UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física

“GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS”

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física

Autores:

Ricardo Tomás Aucapiña Quintuña

CI: 0104461801

Correo electrónico: ricardo.1989.5@hotmail.com

Tannya Maribel Sacta Buri

CI: 0302406590

Correo electrónico: tannya_sacta@hotmail.com

Tutora:

Mst. Sonia Janneth Guzñay Padilla

CI: 0102140415

Cuenca, Ecuador

03-febrero-2020

RESUMEN:

El presente trabajo está encaminado a la construcción de una guía acompañada de recursos didácticos para mejorar la enseñanza de los contenidos matemáticos de la integración múltiple en áreas y volúmenes. Estudios demuestran que el Cálculo Multivariable es importante en aplicaciones prácticas, no obstante, afirman que los contenidos son complejos por naturaleza, aludiendo que uno de los problemas para los estudiantes es su interpretación gráfica, debido a que la construcción de funciones en el espacio es laboriosa y el proyectar e identificar los tipos de regiones de integración no siempre es posible de visualizar mentalmente. El poco o nulo entrenamiento en lo que se refiere a visualización espacial se debe al déficit de tratamiento del mismo en las aulas. Por tal motivo es preciso realizar entes perceptibles que faciliten la comprensión de los contenidos dirigidos hacia los estudiantes, del mismo modo, permitan desarrollar habilidades viso-espaciales que mejoren la educación. Para esto, se recopiló información acerca de los problemas y obstáculos presentes, aplicando técnicas de investigación de campo. El estudio se realizó a los alumnos de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca quienes cursaron la asignatura de Funciones de Varias Variables en los ciclos ofertados desde el 2017 a 2019. Los resultados muestran los temas en donde presentan confusiones, así como las técnicas y métodos usados al abordar el tema por los docentes, entre otras. Por lo cual, se diseñó una guía que contiene ocho clases planificadas acerca de los conceptos y aplicaciones relacionadas al tema, bajo un enfoque constructivista con estrategias de enseñanza apoyadas con material concreto, cuyo objetivo es proporcionar alternativas al trabajo docente y a la vez, despertar el interés hacia la asignatura y motivar a los estudiantes a seguir sus estudios de modo que alcancen sus metas con aprendizajes significativos.

Palabras claves: Funciones de Varias Variables. Aprendizaje Significativo. Material concreto. Enseñanza-aprendizaje. Enfoque constructivista.

ABSTRACT:

The present degree work is routed to the construction of a guide with learning resources in order to develop the teaching of the mathematical contents of the multiple integration in Areas and Volumes. Studies prove that the Multivariable Calculus is important in practical applications. However, they assert that the contents are complex for nature and allude that a trouble for the students is its graphic interpretation because of the functions construction in the space is laborious, to project and to identify the types of regions of integration not always is possible of visualize mentally. The little or the null training what concerns to spatial visualization is due to the lack of its treatment in the classrooms. For this reason is beautiful to perform perceptible entities that ease the comprehension of the contents directed to the students, in the same way, to allow to develop spacial abilities that get better the education. For this, it was collected information about the problems and the actual obstacles applying field investigation techniques. The study was performed to the students of the Pedagogía de las Ciencias Experimentales career of the University of Cuenca who studied the subject of Funciones de Varias Variables from 2017 to 2019. The results show the topics where turmoil occurs, as well as the techniques and methods used to approach the topic by the teacher, among others. Whereby it was designed a guide that contains eight lesson plans about the concepts and applications related to the topic. It was developed under the Constructivist Approach with teaching strategies supported by concrete material. The objective is to provide teaching work alternatives and awake the students interest toward the subject and to motivate them to get their goals with a Significative Learning.

Keywords: Funciones de Varias Variables. Significative Learning. Concrete material. Teaching-learning. Constructivist Approach.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Cláusula de Propiedad Intelectual

Ricardo Tomás Aucapiña Quintuña, autor del trabajo de "GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 3 de febrero de 2020

Ricardo Tomás Aucapiña Quintuña

C.I: 0104461801

Cláusula de Propiedad Intelectual

Tannya Maribel Sacta Buri, autora del trabajo de "GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 3 de febrero de 2020

Tannya Maribel Sacta Buri

C.I: 0302406590

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Ricardo Tomás Aucapiña Quintuña en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 3 de febrero de 2020

Ricardo Tomás Aucapiña Quintuña

C.I: 0104461801

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Tannya Maribel Sacta Buri en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 3 de febrero de 2020

Tannya Maribel Sacta Buri

C.I: 0302406590

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios quien, en su infinita bondad nos han dado sabiduría y salud para avanzar y progresar en el ámbito académico, asimismo por la fuerza constante que nos brindó cuando más lo necesitamos y por las bendiciones recibidas.

A nuestros padres, gracias a su amor, comprensión, confianza y apoyo incondicional que nos entregan día a día han hecho posible cumplir nuestros objetivos.

De manera especial a la tutora de nuestro trabajo la Mst. Sonia Guzñay quien con sus enseñanzas nos ha motivado e inspirado a trabajar con vocación llevando siempre presente la ética y el compromiso responsable en las actividades docentes y personales. A la Mst. Eulalia Calle por su colaboración en la realización de este proyecto.

Así también, queremos agradecer a la Universidad de Cuenca, sus directivos y docentes, quienes nos abrieron las puertas en este sendero académico, para educarnos en una carrera tan afable, como es educar.

Finalmente queremos agradecer a las personas, quienes que de alguna manera hacen posible que este trabajo resulte favorecedor, por medio de la búsqueda y adquisición de información a través de la misma.

Ricardo-Tannya

DEDICATORIA

La presente tesis, se la dedico a mi abuela María Alegría, quien ha sido mi inspiración de lucha, y perseverancia, por sus gratos consejos que de alguna manera me permitió llegar a donde estoy. A sido ella quien, con su carisma y simpatía, ayudaba que el proceso en el cual me embarcaba resultara ser menos doloroso. Hoy que no se encuentra a mi lado, quiero hacer constar que, sin su apoyo moral, no estuviese donde me encuentro hoy en día.

De igual manera se la dedico a mis padres Ángel y Leticia, quienes, en su afán de verme superar, me brindaron su apoyo moral e incondicional, depositando en mí toda su confianza. Así como el de inculcarme buenos valores que me hace ser la persona quien soy hoy en día.

Asimismo, dedico este trabajo a mis hermanas Martha y Ruth, quienes han sido un apoyo para continuar dando frutos, sus palabras de aliento resultaban ser lo que me daba fuerza para seguir avanzando.

Tannya Sacta.

A mis padres Héctor y Mirian quienes fueron las personas que me brindaron su confianza desde siempre y más aún en el momento en que supieron mi deseo de realizar los estudios universitarios, al escribir estas palabras vienen a mi memoria sus consejos y su paciencia al corregirme y enseñarme, con su amor y compromiso sincero ellos han estado a mi lado enfrentando las adversidades y demostrándome que con la ayuda de Dios se pueden lograr los sueños.

A mi hermana Mirian Adriana y mi sobrino Julito quienes, han aportado y compartido sus conocimientos, opiniones y puntos de vista para terminar con éxito este trabajo.
Familia, con sus palabras de aliento han sabido darme ánimos y hacer de mí una mejor persona, les quiero mucho.

Agradezco al Instituto de Fomento al Talento Humano por otorgarme una beca y confiar en mí.

Ricardo Aucapiña.

INTRODUCCIÓN

En las carreras de docencia de la Universidad de Cuenca especialmente en la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, hoy en día se buscan nuevos métodos de enseñanza y aprendizaje que brinden mejores resultados y a su vez faciliten el desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes, fomentando la innovación e implementación de actividades pedagógicas modernas, haciendo de esto un reto continuo por lo cual docentes y futuros docentes, deben considerarlo y dar a conocer sus experiencias y críticas para proponer ideas nuevas. En la asignatura de Funciones de Varias Variables los temas son importantes y a la vez complejos debido a los amplios contenidos matemáticos. En la Integración Múltiple esto se evidencia al momento de contextualizar, representar, comunicar algunos conceptos, generalmente en el estudio de área y volumen de sólidos. El presente trabajo tiene como objetivo brindar nuevas herramientas para mejorar y facilitar la enseñanza y el aprendizaje de los temas de la Integración Múltiple, dado que se pudo detectar confusión en los conceptos, algoritmos y representaciones de sólidos. La propuesta consta de tres capítulos:

En el capítulo I, se detallan las posibles dificultades, problemas y obstáculos presentes en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo; se da una descripción sobre la enseñanza y aprendizaje en las instituciones educativas; se citan los conceptos sobre el constructivismo y el aprendizaje significativo que cimentarán la estructura de la guía didáctica y la utilidad de los recursos educativos.

En el capítulo II, se desarrollan instrumentos para obtener información fiable acerca del problema o situación planteada, la metodología usada es de carácter cuantitativo porque muestra indicadores tales como el rendimiento académico, dificultades presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integración múltiple; y de carácter cualitativo, debido a que muestra temáticas confusas, herramientas didácticas utilizadas y errores comunes que cometen los estudiantes en la resolución de ejercicios. Posteriormente se analizan los resultados obtenidos en la encuesta y la prueba, aplicadas a una población de sesenta y nueve estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca.

En el capítulo III, en base a la interpretación de los resultados obtenidos en la metodología, se desarrolla la guía didáctica la cual consiste en ocho clases, basadas en tres metodologías tales como: aula invertida en la que el estudiante realiza actividades en casa para luego trabajar en el aula con el acompañamiento docente, desarrollar actividades individuales o grupales y finalmente validar sus conocimientos mediante una evaluación; situación didáctica la cual consta de cuatro procesos: en el primero el estudiante mediante preguntas problema desarrolla actividades de manera individual para luego llegar a una posible solución (acción), en el segundo socializa los puntos de vista (formulación), en el tercero justifica y argumenta las ideas formuladas (validación) y en el cuarto el docente unifica los aportes de los estudiantes y generaliza los conceptos (institucionalización); la secuencia didáctica consta de tres momentos: en el primero los estudiantes realizan actividades de manera individual en clase (anticipación), en el segundo se realizan actividades con acompañamiento docente para brindar a los estudiantes nuevos procedimientos para la resolución de ejercicios (construcción), en el tercero realiza actividades en la que demuestra las competencias adquiridas (consolidación) y finalmente el estudiante desarrolla una evaluación. De la misma manera, se diseñan y elaboran recursos educativos conforme a cada una de las clases, con el fin de que los estudiantes puedan manipular y sobre todo visualizar imágenes que casi siempre no es posible construir en la imaginación.

CAPÍTULO I. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.

PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO UN ACERCAMIENTO A LA REALIDAD.

1.1 ANÁLISIS DE LA VISUALIZACIÓN DE SÓLIDOS EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO.

Para el estudio del Cálculo es importante que los alumnos posean en su estructura cognitiva fundamentos o bases geométricas además de una noción de la visualización espacial, debido a que ambos están estrechamente relacionados desde el pre-cálculo. Sin embargo, en este aprendizaje los estudiantes han tenido un acercamiento intuitivo sin reflexionar sobre su verdadera importancia. Por esta razón se generan obstáculos de comprensión en el contexto, por ejemplo: los fenómenos presentes en el mundo no pueden ser validados sin la utilidad de modelos matemáticos entendidos. Además, el aspecto algebraico predominante en la enseñanza de las matemáticas ha dejado de lado otras alternativas que podrían alcanzar mejores resultados de simplicidad y sentido, tal es el caso de las representaciones gráficas. Arrieta (2003) afirma:

> (…) los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial sí han tenido durante años un déficit de tratamiento, ya que, en los años de implantación de la Enseñanza General Básica, prácticamente desapareció de los planes de estudio en las décadas de los sesenta y setenta, debido al impulso de la llamada “Matemática moderna”, a su formalismo y a la algebrización de la geometría. (p.59)

Por ello, los alumnos no consolidan profundamente los contenidos sin antes haber desarrollado habilidades visuales. La visualización es importante dentro del contexto matemático dado que tanto el análisis algebraico como la interpretación gráfica se complementan, logrando una correcta comprensión en los conceptos del Cálculo, pero ésta no es utilizada frecuentemente puesto que los procedimientos no se pueden generalizar; la construcción de gráficas de Funciones de Varias Variables en el espacio es laboriosa, no siempre es posible de visualizar mentalmente y por ende bosquejar debido al poco o nulo entrenamiento en lo que se refiere a destrezas de representación de gráficas. Arrieta (2003) afirma: “La aptitud espacial es la que menos relación tiene con todas y cada una de las áreas del currículum” (p.60). También

Herskowitz, Parzysz y Van Dormolen (citados por Arrieta, 2003) destacan el déficit instruccional y señalan que la educación visual se descuida a menudo en el currículum. Así mismo, Roth y Bowen (citados por García, 2005) recalcan que los estudiantes tienen dificultades al interpretar las representaciones gráficas porque se hace poco uso de ellas en las aulas, que al construir e interpretar gráficas no constituye un aspecto importante de la instrucción, siendo más bien una temática de carácter marginal. Se puede afirmar entonces, que no existe un amplio desarrollo de habilidades visuales concernientes a la resolución de problemas de Cálculo, aquello se evidencia en las diferentes percepciones de cada individuo al momento de imaginarse y proyectar un esquema en tres dimensiones y más aún si se trata de intersecciones entre sólidos.

Cabe recalcar que es muy importante que, tanto docentes como estudiantes tengan la capacidad de representar conceptos matemáticos y a su vez interpretar las representaciones que guardan en ellas fundamentos importantes. García (citado por Arias, Leal & Organista, 2011) distingue en particular las representaciones gráficas, ya que son como una forma de comunicación científica y una herramienta para el trabajo didáctico. Finalmente, la graficación es un medio por el cual se logra describir, argumentar y verificar lo explicado conceptualmente.

