Cartulina A4, tijeras, goma, cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo.

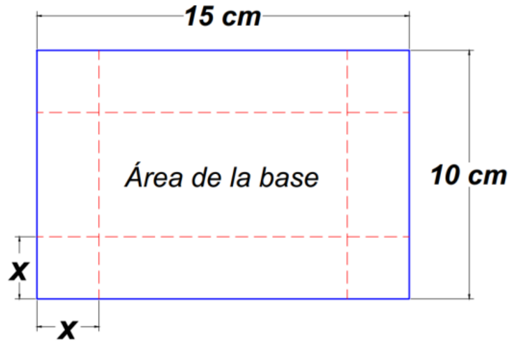
FICHA DE TRABAJO:

Lea con atención el siguiente problema:

Construcción de una caja



Se desea construir una caja abierta a partir de un pedazo de cartulina de 15 cm x 10 cm. Se trazan algunas líneas de modo que se obtienen cuadrados iguales en las esquinas de la caja que se emplean, como se muestra en la figura:



Realice lo siguiente:

(a) Elabore una tabla para determinar el **Área de la base** caja de acuerdo al valor que se coloque a x. Utilice 3 valores:

x	*Área de la base*

(b) Determine el modelo matemático del área de la base de la caja A en función del valor de x.

$$A(x) =$$

(c) Elabore una tabla para determinar el **volumen de la caja** de acuerdo al valor de x. Utilice los tres valores anteriores:

x	*Volumen de la caja*

(d) Conteste: ¿Con cuáles valores de x no se podría construir la caja? ¿Por qué?

(e) Determine el modelo de la función de volumen de una caja $V(x)$.

$$V(x) =$$

(f) Pregunta Abierta: Conteste: ¿Con cuál valor de x se puede construir una caja cuyo volumen sea el máximo? ¿Por qué?

(g) Utilice la cartulina para construir la caja de mayor volumen de acuerdo a la respuesta anterior.

(h) Responda: ¿En qué consiste optimizar una función?

(i) Escriba tres conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado:

1.

2.

3.

Nota: *Tarea "Volumen de una caja" adaptada de Oswalt (2012)*

Tabla 8

Organización de trabajo para funciones cuadráticas

<table>
<tr><th>ETAPA</th><th>Actividades</th><th>Recomendaciones para el docente</th></tr>
<tr><td>Acción
(20 min)</td><td>-Dar lectura al problema.
-Trabajar de manera individual en la comprensión del enunciado planteado.</td><td>-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes:
¿Qué tipo de caja se puede construir con el pedazo de cartulina?
¿Cuáles son las variables y condiciones que se toman en cuenta al momento de construir la caja?</td></tr>
<tr><td>Formulación
(60 min)</td><td>-Resolver de manera grupal la ficha de trabajo.
-Escribir las conclusiones principales del trabajo.</td><td>-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, calculador cronometrador, observador)
-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias
-Monitorear los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:
<table><tr><td>Estrategia</td><td>¿Quién propone? ¿Cómo?</td><td>Secuencia de participación</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>
En el caso de esta modelización para obtener cada función se puede aplicar el método inductivo</td></tr>
<tr><td>Validación
(30 min)</td><td>-Exponer por grupos las respuestas de la ficha de trabajo.</td><td>-Seleccionar a los estudiantes de cada grupo que realizarán la exposición del trabajo.
-Secuenciar la participación de cada grupo.</td></tr>
</table>

		-Realizar en GeoGebra la gráfica de la función de optimización e identificar el mayor volumen que se puede obtener. -Realizar un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo.

Institucionalización (10 min):

A continuación, se presenta conclusiones sobre la modelación de funciones cuadráticas trabajada en la situación didáctica:

-El modelo matemático del área de la base de la caja resulta ser:

$$A(x) = \underbrace{(15 - 2x)}_{\textbf{(largo)}} \cdot \underbrace{(10 - 2x)}_{\textbf{(ancho)}} = 150 - 50x + 4x^2$$

-La restricción del valor de x establece que:

$15 - 2x > 0 \quad \wedge \ 10 - 2x > 0;$

Entonces: $x < 7{,}5 \ \wedge \ x < 5$

$$\therefore 0 < x < 5$$

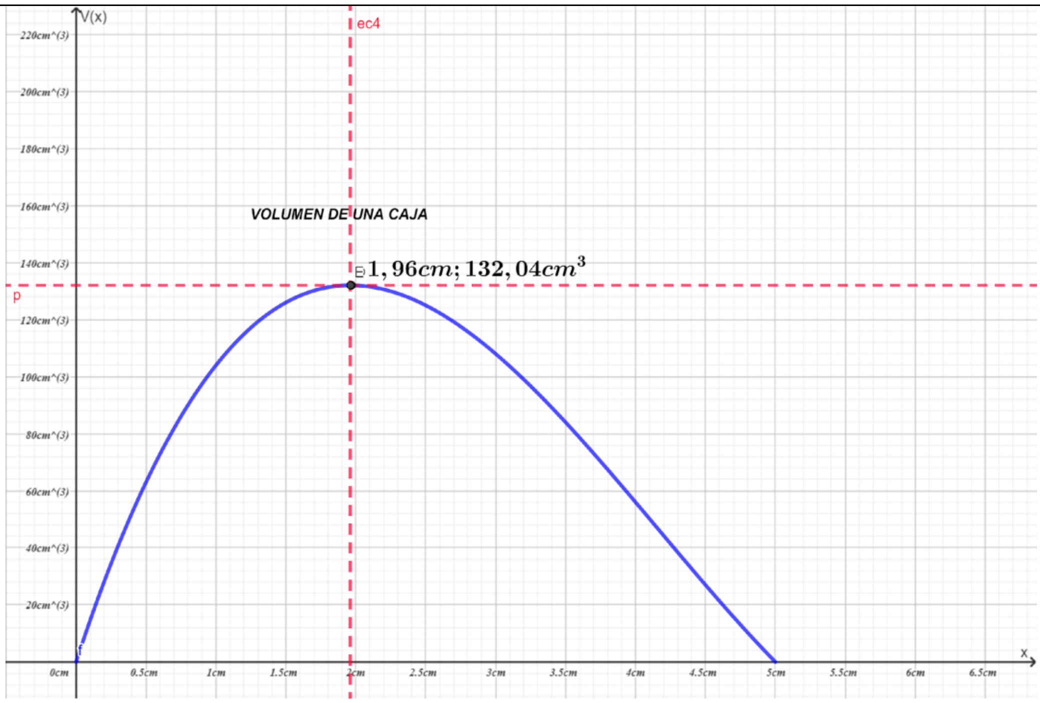
-El modelo matemático del volumen de la caja $V(x)$:

$$V(x) = \underbrace{A(x)}_{\textbf{(área)}} \cdot \underbrace{x}_{\textbf{(altura)}}$$

$$V = (150 - 50x + 4x^2) \cdot (x)$$

$$V(x) = 150x - 50x^2 + 4x^3$$

Para conocer el volumen máximo que se puede obtener se realiza una gráfica a partir de GeoGebra y se indica el valor máximo de la función a partir de la herramienta: extremo :



De acuerdo a la gráfica el valor para obtener el mayor volumen de $132{,}04\ cm^3$ es $x = 1{,}96\ cm$.

Tabla 9

Funciones exponenciales

Tema: Funciones exponenciales	**Tiempo:** 120 min	**Nivel:** 3 BGU
Objetivo de Aprendizaje	-Identificar las variables presentes en el crecimiento exponencial -Formular el modelo matemático exponencial del crecimiento de una población - Obtener las gráficas del crecimiento poblacional lineal y exponencial -Analizar la diferencia entre el crecimiento lineal y exponencial. -Escribir las conclusiones del tema	
Problema:	*Crecimiento de una población*	
Métodos y Técnicas Empleadas	Análisis gráfico, Análisis Algebraico, Generalización de patrones.	

Medios y Materiales:	Cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo

FICHA DE TRABAJO

Lea el siguiente enunciado:

Crecimiento de una población

De acuerdo al departamento de censos, en 1960 la población en la ciudad de Livingston (EEUU) era de $26\,974$ habitantes y en 1970 la población llegó a ser alrededor de $36\,604$ habitantes. Si se asume una tasa de crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento durante los 10 años, es de $3{,}1\%$ al año. Si se asume una tasa de crecimiento lineal, la tasa de crecimiento es de aproximadamente 963 personas por año.

(a) Complete la siguiente tabla usando ambas tasas de crecimiento. (Emplear dos decimales en el caso del crecimiento exponencial).

Año (t)	Población usando crecimiento exponencial (P)	Población usando crecimiento lineal (P)
1960	$26\,974$	$26\,974$
1961		
1962		
1963		
1964		
1965		

UCUENCA

1966		
1967		
1968		
1969		
1970		

(b) Renombre los años sitúelos en una escala diferente y complete la tabla con la información anterior:

Años (t)	Población $(\boldsymbol{P})$	Población $(\boldsymbol{P})$
0	$26\,974$	$26\,974$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

(c) Establezca el modelo lineal de crecimiento de la población $\boldsymbol{P}$ en función del tiempo $\boldsymbol{t}$.

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) =$$

(d) Establezca el modelo exponencial de crecimiento de la población $\boldsymbol{P}$ en función del tiempo $\boldsymbol{t}$.

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) =$$

(e) Grafique en dos planos cartesianos cada una de las funciones. Utilice una escala horizontal del tiempo $\boldsymbol{t}$ desde 1970 hasta el año 2020. Emplee intervalos de 10 años.

(f) Use la función lineal y exponencial que obtuvo para predecir la población que hay en el año 2010. Presente los resultados de la siguiente manera:

Función lineal:	$\boldsymbol{P} =$
Función Exponencial:	$\boldsymbol{P} =$

(g) De acuerdo al censo poblacional, la población en Livingston en el 2010 fue de 128 026 personas. Compare con las dos respuestas obtenidas anteriormente. Conteste: ¿Cuál fue la más precisa? ¿Cuál es la razón?

(h) Escriba una función de crecimiento exponencial, si la tasa de crecimiento hubiese sido de 5,1% en lugar de 3,1% y si la población hubiese sido 40000 habitantes en lugar de 26974

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) =$$

i) Escriba sus conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado:

1.

2.

3.

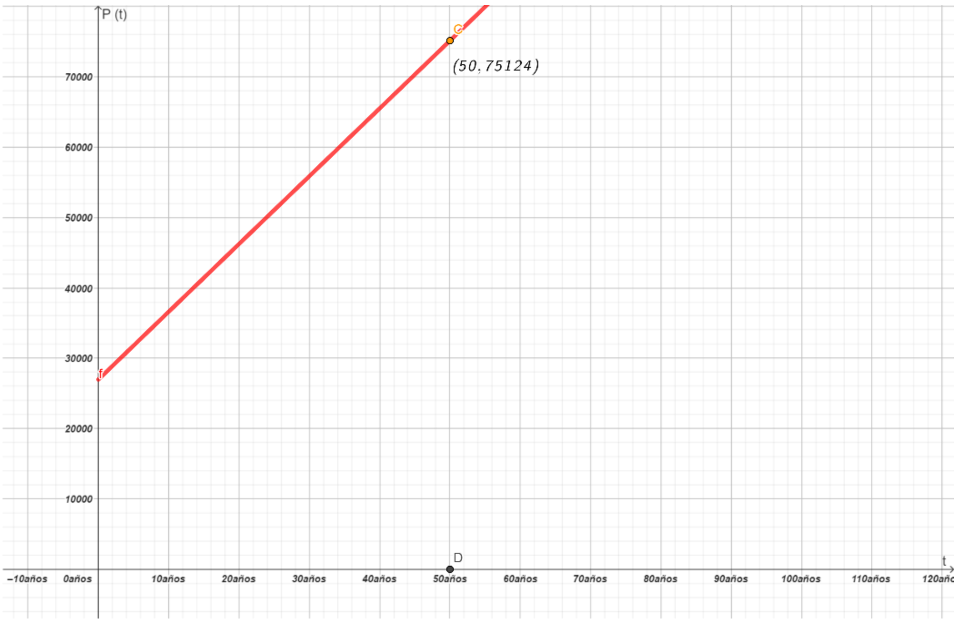
Nota: Tarea “Crecimiento de una Población” adaptada de Oswalt (2012)

Tabla 10

Organización de trabajo para funciones exponenciales

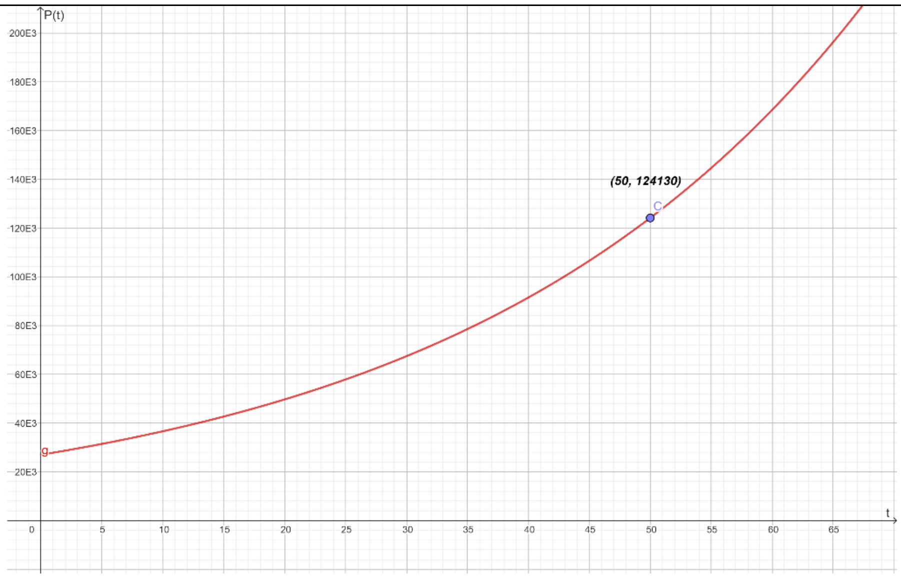
<table>
<tr><th>ETAPA</th><th>Actividades</th><th>Recomendaciones para el docente</th></tr>
<tr><td>Acción
(20 min)</td><td>-Dar lectura al problema de manera grupal.
-Trabajar de manera individual en la comprensión de la problemática planteada.</td><td>-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes para medir la comprensión del problema:
- ¿De qué factores depende el crecimiento de una población?
¿Cuál es la diferencia entre la función lineal y la función exponencial?</td></tr>
<tr><td>Formulación
(60 min)</td><td>-Resolver la ficha de trabajo en cada grupo.