Dentro de la visualización espacial según (Duval 1999) existen dos tipos de representaciones gráficas la representación interna y externa, la primera hace alusión a los objetos que son construidos mentalmente y que difícilmente pueden ser compartidos hacia otros individuos y la segunda trata acerca de los objetos manipulables o aquellos que están ligados a la percepción del ser humano. Las funciones de varias variables requieren de ambos tipos de representaciones. Sin embargo, no todos los estudiantes están en la capacidad de construir representaciones gráficas mentalmente, debido a que, como se mencionó anteriormente en el transcurso educativo existe un déficit de desarrollo visual en cuanto al estudio de sólidos. Por esta razón, es preciso realizar entes perceptibles que faciliten el entendimiento y descripción por parte de los individuos.

1.2 MIRADA HACIA LAS DIFICULTADES PRESENTES EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE.

Investigadores como Hitt (2003), Souza (2009), Álvarez (citado por Mogollón, 2010) han expuesto en sus críticas diversas dificultades presentes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje que afectan el rendimiento académico y, por consiguiente, provocan el fracaso escolar; en la siguiente tabla se presenta un resumen de las consecuencias que provocarían cada uno de estos problemas.

Tabla 1: Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje.

DIFICULTADES	CONSECUENCIAS
Bibliografía no adecuada.	En procedimientos didácticos y contenidos de aprendizaje, los libros que son adoptados por los docentes son aquellos ejemplares que, a pesar de tener buena fundamentación teórica, no logran consolidar la información adquirida a través de ejercicios, debido a la procedencia de los textos, que tienen ejercicios no contextualizados.
Contenidos.	Extensos y poco entendibles por su léxico y algoritmos, además son monótonos.
Escasos recursos educativos existentes en las aulas.	Provocan desfase entre lo teórico y lo práctico debido a que no son suficientes y adecuados para profundizar los conceptos matemáticos.
Falta de conocimientos previos en matemáticas.	Inducen desarticulación entre los conocimientos adquiridos y los nuevos, es decir, el proceso cognitivo no puede partir de la nada o del vacío, si no de los conocimientos ya adquiridos por el alumno. Hitt (2003) al no poseer bases sólidas del “pre-cálculo” al estudiante se le dificulta el entendimiento de los procesos de integración múltiple y sus aplicaciones. El docente debe consolidar los contenidos utilizando diferentes estrategias para lograr que los

	estudiantes comprendan de mejor manera.
Poco uso de la tecnología.	Las TIC'S son catalogadas como una de las herramientas más imprescindibles dentro de la enseñanza y aprendizaje especialmente en las matemáticas. Sin embargo, el mal manejo de estas o el poco conocimiento de su uso genera en el estudiante un aprendizaje reducido.
Temor por las matemáticas.	Por milenios la sociedad, la ha considerado como algo abstracto, difícil, que "no todos logran entenderla", etc. Estas críticas afectan a los estudiantes quienes muestran fobia y miedo, causando bajo rendimiento o fracaso académico. Además, es importante que el docente mantenga una actitud positiva, paciente, serena y no demuestre a sus alumnos que las matemáticas son complejas. Álvarez (citado por Mogollón, 2010) menciona que generalmente los miedos y la aversión a ciertos escenarios u objetos surgen, no porque se ha tenido una experiencia directa con el objeto o situación, sino que se han adquirido por leyendas, creencias, folclore cultural o experiencias negativas. Es por ello que, tanto la sociedad como los docentes deben descartar esas creencias, mitos y prejuicios sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Mencionar o estudiar estas dificultades sirve de reflexión sobre cómo se está enseñando en el ámbito educativo, las tareas que habría que desarrollarse para mejorar la motivación, el interés, y el rendimiento académico, con el fin de lograr el éxito de los estudiantes.

1.3 OBSTÁCULOS PROPUESTOS POR BROUSSEAU DIRIGIDAS HACIA LA EDUCACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

En la enseñanza del Cálculo de Funciones de Varias Variables para que el alumno adquiera nuevos conocimientos debe poseer saberes previos acerca del pre-cálculo. Pero, estos a su vez representan obstáculos porque en ocasiones la información adquirida en la estructura cognoscitiva del alumno posee limitaciones en otras ramas de las matemáticas en general y en particular del cálculo, dicho de otra manera, el conocimiento funcional en un contexto es disfuncional dentro de otro más amplio.

Brousseau (citado por Barrantes, 2006) conceptualiza obstáculo epistemológico acercándose a las causas que conducen a errores, al afirmar que: “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado”. Según la definición se puede comprender por obstáculos epistemológico a los conocimientos que son adquiridos por experiencia o de manera didáctica qué son útiles, pero sus aplicabilidades no tienen validez total en contextos diferentes evidenciándose en normas o procedimientos de la comunidad matemática.

Brousseau (1983) destaca varios obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que se considera pertinente enunciar:

- **Problemas Ontogenéticos:** relacionado con las limitaciones del estudiante, es decir; falta de motivación, de atención, de comprensión e interpretación de los temas, problemas personales.

- **Problemas Didácticos:** son obstáculos que aparecen al momento de enseñar, ya sea por: el tiempo limitado para desarrollar los contenidos, explicaciones poco claras, ritmo acelerado en el dictado de las clases, material didáctico inadecuado, conocimientos previos insuficientes de los estudiantes, falta de comprensión, interpretación y atención de los estudiantes.

- **Problemas Epistemológicos:** son obstáculos que ciertos conceptos tienen para ser aprendidos, es propio del concepto.

Los aspectos antes mencionados permiten despejar dudas acerca de lo que sucede dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y por ende del Cálculo. También hacen posible obtener pautas para enfrentarse a situaciones en las cuales intervengan contenidos de igual complejidad, además dar puntos de vista sobre una clase magistral y, por último, se puede decir que representa un reto para el perfil profesional de los docentes de Matemáticas.

1.4 ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO.

Hace décadas la educación superior no era considera necesaria y sobre todo el método de enseñanza era de manera mecanicista en la que los estudiantes repetían todo cuanto decía el docente, eran como "grabadoras reproductoras de conocimiento". Sin embargo, con el paso de los años se han propuesto nuevos métodos de enseñanza, con el fin de que lo aprendido por los estudiantes sea aplicado y a su vez tenga significatividad dentro del contexto. Pero pese a las investigaciones realizadas, todavía existen establecimientos educativos donde predomina la enseñanza conductista, por esta razón es importante mencionar puntos relevantes referentes a la realidad institucional centrados específicamente en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, con el fin de buscar un método de enseñanza adecuado en el que se coloque al estudiante como eje central y a su vez el aprendizaje adquirido como algo significativo para su vida.

Enseñanza del Cálculo.

Se entiende por enseñanza la intervención de tres factores importantes: el profesor, el alumno y el saber matemático (conocimiento). Es decir, es un proceso en la que el docente desarrolla, construye o hace adquirir a los alumnos conocimientos que ellos no poseen, (Cousinet, 1962). Por lo tanto, ésta ha de ser más razonada que la impartida tradicionalmente.

Sin embargo, en los conceptos del Cálculo de Áreas y Volumen de sólidos los docentes se han limitado a una enseñanza mecánica repetitiva en la que se desarrolla o maneja un procedimiento algebraico o simbólico, provocando que los estudiantes presenten dificultades al momento de aplicar esta técnica en la resolución de otros ejercicios. A consecuencia de esto se obtiene alumnos receptores de procedimientos y no sujetos activos en la creación de conocimiento.

La manera de resolver problemas va más allá de la utilización de un método algebraico, pues se considera importante la resolución de ejercicios a través de representaciones gráficas, pero para ello el estudiante debe poseer una capacidad de abstracción.
En este sentido Hitt (2003) afirma: "Si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo" (p.1). Es preciso, entonces desarrollar en él habilidades visuales antes y durante en la enseñanza del Cálculo, por ello, es imprescindible que los maestros utilicen recursos educativos ya que éstos proporcionan ideas que pueden servir de motivación e interés al alumno.

Desde la perspectiva de (Quezada, 2004 y Duarte, 2006) investigadores en el área de la integración múltiple se rescata lo siguiente:

Los procedimientos de visualización en la Integración Múltiple son implementados como alternativa didáctica para la asimilación de cantidades infinitesimales, las cuales han sido causa de confusión por su complejidad. De aquí que, la enseñanza del Cálculo, resulta poco comprensible para los estudiantes, debido a que al analizar textos usados para la enseñanza se puede observar que las cantidades infinitesimales siguen siendo utilizadas, mientras que, en otros textos los infinitesimales como cantidades fijas no son utilizados o siquiera mencionados, además, en el siglo XIX se aludía a las cualidades didácticas indicando la importancia de la visualización (recurso de las figuras) como elemento facilitador del aprendizaje del Cálculo. En contraparte, en el siglo XX se indicaba que, para un buen aprendizaje de las Matemáticas se debería prescindir de las figuras. Actualmente resulta raro encontrarse con profesores de Matemáticas que nieguen que la visualización sea un excelente recurso en la enseñanza (Quezada, 2004). De esta manera las representaciones de los conceptos de Integración Múltiple mediante el uso de figuras son esenciales para mejorar la comprensión.

Las matemáticas como parte de su aprendizaje permiten desarrollar la abstracción ante los fenómenos de la naturaleza ya que los objetos se pueden distinguir mediante estructuras geométricas. Por esta razón, en la enseñanza de las matemáticas el docente enfoca su explicación en aspectos numéricos, simbólicos, leyes y propiedades algebraicas, etc. y a la par selecciona, construye y utiliza un modelo gráfico de los conceptos teóricos. Pero se ha podido comprobar mediante diversos estudios que los alumnos que habían aprobado cursos de Cálculo en los que se enfatizó la manipulación de fórmulas, no reconocieron los conceptos estudiados cuando se los presentaron a partir de gráficas y de problemas prácticos relacionados con su entorno. De esta manera, el entendimiento que logre el alumno que cursa cálculo en sus estudios profesionales tiene estrecha relación con una representación visual que involucre la asociación de conceptos y la participación del estudiante para identificarlos y posteriormente integrarlos en la aplicación de ejercicios (Duarte, 2006). Para resumir, es importante que el docente no solo se base en exponer teóricamente los contenidos de la Integración Múltiple, sino que debe usar herramientas (recursos educativos) en las que se apoye y por consiguiente facilite el aprendizaje.

Aprendizaje del Cálculo.

Se considera al aprendizaje como el proceso en el cual los estudiantes adquieren habilidades, destrezas, conocimientos con respecto a lo que se está enseñando ya sea a través de la resolución de ejercicios, del estudio o la experiencia misma.

Osuna, Pérez & Gutiérrez (2003) afirma: “El proceso de adquirir cambios relativamente permanentes en el entendimiento, actitud, conocimiento, información, capacidad y habilidad por medio de la experiencia” (p.1). Es así que, para que se dé un aprendizaje eficaz los estudiantes deben estar motivados, es aquí donde el docente juega el papel más importante el de buscar métodos de enseñanza como es la aplicación de material educativo para despertar en ellos el interés por aprender, sin embargo, a pesar del esfuerzo que hace el maestro existen estudiantes que no hacen nada por aprender, según una crítica que hace Brousseau (citado por Barrantes, 2006) el estudiante está ausente en todo el proceso. Éste solamente está esperando a que se le enseñe, que el profesor haga evidente todos los conceptos, las definiciones, los algoritmos para resolver problemas etc. Por lo tanto, es importante que estos dos elementos (estudiantes y docentes) trabajen, construyan juntos el conocimiento, para lograr los aprendizajes deseados.

1.5 CONSTRUCTIVISMO UN CAMINO HACIA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

Durante décadas se han buscado formas de mejorar la educación con el fin de cambiar las clases magistrales por otras opciones modernas, por esto se han desarrollados diversos enfoques que posicionan al estudiante como actor principal de la educación, tal es el caso de la teoría de Jean Piaget, psicólogo educativo, quien inicia con una perspectiva diferente basada en etapas de aprendizaje desde el nacimiento hasta la vida adulta. Él pretendía que el alumno se convierta en el constructor de su propio aprendizaje.

El constructivismo es un enfoque en el que posiciona al sujeto no como un mero receptor o reproductor de información cognoscitiva, sino como el constructor de su propio conocimiento, por consiguiente, se puede deducir, para que se de esta construcción el individuo debe poseer saberes previos.

García (2006) menciona dos pilares fundamentales de la teoría del desarrollo cognoscitivo de Jean Piaget.

- **Asimilación:** Proceso mediante el cual la persona asimila la información nueva, dentro de los esquemas que ya posee.
- **Acomodación:** consiste en reestructurar los esquemas mentales que ya posee el individuo, para así "acomodar" la información nueva. En ésta, la persona se ve forzada a romper sus esquemas existentes, para poder darle cabida a los nuevos conocimientos.

La asimilación y acomodación según Piaget mantienen un equilibrio dentro del proceso de aprendizaje, estos se establecen mediante tres niveles sucesivos y más complejos.

- Equilibrio relacionado entre la estructura cognitiva y el medio en el que se desenvuelve.
- Equilibrio entre los propios conocimientos que posee en la estructura mental.
- Incorporación jerárquica de operaciones mentales.

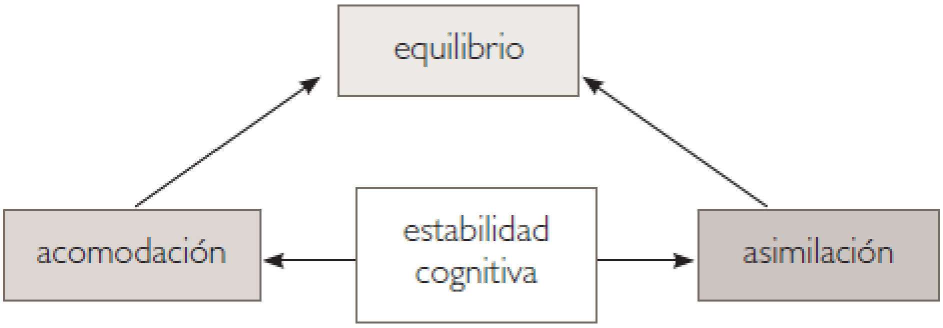


Figura 1. Proceso de equilibrio cognitivo. Jean Piaget. Recuperado de: https://www.uenma.edu.ec/recursos/Santillana%20Archivos/PLANIFICACION%20Y%20CICLO%20DE%20APRENDIZAJE.pdf

En conclusión, el aprendizaje debe ser construido por el sujeto a través de la experiencia, la manipulación de objetos, de los conocimientos que ya posee, entre otros, por lo que los docentes deberían facilitar material para que los estudiantes observen, analicen y saquen sus propias conclusiones.