-Anotar las conclusiones del trabajo realizado.</td><td>-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, calculador, cronometrador, observador)
-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias
-Tomar nota de los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:<table><tr><td>Estrategia</td><td>¿Quién propone? ¿Como?</td><td>Secuencia de participación</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Validación
(30 min)</td><td>-Exponer por grupo la solución al problema siguiendo el orden establecido por la matriz de observación.</td><td>-Seleccionar a los estudiantes de cada grupo que realizarán la exposición del trabajo.
-Secuenciar la participación de cada grupo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>-Realizar un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Institucionalización (10 min):</td></tr>
<tr><td colspan="3">
A continuación, se presenta conclusiones sobre la función exponencial y lineal trabajada en la situación didáctica:
-La función lineal que modela el número de habitantes en función del tiempo es:
$P(t) = 26974 + 963 \cdot t$.
A partir de GeoGebra se traza la siguiente gráfica:


-La función exponencial que modela el número de habitantes en función del tiempo es:
$$P(t) = 26974 \cdot (1{,}031)^t$$
A partir de GeoGebra se obtiene la siguiente gráfica:
</td></tr>
</table>

UCUENCA



Los valores de población que se obtienen a partir de cada función de crecimiento:

$$P(50) = 26974 + \ 963 \cdot 50$$

$$P(50) = 75124 \text{ personas}$$

$$P(50) = 26974 \cdot (1{,}031)^{50}$$

$$P(50) = 124\,130 \text{ personas}$$

-La función que más se acerca a la cantidad real de pobladores es la función exponencial pues cada crecimiento posterior depende del valor anterior de población mientras que el crecimiento lineal depende de un valor fijo que es independiente de la cantidad de población.

-La función exponencial que modela el número de habitantes en función del tiempo, si la tasa de crecimiento es de 5,1% y la población inicial es de 40000 habitantes es:

$$P(t) = 40000(1{,}051)^{t}$$

Tabla 11

Funciones exponenciales

<table>
<tr><td>Tema: Funciones exponenciales</td><td colspan="2">Tiempo: 120 min</td><td>Nivel: 3 BGU</td></tr>
<tr><td>Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="3">-Establecer las variables empleadas en el crecimiento exponencial y lineal de una población
-Obtener un modelo matemático que permita conocer el crecimiento exponencial y lineal de una población.
-Calcular el punto de corte de dos funciones.
-Elaborar conclusiones del trabajo realizado.</td></tr>
<tr><td>Problema:</td><td colspan="3">Escasez de alimentos</td></tr>
<tr><td>Métodos y Técnicas Empleadas</td><td colspan="3">Análisis gráfico, Análisis algebraico,
Generalización de patrones.</td></tr>
<tr><td>Medios y Materiales:</td><td colspan="3">Cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo</td></tr>
</table>

FICHA DE TRABAJO

Lea el siguiente problema:

Escasez de alimentos

Cierta isla tiene una población de venados que crece a una tasa del 7% al año. Desafortunadamente, debido al cambio climático, la cantidad de vegetación se ha estado mermando, así que cada año la isla puede alimentar a 100 venados menos. Actualmente, la población de venados es de 500 ejemplares, y la vegetación de la isla dispone de alimentación para 4 000 venados.

(a) Obtenga el modelo matemático para estimar el crecimiento exponencial de los venados.

$$\boldsymbol{P(t)} =$$

(b) Obtenga el modelo matemático para estimar la población de venados que puede alimentar la isla.

$$\boldsymbol{P(t)} =$$

(c) Pregunta abierta: ¿Dentro de que tiempo habrá escasez de alimentos en la isla?

(g) Escriba las conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado:

1.

2.

3.

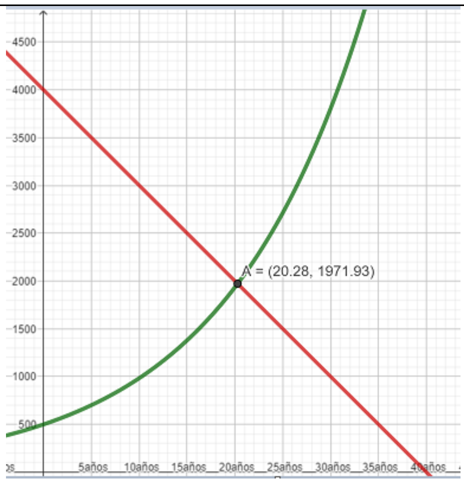
Nota: Tarea “Escasez de alimentos” adaptada de Oswalt (2012)

Tabla 12

Organización de trabajo para funciones exponenciales

<table>
<tr><th>ETAPA</th><th>Actividades</th><th>Recomendaciones para el docente</th></tr>
<tr><td>Acción (10 min)</td><td>-Dar lectura al problema de manera grupal.
-Trabajar de manera individual en la comprensión de la problemática planteada.</td><td>-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes para medir la comprensión del problema:
- ¿Cuál es la tendencia de la cantidad de alimentos disponibles en la isla al transcurrir el tiempo?
- ¿Qué puede ocurrir con la población de venados al cabo de unas décadas?</td></tr>
<tr><td>Formulación (60 min)</td><td>-Resolver la ficha de trabajo en cada grupo.
-Anotar las conclusiones del trabajo realizado.</td><td>-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, cronometrador, observador)
-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias
-Tomar nota de los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:
<table>
<tr><th>Estrategia</th><th>¿Quién propone? ¿Como?</th><th>Secuencia de participación</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

		En este caso se aplica método gráfico, una tabla o una ecuación para inferir lo que ocurre con ambas poblaciones a lo largo del tiempo.
Validación (30 min)	-Exponer por grupo la solución al problema siguiendo el orden establecido por la matriz de observación.	**-**Coordinar las exposiciones -Brindar soporte teórico a cada exposición. -Utilizar GeoGebra para poder determinar el punto de intersección de la función de crecimiento de venados y la función de disminución de comida. -Realiza un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo.
Institucionalización (20 min):		
A continuación, se presenta conclusiones sobre la función exponencial y lineal trabajada en la situación didáctica: El modelo exponencial que establece el crecimiento de la población de venados es: $P(t) = 500 \cdot (1{,}07)^t$ El modelo que establece la vegetación disponible para los venados de la isla: $P(t) = 4000 - 100t$ Al graficar ambas funciones mediante el software GeoGebra se aplica el método gráfico y se obtiene que después de 20 años habrá escasez de comida para los venados.		



Del mismo modo es posible construir tablas para cada función de forma paralela e ir comparando los valores de población obtenidos:

t	$P(t) = 500 \cdot (1{,}07)^t$	$P(t) = 4000 - 100t$
1	535	3900
2	572	3800
3	613	3700
4	655	3600
5	701	3500
6	750	3400
7	803	3300
8	859	3200
9	919	3100
10	984	3000
11	1052	2900
12	1126	2800
13	1205	2700
14	1289	2600

	15	1380	2500	
	16	1476	2400	
	17	1579	2300	
	18	1690	2200	
	19	1808	2100	
	20	1935	2000	
	21	2070	1900	

Tabla 13

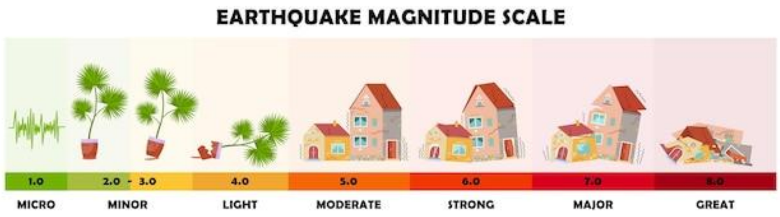
Funciones logarítmicas

Tema: Funciones logarítmicas	**Tiempo:** 120 min	**Nivel:** 3 BGU
Objetivo de Aprendizaje	-Definir las funciones logarítmicas a partir de las funciones exponenciales. -Obtener un modelo matemático que permita medir la magnitud de sismos. -Elaborar conclusiones del trabajo realizado.	
Problema:	*Magnitud de los sismos*	
Métodos y Técnicas Empleadas	Análisis gráfico, Análisis Algebraico, Generalización de patrones.	
Medios y Materiales:	Cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo	

FICHA DE TRABAJO

Lea cuidadosamente el siguiente enunciado:

Magnitud de los sismos



UCUENCA

Los sismos son fenómenos comunes que se desatan en la naturaleza. Se ha ideado una manera práctica de medirlos a partir de la escala de Richter. De esta manera la Intensidad, (I) con la que se desata un terremoto se relaciona con un valor de dicha escala. Como la tabla que se muestra a continuación:

Escala Richter (R)	Intensidad del Terremoto (I)
1	10
2	100
3	1000
4	10000

(a) Obtener el modelo exponencial de la intensidad I, en función de R.

(b) A partir del modelo obtenido transforme dicho modelo exponencial a su modelo logarítmico. (Recordar que: $y = a^x$ es equivalente a $x = log_a y$)

(c) Elabore una gráfica de la escala logarítmica. Use intervalos de 1000 para el eje horizontal.

(d) Conteste: ¿Cuál es la escala de un terremoto cuya intensidad sea $1\ 000\ 000$?

(e) Conteste: ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto de escala 8, comparado con uno de escala 6?

(f) Escriba las conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado:

1.

2.

3.

Nota: Se desarrolla las actividades a trabajar dentro de la situación didáctica.

UCUENCA

Tabla 14

Organización de trabajo para funciones logarítmicas

<table>
<tr><th>ETAPA</th><th>Actividades</th><th>Recomendaciones para el docente</th></tr>
<tr><td>Acción
(10 min)</td><td>-Leer el problema de manera grupal
-Trabajar de manera individual en la comprensión de la problemática planteada.</td><td>-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes para medir la comprensión del problema:
¿Qué entiende por la intensidad de un sismo?
¿Cuántos niveles componen la escala de Richter?</td></tr>
<tr><td>Formulación
(60 min)</td><td>-Resolver en grupos de 4 integrantes el ejercicio
-Resolver los ítems en un papelógrafo.</td><td>-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, cronometrador, observador)
-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias
-Tomar nota de los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:
<table><tr><td>Estrategia</td><td>¿Quién propone? ¿Como?</td><td>Secuencia de participación</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Validación
(30 min)</td><td>-Exponer por grupo la solución al problema siguiendo el orden establecido por la matriz de observación.</td><td>-Coordinar las exposiciones
-Brindar soporte teórico a cada exposición.
-Emplear GeoGebra para graficar la función logarítmica de la escala de</td></tr>
</table>

		Richter en función de la Intensidad $R(I)$ -Realiza un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo-

Institucionalización (20 min):

A continuación, se presenta conclusiones sobre la función exponencial y lineal trabajada en la situación didáctica:

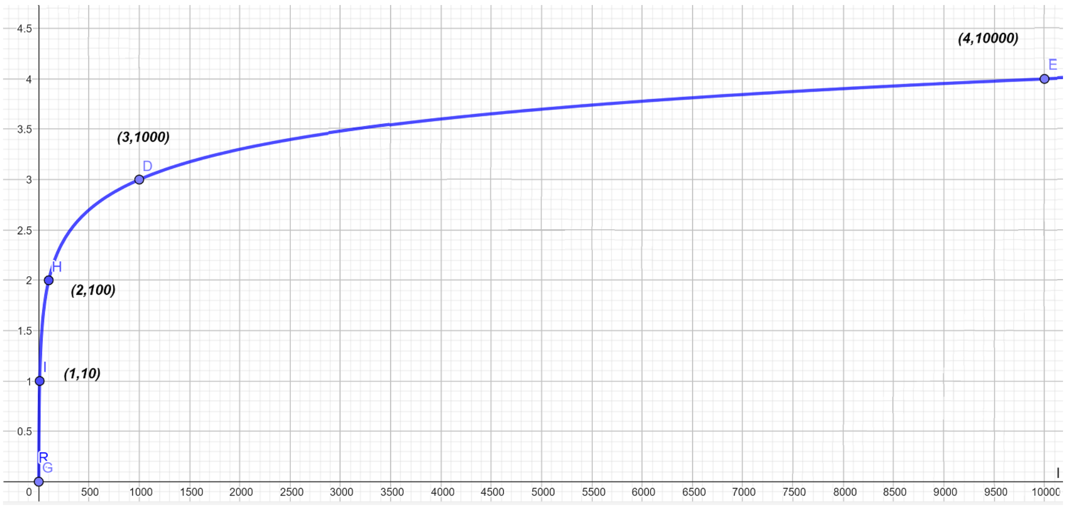
-El modelo exponencial de la intensidad I, en función de R, resulta ser:

$$I = 10^R$$

-El modelo logarítmico que describe un terremoto es:

$$R(I) = log_{10}I$$

-La gráfica del modelo logarítmico obtenido mediante GeoGebra es:



La escala de un terremoto cuya intensidad sea $1\,000\,000$ se determina a partir de la función logarítmica:

$$R(1\,000000) = log_{10}1\,000000$$

$$R(1\,000000) = 6$$

Es decir que un terremoto de intensidad $1\,000000$ está localizado en la escala 6 de Richter

-Un terremoto de escala 8 comparado con uno de escala 6 equivale a:

$\frac{100\,000\,000}{1\,000000} = 100$ veces más fuerte.