1.6 ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

En la educación se dieron grandes cambios gracias a las aportaciones de Piaget y Ausubel quienes dejaron de lado una enseñanza mecanicista y conductista para enfocarse en una teoría en la cual tiene al estudiante y a sus logros como principales objetivos, es así que el enfoque significativo ha avanzado mediante la fusión de comportamientos, prácticas, emociones y conductas, pues para Ausubel; el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el individuo posee en su estructura cognitiva; concibe al estudiante como un procesador activo de la información y expresa que el aprendizaje es sistemático y organizado Díaz (citado por Perossa & Marinaro, 2014).

Este modelo significativo parte de una teoría constructivista, ya que es el propio individuo el que genera y construye su aprendizaje, relaciona conocimientos nuevos con la estructura cognitiva de la persona que aprende esto mediante una interacción con las denominadas “ideas de anclaje” que tiene el alumno. Así según Moreira la presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo (Moreira, 2005).

Dado que este enfoque desarrollado por Ausubel abarca la comprensión del aprendizaje verbal y simbólico, él destaca varios elementos o factores que influyen al momento de lograr esta significatividad.

Elementos que intervienen en el aprendizaje significativo.

Para que se logre un aprendizaje realmente significativo el docente, el estudiante y saber (conocimiento) deben encaminarse hacia un mismo objetivo, por ello, debe existir una correcta interacción y sobre todo deben estar motivados.

- **Docente:** Persona encargada de orientar, guiar a los estudiantes hacia una mejor comprensión, es competente en una determinada área de conocimiento y se presenta como modelo de superación.

- **Estudiante:** Individuo que busca capacitarse o adquirir conocimientos para beneficio común y esto se puede dar en el ámbito educativo en un establecimiento formal o informal.

- **El Saber:** son contenidos, competencias, áreas o asignaturas que son objeto de estudio.

1.6.1 TIPOS DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

Existen tres tipos de aprendizaje significativo que se enlistan a continuación

- **Aprendizaje Representacional:** en él se asignan significados a determinados símbolos o palabras, consiste en identificar los símbolos con sus referentes objetos, eventos o conceptos.

- **Aprendizaje de Conceptos:** en el que también se representan símbolos por objetos y se usa para representar abstracciones esenciales de los contenidos.

- **Aprendizaje Proposicional**: con el que se pretende aprender lo que significan las ideas expresadas en una proposición, convirtiéndolas en conceptos sólidos que formen parte del entorno y de la vida cotidiana.

1.6.2 DIFERENCIA ENTRE AL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO Y EL APRENDIZAJE TRADICIONAL.

Tabla 2: Aprendizaje Significativo vs Aprendizaje Tradicional.

Aprendizaje Tradicional	**Aprendizaje Significativo**
Comunicación vertical.	Comunicación horizontal.
Memorístico.	Reflexivo.
Eje central el profesor.	Eje central el estudiante.
Se basa solo en un proceso.	Busca diferentes procesos de enseñanza-aprendizaje.
Descontextualizada.	Relacionadas con el contexto.
Estático.	Interactivo con lo social y afectivo.
Deja de lado el interés del estudiante.	Importancia a la motivación.

1.6.3 PIRAMIDE DE PRINCIPIOS PEDAGÓGICOS.

Ésta investigación centra sus ideas a manera de pirámide para establecer una prioridad de posicionamiento en el aprendizaje significativo, pero sin dejar de lado los principios antes mencionados. En el siguiente diagrama se detalla los elementos de dicha pirámide.

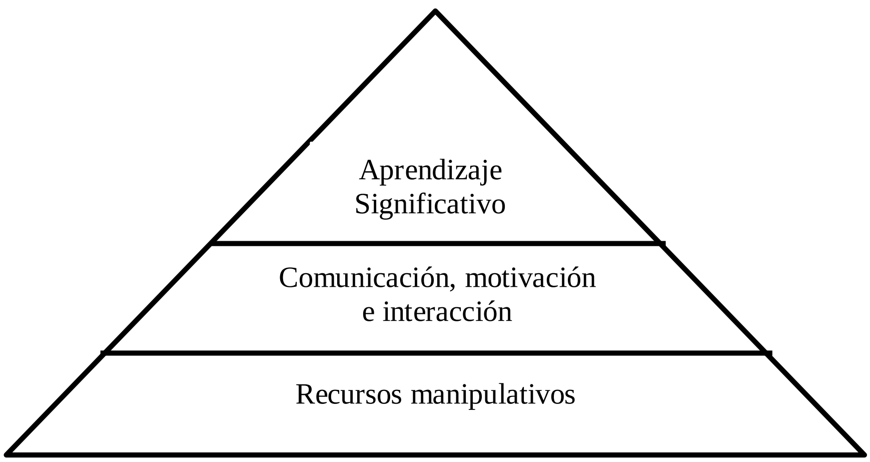


Figura 2. Principios pedagógicos.
Fuente: Autores.

En la base de esta pirámide se encuentran los recursos manipulativos que benefician a los estudiantes en su aprendizaje. En el centro están ubicadas la comunicación, motivación e interacción, por las cuales se adquiere los conocimientos en el proceso de enseñanza y aprendizaje y finalmente en la cúspide se encuentra el aprendizaje significativo con el propósito de desarrollar eficazmente un pensamiento crítico y saber usarlo cuando sea preciso. Para lograr cumplir con la pirámide antes mencionada, es importante que los maestros antes de empezar con sus actividades de enseñanza deben estar conscientes de cómo impartir sus clases, es decir, ¿Qué enseñar? ¿Cómo enseñar? y ¿Con qué enseñar? Los recursos juegan un papel importante dentro de la planificación de esta labor, debido a que son herramientas que brindan a los estudiantes mejor entendimiento y al mismo tiempo despierta el interés por aprender. Desde el punto de vista de los autores tales como: Baéz. M y Hernández. S, (2002) quienes corroboran la importancia de estos objetos didácticos, se plantea la utilización de recursos tangibles, visuales, simbólicos, etc. afirmando que el aporte de material manipulable fomenta la comunicación, el diálogo, pues deja abierta la imaginación, intuición y el uso de razonamiento. Finalmente, para que el aprendizaje sea eficaz, es importante evaluar las capacidades de los estudiantes antes de dar inicio al proceso de enseñanza, para lo cual el docente debe partir desde esos conocimientos con fin de abordar nuevas temáticas, a esto se le define como aprendizaje significativo.

1.6.4 EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DESDE UN ENFOQUE AUSUBELIANO.

Desde el punto de vista de Ausubel es importante que la educación no deba estar centrada en cumplir los contenidos del currículo, sino que, ésta se preocupe de que el alumno aprenda a aprender. El aprendizaje significativo beneficia un cambio de actitud en el docente ya que se siente satisfecho por los resultados obtenidos en la práctica; en tanto que el estudiante, disfruta de lo que aprende, se siente motivado por trabajar y pone empeño en tareas que construye su conocimiento.

Como se ha dicho anteriormente este enfoque significativo aparece por un conflicto interno con lo que el alumno conoce y con la nueva información que se le presenta; es decir, es un aprendizaje personal que se facilita por la interacción de un guía (docente) o del contexto en general, pues por definición es social y cooperativo. También es de suma importancia una orientación que construya ese puente cognitivo entre las emociones, lo afectivo, intereses y la curiosidad con los nuevos contenidos, recursos y actividades realizadas en el aula para de esta manera lograr la predisposición, desarrollo del autoestima y el empeño en el trabajo de los estudiantes, además en el proceso de enseñanza y aprendizaje se debe realizar una correcta contextualización de manera que los alumnos trabajen en tareas auténticas acorde a su realidad que le empujen a resolver problemas con sentido.

Para facilitar el alcance de aprendizajes significativos se consideran básicamente las ideas de anclaje. David Ausubel (1918-2008) menciona que, los conocimientos previos son aquellos que se encuentran dentro del individuo y que permite darle significado a un nuevo saber que le es presentado o que es descubierto por él. Estas ideas pueden ser símbolos, proposiciones, conceptos, imágenes.

El estudiante debe demostrar actitud potencialmente significativa, es decir, tener en su estructura cognitiva ideas relevantes de conocimiento que hagan aplicables los contenidos de aprendizaje ya que no existen libros, ni problemas significativos, sino que lo valioso está en las personas, no en los materiales. Por esto debe existir en ellos una predisposición para aprender de manera eficaz, cabe recalcar que en este apartado no solamente hace referencia a la motivación o gusto por la materia sino más bien a relacionar (diferenciando e integrando) interactivamente los nuevos conocimientos a su estructura cognitiva previa, modificándola, enriqueciéndola, elaborándola y dándole importancia. Por otro lado, los recursos ya sean textos, clases, software, material concreto que sean presentados al estudiante deben ser novedosos, estar acorde a la situación y apropiado para cada circunstancia.

Finalmente, Ausubel manifiesta que el aprendizaje puede darse de dos maneras y no descarta ninguna de ellas pues su teoría acepta la combinación o la alternabilidad de un aprendizaje por recepción y por descubrimiento por parte del estudiante.

Aprendizaje por recepción.

En este aprendizaje el docente es quien busca diferentes maneras de instruir, de compartir sus conocimientos, habilidades, destrezas de forma dinámica, dicho de otra manera, los contenidos ya están organizados y estructurados listos para ser enseñados, en tanto que el estudiante se convierte en un receptor, además de que no hace el mínimo esfuerzo de buscar formas de aprender, a lo mucho logra tomar apuntes. Sin embargo, este aprendizaje puede ser significativo siempre y cuando el alumno sea independiente durante el proceso de enseñanza.

Aprendizaje por descubrimiento.

Debe partir de una enseñanza en la cual no se explique todo, sino que el alumno descubra por sí mismo los conocimientos nuevos de manera que pueda relacionarlos con su estructura cognitiva. El docente debe utilizar la curiosidad del alumno para que él pueda construir sus saberes.

Es por ello, que no se puede afirmar que la utilización de un modelo pedagógico sea favorable en el aprendizaje, de modo que es necesario considerar varias alternativas que incluyan a los recursos didácticos. Según Ballester (2005) afirma:

> Para potenciar el aprendizaje a largo plazo conviene usar los recursos didácticos de manera significativa, es decir, conectados e integrados dentro de la estructura de la unidad didáctica o bloque de trabajo. Por lo tanto, el recurso debe estar conectado con la estructura conceptual del tema trabajado, mediante un mapa conceptual adecuadamente construido, para potenciar el aprendizaje significativo. (p.2).

Por último, el aprendizaje y sus resultados cambiarían siempre y cuando el docente no se enfoque solamente en dictar clase, si no que proponga una enseñanza proactiva en la que los estudiantes tengan que usar su razonamiento y su creatividad de manera responsable.

1.7 GUÍA DIDÁCTICA Y SU IMPORTANCIA.

La guía es una herramienta pedagógica digital o impresa, utilizada tanto por los docentes como los estudiantes, de forma planificada y organizada, sirve de apoyo a la dinámica del proceso docente, guiando al alumno en su aprendizaje (García y de la Cruz Blanco, 2014). Actores como Aretio (2009) y Mediano (citado por Feijoo, 2004) definen:

> La Guía didáctica (…) documento que orienta el estudio, acercando a los procesos cognitivos del alumno el material didáctico, con el fin de que pueda trabajarlos de manera autónoma. En realidad, una Guía didáctica bien elaborada y al servicio del estudiante, debería ser un elemento motivador de primer orden para despertar el interés por la materia o asignatura correspondiente. Debe ser instrumento idóneo para guiar, facilitar el aprendizaje y ayudar a comprender, y en su caso, aplicar los diferentes conocimientos, así como para integrar todos los medios y recursos que se presentan al estudiante como apoyo para su aprendizaje. (p.2)

Otra definición aportada por Mediano (citado por Feijoo, 2004) constituye un instrumento fundamental para la organización del trabajo del alumno y su objetivo es ofrecer todas las orientaciones necesarias que le permitan integrar los elementos didácticos para el estudio de la asignatura.

Tomando en cuenta la opinión de estos autores se puede decir que, las guías didácticas elaboradas por los docentes no solo les permiten orientar, sino contribuir a la organización del trabajo del estudiante ya sea ésta grupal o individual, por ello sería importante tenerla presente en la enseñanza y aprendizaje de cualquier área de estudio, en este caso en los temas del Cálculo.

También, la guía didáctica expresa todo sobre la planificación docente, la metodología apropiada que se utiliza en cada clase, los recursos o materiales didácticos como maquetas, proyectores, fichas, etc. que sirven de apoyo en el proceso de enseñanza y aprendizaje y a su vez permiten enriquecer los contenidos. Esta herramienta puede ser construida desde varios enfoques pedagógicos, como el constructivismo y el aprendizaje significativo, como se mencionó anteriormente el estudiante debe “aprender a aprender” y “aprender construyendo”, entonces, es necesaria la intervención de los autores como Jean Piaget y David Ausubel quienes afirman que para la construcción del conocimiento es importante que el estudiante posea conocimientos previos, en este caso conocimientos matemáticos, interactúe con el medio y que cuente con el apoyo del docente y de sus compañeros. En conclusión, las actividades o tareas docentes bien planificadas aparte de guiar a los estudiantes hacia un aprendizaje significativo, contribuyen al enriquecimiento de los valores como la responsabilidad, la honestidad y sobre todo el interés por aprender, y orientan a los estudiantes hacia una formación de profesionales competentes capaz de enfrentar y dar soluciones ante los problemas relacionados con su práctica profesional.

1.7.1 ESTRUCTURA DE LA GUÍA DIDÁCTICA.

En este documento el docente debe establecer una serie de actividades y evaluaciones de aprendizaje con el fin de enriquecer los conocimientos de los estudiantes, partiendo desde la interacción entre profesor y alumno. Los elementos a considerar para el desarrollo de una guía didáctica según Aretio (2009) son:

- **Objetivos:** meta escrita de manera directa, dirigida al tema que se va a desarrollar y acorde a lo que se pretende que alcancen los estudiantes.

- **Metodología:** herramienta indispensable para la labor docente en la que se apoya para el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

- **Actividades:** conjunto de trabajos realizados por el docente, según Díaz (2013) estas pueden ser actividades de apertura, desarrollo y cierre, la primera permite abrir el clima de aprendizaje, mediante un debate a partir de preguntas propuestas por el docente, con el fin de explorar los conocimientos previos de los estudiantes acerca del tema, estas actividades pueden ser realizadas de manera individual o grupal; la segunda tiene la finalidad de que el estudiante interaccione con una nueva información, para esto, el docente debe buscar y utilizar diversas estrategias y recursos; y la tercera se realiza con la finalidad de lograr una integración del conjunto de tareas realizadas, a través de ellas se busca que el estudiante elabore una estructura conceptual que tenía al principio de la secuencia, reorganizando su estructura de pensamiento a partir de las interacciones que ha generado con las nuevas interrogantes y la información a la que tuvo acceso, tanto las actividades de apertura, de desarrollo del contenido y de cierre no necesariamente tienen que ser realizadas en el salón de clase, sino que se pueden desarrollar en casa o haciendo uso de plataformas virtuales.

- **Recursos:** son aquellas herramientas o materiales necesarios que sirven como sustento o apoyo para el docente para corroborar alguna actividad explicada en clase, como pueden ser (maquetas, videos, audio, papelógrafo, imágenes impresas, etc.), facilitando la participación y promoviendo el interés de los estudiantes.

- **Evaluación:** Las técnicas de verificación de conocimientos y sus instrumentos deben de ser explicados y detallados claramente al estudiante con el fin de conocer el rendimiento al principio, desarrollo o fin del curso.

- **Tiempo:** engloba las indicaciones generales acerca del ritmo de trabajo, las actividades a ser realizadas son planificadas considerando el tiempo ya sea una semana, un día o una hora de clase. Se recomienda usar un calendario con todas las actividades, grupales o individuales propuestas.

- **Referencias Bibliográficas:** Para ampliar los recursos de consulta se facilitan las direcciones de internet y los libros que se consideren oportunos.

- **Contenidos:** Se trata de un esquema que detalla de manera sistemática los sectores temáticos que se priorizan y se consideran relevantes.

1.7.2 METODOLOGÍAS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS.

Situaciones didácticas.

Brousseau (1986) postula que se tratan de un modelo de interacción entre el docente y el estudiante a través de problemáticas que sirven para alcanzar nuevos conocimientos, la mayoría de las “situaciones” precisan de conocimiento anteriores “previos”, pero hay otras que implican la construcción de un conocimiento por parte del estudiante. Las situaciones didácticas son elaboradas intencionalmente por el profesor con la finalidad de que los alumnos generen un saber determinado, se planifican en base a actividades problematizadoras que necesitan de la aplicación de conocimientos matemáticos y de interacciones entre tres protagonistas: Saber, Profesor, Alumno. Durante el desarrollo de una situación didáctica aparecen “momentos” o situaciones a-didácticas que se caracterizan por el trabajo que realiza el alumno, cuando interactúa con el medio preparado por su mentor. El profesor debe procurar que el alumno ponga el empeño y la dedicación para encontrar la solución o aproximarse a ella. De esta manera se logra un trabajo netamente propio del estudiante usando sus competencias para resolver actividades que ponen en evidencia tanto saberes previos, así como las aptitudes para la construcción de nuevos conocimientos (p.18).

Para lograr que el trabajo se realice correctamente el profesor planea previamente la situación didáctica de manera que los alumnos tengan completa interacción con el problema, se generen conflictos cognitivos, preguntas, discusión. El rol del profesor es la de guiar el proceso usando otras interrogantes. En las situaciones didácticas se pueden presentar problemas que tengan una, ninguna o muchas soluciones esto dependerá de los estudiantes pues ellos son los protagonistas al momento de encontrar y justificar la o las diferentes soluciones. Brousseau clasifica las situaciones didácticas de la siguiente manera:

Para el alumno:

- Situaciones de Acción: El alumno analiza y trabaja en el problema tomando decisiones y planteando las estrategias que darán origen a una posible solución.

- Situaciones de Formulación: Existe una socialización entre alumnos de los planteamientos y los puntos de vista de cada uno de ellos, la intensión es la de convencer y comunicarse con los demás.

- Situaciones de Validación: En esta etapa el alumno justifica y argumenta las ideas formuladas y explica a los demás estudiantes por qué se produjeron, debido a la autoridad implícita del docente aquí su participación no se recomienda pues ésta no favorece a la discusión.

Para el profesor:

- Situación de Institucionalización: Como etapa final el docente debe considerar cada una de las conclusiones finales de los estudiantes esto con el objetivo de unificar los conocimientos y de descontextualizar la solución y dirigirla hacia un conocimiento general y útil tanto en situaciones similares como en nuevas situaciones.

- Aula invertida.

Según Lage (2000) este modelo: inicia con actividades, frases y ejercicios para alentar a los estudiantes a que revisen el material multimedia previamente preparado en distintos formatos adaptando así el que mejor se adecue para cada uno de ellos, se proporciona además un material impreso y cuestionarios donde puedan tomar apuntes de la visualización del material, al inicio de las clases presenciales, el docente debe despejar dudas en un aproximado de 10 minutos, luego puede abordar situaciones experimentales de uso práctico del tema. Posteriormente, armar grupos de trabajo para revisar las tareas realizadas fuera de clase y una vez discutidas las respuestas, se prepara una pequeña exposición al grupo. Constantemente se recomienda evaluar con ejercicios donde los estudiantes apliquen los conceptos revisados. Para el soporte del curso, se recomienda la creación y uso de un sitio Web donde se pueda acceder al material de trabajo.

El procedimiento de aula invertida para Bergmann y Sams (2012, 2014): inicia dando a conocer a los estudiantes en qué consiste el modelo, la estructura de clase y los contenidos de cada unidad, luego entrenar a los alumnos sobre la forma adecuada de visualizar los recursos multimedia estos pueden ser de entre 7 a 10 minutos, posteriormente brindar sugerencias para la toma de notas, en clases cada estudiante debe realizar una pregunta relacionada con la actividad realizada fuera de clases y que no pueda responderse con el recurso visualizado, finalmente evaluar de manera formativa y sumativa periódicamente como evidencia del proceso de aprendizaje. Como un aspecto importante se recomienda adecuar el aula físicamente para permitir el trabajo rotativo en pequeños grupos.

1.7.3 ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS.

Según Pimienta (2012) existen diferentes tipos de estrategias que pueden ser utilizadas en los diferentes momentos de la clase.

- **Lluvias de ideas:** es un plan basado en preguntas, generalmente propuesto por el docente que sirve para obtener información acerca de los conocimientos que poseen los estudiantes con respecto a una temática, permite desarrollar la creatividad y a su vez la participación de los estudiantes, además de generar ideas variadas y llegar a tratar un problema.

- **Preguntas:** permite desarrollar el pensamiento crítico a través de cuestionamientos en los cuales los estudiantes incorporan su propio juicio de valor para llegar a la comprensión del tema. Existen dos tipos limitadas cuyas respuestas son restringidas y las amplias o complejas son aquellas en las que el estudiante emite juicios y opiniones basados en un análisis.

- **Preguntas-guía:** permite visualizar un tema en su totalidad a través de cuestionamientos que ayuden a dilucidar los contenidos como son ¿Qué? ¿Quién? ¿Cómo? ¿Cuándo? ¿Dónde? ¿Cuánto? ¿Por qué? ¿Para qué? Sirven para analizar conceptos, planear un proyecto, etc.

- **Cuadro sinóptico:** es un esquema de llaves que sirve para resumir y organizar ideas más relevantes de forma visual, también permite desarrollar habilidades de comprensión de conceptos y establecer jerarquías.

1.7.4 FUNCIONES DE LA GUÍA DIDÁCTICA.

La guía didáctica propone varias técnicas de trabajo intelectual, de investigación, actividades tanto individuales como grupales, con la orientación y guía del docente.

Ulloa (citado por García y de la Cruz Blanco, 2014) define tres funciones fundamentales.

1. **Función de orientación:** fomenta la capacidad de organización y estudio sistemático, promueve la interacción con los materiales y compañeros, anima a comunicarse con el profesor, ofrece sugerencias oportunas para posibilitar el aprendizaje independiente.

2. **Especificación de las tareas:** el docente delimita las actividades a realizar, la extensión del tema y la metodología para la anticipación, construcción y consolidación, generando un ambiente propicio para que los estudiantes construyan sus conocimientos, además, detalla problemas a resolver con el fin de guiar al estudiante a realizar un trabajo independiente.

3. **Función de autoayuda o autoevaluación:** al permitir al estudiante una estrategia de monitoreo o retroalimentación para que evalúe su progreso.

Es importante tener en cuenta estas tres categorías dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje ya que es necesaria para orientar, motivar y apoyar al estudiante. En definitiva, el sistema educativo debe estar orientado hacia la innovación centrado únicamente en la formación del estudiante ya estos son el futuro del mañana.

1.8 LOS RECURSOS EDUCATIVOS Y SU IMPORTANCIA.

Los recursos educativos son herramientas necesarias dentro del proceso enseñanza y aprendizaje, dado que sirve de soporte y ayuda para el docente, a más de que favorece en la motivación, la visualización, la comunicación e interacción de los estudiantes, con el propósito de construir en ellos el conocimiento de manera significativa. Deben estar presente en todas las áreas de aprendizaje, especialmente en la del Cálculo, debido a que sus contenidos a medida que avanzan se vuelven cada vez más complejos. Estos pueden ser tecnológicos, humanos, institucionales, técnicos y materiales que son importantes en el área de las Matemáticas, aunque el más utilizado es el Recurso Material, denominado también Material Didáctico.

Función del material didáctico.

1. Alcanzar los objetivos propuestos.
2. Despertar el interés de los estudiantes por la asignatura.
3. Interacción y comunicación entre estudiantes y docente.
4. Facilitar la comprensión de los conceptos.
5. Guiar en el proceso de aprendizaje.
6. Comprender los fenómenos del medio en que vive.

7. Facilitar el desarrollo de habilidades de visualización espacial.

El Material Didáctico sirve como apoyo para reforzar y profundizar los contenidos, facilitando la comprensión, la visualización, la motivación, la participación y la interacción de los estudiantes, por lo tanto, se obtendrá aprendizajes significativos mientras que el alumno se encuentre activo.

Con lo que se expuso anteriormente, la enseñanza del Cálculo de Áreas y Volumen de sólidos no puede ser explicada únicamente a través de fórmulas y algoritmos, al contrario, el docente debe llevar a su clase herramientas como maquetas o Tics para que el estudiante pueda manipular, observar y a partir de eso sacar sus propias conclusiones, de esta manera construirá su conocimiento.

Características del material didáctico.

Para que la enseñanza y aprendizaje son eficaces el material didáctico debe ser:

1. Acorde al tema.
2. De fácil manejo y estar en perfectas condiciones de funcionamiento.
3. Proporcionar información.
4. Los materiales didácticos deben facilitar aprendizajes significativos.
5. Deben estar disponibles en el momento en que se los necesita.

Si los maestros disponen de recursos educativos suficientes y acorde a cada asignatura, lograría conceptualizar de mejor manera los aprendizajes de los estudiantes.

1.8.1 LAS MAQUETAS.

Es una herramienta diseñada por docentes y estudiantes como sustento para consolidar contenidos en diferentes áreas de aprendizaje que por lo general son complejas.
Ruiz (2012) afirma:
La maqueta didáctica, que ofrece al estudiante la posibilidad de comprender de forma inmediata ciertas materias. Principalmente capacita al alumno para interiorizar y asimilar conceptos muy

abstractos en relación a la visión espacial, la geometría y los sistemas de representación, que a menudo nos obligan a aprender en las escuelas sin que lleguemos a interiorizarlos. (p.3)

Así también, estos instrumentos favorecen tanto en la motivación, interacción, participación, etc. permitiendo acercar a los estudiantes para evaluar los conocimientos y habilidades que estos poseen, del mismo modo facilita el aprendizaje a partir de la observación, en la que el estudiante deberá organizar la información, relacionar sus conocimientos con los nuevos y finalmente aplicarlos.

Por otra parte, es importante mencionar que si el docente no hace un buen uso de las herramientas que se encuentren disponibles es claro que no se logrará cumplir con los objetivos propuestos, en otras palabras, una maqueta sin la compañía de una buena estrategia metodológica no representa nada, más aún seguirá cayendo en una enseñanza tradicional. Si los docentes usan solamente recursos metodológicos tradicionalistas, y no emplean nuevos recursos educativos innovadores, están privando a los estudiantes a un conocimiento limitado.

CAPÍTULO II

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

2.1. INTRODUCCIÓN.

La metodología desarrolla diferentes pasos para obtener información confiable acerca de sucesos reales, problemas, fenómenos y situaciones de interés para la sociedad actual. Cuando es de tipo descriptiva deja de lado las percepciones propias, brinda alternativas y fundamentos para tomar decisiones y apriori genera nuevas ideas para mejorar situaciones problemáticas presentes. Urbina (2010) denomina metodología: "(…) a los pasos y procedimientos que se han seguido en una indagación determinada, para designar los modelos concretos de trabajo que se aplican en una determinada disciplina o especialidad" (p.5). Por lo tanto, la metodología es una fuente necesaria para organizar y procesar la información brindando así lineamientos para trabajar en la mejora de los sucesos o problemas encontrados.