Tabla 15

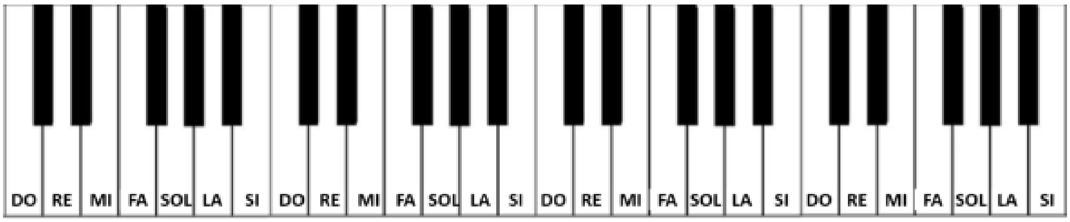
Funciones logarítmicas

Tema: Funciones logarítmicas	**Tiempo:** 120 min	**Nivel:** 3 BGU
Objetivo de Aprendizaje	-Definir las funciones logarítmicas a partir de las funciones exponenciales. -Obtener un modelo matemático que permita medir el intervalo de una nota -Elaborar conclusiones del trabajo realizado.	
Problema:	*Escala Logarítmica en un piano*	
Métodos y Técnicas Empleadas	Análisis gráfico, Análisis Algebraico, Generalización de patrones.	
Medios y Materiales:	Cuaderno, regla, lápiz, papelógrafo	

FICHA DE TRABAJO

Lea con atención:

Escala Logarítmica en un piano



La gente no suele encontrar una conexión directa entre la matemática y la música. De hecho, algunos músicos prefieren mantener una prudente distancia de todo lo relacionado con matemáticas. Sin embargo, aquellos que tocan un instrumento están en contacto con los números, más frecuentemente de lo que imaginan. Más aún, esta relación tiene que ver con algo tan atrayente como los logaritmos.

En particular, al desplazar las manos sobre las teclas de un piano se toca en una escala logarítmica. Es decir, la distancia que existe entre la frecuencia que emite cada nota está dada por un factor logarítmico. A continuación, se muestra la nota con su frecuencia y su respectivo semitono.

UCUENCA

Semitono $(\boldsymbol{n})$	***Nota***	***Frecuencia de la Nota*** $(\boldsymbol{F})$
0	DO0	$16{,}35\ Hz$
1	DO#	$17{,}32\ Hz$
2	RE	$18{,}35\ Hz$
3	RE#	$19{,}45\ Hz$
4	MI	$20{,}60\ Hz$
5	FA	$21{,}83\ Hz$
6	FA#	$23.12\ Hz$
7	SOL	$24{,}50\ Hz$
8	SOL#	$25{,}96\ Hz$
9	LA	$27{,}50\ Hz$
10	LA#	$29{,}14\ Hz$
11	SI	$30{,}87\ Hz$
12	DO1	$32{,}70\ Hz$
13	DO#	$34{,}65\ Hz$
14	RE	$36{,}71\ Hz$
15	RE#	$38{,}89\ Hz$
16	MI	$41{,}20\ Hz$
17	FA	$43{,}65\ Hz$
18	FA#	$46{,}25\ Hz$
19	SOL	$49\ Hz$
20	SOL#	$51{,}91\ Hz$
21	LA	$55\ Hz$
22	LA#	$58{,}27\ Hz$
23	SI	$61{,}74\ Hz$
24	DO2	$65{,}41\ Hz$

(a) Obtener la razón (r), que existe entre cada semitono. (Emplee tres decimales)

$$\boldsymbol{r} =$$

(b) Escriba el modelo exponencial de la frecuencia de las notas de un piano, F ,con la que suena cada nota en función de los semitonos (n):

UCUENCA

$$\boldsymbol{F(n)} =$$ **(c)** Si analiza puede ver que la razón entre la frecuencia de DO_1 y DO_0 es: $$\frac{F_{DO_1}}{F_{DO_0}} = \mathbf{2}$$ ¿Cuántas veces(n), se debe multiplicar r para llegar a 2?, Complete el valor: $$r^n = 2$$ **(d)** Despeje r $$r =$$ **(e)** Escriba el modelo exponencial en función del nuevo valor de r. $$\boldsymbol{F} =$$ **(f)** Transforme dicho modelo de exponencial a logarítmico para determinar el número de semitono en función de la frecuencia de la nota que vibra $$\boldsymbol{n} =$$ **(g)** Pregunta Abierta: ¿Cuál es el semitono para una nota de frecuencia $F = 146{,}832\ Hz$? ¿Qué nota podrá ser?   **(h)** Escriba las conclusiones relacionadas con el trabajo efectuado: **1.**   **2.**   **3.**

Nota: Se desarrolla las actividades a trabajar dentro de la situación didáctica.

Tabla 16

Organización de trabajo para funciones logarítmicas

ETAPA	*Actividades*	*Recomendaciones para el docente*
Acción ***(10 min)***	-Leer el problema de manera grupal -Trabajar de manera individual en la comprensión de la problemática planteada.	-Realizar preguntas de sondeo a los estudiantes para medir la comprensión del problema: ¿Cuáles son las notas musicales que existen? ¿Qué distancia hay entre una nota y otra?

<table>
<tr>
<td>Formulación
(60 min)</td>
<td>-Resolver en grupos de 4 integrantes el ejercicio

-Resolver los ítems en un papelógrafo.</td>
<td>-Asignar roles a cada integrante del grupo (Coordinador, secretario, cronometrador, observador)
-Dar pautas de la resolución del ejercicio a partir de preguntas aclaratorias
-Tomar nota de los enfoques que plantea cada grupo para resolver los ítems del problema a partir de una matriz de observación:
<table>
<tr><td>Estrategia</td><td>¿Quién propone? ¿Como?</td><td>Secuencia de participación</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Validación
(30 min)</td>
<td>-Exponer por grupo la solución al problema siguiendo el orden establecido por la matriz de observación.</td>
<td>-Coordinar las exposiciones
-Brindar soporte teórico a cada exposición.
-Emplear GeoGebra para graficar la función logarítmica de la escala de Richter en función de la Intensidad $R(I)$
-Realizar un resumen de las resoluciones expuestas por cada grupo.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Institucionalización (20 min):</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">A continuación, se presenta conclusiones sobre la función exponencial y logarítmica trabajada en la situación didáctica:
-La razón que existe entre cada frecuencia es:</td>
</tr>
</table>

$$r = 1{,}059$$

- El modelo exponencial de la frecuencia de las notas de un piano, F ,con la que suena cada nota en función de los semitonos (n):

$$F = 16{,}35 \cdot (1{,}059)^n$$

- La expresión del despeje r

$$r = \sqrt[12]{2}$$

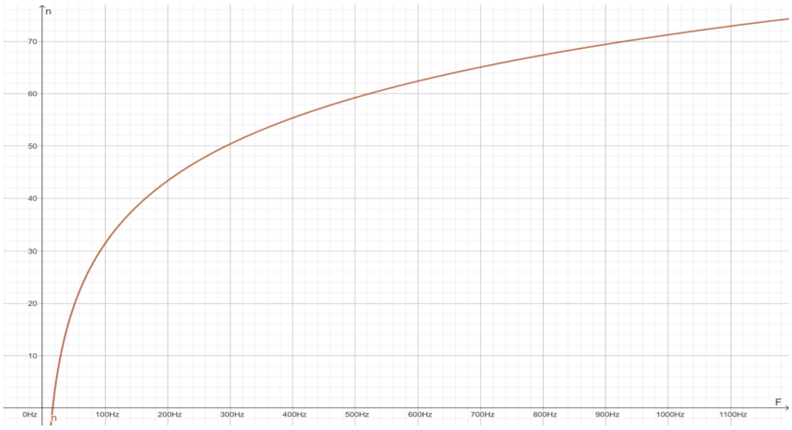
- El modelo de exponencial a logarítmico para determinar el número de semitono en función de la frecuencia de la nota que vibra es:

$$log_2 F = log_2(16{,}35 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^n)$$

$$log_2 F = log_2 16{,}35 + \frac{n}{12} log_2(2)$$

$$\boldsymbol{n = 12(log_2 F - 4.03)}$$

Su gráfica es:



El semitono(n), para una nota de frecuencia $F = 146{,}832\ Hz$.

$$n = 12(log_2 146{,}832 - 4.03)$$

$$n = 12(7{,}198 - 4.03)$$

$$n = 38$$

$$La\ nota\ es\ un\ RE3$$

Capítulo III

3. Metodología de la investigación

3.1 Método de investigación

La investigación emplea un enfoque cuantitativo, el cual, según Hernández et al. (2014), se caracteriza por proporcionar un control sobre el fenómeno estudiado al permitir su cuantificación, medición y estimación de opiniones. Este método se basa en la obtención objetiva del conocimiento a través de un proceso deductivo.

De este modo, la metodología utilizada en esta investigación contribuyó al logro de los objetivos. Dado que se trata de una investigación cuantitativa, fue posible observar y medir el rendimiento académico de cada estudiante en la destreza de modelización matemática después de implementar la estrategia de situaciones didácticas en el aula.

3.2 Diseño de investigación

En esta investigación se realizó un estudio cuasiexperimental con un enfoque cuantitativo y alcance correlacional. Hernández y Mendoza (2018) indican que el diseño cuasiexperimental, al igual que el experimental, trabaja sobre una variable independiente buscando ver su efecto sobre otras variables dependientes; no obstante, la diferencia radica en la conformación de los grupos de estudio pues estos no son asignados al azar, sino que más bien, los grupos están previamente establecidos. En consecuencia, el grupo de control sobre el que aplica la investigación está compuesto por la población de los estudiantes de Tercero de Bachillerato.

Asimismo, Hernández y Mendoza (2018) señalan que la finalidad del análisis correlacional es conocer en términos estadísticos el grado de relación que existe entre dos o más variables que describen un fenómeno. En este contexto particular, el objetivo principal del presente estudio busca evaluar el impacto de la metodología de situaciones didácticas en la variable de rendimiento académico de los estudiantes en el tema de modelación matemática.

En un primer momento, los estudiantes siguieron una rutina de estudio convencional. Luego, se llevó a cabo una intervención de 8 sesiones de clase utilizando la metodología propuesta, que se basó en una guía didáctica. De esta manera, el estudio se realizó de manera longitudinal al comparar el rendimiento académico de los estudiantes antes y después de trabajar temas de modelación mediante situaciones didácticas,

3.3 Población y muestra

3.3.1 Población

Hernández et al. (2014) sugiere que es un conjunto de argumentos que coinciden con una secuencia detallada. Por tanto, es el conjunto de situaciones estudiadas en las que se generan los datos de investigación con individuos de características comunes. La población a considerar fue los estudiantes que conforman el Tercero de BGU de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral que representan un valor de N = 22.

3.3.2 Muestra

Para Hernández, Fernández y Baptista (2014) la muestra es una colección de elementos de la población de la que se recopilarán datos y estos deben identificarse y delimitarse con precisión, los cuales, deben ser representativos de la población. Para esta investigación se trabajó con una muestra intencionada no probabilística donde se tomaron a los 22 estudiantes de Tercer año de BGU.

3.4 Técnicas e instrumentos

3.4.1 Prueba diagnóstica

El propósito de la evaluación diagnóstica o pretest fue la obtención de información sobre la situación de partida de los sujetos, en cuanto a saberes y capacidades que se consideran necesarios para iniciar con éxito nuevos procesos de aprendizaje en modelación matemática. La misma contiene preguntas que abarcan aspectos de modelación de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.

3.4.2 Situaciones Didácticas

La técnica principal de aplicación se da a partir de la implementación de una guía didáctica de uso docente para elevar el conocimiento y rendimiento académico en la destreza de modelación matemática de los estudiantes del tercero de BGU de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral.

3.4.3 Prueba postest

Del mismo modo, el propósito de la evaluación final o postest fue la obtención de información sobre el estado de conocimiento final de los estudiantes. Se aplicó el mismo cuestionario de conocimientos que se empleó al inicio a fin de que el nivel de complejidad sea el mismo y no haya un sesgo en los resultados.

3.4.4. Estructuración y validación de la evaluación de conocimientos

El presente test de conocimientos fue elaborado con el propósito de evaluar las destrezas que tienen los estudiantes en el campo de modelación matemática. La evaluación consta de ocho preguntas, de las cuales tres adoptan el formato de opción múltiple, mientras que las cinco restantes plantean situaciones problemas contextualizadas. El diseño de ciertas preguntas sigue el modelo de las pruebas estandarizadas PISA. Imelda et al. (2013) resaltan que el enfoque principal de la prueba PISA en el ámbito matemático es la modelación matemática y el análisis de cada una de sus etapas. Asimismo, las preguntas se alinean con las destrezas con criterio de desempeño (DCD) dadas en los lineamientos curriculares. De este modo, a partir de Ministerio de Educación (2016) se emplean las destrezas M.5.1.1, M.5.1.31, M.5.1.42, M.5.1.52, M.5.1.78. Las mismas están detalladas junto con el examen en el anexo 2.