El trabajo de titulación denominado "GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS" se apoya en una metodología de carácter cuantitativo para conocer aspectos como el rendimiento académico y el grado de dificultad que representan los procesos relacionados con la integración múltiple al ser estudiados y aplicados; y de carácter cualitativo porque las preguntas permitieron describir temáticas confusas, preferencias por ciertas herramientas didácticas y problemas que dificultan la enseñanza y aprendizaje de la integración múltiple. En la investigación de campo se diseñaron dos instrumentos para la recolección de la información, los cuales consistieron en una encuesta y una prueba, las mismas fueron resueltas por los estudiantes quienes cursaron la asignatura de Funciones de Varias Variables en los ciclos ofertados desde marzo 2017 a febrero 2019.

2.2. POBLACIÓN.

El presente estudio tomó como población a setenta y seis estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca quienes en ese momento se encontraban cursando sexto, séptimo y noveno ciclo del periodo marzo-julio 2019. La recopilación de datos no se pudo realizar en su totalidad debido a varios factores como: estudiantes que no asistieron a clases, anulación de matrícula, entre otros. A consecuencia de esto, se realizó al 90,79% (que corresponde a 69 estudiantes) del 100% de la población.

2.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS.

2.3.1. ENCUESTA.

La encuesta aplicada de tipo descriptiva se llevó a cabo mediante un cuestionario de nueve preguntas entre ellas de opción múltiple y escala Likert. Éste instrumento incluye variables expresadas como interrogantes, tales como: temáticas confusas y problemas para el aprendizaje de la integración múltiple, nivel de dificultad, contextualización de conceptos, calificaciones obtenidas en la asignatura, recursos educativos utilizados por el docente en el aula, recursos que deberían implementarse, entre otras.

2.3.2. PRUEBA.

El objetivo de la prueba es diagnosticar los conocimientos que poseen los estudiantes, su rendimiento y habilidades visuales para representar funciones de varias variables. Consta de siete preguntas objetivas y dos problemas. La información fue obtenida a la par con la encuesta y considerando la misma población, permitiendo de esta manera comparar la información obtenida en ambos instrumentos.

2.4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN.

2.4.1. ENCUESTA.

Los resultados obtenidos, luego de aplicar la encuesta a los estudiantes de sexto, séptimo y noveno ciclo de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca, se presentan detalladamente a continuación:

Pregunta 1. ¿En qué contenidos matemáticos relacionados a la integración múltiple

presenta confusión? señale más de una opción si es necesario.

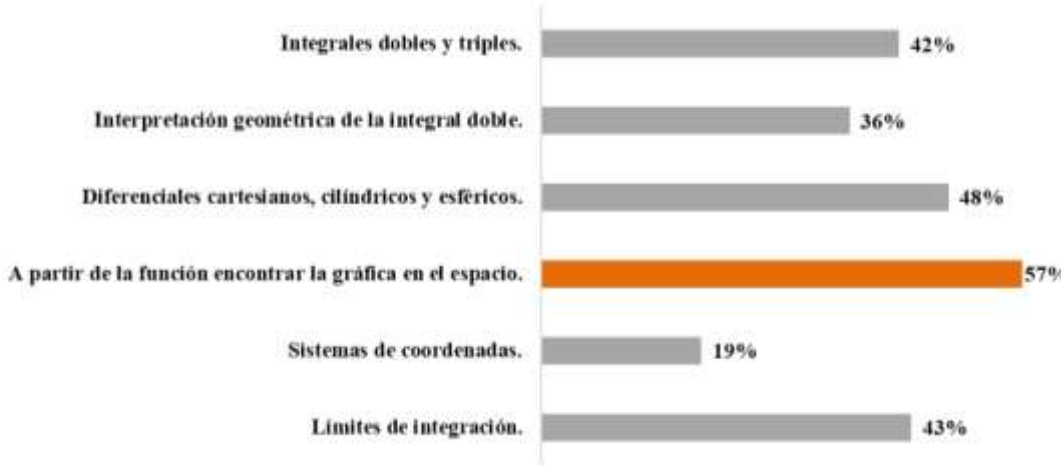


Figura 3: Contenidos Matemáticos relacionados a la Integración Múltiple.
Nota: En esta pregunta el estudiante podría marcar más de una opción, por lo tanto, el porcentaje observado no será el 100 por ciento.
Fuente: Autores.

Con esta pregunta se pudo identificar que existe confusión en los contenidos que fueron presentados, se destaca el 57% (correspondiente a 39 estudiantes) obtenido en la sección denominada "A partir de la función encontrar la gráfica en el espacio" pues, representa la puntuación más alta, lo que provoca reflexionar en torno a las habilidades viso-espaciales que la población posee, las herramientas que el docente utiliza para facilitar la graficación y las metodologías de enseñanza aplicadas, pues se intuye que contribuir en el desarrollo de cualquiera de estos elementos permitirá mejorar el desempeño de la población.

Pregunta 2. ¿Cuáles considera que son los problemas o dificultades para el aprendizaje de la Integración Múltiple? Marque con una X la opción(es) correcta(s).

Figura 4: Problemas o dificultades en el aprendizaje de la Integración Múltiple.
Nota: En esta pregunta el estudiante podría marcar más de una opción, por lo tanto, el porcentaje observado no será el 100 por ciento.
Fuente: Autores.

Desde la perspectiva de la población, el aprendizaje de la integración múltiple se dificulta por la escasez de recursos educativos en las aulas. Este resultado se resalta con un 68% (correspondiente a 47 estudiantes) evidenciando que las actividades de aprendizaje necesitan ser mejoradas con alternativas diferentes a las tradicionales, pues probablemente por esta situación la explicación y la comprensión de éste campo de estudio estén siendo afectadas directamente.

Pregunta 3. En la escala del 1 al 5 indique el grado de dificultad que representa para usted realizar alguno de los siguientes apartados relacionados con la Integración Múltiple. Según los valores siguientes:

Tabla 3: Grado de dificultad presente al realizar uno de los subtemas de la Integración Múltiple.

Aspectos	Muy fácil		Fácil		Neutral		Difícil		Muy difícil	
	fr	%	fr	%	fr	%	fr	%	fr	%
Analizar y calcular el área de un sólido acotado por funciones mediante Integración Doble.	4	6%	16	23%	31	45%	15	22%	3	4%
Analizar y calcular el volumen de un sólido acotado por funciones mediante Integración Doble o Triple.	1	1%	9	13%	26	38%	27	39%	6	9%
Bosquejar una función de tres variables en el plano XY.	4	6%	7	10%	20	29%	31	45%	7	10%
Graficar una función de tres variables usando lápiz y papel.	0	0%	6	9%	22	32%	21	30%	20	29%
Transformar una función cartesiana en otros sistemas de coordenadas (cilíndricas o esféricas).	6	9%	25	36%	17	25%	17	25%	4	6%
Visualizar una figura en el espacio.	5	7%	13	19%	21	30%	24	35%	6	9%

Fuente: Autores

Los subtemas que la población considera difíciles son: bosquejar una función de tres variables en el plano XY, visualizar una figura en el espacio y calcular su volumen, mientras que los demás procesos no representan mayor dificultad. Por ende, se puede intuir (y como se evidenció en la pregunta 1) que existe falta en el desarrollo en las habilidades viso-espaciales, así como en la aplicación de conceptos. Estos indicadores concuerdan con los resultados obtenidos en la prueba cognoscitiva aplicada.

Pregunta 4. En la escala del 1 al 5 indique, con qué frecuencia el docente contextualiza los conceptos con el entorno. Según los valores siguientes:

Tabla 4: Contextualización de los conceptos con el entorno.

	Siempre		Casi siempre		Muchas veces		Pocas veces		Nunca	
	fr	%	fr	%	fr	%	fr	%	fr	%
Interpretación geométrica de la Integral Doble.	5	7%	18	26%	20	29%	23	33%	3	4%
En la enseñanza del cálculo de áreas.	7	10%	23	33%	23	33%	14	20%	2	3%
En la enseñanza del cálculo de volumen de sólidos.	10	14%	20	29%	24	35%	14	20%	1	1%

Fuente: Autores

En cuanto a la contextualización, se evidencia con un 33% que el docente ejemplifica los conceptos de integral doble y con un 35% los de cálculo de volúmenes de sólidos, se intuye por esto que los elementos (como por ejemplo los diferenciales) son conceptos abstractos que no se pueden ver a simple vista y necesariamente deben ser representados mentalmente o a través del uso de recursos educativos.

Pregunta 5. ¿Qué calificación obtuvo en la asignatura de Funciones de Varias Variables?

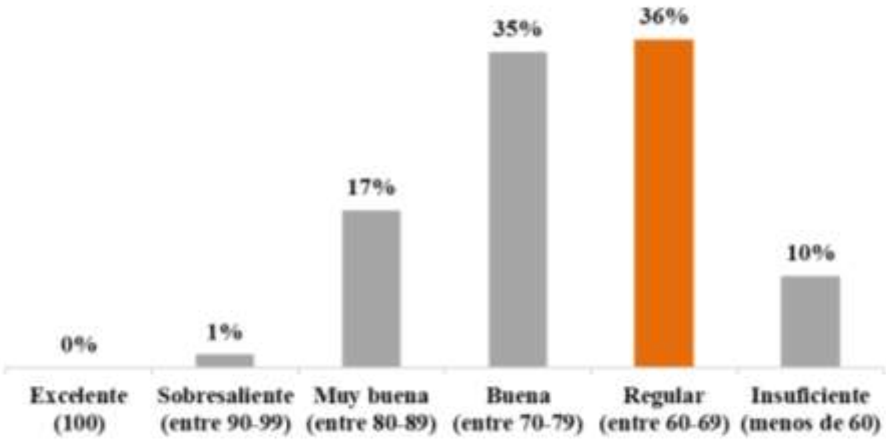


Figura 5: Calificaciones obtenidas en la asignatura de Funciones de Varias Variables
Fuente: Autores

Los resultados muestran que la mayoría de estudiantes tienen una calificación entre buena y regular lo cual no concuerda con los resultados de las pruebas estandarizadas, ratificando que existen dificultades en el aprendizaje de la Integración Múltiple.

Pregunta 6. ¿Qué recursos educativos utilizó el docente para representar los conceptos tridimensionales? Señale más de una opción si lo considera necesario.

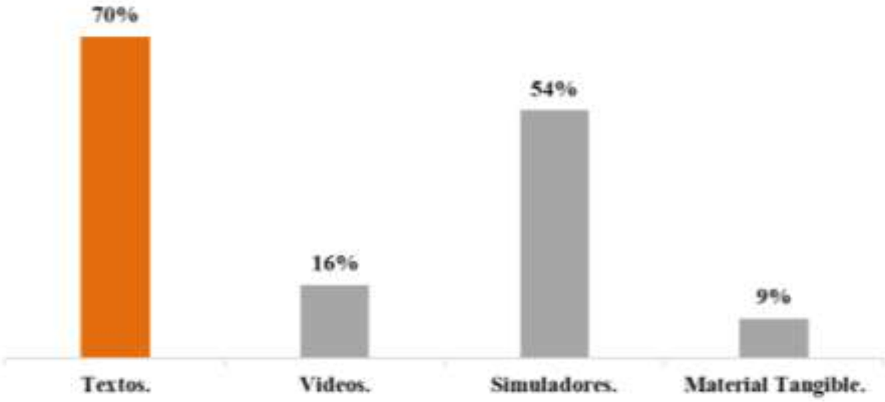


Figura 6: Recursos educativos utilizados por el docente para representar los conceptos tridimensionales.
Fuente: Autores

De acuerdo a los resultados obtenidos, tan solo 9% de las veces el docente usa material tangible, probablemente por la ausencia del mismo en el laboratorio de matemáticas para abordar los contenidos de figuras tridimensionales. De manera análoga, con el 70% se evidencia que el docente prefiere usar textos, permitiendo indagar que esto ocurre debido a que no existen suficientes alternativas en materia de recursos educativos que ayuden a retroalimentar los contenidos abordados.

Pregunta 7. Ordene del uno al cinco siendo 1 el más importante aquellos recursos que deberían implementarse, para la enseñanza de la integración múltiple aplicada al cálculo de área y volumen de sólidos.

Tabla 5: Recursos que deberían ser implementados.

	Muy importante		Importante		Neutral		Poco importante		No importante	
	fr	%	fr	%	fr	%	fr	%	fr	%
Videos.	3	5%	11	18%	18	30%	28	46%	1	2%
Guía Didáctica de enseñanza.	16	26%	15	25%	15	25%	15	25%	0	0%
Material tangible.	27	44%	18	30%	9	15%	7	11%	0	0%
Simuladores.	15	25%	17	28%	19	31%	10	16%	0	0%

Fuente: Autores

La población considera a los materiales tangibles en un 44% muy importantes quizá por las ventajas representativas, visuales y manipulativas que brindan; así mismo mencionan el interés por las guías didácticas en un 26% se intuye que las consideran como instrumentos orientadores que benefician y mejoran el proceso educativo y finalmente destacan a los simuladores en un 25% probablemente por su rapidez al momento de graficar funciones. Resultados que permiten inferir la posibilidad de que éstos recursos sean implementados en mayor cantidad en el aula.

Pregunta 9. Indique ¿Cómo le gustaría que fueran las clases de cálculo?

Figura 7: Tipo de clase que prefieren los estudiantes.
Nota: En esta pregunta el estudiante podría marcar más de una opción, por lo tanto, el porcentaje observado no será el 100 por ciento.
Fuente: Autores

Con estos resultados se intuye que la población necesita nuevas metodologías de enseñanza probablemente por la monotonía y los vacíos que dejan algunas clases las cuales no cuentan con la interacción entre los actores del proceso educativo y provocan problemas de aprendizaje.

2.4.2 PRUEBA.

La prueba fue realizada por los estudiantes en un tiempo aproximado de veinte minutos, se entregó un formulario a algunos estudiantes y a otros no, pese a esta variante se obtuvieron resultados similares. El instrumento usado en esta parte de la metodología tuvo como objetivo detectar las dificultades, problemas e inconvenientes que los estudiantes presentan al responder interrogantes de tipo teórico, así como al realizar ejercicios relacionados con los subtemas vistos en la asignatura de funciones de varias variables (límites de integración, transformación a otros sistemas de coordenadas, interpretaciones de conceptos, entre otros) los cuales son detallados a continuación en el análisis. Estas preguntas fueron diseñadas de tal manera que permitan hacer comparaciones entre sus resultados y aquellos obtenidos en la encuesta.