La revisión y corrección de la prueba de conocimientos se realizó a través de la validación de expertos. Cabero y Llorente (2013) indican que esta técnica implica recabar las valoraciones de un grupo de personas con experiencia en el campo, quienes emiten su juicio sobre un objeto, instrumento o material de enseñanza, así como sobre aspectos específicos relacionados. De este modo, se contó con el criterio de dos expertos en el ámbito de las matemáticas, con un enfoque particular en actividades de modelización matemática. Cada uno de ellos otorgó la retroalimentación necesaria para realizar las correcciones y diseñar una prueba idónea que cuantifique el rendimiento en modelación de funciones. La matriz de validación para este estudio sigue el modelo establecido por Guachun (2022), colocada en el anexo 3.

3.4.5 Manejo confidencial de la información

La información obtenida en ambas evaluaciones ha sido manejada de manera ética y responsable con el fin de salvaguardar la integridad de los estudiantes en el transcurso de la investigación. Se obtuvo el permiso consentido y firmado de los representantes para aplicar la propuesta. Del mismo modo, el Rector otorgó su autorización y se acordó hacer un uso estrictamente académico de los resultados obtenidos. Adicionalmente, el protocolo de confidencialidad aporta veracidad a los resultados obtenidos.

3.4.6 El rendimiento académico en la modelización matemática

En términos generales, el rendimiento académico se define como la relación entre los diversos elementos que contribuye el estudiante al estudio de una asignatura, tales como personalidad, motivación y aptitudes, y el nivel de logros alcanzados en la misma (Ariza et al., 2018). De manera similar, Pizarro (2000) lo conceptualiza como una medida de las capacidades indicativas que evidencian, a través de una estimación, lo que una persona ha aprendido como resultado de un proceso de formación educativa. En el contexto específico del rendimiento en modelación matemática, se refiere al nivel de habilidades adquiridas para resolver problemas en esta área.

Ariza et al. (2018) destacan la importancia de considerar tanto aspectos cuantitativos como cualitativos al evaluar el rendimiento académico. En este sentido, la evaluación del desempeño en modelación matemática se realiza cuantitativamente a través del test de conocimiento. Por otro lado, se recurre a indicadores cualitativos de modelación para enriquecer el análisis del rendimiento. De esta manera, el indicador de comprensión evalúa la capacidad para organizar información relevante del problema mediante la creación de tablas y patrones. Asimismo, el indicador de análisis gráfico implica la representación de funciones utilizando herramientas de dibujo o software matemático. El análisis algebraico, por su parte, verifica el uso preciso del lenguaje algebraico para establecer un modelo.

3.4.7 Variables e instrumentos utilizados

En la tabla 17 se puede observar las variables analizadas durante el proceso de modelización en las situaciones didácticas. Preliminarmente se considera al rendimiento académico como el medidor principal en una escala cuantitativa del 1 al 10. Posteriormente se ha considerado pertinente la utilización de 4 variables categóricas las cuales son constatadas al analizar la resolución de los problemas de modelación en la hoja de trabajo del estudiante. De esta manera, se tiene la comprensión de modelación, análisis gráfico, análisis algebraico y obtención de resultados. Los parámetros se valoran como 1, si han sido aplicados en la resolución del ejercicio o como 0, si, por el contrario, no existe evidencia de su aplicación en la obtención del modelo. Finalmente, esta valoración de variables se ha dado en un nivel comparativo considerando el categórico 1 como pretest y 2 como postest.

Tabla 17

Variables e instrumentos utilizados

Variable (dependiente)	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores	Escala
Rendimiento Académico	Nota obtenida por el estudiante a partir de la revisión de los indicadores.	Evaluación pre y post situación didáctica	Funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas	ítem 1 - ítem 8	Cuantitativa
Comprensión de modelación	Indicador que evalúa la elaboración de tablas y la colocación de datos del problema.	Evaluación pre y post situación didáctica	Funciones lineales Funciones cuadráticas Funciones exponenciales y logarítmicas	ítem 1 - ítem 4 ítem 5 - ítem 6 ítem 7 - ítem 8	Categórica
Análisis gráfico	Indicador que evalúa el desarrollo y análisis de la gráfica de la función.	Evaluación pre y post situación didáctica	Funciones lineales Funciones cuadráticas Funciones exponenciales y logarítmicas	ítem 1 - ítem 4 ítem 5 - ítem 6 ítem 7 - ítem 8	Categórica
Análisis algebraico	Indicador que evalúa el desarrollo y análisis de la función algebraica.	Evaluación pre y post situación didáctica	Funciones lineales Funciones cuadráticas Funciones exponenciales y logarítmicas	ítem 1 - ítem 4 ítem 5 - ítem 6 ítem 7 - ítem 8	Categórica

Resultados hallados	Indicador que evalúa el modelo obtenido.	Evaluación pre y post situación didáctica	Funciones lineales Funciones cuadráticas Funciones exponenciales y logarítmicas	ítem 1 - ítem 4 ítem 5 - ítem 6 ítem 7 - ítem 8	Categórica
Variable de segmentación					
Evaluación	Taller aplicado a los estudiantes según la situación didáctica	Evaluación pre y post situación didáctica	1= Pre test, 2= Post test		Categórica

Nota: Se define las variables conjuntamente con los indicadores que lo conforman.

3.5 Procedimiento

Fase I: Desarrollo de clases de modelización. – En esta fase inicial, se procede a ejecutar las actividades que están relacionadas con las situaciones didácticas dentro del proceso de modelación de funciones matemáticas, es así que el planteamiento de situaciones didácticas, el desarrollo de las sesiones de trabajo y el análisis crítico, desempeñan un rol principal para mejorar los indicadores que serán evaluados.

Fase II: Recopilación de datos. – En esta fase, se definió el proceso de investigación, se establecieron las variables de investigación, indicadores, fuentes de datos, métodos y procedimientos de investigación asociados con el tema de investigación y formaron la base para recopilar los datos y la información requeridos para el desarrollo de proyectos.

Fase III: Análisis. – Los datos recopilados en la segunda fase se sistematizaron a través de un proceso de análisis estadístico descriptivo e inferencial para brindar información sobre el uso de las situaciones didácticas para la modelación de ecuaciones matemáticas dentro de la enseñanza-aprendizaje.

3.6 Análisis de los resultados

3.6.1 Tipo de análisis

En esta investigación se aplicó estadística descriptiva, para lo cual se elaboró cuadros de frecuencias provenientes de la información recolectada, luego se procedió a construir los gráficos con la información correspondiente a los datos mostrados. Para ello se utilizó el programa de Excel en donde se recolectó, tipificó y tabuló la información de los cuestionarios aplicados a los estudiantes. Del mismo modo se empleó el software de análisis inferencial IBM SPSS Statistics 22, para poder llevar a cabo el análisis de las variables medidas y obtener conclusiones al respecto.

3.6.2 Contraste de hipótesis y análisis inferencial

Para la evaluación y verificación de las situaciones didácticas establecidas dentro del tercero de BGU de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral, se realizó un contraste de hipótesis para determinar diferencias significativas dentro de los grupos en investigación, en donde se trabaja bajo un nivel de confianza del 95% y considerando como hipótesis nula la siguiente:

H_0: No existe diferencias significativas entre las calificaciones de los estudiantes dentro del pre y post test.

De tal manera que se realiza dos pruebas de hipótesis significativas para evaluar el cambio en el rendimiento de los estudiantes.

3.6.3 Análisis de varianza (ANOVA)

Según Tae Kyun (2017) manifiesta que es un método estadístico que permite realizar múltiples comparaciones, esta técnica utiliza el estadístico F el mismo que mide la relación de las varianzas entre grupos y dentro de ellos. El principal objetivo del ANOVA es determinar las diferencias significativas entre varianzas. Para la investigación el aporte principal es el determinar si las calificaciones entre las dos evaluaciones generadas presentan un cambio significativo con la implementación de situaciones didácticas.

3.6.4 Prueba t de Student

Se considera según Cascante y Villacis (2022), como un test de mucha confiabilidad y precisión para datos paramétricos. Este test mide las diferencias significativas entre las medias y la desviación estándar de los grupos en evaluación. Se trabajo con el estadístico t, el mismo que considera un p-valor para contrastar bajo un nivel de confianza del 95% la hipótesis:

H_0: No existe diferencias significativas entre las medias de las calificaciones de los estudiantes dentro del pre y postest.

Capítulo IV

4. Análisis de resultados

Con la finalidad de evaluar el impacto de las situaciones didácticas en la destreza de modelación matemática, se realiza el análisis de los resultados obtenidos en los indicadores de modelización y en la variable de rendimiento académico.

4.1 Evaluación de indicadores

Con la ejecución del cuestionario (pretest y postest) se ha buscado evidenciar mejoras en el aprendizaje y conocimiento de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas, con la implementación de la modelación de problemas. Para este análisis se han elaborado cuatro indicadores categóricos: comprensión de modelación, análisis gráfico, análisis algebraico y los resultados hallados; esto con la finalidad de verificar dentro de cada etapa que mantuvo el estudiante, la evolución de conocimientos en funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Como indicador final se analiza el rendimiento académico (calificación final) que el estudiante presentó dentro de las dos evaluaciones realizadas.

4.1.1 Funciones lineales

La tabla 18 refleja la evaluación de los indicadores del primer tema de modelación, que se centra en funciones lineales. Se observa un cambio significativo entre los resultados del pretest (realizado antes de la implementación de la estrategia) y el postest (realizado después de la implementación). En el indicador de comprensión de la modelación, se evidencia un aumento del 86,4% al 100%. En cuanto al análisis algebraico y los resultados obtenidos, se registra un incremento del 68,2% al 81,8%. Sin embargo, el resultado más notable se observa en el análisis gráfico, donde se pasa de un 0% a un 86,4%. Esto revela que las situaciones didácticas contribuyeron significativamente a mejorar el desempeño en la modelación de funciones lineales.

Tabla 18

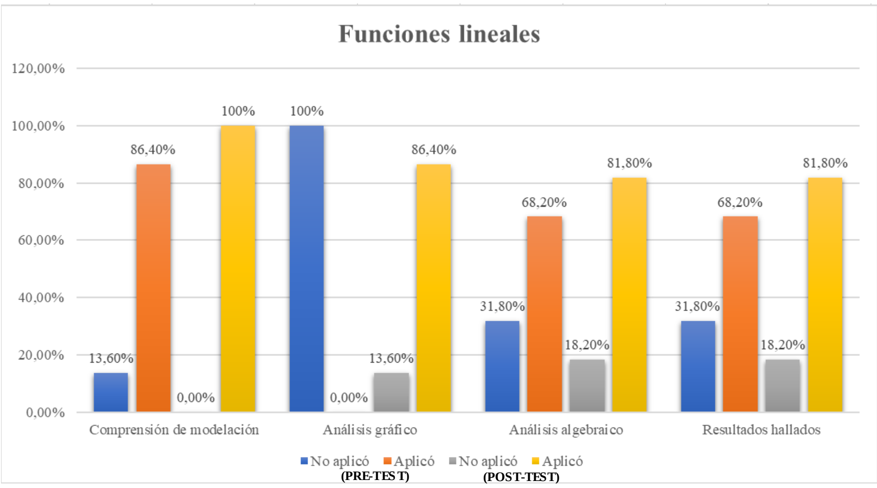
Análisis de evolución en funciones lineales

		Comprensión de modelación *F (%)*	**Análisis gráfico** *F (%)*	**Análisis algebraico** *F (%)*	**Resultados hallados** *F (%)*
Pretest	***No aplicó***	3 (13,6%)	22 (100%)	7 (31,8%)	7 (31,8%)
	Aplicó	19 (86,4%)	0 (0,0%)	15 (68,2%)	15 (68,2%)
Postest	***No aplicó***	0 (0,0%)	3 (13,6%)	4 (18,2%)	4 (18,2%)
	Aplicó	22 (100%)	19 (86,4%)	18 (81,8%)	18 (81,8%)
Total		22 (100%)	22 (100%)	22 (100%)	22 (100%)

Fuente: Evaluación generada en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

Figura 15

Evaluación de indicadores para funciones lineales



Fuente: Evaluación generada en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

4.1.2 Funciones cuadráticas

En la tabla 19 se identifica el desempeño que se generó por parte de los 22 estudiantes dentro del tema de funciones cuadráticas, en donde de igual manera se establece un cambio dentro de los indicadores de evaluación. En la comprensión de modelación se determina que existe un incremento del 95,5% al 100%, en cuanto al análisis algebraico y resultados hallados se evidencia un crecimiento del 13,6% al 59,1% y 54,5% respectivamente. No obstante, se evidencia que el análisis grafico presenta un incremento considerable debido a que en el primer proceso no existe conocimiento adecuado para el análisis gráfico, pero con la implementación del taller se determina un crecimiento al 40,9%, generando así un mayor aprendizaje de las funciones cuadráticas.

Tabla 19

Análisis de evolución en funciones cuadráticas

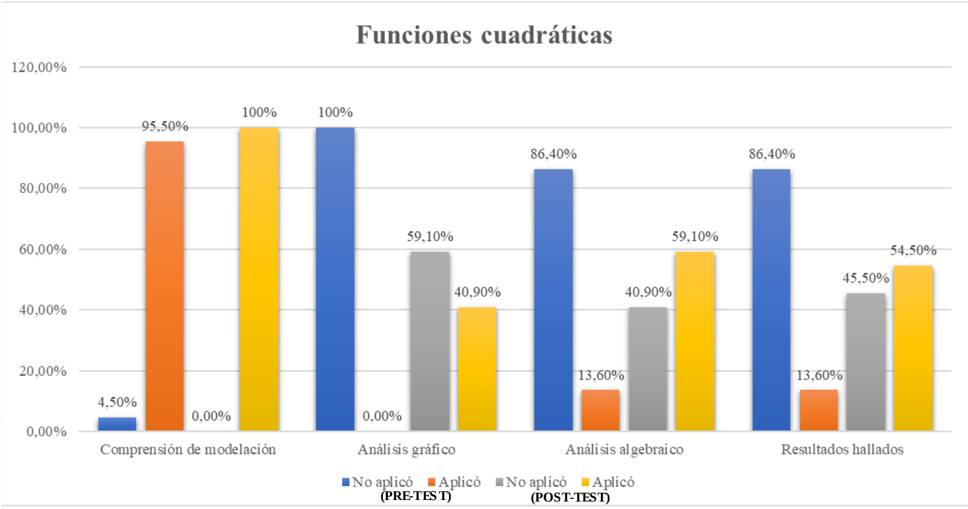
		Comprensión de modelación	**Análisis gráfico**	**Análisis algebraico**	**Resultados hallados**
		F (%)	*F (%)*	*F (%)*	*F (%)*
Pretest	***No aplicó***	1 (4,5%)	22 (100%)	19 (86,4%)	19 (86,4%)
	Aplicó	21 (95,5%)	0 (0,0%)	3 (13,6%)	3 (13,6%)
Postest	***No aplicó***	0 (0,0%)	13 (59,1%)	9 (40,9%)	10 (45,5%)
	Aplicó	22 (100%)	9 (40,9%)	13 (59,1%)	12 (54,5%)
Total		22 (100%)	22 (100%)	22 (100%)	22 (100%)

Fuente: Evaluación generada en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

UCUENCA

Figura 16

Evaluación de indicadores para funciones cuadráticas



Fuente: Evaluación generada en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

4.1.3 Funciones exponenciales y logarítmicas

La evaluación del último proceso está vinculada a funciones exponenciales y logarítmicas. Al analizar la Tabla 20, se observa una diferencia significativa entre la primera y la segunda evaluación, después de aplicar los procesos de modelación. Esto demuestra que la comprensión de la modelación aumenta del 77,3% al 95,5%, y es notable el crecimiento en el análisis gráfico, análisis algebraico y resultados obtenidos, que pasan del 0% (sin aplicación de las situaciones didácticas) al 50% y 45,5%, respectivamente. En otras palabras, la implementación de la estrategia de modelación condujo a una mejora en el rendimiento y el conocimiento de funciones exponenciales y logarítmicas.

Tabla 20

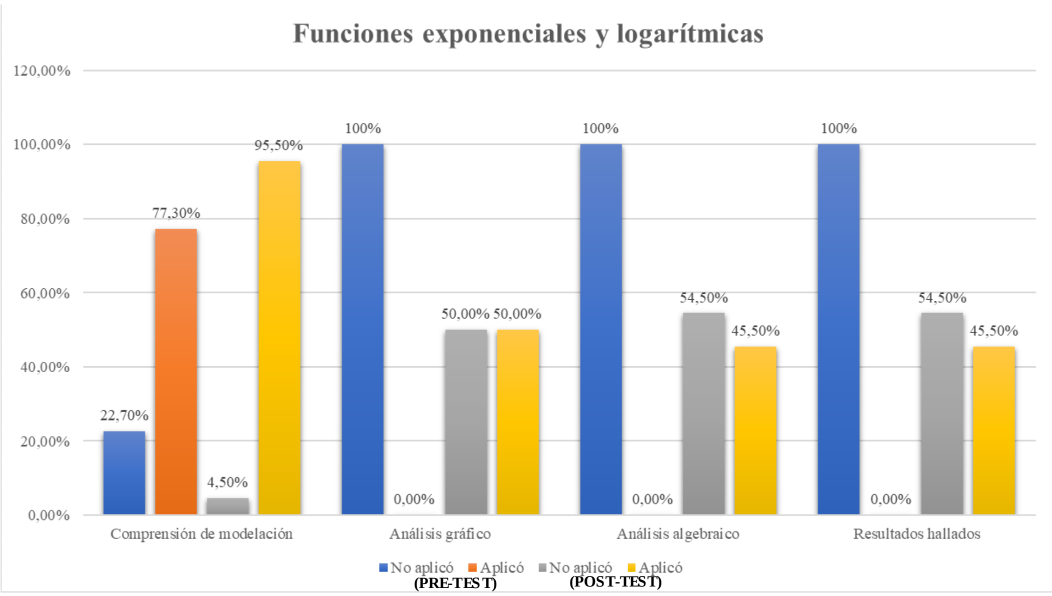
Análisis de evolución en funciones exponenciales y logarítmicas

		Comprensión de modelación	Análisis gráfico	Análisis algebraico	Resultados hallados
		F (%)	*F (%)*	*F (%)*	*F (%)*
Pretest	***No aplicó***	5 (22,7%)	22 (100%)	22 (100%)	22 (100%)
	Aplicó	17 (77,3%)	0 (0,0%)	0 (0,0%)	0 (0,0%)
Postest	***No aplicó***	1 (4,5%)	11 (50,0%)	12 (54,5%)	12 (54,5%)
	Aplicó	21 (95,5%)	11 (50,0%)	10 (45,5%)	10 (45,5%)
Total		22 (100%)	22 (100%)	22 (100%)	22 (100%)

Fuente: Evaluación generada en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

Figura 17

Evaluación de indicadores para funciones exponenciales y logarítmicas



Fuente: Resultados de test generado en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

4.2 Evolución de calificaciones finales

Dentro de este análisis se quiere evidenciar el comportamiento que mantuvieron las calificaciones finales que se aplicaron dentro de la evaluación en el segmento del pretest y postest. En la tabla 21 se determina que existe un promedio de calificación de los estudiantes de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral antes de la implementación de la situación didáctica (modelización) de 3,47 ±1,37 puntos evaluado sobre 10, con valores mínimos de 0,4 y máximos de 6 puntos; es decir, el conocimiento adquirido generaba únicamente un reporte medio e incluso bajo dentro de una escala de aprendizaje de 10.

Tabla 21

Evaluación de la calificación final pretest

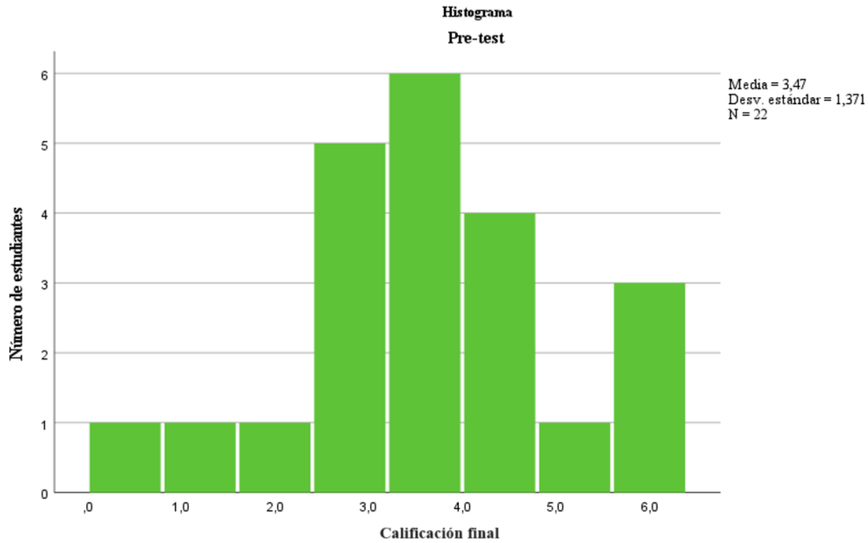
Calificación final (pretest)

	Estadístico
Media	3,473
Mediana	3,6
Desviación estándar	1,371
Mínimo	0,4
Máximo	6
Asimetría	-0,295
Curtosis	0,663

Fuente: Resultados de test generado en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

Figura 18

Histograma de evaluación pretest



Fuente: Resultados de test generado en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

En la tabla 22 se identifica el rendimiento en la evaluación final después de la implementación de la situación didáctica de modelación en donde se determina que el promedio de la calificación final incrementó a 6,51 ±1,55 puntos, con notas mínimas de 3,2 y máximas de 9,2; es decir, existe un incremento de aproximadamente el 50% con respecto a la calificación que mantuvieron en un inicio.

Tabla 22

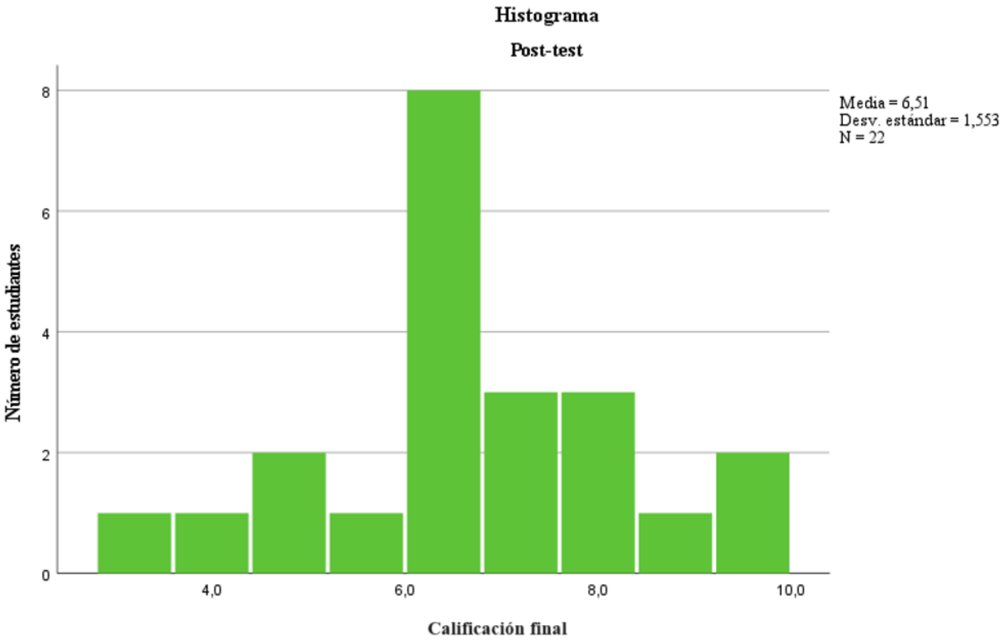
Evaluación de la calificación final postest

Calificación final (postest)	
	Estadístico
Media	6,509
Mediana	6,4
Desviación estándar	1,5525
Mínimo	3,2
Máximo	9,2
Asimetría	-0,082
Curtosis	-0,008

Fuente: Instrumento generado en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2022)

Figura 19

Histograma de evaluación postest



Fuente: Resultados de test generado en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral (2023)

4.3 Análisis de rendimiento académico

Para poder contrastar estadísticamente el cambio generado entre las dos evaluaciones escritas, se procede a realizar un análisis de diferencias significativas, mismo que será valorado bajo un nivel de significancia del 5% y considerando como hipótesis nula la no existencia de diferencias estadísticamente significativas. Para este proceso se realiza el contraste de los indicadores obtenidos dentro de cada tema abordado y el rendimiento académico del estudiante.

Tabla 23

Análisis de varianza de indicadores principales

		Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	F	p-valor
Calificación final	***Entre grupos***	101,415	1	101,415	47,273	0,000***
	Dentro de grupos	90,102	42	2,145		
	Total	191,516	43			
Comprensión de modelación general	***Entre grupos***	0,091	1	0,091	2,1	0,155
	Dentro de grupos	1,818	42	0,043		
	Total	1,909	43			
Análisis gráfico general	***Entre grupos***	5,114	1	5,114	45	0,000***
	Dentro de grupos	4,773	42	0,114		
	Total	9,886	43			
Análisis algebraico general	***Entre grupos***	3,841	1	3,841	24,476	0,000***
	Dentro de grupos	6,591	42	0,157		
	Total	10,432	43			
Resultados hallados general	***Entre grupos***	3,841	1	3,841	24,476	0,000***
	Dentro de grupos	6,591	42	0,157		
	Total	10,432	43			

Nota: Se contrasta bajo los niveles de *p<0,05, **p<0,01, ***p<0,001

La tabla 23 describe el análisis ANOVA de los indicadores evaluados dentro de la implementación de la modelación, el cual sustenta que en el rendimiento general de los estudiantes si existe diferencias significativas con la implementación del postest, esto debido al p-valor<0,05 (0,000) lo cual permite rechazar la hipótesis nula planteada anteriormente y determinar que la aplicación de situaciones didácticas si mejoró la capacidad de modelación matemática del estudiante.

Por otra parte, los indicadores análisis gráfico, análisis algebraico y resultados hallados presentan diferencias estadísticamente significativas; sin embargo, la comprensión del problema no evidencia un cambio estadístico significativo, pero se considera que hubo un incremento con respecto a los estudiantes que ya poseían conocimientos de modelación matemática.