2.4.2.1 RESULTADOS DE LA PRUEBA ESTANDARIZADA.

Tabla 6: Resultados de la prueba estandarizada.

Problemas	Tema de estudio	Correcto	Incorrecto	No contesta
1	Orden de los diferenciales	84%	16%	0%
2	Otros sistemas de coordenadas.	77%	23%	0%
3	A partir de la integral indique que gráfica se construye.	52%	41%	7%
4	Tipos de región.	12%	52%	36%
5A	Coordenadas cilíndricas.	54%	17%	29%
5B	Coordenadas esféricas.	13%	41%	46%
6	Interpretación geométricamente de la integral doble.	17%	74%	9%
7	Interpretación geométricamente de la integral triple.	6%	84%	10%
8	Cálculo de volumen de sólidos acotados por superficies.	6%	36%	58%
9	Cálculo de área de la superficie.	3%	23%	74%

Fuente: Autores

2.4.2.2 ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES Y ERRORES DE LOS PROBLEMAS.

Para realizar el análisis de las dificultades presentes al momento de resolver la prueba estandarizada sobre integración múltiple se ha considerado únicamente los problemas: 4, 5, 6, 7, 8 y 9, dado que los problemas 1, 2 y 3 fueron resueltos correctamente por la mayoría de los estudiantes.

Problema 4: Conteste. La región acotada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36, y = -2, y = 5$ es una región de tipo ___________

En este problema el estudiante debía identificar las ecuaciones, realizar una representación mental y si fuera necesario bosquejar la región e identificar su tipo. A continuación, se indica la región que se obtiene al bosquejar (con unos pocos puntos) la elipse y las rectas. Se identifica que es una región del tipo II.

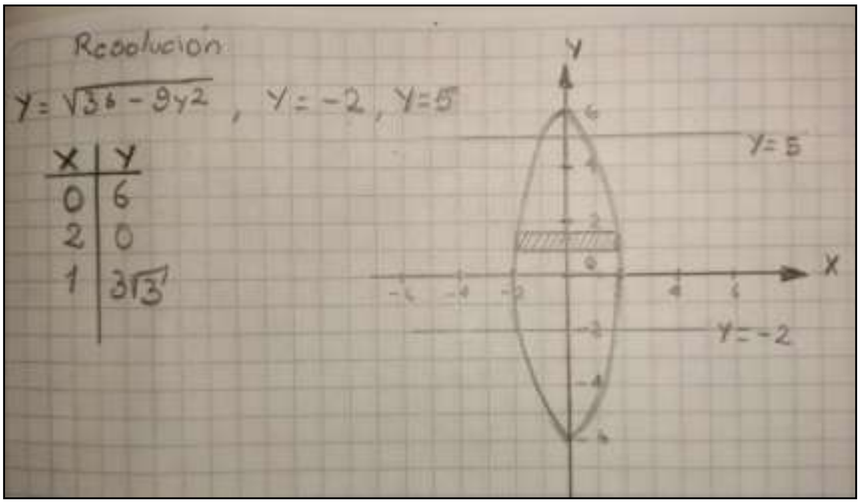
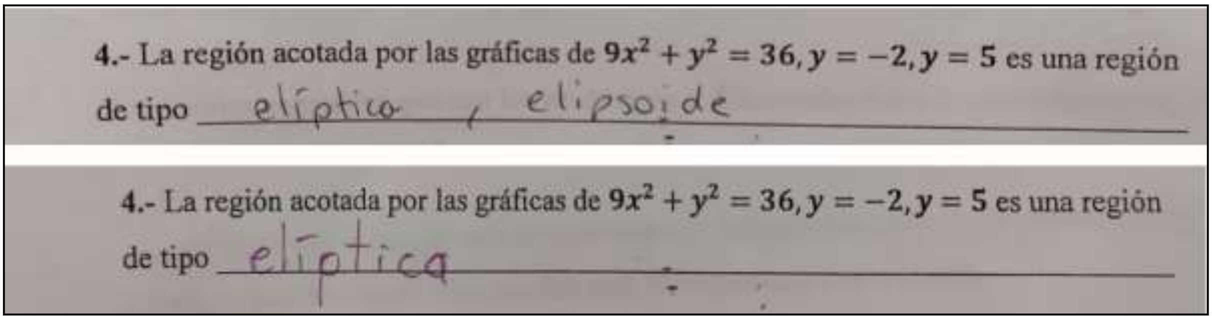


Figura 8: Resolución del problema 4.
Fuente: Autores

Si se analiza el problema realizado por los estudiantes se puede apreciar lo siguiente:



4.- La región acotada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36, y = -2, y = 5$ es una región de tipo elíptico , elipsoide

4.- La región acotada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36, y = -2, y = 5$ es una región de tipo elíptica

Figura 9: Respuesta de los estudiantes en el problema 4.
Fuente: Autores

Cuando se les preguntó cuál es la mayor dificultad que han tenido en la resolución de este problema, algunos estudiantes manifestaron lo siguiente:

- “Desconozco el tema sobre los tipos de regiones”
- “No puedo diferenciar entre la región de tipo I y de tipo II”
- “Considero que hablar de regiones es describir superficies”

Los resultados muestran los aprendizajes erróneos de los estudiantes a cerca de las gráficas y los tipos de regiones. Del mismo modo se observa que no realizan una representación mental y no grafican las funciones al contrario solo eligen una respuesta. Esto demuestra que desarrollaron conocimientos a corto plazo.

Problema 5: Conteste. La ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas es ___________, en tanto que en coordenadas esféricas su ecuación es____________.

En este problema el estudiante debía transformar las ecuaciones a los sistemas pedidos. A continuación, se indica la resolución correcta de este ejercicio

Ecuaciones de transformación (Cilíndricas)	**Ecuaciones de transformación (Esféricas)**
$x = r\cos\theta\,,\ x = r\sin\theta\,,\ z = z$	$r = \rho\sin\theta\,,\ \theta = \theta,\ z = \rho\cos\theta$
$z = r^2cos^2\theta + r^2sin^2\theta$	$\rho\cos\theta = \rho^2sin^2\theta$
$z = r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$	$\rho = \dfrac{\cos\theta}{sin^2\theta}$
$\boldsymbol{z = r^2}$	$\boldsymbol{\rho = \cot\theta\csc\theta}$

Figura 10: Resolución del problema 5.
Fuente: Autores.

Si se analiza el problema realizado por los estudiantes se puede apreciar lo siguiente:

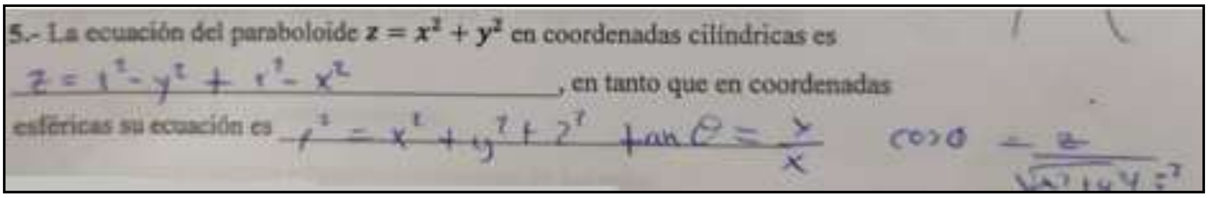

5.- La ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas es $z = r^2 - y^2 + r^2 - x^2$, en tanto que en coordenadas esféricas su ecuación es $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Figura 11: Respuesta de los estudiantes en el problema 5.
Fuente: Autores.

Cuando se les preguntó si tuvieron alguna dificultad para resolver el problema 5, los estudiantes contestaron lo siguiente:

- "Necesito de un formulario para resolver estos tipos de ejercicios"

- “No recuerdo cómo hacer el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas”

Se obtuvo como resultado que existe confusión entre las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas pues, al momento de resolver este problema los estudiantes cometen errores de conversión. Esto quizá se deba a que este procedimiento matemático no es considerado por los estudiantes como un beneficio que aporte a la resolución de problemas.

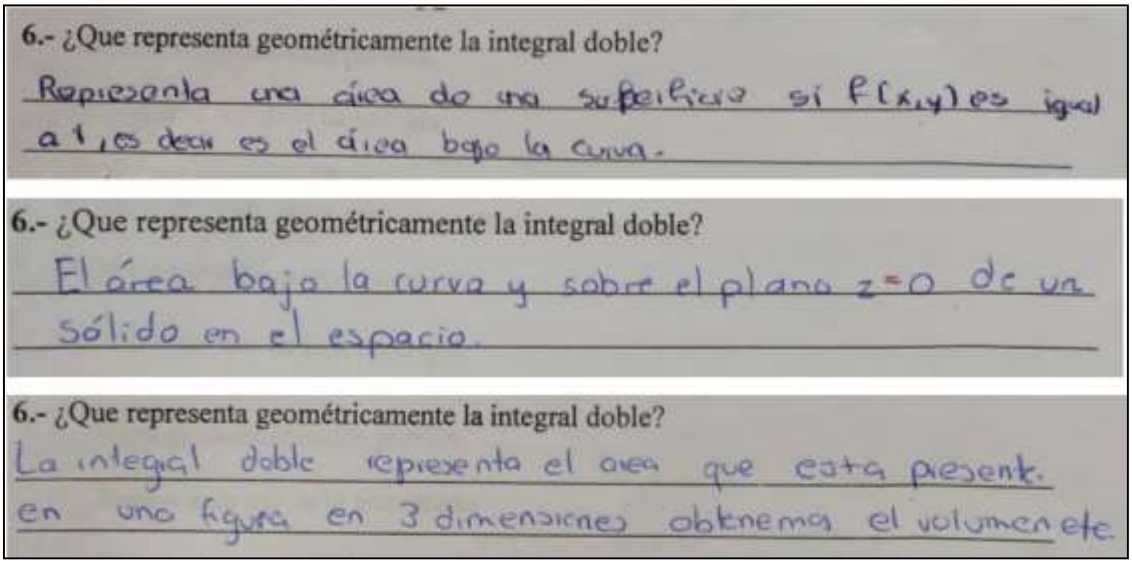
Problema 6: Conteste. ¿Qué representa geométricamente la integral doble?

Para contestar esta pregunta los estudiantes debían de tener claro el concepto de la integral definida. A continuación, se responde correctamente la interrogante planteada:

“La integral doble representa el volumen que se encuentra acotado entre la superficie $f(x,y)$ y la región R”

Figura 12: Resolución del problema 6.
Fuente: Autores.

Si se analiza el problema realizado por los estudiantes se puede apreciar lo siguiente:


6.- ¿Que representa geométricamente la integral doble?
Representa una área de una superficie si f(x,y) es igual a 1, es decir es el área bajo la curva.

6.- ¿Que representa geométricamente la integral doble?
El área bajo la curva y sobre el plano z=0 de un sólido en el espacio.

6.- ¿Que representa geométricamente la integral doble?
La integral doble representa el area que esta present. en una figura en 3 dimensiones obtenemos el volumen etc.

Figura 13: Respuestas de los estudiantes en el problema 6.
Fuente: Autores.

Cuando se les preguntó si tuvieron alguna dificultad para resolver el problema 6, los estudiantes contestaron lo siguiente:

- “No recuerdo los conceptos de integración”
- “Los contenidos abordados fueron confusos”

Los resultados permiten interpretar que los participantes no recuerdan el concepto de la integral doble y que existe confusión con la interpretación de la integral definida esto probablemente se debe a que este concepto no fue consolidado y no se estableció la diferencia geométrica con la doble integral.

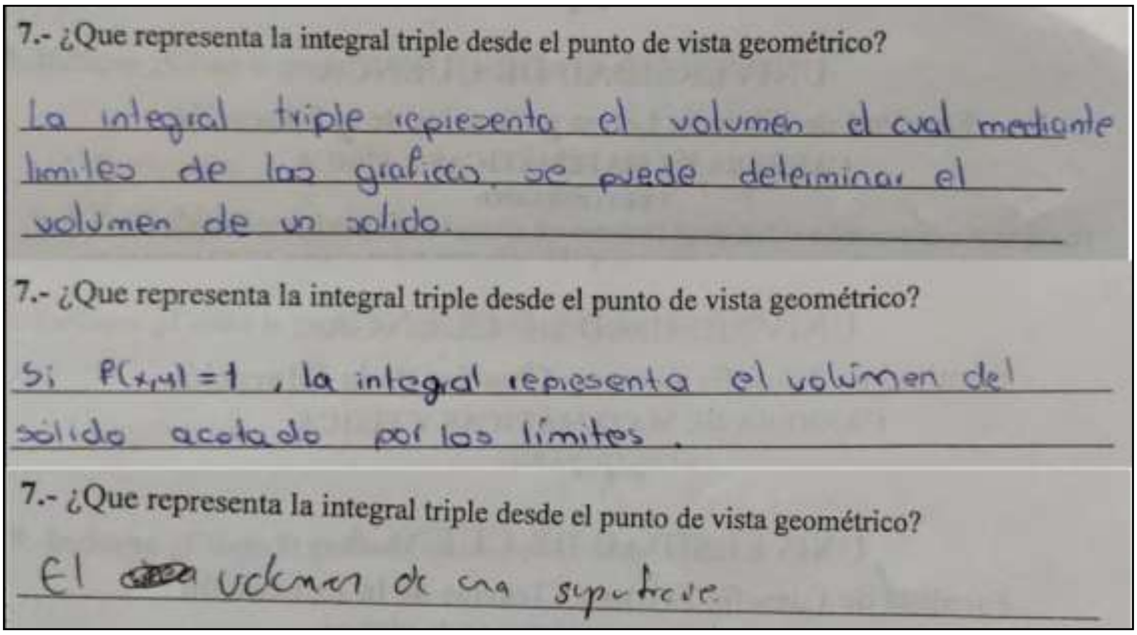
Problema 7: Conteste. ¿Qué representa la integral triple desde el punto de vista geométrico?