Tabla 24

Contraste del estadístico t de student

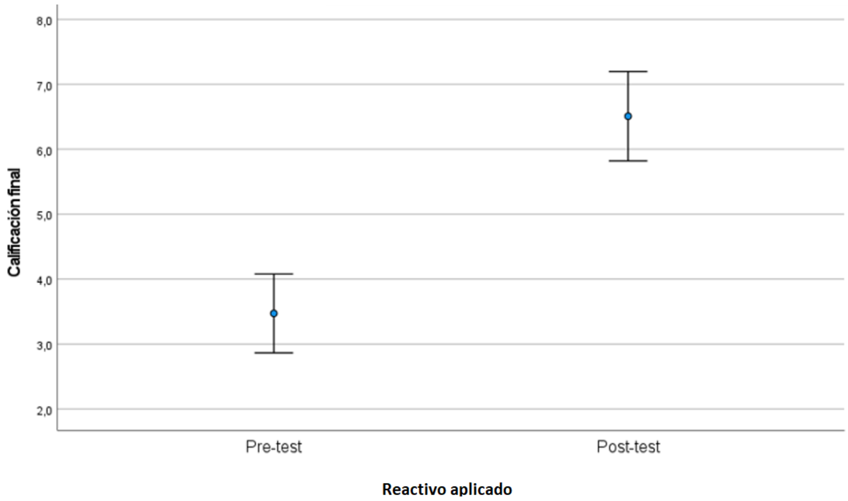
		t	p-valor	Media	Desviación estándar
Calificación final	***Pretest***	-6,876	0,000***	3,473	1,371
	Postest	-6,876	0,000***	6,509	1,553
Comprensión de modelación general	***Pretest***	-1,449	0,155	0,910	0,294
	Postest	-1,449	0,162	1,000	0,000
Análisis gráfico general	***Pretest***	-6,708	0,000***	0,000	0,000
	Postest	-6,708	0,000***	0,680	0,477
Análisis algebraico general	***Pretest***	-4,947	0,000***	0,090	0,294
	Postest	-4,947	0,000***	0,680	0,477
Resultados hallados general	***Pretest***	-4,947	0,000***	0,090	0,294
	Postest	-4,947	0,000***	0,680	0,477

Nota: Se contrasta bajo los niveles de *p<0,05, **p<0,01, ***p<0,001

En la tabla 24 se evidencia el cambio estadístico que presentaron los indicadores en evaluación a partir del estadístico t de student, el mismo que determina que sí existen diferencias de medias entre los grupos en evaluación, esto dado a su p-valor<0,05 (0,000), es decir, existe crecimiento en el puntaje promedio de los indicadores y el rendimiento del estudiante de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral durante el año 2023. Además, se sustenta que el indicador de comprensión de modelación, estadísticamente no presenta un cambio dentro de las situaciones didácticas aplicadas, sin embargo, al analizar las medias se describe un incremento del 0,09 (9%) después de aplicarse las situaciones didácticas.

Figura 20

Diagrama de errores de los reactivos utilizados



Nota: Se evalúa la diferencia de medias significativas a partir del diagrama de error

El diagrama de error de la figura 20 permite afirmar la existencia de diferencias significativas entre los dos procesos de aprendizaje aplicado a los estudiantes de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral durante el año 2023, esto dado a que sus límites (superior e inferior) respectivamente no logran cruzar el uno con el otro, lo cual determina que sus valores medios son distintos y dentro del postest se evidencia un crecimiento en la calificación final.

4.4 Discusión de resultados

El propósito del presente estudio fue medir el impacto que tiene la metodología de situaciones didácticas en el rendimiento de la destreza de modelación matemática de los estudiantes de tercero de bachillerato. Con esta finalidad se procede a contrastar los hallazgos generados a partir de la metodología de Brousseau con otras investigaciones citadas con anterioridad.

La comparación entre los resultados del pretest y el postest revela la influencia significativa que la aplicación de situaciones didácticas tuvo en el desarrollo de las destrezas de modelación matemática de funciones. Mientras que el promedio general del curso en el pretest fue de 3,47, este se elevó a 6,51 en el postest, indicando una mejora sustancial del 87%, casi el doble del rendimiento inicial. Adicionalmente, los resultados derivados de las pruebas t de Student y ANOVA permiten descartar la hipótesis nula y respaldan la afirmación de un impacto estadísticamente significativo a partir de la implementación de la propuesta educativa.

Un resultado positivo a nivel cuantitativo también se obtiene con Moukhliss et al. (2023) quienes realizan un estudio cuasiexperimental de modelación matemática con apoyo de GeoGebra y obtienen una diferencia significativa entre las medias del pretest y postest. Por su parte el estudio cualitativo de Danisman y Güler (2019) basado en la resolución de un problema de modelación evidencia un impacto positivo en el rendimiento final de los estudiantes y fortalece el manejo conceptual del tema de funciones.

Al medir la variable de análisis gráfico se evidenció que su uso, tras la aplicación de las situaciones didácticas, tuvo una repercusión directa en las calificaciones obtenidas en el postest. Es decir que, al modelar el problema mediante la gráfica de la función, los estudiantes obtuvieron mayores aciertos en sus respuestas. Este criterio concuerda con Trelles et al. (2021) quienes indican que, en su estudio de caso sobre el contagio de un virus, aquellos estudiantes que elaboraron gráficas del fenómeno generaron modelos de predicción más precisos. Asimismo, Sánchez et al. (2020) y Moukhliss et al. (2023) manifiestan que el uso de GeoGebra para graficar los modelos, permitió a los estudiantes interpretar de mejor manera los problemas y plantear soluciones coherentes con los datos.

El análisis algebraico también se fortaleció durante el desarrollo de las situaciones didácticas y permitió elevar el nivel del rendimiento en el postest. De esta manera, al plantear problemas complejos como *cercado de un terreno* o *construcción de una caja* los estudiantes emplearon lenguaje algebraico para obtener el modelo de la función cuadrática (ver anexo 5). Este hecho se traduce en el incremento de los indicadores para funciones cuadráticas (ver figura 16). Lo evidenciado coincide con Danisman y Güler (2019) quienes en su investigación describen como el planteamiento de un problema de modelación desafiante permitió que los estudiantes apliquen diversos métodos como el de ensayo - error hasta llegar a elaborar modelos algebraicos coherentes.

El indicador de comprensión del problema, evaluado mediante la elaboración de tablas de datos, no mostró un incremento significativo en el postest según el análisis de ANOVA y t de student. Sin embargo, desempeñó un papel importante como herramienta en las tareas de modelización. De esta manera, los estudiantes emplearon las tablas para identificar patrones en la resolución de problemas como *planes tarifarios* o *escasez de alimentos*, tal como se puede observar en la matriz de observación del anexo 5.

Finalmente, en los estudios cualitativos efectuados por Danisman y Güler (2019), Sánchez y Jiménez (2018), coinciden en señalar que la interacción en los grupos al momento de resolver problemas ayudó a que los estudiantes argumenten sobre sus puntos de vista haciendo uso del razonamiento matemático. Por su parte Tong et al. (2019) señala que el involucramiento en actividades grupales de modelación no solo motivó el trabajo, sino que además permitió que los estudiantes se percataran de la utilidad de los saberes matemáticos analizados. Similares conclusiones se obtuvieron en el presente estudio en el que los estudiantes expresaron su conformidad por trabajar bajo esa dinámica y, además sometieron a debate sus ideas sobre las maneras de plantear soluciones a un problema.

Conclusiones

En la presente investigación se ha podido evidenciar el impacto positivo que tiene el uso de la metodología de situaciones didácticas para la modelación matemática de funciones. Esto se refleja claramente en los indicadores de modelización y en el análisis estadístico inferencial mediante la prueba t de student y ANOVA, al comparar las calificaciones del pretest y el postest. De este modo, los resultados revelan una mejora significativa tanto en el desempeño individual como en el desempeño grupal de los estudiantes.

El proceso de modelización abordado desde la dinámica de las situaciones didácticas ha incentivado el despliegue y fortalecimiento de otras competencias importantes en el desarrollo integral de los alumnos. Por un lado, los grupos han podido consolidar sociedades de trabajo organizadas y productivas. De la misma forma, se ha instaurado un ambiente propicio para el diálogo y el debate de ideas matemáticas.

Los problemas planteados en las tareas de modelización estimularon la utilización de diversas estrategias de resolución, como la creación de gráficos o la identificación de patrones. La posterior discusión de los procesos utilizados para abordar estos problemas ha enriquecido el conjunto de habilidades de cada estudiante. Como resultado, las puntuaciones del postest muestran una mayor diversificación en los enfoques que los estudiantes emplean para abordar los problemas planteados.

El uso de situaciones didácticas se muestra como una metodología de trabajo versátil que está abierta a la incorporación de otros elementos de aprendizaje como el uso de software o los grupos de discusión. Estos aportes permiten diseñar tareas matemáticas con un mayor alcance en el aula.

Recomendaciones

Diseñar clases que aborden temas complejos, como la modelización, siempre representa un desafío en la práctica educativa. A pesar de los resultados positivos obtenidos con la implementación de la presente propuesta, el promedio final de la evaluación muestra la necesidad de mejorar la metodología y las técnicas utilizadas. Por lo tanto, resulta necesario promover otros trabajos de investigación en la línea de la modelación matemática para generar un mayor impacto.

Los resultados obtenidos en esta investigación ofrecen datos significativos desde una perspectiva cuantitativa, lo que posibilita la formulación de conclusiones relevantes. Sin embargo, al adentrarse en el análisis cualitativo, se revela un tipo diferente de información que contribuye a contrastar y enriquecer la discusión de los resultados. De esta manera, para abordar de manera integral los diversos aspectos de la investigación que poseen importancia, se sugiere que futuras investigaciones adopten un enfoque mixto del problema, permitiendo así una comprensión más completa y matizada de las temáticas exploradas.

Las actividades de modelación propuestas en el desarrollo de situaciones didácticas también requieren un análisis exhaustivo. Aunque en la actualidad existen diversas fuentes de referencia sobre el tema, es imperativo que el docente contextualice y aplique cada actividad a la realidad específica de su entorno educativo. En este sentido, es esencial fomentar la iniciativa de futuras investigaciones para abordar la creación de actividades de modelación, incentivando así la generación de recursos prácticos y adaptados a contextos educativos particulares.

Referencias

Angel, A., & Runde, D. (2013). *álgebra Intermedia: Educación Media Superior.* México: Pearson.

Aragón, L., Jiménez, N., Oliva, J., y Aragón, M. (2018). La modelización en la enseñanza de las ciencias: criterios de demarcación y estudio de caso. *Revista Científica, 32(2)*, 193-206. doi:https://doi.org/10.14483/23448350.12972

Ariza, C., Rueda, L., y Sardoth, J. (2018). El rendimiento académico: una problemática compleja. *Boletín Virtual*, 137-141.

Arseven, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Universal Journal of Education Research*, 973-980.

Asempapa, R., & Sturgill, D. (2019). Mathematical Modeling: Issues and Challenges in Mathematics Education and Teaching. *Journal of Mathematics Research*, 71-78.

Aymerich, A., y Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: Episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 1-16. Obtenido de https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/16521/24044

Biembengut, M., & Hein, N. (2010). Mathematical Modelling: Implicatios for Teaching. *Modeling Students´Mathematical Modelling Competencies*, 481-490.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What do we know?, What can we do? *The proceedings of the twelveth international congress of mathematical education*, 83-95.

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematicall Modelling and Application*, 45-58.

Cabero, J., y Llorente, M. d. (2013). La aplicación del juicio de experto como técnica de evaluación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). *Revista de Tecnología, información y comunicación en educación, 7*(2), 11-22.

Cascante, M., y Villacís, I. (2022). Prueba T de student para una investigación odontológica. *Revista OACTIVA UCCuenca.Vol.7, No.1*, 49-54. doi:https://doi.org/10.31984/oactiva.v7i1.562

Cervantes, L. (2015). *Modelizacion matemática. Principios y aplicaciones.* Puebla, México: Benemerita Universidad Autónoma de Puebla. Recuperado el 27 de 03 de 2023, de https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/publicaciones/Modeliza.pdf

Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, año 1, numero 2*, 1-10. Obtenido de http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/teoria%20de%20las%20situaciones%20didacticas.pdf

Comap, & Siam. (2019). *Gaimme: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education.* United States of America: S. Garfunkel y M. Montgomery, Eds. Recuperado el 21 de 03 de 2023, de http://www.siam.org/Portals/0/Publications/Reports/gaimme-full_color_for_online_viewing.pdf?ver=2018-03-19-115454-057

Cubas, A. (2007). *Matemática Serie 2 para docentes de Secundaria Didáctica de la Matemática.* Lima-Peru: El Comercio S.A. Recuperado el 27 de 03 de 2023

D´Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I., y Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en educación matemática.* México: Magisterio.

Danisman, S., & Güler, M. (2019). A problem-solving procces using the Theory of Didactical Situations: 500 lockers problem. *Innovations in Education*, 105-116.

Ellenberg, J. (2014). *How not to be wrong: The Power of Mathematical Thinking.* New York: Penguin Press.

Escudero, C., y Cortez, L. (2017). *Téncias y Métodos Cualitativos para la investigación científica.* Machala: UTMACH.