En este problema los estudiantes tenían que recordar el concepto de la integral triple y escribirlo. A continuación, se muestra la respuesta a la que debían llegar los estudiantes.

> “La integral triple representa el hipervolumen que se encuentra acotado entre una hipersuperficie y la región cerrada R”.

Figura 14: Resolución del problema 7.
Fuente: Autores.

Si se analiza el problema realizado por los estudiantes se puede apreciar lo siguiente:


7.- ¿Que representa la integral triple desde el punto de vista geométrico?

La integral triple representa el volumen el cual mediante limites de los graficos, se puede determinar el volumen de un solido.

7.- ¿Que representa la integral triple desde el punto de vista geométrico?

Si $f(x,y)=1$, la integral representa el volumen del sólido acotado por los límites.

7.- ¿Que representa la integral triple desde el punto de vista geométrico?

El volumen de una superficie

Figura 15: Respuesta de los estudiantes en el problema 7.
Fuente: Autores.

Cuando se les preguntó si tuvieron alguna dificultad para resolver el problema, los estudiantes contestaron lo siguiente:

- “El concepto de integral triple es complejo”
- “Desconozco el tema de la integral triple”
- “No recuerdo el tema”

En los resultados se puede observar que los estudiantes tienen conceptos erróneos sobre el concepto de la integral triple. Permitiendo intuir que para ellos el tema es complejo por lo cual no logran interpretar el concepto de manera geométrica.

Problema 8: Plantee la integral que representa el volumen del sólido acotado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ & $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

En este problema los estudiantes tenían que plantear ya sea una integral doble o triple, utilizar transformaciones a otros tipos de coordenadas y graficar las funciones. En la siguiente imagen se muestra la resolución del ejercicio a la que debían de llegar los estudiantes.

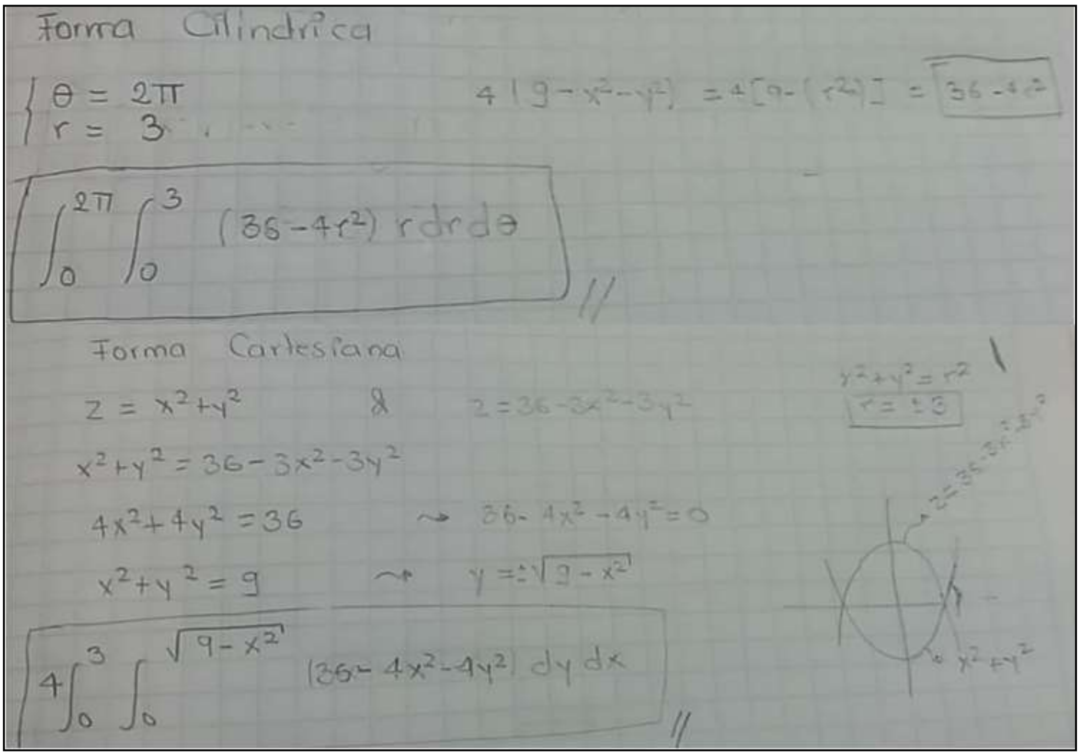


Figura 16: Resolución del problema 8.
Fuente: Autores.

Si se analiza el problema realizado por los estudiantes se puede apreciar lo siguiente:

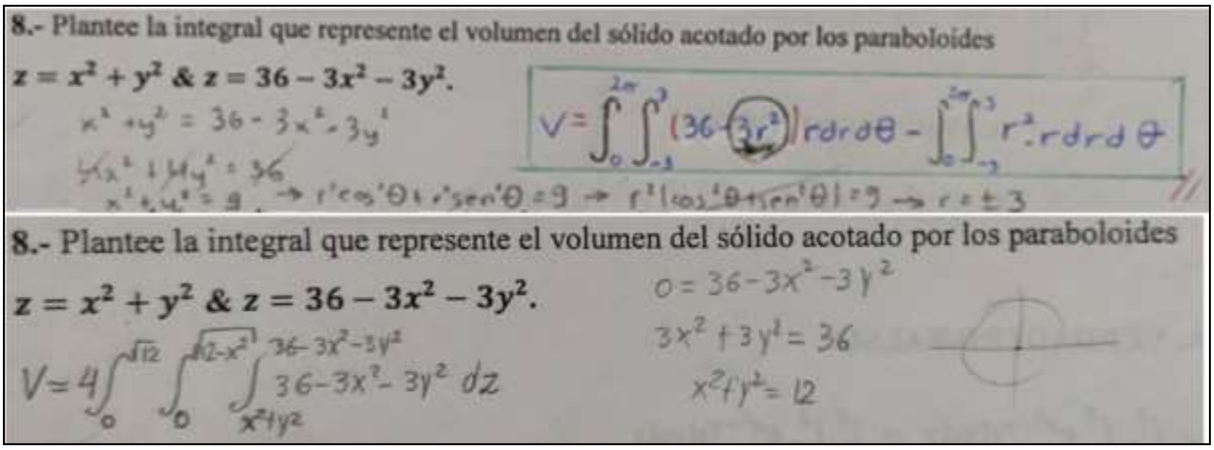


Figura 17: Respuestas de los estudiantes en el problema 8.
Fuente: Autores.

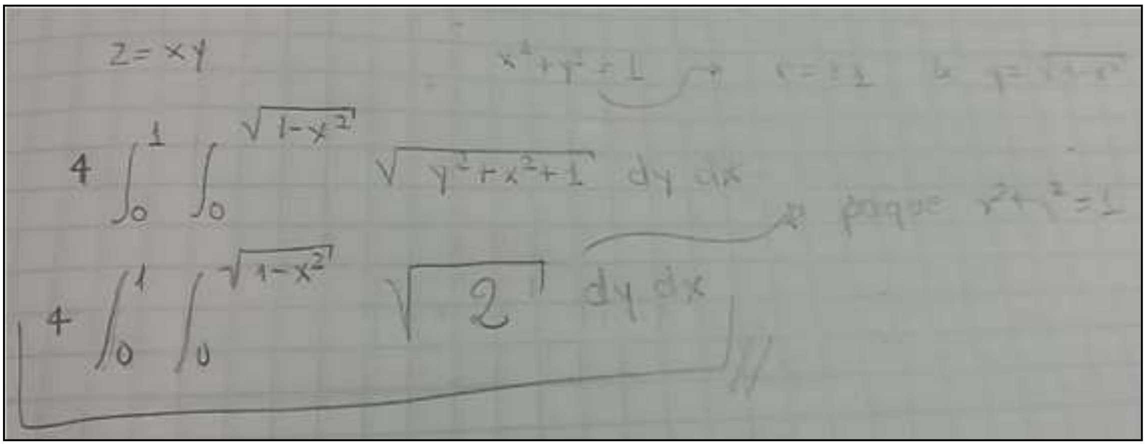
Al momento de resolver el problema, los estudiantes manifestaron lo siguiente:

- “No sé qué tipo de integral doble o triple usar”
- “No sé cómo bosquejar las funciones presentadas”
- “No recuerdo el tema”

Se observa que los estudiantes no logran plantear la integral triple correctamente, y que en la resolución del ejercicio trabajan con coordenadas cartesianas o coordenadas cilíndricas. Sin embargo, a pesar de que en la resolución algebraica realizan perfectamente la igualdad entre ecuaciones, fallan al momento de aplicar los límites de integración. También, se puede notar en ambos casos que los estudiantes no bosquejan las funciones, lo cual nos permite intuir que no pueden graficar funciones sin el uso de calculadoras graficadoras y que el proceso de visualización espacial y graficación necesitan ser reforzados.

Problema 9: Plantee la integral que representa el área de la superficie de la porción de la gráfica $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

En este problema los estudiantes tenían que aplicar la fórmula del área de la superficie con integrales dobles. En la siguiente imagen se muestra la resolución del ejercicio a la que debían de llegar los estudiantes.



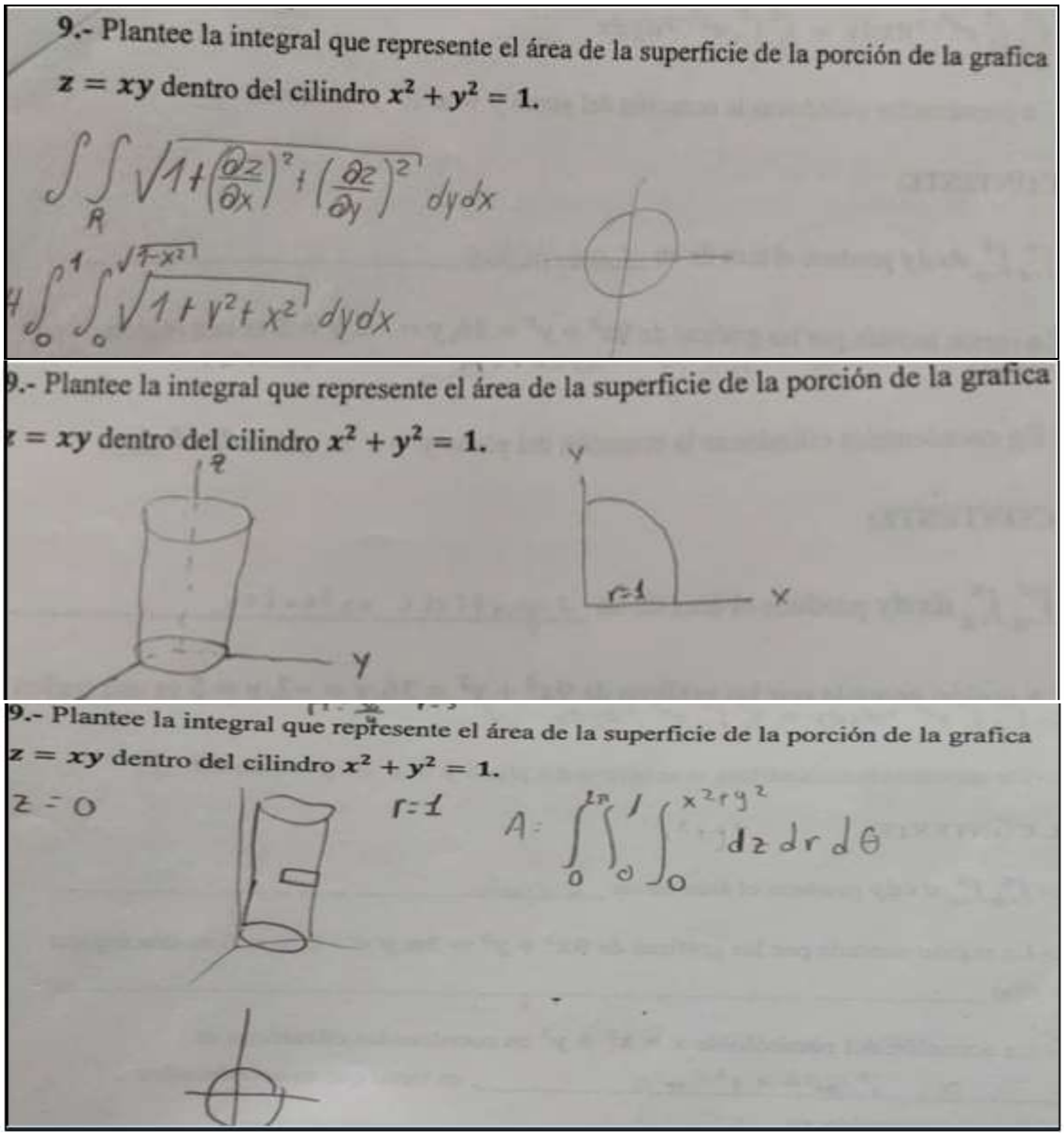
$z = xy$ $\qquad x^2+y^2=1 \rightarrow r=\pm 1 \quad \& \quad y=\sqrt{1-x^2}$

$$4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y^2+x^2+1}\; dy\, dx \qquad \text{poque } x^2+y^2=1$$

$$4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{2}\; dy\, dx$$

Figura 18: Resolución del problema 9.
Fuente: Autores.

Si se analiza el problema realizado por los estudiantes se puede apreciar lo siguiente:



9.- Plantee la integral que represente el área de la superficie de la porción de la grafica $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

$$\iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; dy\,dx$$

$$4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+y^2+x^2}\; dy\,dx$$

9.- Plantee la integral que represente el área de la superficie de la porción de la grafica $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

9.- Plantee la integral que represente el área de la superficie de la porción de la grafica $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

$z = 0$ $\qquad r=1$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{x^2+y^2} dz\, dr\, d\theta$$

Figura 19: Respuesta de los estudiantes en el problema 9.
Fuente: Autores.