Estrella, S. (2014). El Formato Tabular: Una revisión de literautura. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", vol. 14, núm. 2*, 1-23. Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/447/44731371016.pdf

Gallart, C., Garcíıa, L. M., y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educaciónsecundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning, Volume 12 (1)*, 71-86. doi:https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955

UCUENCA

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: a review of literature. *Studies in Science Education*, 183-210.

Godino, J., Burgos, M., y Wilhelmi, M. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 38-1*, 147-164. doi:https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906

Guachún, F. (2020). Nuevas prácticas de laboratorio en la formación del docente de Física, [Tesis Doctoral, Universidad del Comahue]. Repositorio Digital Institucional: http://rdi.uncoma.edu.ar/bitstream/handle/uncomaid/17207/TESIS%20Version%20FINAL%20GUACHUN.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Guzmán, I., Pino, L., y Arredondo, E. (2020). Paradojas Didácticas Observadas en la Gestión de los Teoremas de Euclides. *Bolema 34 (67)*, 651-677. doi:https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a15

Hernández, R., y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación, las rutas cuantitativas, cualitativas y mixta* (Primera ed.). México DF, México: Mc Graw Hill. Retrieved from http://repositorio.uasb.edu.bo:8080/handle/54000/1292

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill. Obtenido de http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf

Herrera, D., y Saladrigas, H. (junio-noviembre de 2019). La modelación como método del conocimiento científico en las ciencias sociales. El caso del modelo cubano de televisión local. *Revista RELMECS, 9*(1), 1-18. Obtenido de https://www.relmecs.fahce.unlp.edu.ar/article/download/Relmecse053/10738?inline=1#redalyc_80687006_ref23

Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing Teachers To Learn from Teaching. *Journal of Teacher Education*, 47-58.

Imelda, S., Hartono, Y., & Ilma, R. (2013). Investigating Secondary School Students´Difficulties in modelling problems PISA. *IndoMS.J.M.E*, 41-58.

Káiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 38(3)*, 302-310. Obtenido de https://link.springer.com/article/10.1007/BF02652813

Loyes, C. (2006). Supuestos epistemológicos en Educación Matemática. *La gaceta de la rsme*, 425-438.

Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Curriculo de los niveles de Educación Obligatoria.* Quito.

Montagud, N. (13 de 07 de 2020). *La teoría de situaciones didácticas: qué es y qué explica sobre la enseñanza*. Recuperado el 22 de 03 de 2023, de Psicología y Mente: https://psicologiaymente.com/desarrollo/teoria-situaciones-didacticas

Morales, V., Segovia, J., Córdova, F., y Hernández, A. (2021). Modelado y TICs en la Enseñanza de Ciencias y Matemática. *Dom. Cien, Vol. 7, núm. 1*, 874-884. doi:http://dx.doi.org/10.23857/dc.v7i1.1682

Moukhliss, M., Latifi, M., Ennassiri, B., Elmaroufi, A., Abouhanifa, S., & Achtaich, N. (2023). The Impact of GeoGebra on Algebraic Modeling Problem- Solving in Moroccan Middle School Students. *Journal of Educational and Social Research*, 57-69.

Ortiz, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia: Colección de la filosofía de la educación*, 93-110.

Ortiz, J. (2002). *Universidad de Granada.* Recuperado el 21 de 03 de 2023, de Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra : estudio evaluativo de un programa de formación: http://hdl.handle.net/10481/55153

Oswalt, S. (2012). Mathematicall Modelling in the high school classroom. *Mathematicall Modelling in the high school classroom*. Louisiana.

Pizarro, R. (2000). *Inteligencias Múltiples y aprendizajes escolares.*

Pramesti, I., & Retnawati, H. (2019). Difficulties in Learning Algebra: An analysis of students´ errors. *Journal of Physics: Conference Series*, 1-7.

Radford, L. (2008). Theories in Mathematics Education: A brief inquiry into their conceptual differences.

Rise University. (02 de 08 de 2010). *Open Stax*. Recuperado el 22 de 03 de 2023, de Modelado con funciones lineales: https://openstax.org/books/prec%C3%A1lculo-2ed/pages/2-3-modelado-con-funciones-lineales

Ruiz, A., Chavarría, J., y Alpízar, M. (2004). Epistemología y construcción de una nueva disciplina científica: la didactique de mathémtiques. *Uniciencia*, 2-19.

Sánchez, D., y Jiménez, A. (2018). Situaciones A-didácticas en la enseñanza de las matemáticas. *RECME*, 40-42.

Sánchez, R., Lantigua, Z., Rodriguez, M., Bennasar, M., y García, A. (2020). Modelización matemática y Geogebra en la formación de profesionales de educación. *Revista do Instituto Geogebra de Sao Paulo, IX*(3), 89-105.

Smith, M., & Kay, M. (2016). *5 Prácticas para orquestar discusiones productivas en matemáticas.* México.

Tae Kyun, K. (2017). Understanding one-way ANOVA using conceptual figures. *Korean J Anesthesiol; 70(1)*, 22–26. doi:https://doi.org/10.4097%2Fkjae.2017.70.1.22

Tong, D. H., Loc, N. P., Uyen, B. P., & Giang, L. T. (2019). Developing the competency of mathematical modelling: A case study ot teaching the cosine and sine Theorems. *International Journal fof Learning*, 18-37.

Trelles, C., y Alsina, Á. (2017). Nuevos conocimiento para una educación matemática del siglo XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión*(51), 140-163.

Trelles, C., Toalongo, X., y Alsina, á. (2021). Una actividad de modelización matemática con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las ciencias*, 193-213.

Trelles, C., Toalongo, X., y Alsina, Á. (2022). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos. *INNOVAResearch Journal, 7(2)*, 97-116. doi:https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076

Trelles, C., Toalongo, X., Alsina, Á., y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula secundaria. *Épsilon*, 43-59.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, vol. 9, núm. 46*, 75-87. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179414894008

Villa, J. (2015). Modelación matemática a partir de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 133-148.

Villa, J., González, D., y Carmona, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria, Vol. 11(2)*, 25-34. doi:http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Zaldívar, J., Quiroz, S., y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de InvestIgacIón EducatIva de la Rediech, año 8 número 15*, 87-110. Obtenido de https://www.scielo.org.mx/pdf/ierediech/v8n15/2448-8550-ierediech-8-15-87.pdf

Anexos

Anexo A. Solicitud escrita para la autorización y aplicación de la propuesta didáctica en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral.

La Asunción, 10 de enero de 2023

Mgs.

Bayron Loja Gutama

Rector de la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral

Su despacho

De mis consideraciones:

Reciba un cordial saludo y a su vez éxito en el desempeño de sus funciones. Por medio de la presente yo, Mateo Felipe Sacaquirín García, docente de la asignatura de Matemática de la institución le informo a usted que como parte de mi preparación profesional estoy cursando la Maestría en Enseñanza de la Matemática en la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación de la Universidad de Cuenca. Uno de los requisitos para graduarse es la ejecución del proyecto de investigación cuyo título es **"La Teoría de las Situaciones Didácticas como metodología de enseñanza para la modelación matemática de ecuaciones en el Tercero De BGU De La Unidad Educativa Remigio Crespo Toral "**

Para lo cual solicito su autorización para realizar en este centro educativo las etapas de recolección de información. Cabe aclarar que los datos obtenidos serán de uso exclusivo para el desarrollo de este trabajo de graduación y que además los resultados estarán a disposición de la institución para su beneficio posterior.

Seguro de contar con su colaboración, anticipo mis agradecimientos.

Atentamente:

Lcdo. Mateo Sacaquirín García

UNIDAD EDUCATIVA "REMIGIO CRESPO TORAL"
U.E.R.C.T.
LA ASUNCIÓN - GIRÓN - AZUAY
RECIBIDO
FECHA: 10/01/2023
HORA: 10:30
RECIBIDO

Anexo B. Test de evaluación modelación matemática

<table>
<tr><td>NIVEL:
BACHILLERATO</td><td>ÁREA: MATEMATICA</td><td>ASIGNATURA:
MATEMÁTICA</td><td rowspan="2">AÑO LECTIVO
2023 - 2024</td></tr>
<tr><td colspan="3">CURSO / AÑO EGB/BGU: 3 BGU</td></tr>
<tr><td colspan="4">DOCENTE: LCDO. MATEO SACAQUIRIN GARCIA</td></tr>
<tr><td colspan="4">DESTREZAS CON CRITERIO DE DESEMPEÑO:

M.5.1.1. Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales en la resolución de productos notables y en la factorización de expresiones algebraicas

M.4.1.52. Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas.

M.5.1.31. Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas, que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas.

M.5.1.42. Resolver problemas o situaciones que pueden ser modelizados con funciones polinomiales, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas.

M.5.1.78. Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas,</td></tr>
<tr><td colspan="4">INDICADORES ESENCIALES DE EVALUACIÓN:

I.M.5.1.1. Aplica las propiedades algebraicas de los números reales en productos notables, factorización, potenciación y radicación. (I.3.)
I.M.4.3.2. Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones

I.M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas.
I.M.5.4.1. Identifica las sucesiones según sus características y halla los parámetros desconocidos; aplica progresiones en aplicaciones cotidianas y analiza el sistema financiero local, apreciando la importancia de estos conocimientos para la toma de decisiones asertivas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESTUDIANTE: ___________________________</td><td colspan="2">FECHA: ____________________</td></tr>
<tr><td colspan="4">INSTRUCCIONES: Este es un Examen que sirve para evaluar sus conocimientos y habilidades en el área de Matemática, trabaje con atención para que pueda resolver correctamente.

PARA RESPONDER
• Para el desarrollo de la evaluación usted dispone de 60 minutos.
• Recuerde que el examen es individual, si intenta hacer fraude, se anulará automáticamente.
• Utilice una hoja, si lo requiere, para realizar los ejercicios extra.</td></tr>
</table>

UCUENCA

<table>
<tr><th>ITEMS</th><th>VALOR</th></tr>
<tr><td>

1. Lea el enunciado y encierre el literal correcto:

La suma de dos números enteros positivos es 12, y el uno es el doble del otro. La ecuación que representa la suma de los dos números es igual a:

a) $x + 2x = 12$

b) $2x + \frac{x}{2} = 12$

c) $x + 2 = 12$

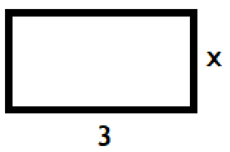
d) $2x + 1 = 12$

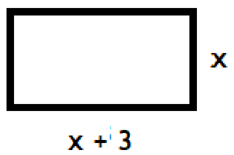
</td><td>1 p</td></tr>
<tr><td>

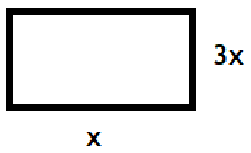
2. Lea el enunciado y encierre los literales correctos:

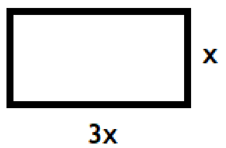
Se tiene un terreno rectangular en el cual la longitud de uno de los lados es el triple del otro lado.

La gráfica que representa las dimensiones del terreno es:**(1 p)**

<table>
<tr>
<td>

(a)</td>
<td>

(b)</td>
<td>

(c)</td>
<td>

(d)</td>
</tr>
</table>

La función que representa el perímetro, $P(x)$,del terreno es igual a: **(1 p)**

a) $P(x) = (3x + 3) + x$

b) $P(x) = (x + 3) + x$

c) $P(x) = 2(3x) + 2(x)$

d) $P(x) = 2(x + 3) + 2(x)$

</td><td>2 p</td></tr>
</table>

UCUENCA

3. Resuelva el siguiente ejercicio:	**5 p**

El costo de fabricación de un bolígrafo, es de \$0.3 por unidad y se vende por \$0.5 la unidad.

(a) Complete la tabla con la información sobre la venta de bolígrafos **(1 p)**:

Cantidad de Bolígrafos x	Costo $C(x)$	Venta $V(x)$	Ganancia $G(x)$
10			
20			
40			

b) Determine la función de ganancia, $G(x)$, donde x representa el número de bolígrafos **(2 p)**

$$G(x) =$$

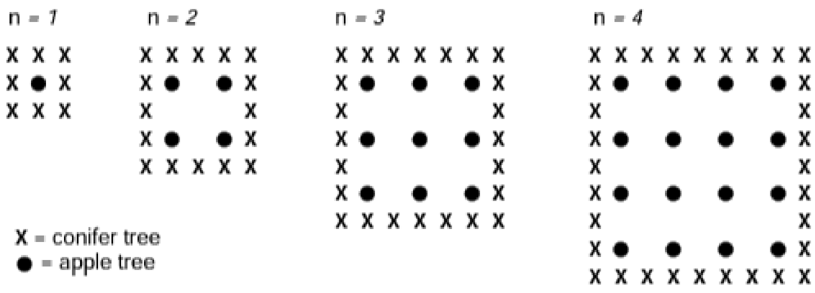
c) Calcule la ganancia, $G(x)$, por la venta de 5 000 bolígrafos **(1 p)**

$$G(5\,000) =$$

d) Determine el número de bolígrafos que deben venderse para generar una Ganancia de \$1648 **(1 p)**

4. Resuelva el siguiente problema: **3 p**

Un agricultor planta arboles de manzana formando un patrón cuadrado. De manera que pueda proteger los árboles de manzana del viento, él siembra plantas de conífera alrededor del huerto. Aquí se observa un diagrama donde se tiene el patrón de árboles de manzana y las coníferas para cualquier número $(\boldsymbol{n})$ de filas de árboles de manzana:



a) Complete la siguiente tabla: **(1 p)**

Filas $(\boldsymbol{n})$	Número de arboles manzana $(\boldsymbol{m})$	Número de árboles de conífera $(\boldsymbol{C})$
1		
2		
3		
4		
5		
6		

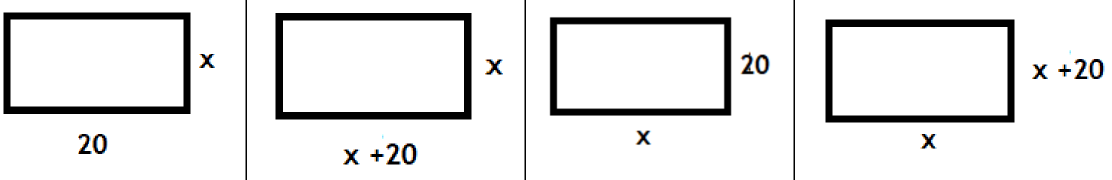
b) Determine el modelo lineal, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{n})$,que permite calcular el número de árboles de conífera, $\boldsymbol{C}$, que se necesitan ,en función de $\boldsymbol{n}$, que representa el número de filas de árboles de manzana. **(2 p)**

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{n}) =$$

5. Lea el enunciado y encierre los literales correctos: **2 p**

Se tiene un terreno rectangular en el cual la longitud de uno de los lados tiene 20 metros más de largo que el otro lado, x.

La gráfica que representa las dimensiones del terreno es: **(1 p)**



(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**

El modelo matemático que representa el área del terreno rectangular, $A(x)$, en función de x es igual a: **(1 p)**

a) $A(x) = x^2 + 20$

b) $A(x) = x + 20x$

c) $A(x) = 20 - x^2$

d) $A(x) = x^2 + 20x$

6 p

6. Resuelva el siguiente problema:

El consejo estudiantil de un colegio está planificando una velada cultural para recaudar fondos. El año pasado vendieron 300 entradas a $\$\,5$ cada una. Para este año, el consejo estudiantil desea aumentar las ganancias y estiman que, por cada dólar de incremento en el costo de la entrada, la asistencia disminuirá en 20 personas y viceversa (por cada dólar de disminución en el precio, 20 personas más vendrán).

Si se considera a x como el cambio en el precio de la entrada,

a) Complete la siguiente tabla: **(1 p)**

UCUENCA

x	Costo de la entrada $C(x)$	Asistencia $A(x)$	Ingresos $I(x)$
-2			
-1			
0			
1			
2			.

b) Obtenga la función $C(x)$, que represente el valor del Costo de la entrada en función de la variación x. **(1 p)**

$$C(x) =$$

c) Obtenga la función $A(x)$, que represente la asistencia del público en función de la variación x. **(1 p)**

$$A(x) =$$

d) Obtenga la función $I(x)$, que represente el ingreso económico en función de la variación x. **(2 p)**

$$I(x) =$$

e) Calcule cual es el costo, C , de las entradas que permite la mayor cantidad de ingresos I. **(1 p)**

$$C =$$

7. Resuelva el siguiente problema:	**3 p**

Se deposita un capital de $\$100$ en una cooperativa en mayo del 2008, la cual otorga un interés compuesto del 2% anual. A continuación, se muestra una tabla con el monto acumulado de cada año:

tiempo $(\boldsymbol{t})$	Monto $(\boldsymbol{M})$
1 año	
2 año	
3 año	

(a) Complete la tabla **(1 p)**

(b) Obtenga el modelo de crecimiento del monto, $M(t)$, donde t representa el número de años transcurridos. **(2 p)**

8. Resuelva el siguiente problema:	**3 p**

Según estudios de expertos, una bacteria que ha incubado experimenta una duplicación al finalizar un día, lo que implica un crecimiento exponencial en su población.

Observe la tabla:

tiempo $(\boldsymbol{t})$	1 día	2 día	3 día	4 día	5 día
Población $(\boldsymbol{P})$	2				

(a) Llene la tabla con el número de bacterias que crecen hasta el día 5 **(1 p)**

(b) Obtenga el modelo logarítmico que relaciona la cantidad de tiempo, t, que ha transcurrido en función de la población de bacterias, P, que ha crecido **(1 p)**

$$\boldsymbol{t} =$$

(c) Determine en que día la población sobrepasará el millón de bacterias. **(1 p)**

Número de dificultades:	/ 25 PUNTOS
	/10

UCUENCA

Anexo C. Validación del instrumento de evaluación por parte de expertos.

Para cada pregunta del TEST, marque con una “x” siguiendo la siguiente escala:
“Sí” = considero adecuada la pregunta.
“No” = considero inadecuada la pregunta.
“?” = no tengo claro si la pregunta es adecuada o inadecuada

GUÍA DE OBSERVACIÓN PARA EL INSTRUMENTO “PRE TEST”					
Resultado o logro de aprendizaje:	**Pregunta**	**Sí**	**No**	**?**	**Observaciones**
M.4.1.56. Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema	**1**	**x**			**Acoger las recomendaciones**
	2	**x**			**Acoger las recomendaciones**
	3	**x**			**Acoger las recomendaciones**
	4	**x**			**Acoger las recomendaciones**
M.5.1.25. Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.	**5**		**x**		
	6		**x**		

UCUENCA

.					
M.5.1.78. Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos	**7**		**x**		
	8		**x**		

Consideraciones generales	**Sí**	**No**
Las instrucciones orientan claramente a los estudiantes para responder el pre test	x	
La cantidad de preguntas es adecuada	X Un número de seis a ocho preguntas es lo adecuado, por lo tanto sugiero remplazar las preguntas 5,6,7 y 8 por al menos dos preguntas que evalúen modelización.	
Consideraciones finales (favor agregar observaciones que han sido consideradas en este tamaño)		
1. No se ve ejercicios de resolución en forma analítica		
2. Los ejercicios planteados no responde a las destrezas con criterios de desempeño, pues se indica analiza y no se presentan ejercicios de ese tipo		

3. Los ejercicios de opción múltiple deberían tener la misma cantidad de literales		
Instrumento validado por: Dr. Cesar Trelles Zambrano	**Firma:**	

Para cada pregunta del TEST, marque con una "x" siguiendo la siguiente escala:
"Sí" = considero adecuada la pregunta.
"No" = considero inadecuada la pregunta.
"?" = no tengo claro si la pregunta es adecuada o inadecuada

GUÍA DE OBSERVACIÓN PARA EL INSTRUMENTO "PRE TEST"					
Criterio de Evaluación:	**Pregunta**	**Sí**	**No**	**?**	**Observaciones**
Opera y emplea funciones lineales, para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC. (Ref. C.E.M.5.3)	1	X			
	2	X			
	3	X			
	4	X			
Opera y emplea funciones cuadráticas, para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC. (Ref. C.E.M.5.3)	5	X			
	6	X			

Opera y emplea funciones exponenciales y logarítmicas, para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC. (Ref. C.E.M.5.3)	7	X			
	8	X			

Consideraciones generales	**Sí**	**No**
Las instrucciones orientan claramente a los estudiantes para responder el test	X	
La cantidad de preguntas es adecuada	X	
Consideraciones finales (favor agregar observaciones que han sido consideradas en este tamaño)		
Ninguna observación		
Instrumento validado por: Mgs. Jefferson Alexander Córdova Rofrío Máster en Didáctica de la Matemática	**Firma:**	

Anexo D. Reglamento para el trabajo en grupos.

REGLAMENTO PARA LA ACTIVIDAD EN GRUPO DURANTE LOS TRABAJOS DE MODELACIÓN

De los estudiantes:

1) Los grupos deberán ser conformados por un máximo de 5 integrantes. Queda *prohibido* el cambio de grupo luego de ser conformados. Para cada sesión los estudiantes deben tener a disposición materiales para poder trabajar (calculadora, marcadores regla)

2) Los grupos deben tener un nombre que los pueda distinguir durante el desarrollo y la exposición de los trabajos. El nombre debe ser corto y puede ser alusivo a la matemática o algún tema científico. Queda prohibido que se usen nombres que sean ofensivos o tengan alguna connotación negativa.

Nombre del grupo: ….…………………………………………

3) Cada miembro de grupo debe tener un rol y número asignado, bajo el cual deberá realizar cada uno de los trabajos. En cada papelógrafo deben aparecer los nombres colocados con el número y designación correspondiente. Esto tiene una valoración en la calificación final de cada trabajo de modelación:

1) Coordinador:	
2) secretario:	
3) Desarrollador de cálculos:	
4) Cronometrador:	
5) Evaluador:	

4) En cuanto a la manera de llevar a cabo el trabajo, se consideran tres momentos:

Acción y Formulación (60 min): Donde los estudiantes desarrollan el trabajo de modelación. En esta instancia cada grupo debe mantener el orden y trabajar en la solución teniendo 60 minutos de plazo. La resolución se la hace dentro del grupo, no se puede compartir información con otro grupo, siendo sujeto a disminución de puntos el grupo cuyos integrantes incurran en dicha falta. En este espacio los estudiantes pueden preguntar al docente dudas puntuales. El docente las responderá y direccionará el trabajo, pero **no dará respuestas o corregirá el desarrollo de los ejercicios.**

Validación (40 min): En este espacio cada grupo expone una parte de su trabajo realizado. La manera en la que se lleva a cabo la exposición es a partir de un sorteo llevado a cabo con el dado. Si no se encontrase uno de los estudiantes se volverá a realizar un sorteo para ese grupo. El estudiante está en la obligación de conocer lo realizado por su grupo y su nota será la que el grupo obtenga. Uno de los puntos que se tomará en cuenta para esta etapa son las preguntas que el docente haga hacia los grupos, así como las preguntas planteadas por otros grupos.

Institucionalización (10 min): El docente mostrará en un corto tiempo la resolución y las conclusiones sobre la modelación planteada. Del mismo modo el docente entregará una copia a los coordinadores sobre estas conclusiones. Este material servirá de apoyo para luego realizar la corrección de la actividad de modelación que debe ser hecha en el cuaderno.

5) En cuanto a la calificación:

Para establecer la nota de cada una de los trabajos de modelación, se tomará en cuenta tres aspectos:

Trabajo escrito en el papelógrafo:	10 p (Se califica el número de dificultades)
Exposición del grupo:	10 p (Se analiza la respuesta del expositor y aporte del grupo)
Desenvolvimiento actitudinal:	10 p (Se califica a partir de una rúbrica de evaluación)

Para la nota final, simplemente se promedian las notas al dividir para tres

6) En cuanto al ganador de cada etapa:

El grupo que obtenga mayor cantidad de puntos por su participación de la modelación será declarado ganador. El docente premiará la participación del grupo ganador con puntos para los trabajos de modelación efectuados y el examen. Adicionalmente hará llegar un reconocimiento por la labor del grupo y si hay un desenvolvimiento correcto reconocerá la labor del curso.

FIRMA DEL DOCENTE **FIRMA DE LOS ESTUDIANTES**

Anexo E. Matrices de observación de las situaciones didácticas realizadas en clase.

Matriz de Observación: Planes Tarifarios.

Estrategia	¿Quién propone? ¿Cómo?	Secuencia de participación
Tabla	. Remigianos empleó una tabla que incrementó los minutos en un intervalo de 10. Así dieron con el patrón de aumento - Los Einstein usaron una tabla colocando valores cada vez más grandes (10, 20, 40) hasta dar con el valor correcto de 100 minutos para el corte de los planes telefónicos - Los Tesla elaboraron una tabla con incremento de 1 y luego 20.	2 3 1
Gráfica	Los Divisores usaron una calculadora para elaborar una tabla y a partir de ella graficar las rectas de las funciones	4
Ecuación	El equipo los calculadores comenzó elaborando una ecuación y la utilizó para crear una tabla de valores con incremento de 10.	5

Integrantes:

Los Tesla: Rosa, Silvia, Joel, Marilyn, Luis

Los Einstein: Luzmila, Anabel, Saul, Darío

Remigianos: Alejandra, Nelly, Fernando, Wendy

Los Calculadores: Nicolás, Andrea, David, Cynthia

Los Divisores: Guido, Yessenia, Alan, Lenin, Maricela

Matriz de Observación: Construcción de una caja

Estrategia	¿Quién propone? ¿Cómo?	Secuencia de participación
Ecuación	El grupo Remigianos realizó una tabla para calcular el área y el volumen en función de los valores de x. Obtuvieron un patrón numérico y a partir del patrón obtuvieron la ecuación de Volumen. Finalmente graficaron la curva de la ecuación. y determinaron el mayor volumen.	2
Gráfica	El grupo Los Tesla graficaron directamente los pares ordenados y obtuvieron la curva al usar los intervalos de la tabla. Sin embargo, no pudieron medir con precisión el máximo volumen que se obtenía.	1

Integrantes:

Los Tesla: Rosa, Silvia, Joel, Marilyn, Luis

Los Einstein: Luzmila, Anabel, Saul, Darío

Remigianos: Alejandra, Nelly, Fernando, Wendy

Los Calculadores: Nicolás, Andrea, David, Cynthia

Los Divisores: Guido, Yessenia, Alan, Lenin, Maricela

Anexo F. Registro fotográfico de la implementación de la propuesta de Situaciones Didácticas en la Unidad Educativa Remigio Crespo Toral.

Elaboración de la ficha de trabajo Crecimiento de una Población

Desarrollo de la actividad : Construcción de una caja

Uso de GeoGebra para la comprobación de modelos obtenidos