Al momento de resolver el problema, los estudiantes manifestaron lo siguiente:

- “No recuerdo la fórmula para calcular el área de la superficie”
- “Desconozco la manera de resolver este ejercicio”
- “Tengo confusión entre el cálculo del área de la región y el área de la superficie”

En este problema se observa una serie de dificultades que se manifestaron a partir de algunos errores cometidos por los estudiantes. Los estudiantes no aplican la fórmula para calcular el área de la superficie. Además, el intento de graficar el cilindro, pero la función faltante (silla de montar) no es reconocida y mucho menos bosquejada intuyendo que existe falta de desarrollo de capacidades viso-espaciales. Además, de no ubicar los límites de integración correctamente.

CAPÍTULO III

PROPUESTA

GUÍA DIDÁCTICA

PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN DE SÓLIDOS

CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS

AUTORES:

Ricardo Aucapiña.
Tannya Sacta

INTRODUCCIÓN

Esta obra es, en sus líneas generales, es una guía de apoyo a la enseñanza del Cálculo Multivariable, está diseñada con estrategias metodológicas constructivistas y cuenta con ejercicios y actividades interactivas en la que los docentes y estudiantes pueden participar activamente. La guía didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje puede combinar las actividades propuestas con materiales tangibles mediante el uso de maquetas las cuales fueron construidas de tal manera que se interconecten y permitan la explicación y el trabajo de los temas abordados.

CONTENIDO

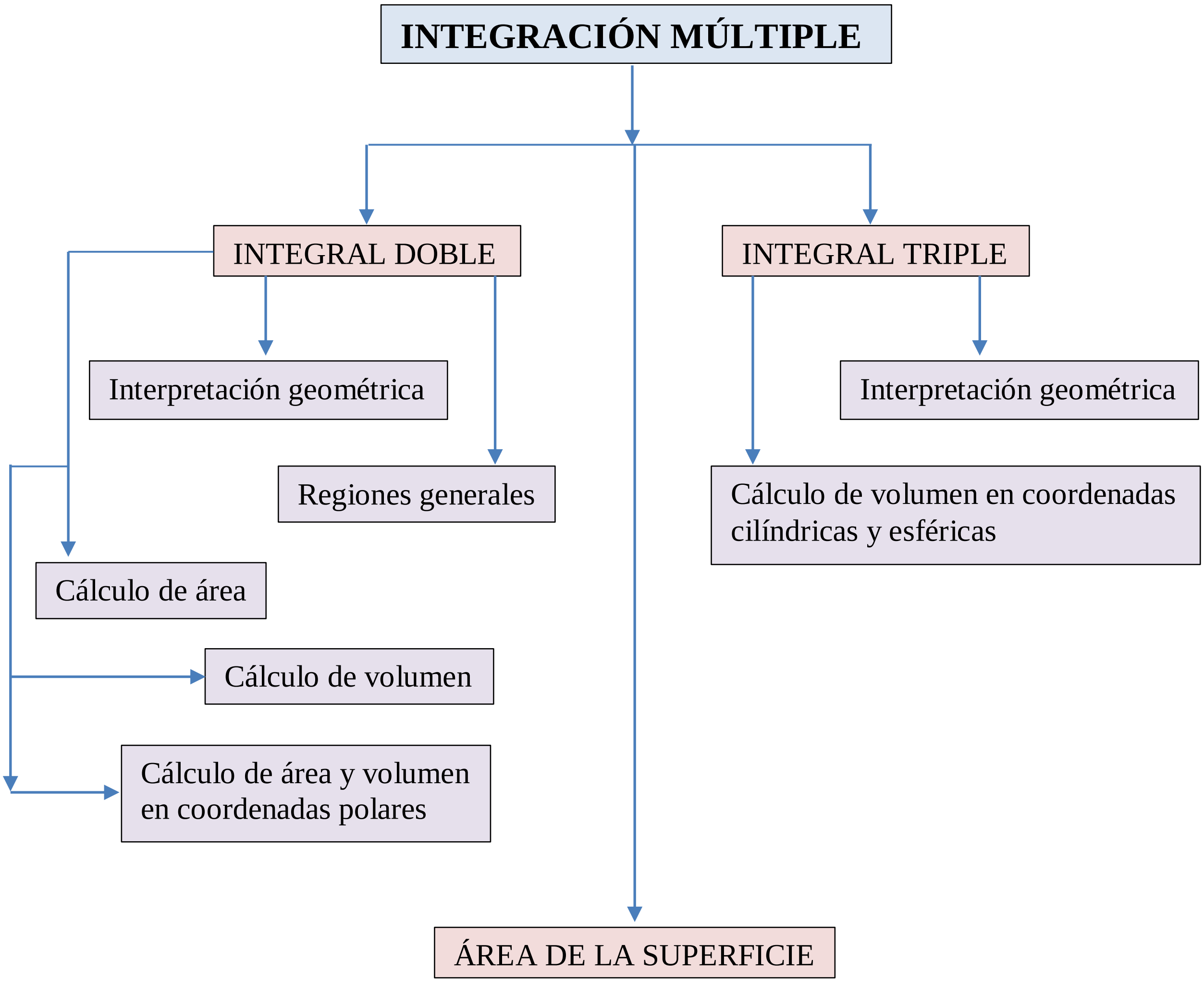
La bibliografía que se utilizó para la elaboración de ésta guía fue:

Zill, D.G Wright, W.S. (2010). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México.

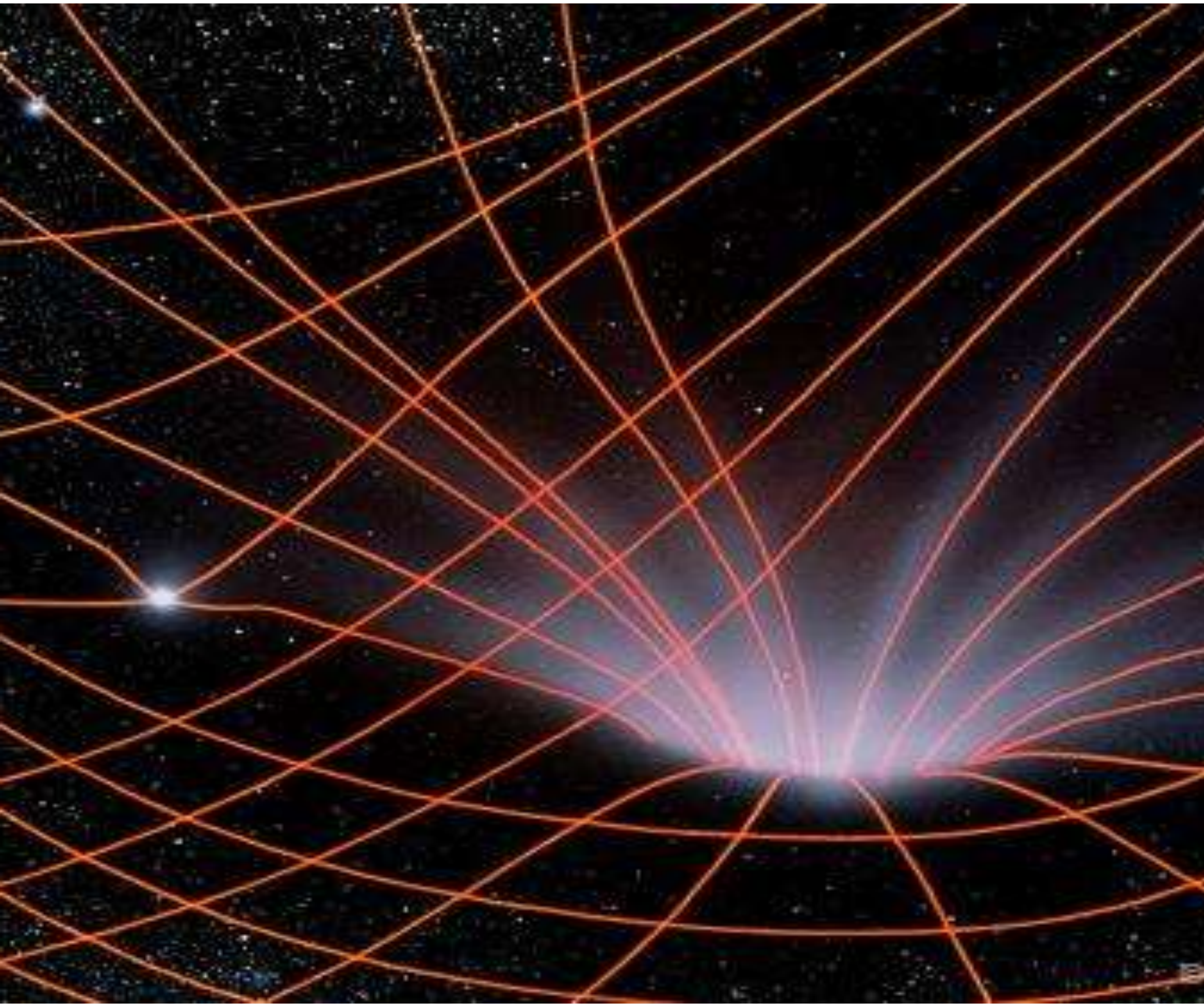
Uña I, San Martín & Tomeo V. (2011). Cálculo de varias variables primera edición. Madrid, España.

Larzon R. y Edwars B. (2010). Cálculo novena edición. D.F, México.

Mora W. (2014). Cálculo en Varias Variables primera edición. Costa Rica.


INTEGRACIÓN MÚLTIPLE
INTEGRAL DOBLE
INTEGRAL TRIPLE
Interpretación geométrica
Regiones generales
Cálculo de área
Cálculo de volumen
Cálculo de área y volumen en coordenadas polares
Interpretación geométrica
Cálculo de volumen en coordenadas cilíndricas y esféricas
ÁREA DE LA SUPERFICIE

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DOBLE



"Solo aquellos que se atreven a tener grandes fracasos terminan consiguiendo grandes éxitos"

Will Smith

Plan de clase

Objetivos:

- Desarrollar habilidades de visualización e interpretación geométrica de la integral doble.
- Explicar el proceso de resolución de problemas de cálculo mediante los métodos gráfico y algebraico.
- Asociar lo aprendido con el contexto.

Situación didáctica.

Tabla 7: Plan de clase

SITUACIÓN	ACTIVIDADES	INDICADORES DE LOGRO	RECURSOS	EVALUACIÓN	TIEMPO
Acción	Construcción del concepto de la integral doble mediante el uso de recursos educativos. Deducción de las fórmulas para el cálculo de área y volumen de solidos a través de integrales dobles mediante preguntas guía.	Diferencia los conceptos de área y superficie. Reconoce el concepto de un sistema de referencia tridimensional. Construye el concepto de volumen de un sólido geométrico. Contesta las preguntas planteadas en la hoja de trabajo. Resuelve ejercicios. Describe imágenes. Describe el material concreto.	Hoja de trabajo. Maquetas. Pizarra. Marcadores. Borrador. Hoja perforada de cuadros.	Trabajo cooperativo. Exposición de trabajos. Presentación de hojas de trabajo.	45min
Formulación	Unificación de los conceptos de área, superficie, volumen, integral doble para compartir conclusiones en el aula.				15min
Validación	Argumentación con ideas propias las definiciones, interpretaciones y/o ecuaciones.				45min
Institucionaliza-ción (docente)	Formalización de conceptos y procedimientos matemáticos, contribuyendo a resignificar el aprendizaje en el contexto global del estudiante.				15min

ACCIÓN:
Aprendizaje autónomo

Tiempo: 45min

Problema 1: *Área y superficie ¿es lo mismo?*

Observe las siguientes imágenes y conteste las preguntas

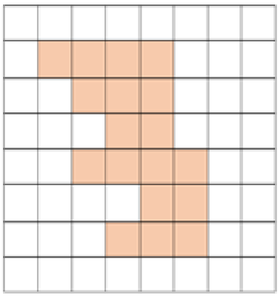


Figura 20

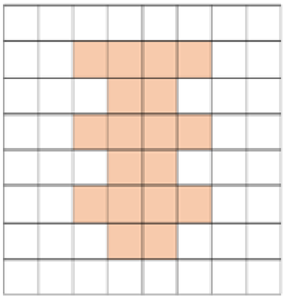


Figura 21

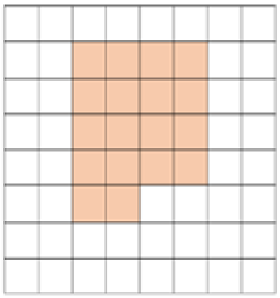


Figura 22

1. **Si tomamos como unidad de medida un cuadrado ¿Cuál es el área de cada una de las figuras?**

   Figura 20: ___unidades cuadradas.

   Figura 21: ___unidades cuadradas.

   Figura 22: __ unidades cuadradas.

2. **A partir de la forma y del valor de área obtenido de cada una de las figuras, que podría usted deducir.**

___

___

¡Recuerda!

La envolvente de todo cuerpo geométrico se denomina superficie.

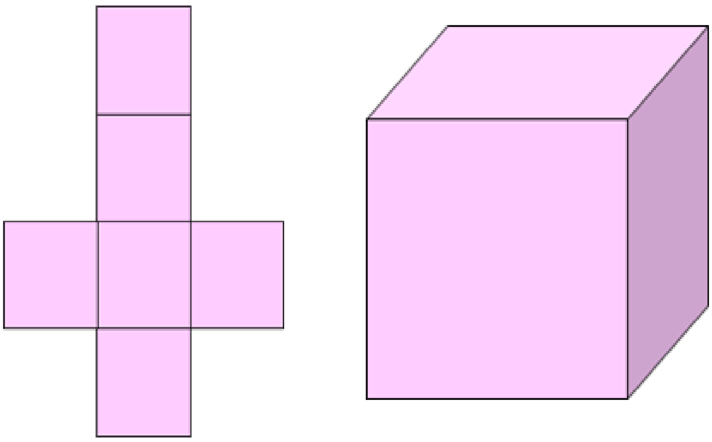


Figura 23: Superficie de un cubo

¿Qué relación existe entre el área y la superficie?

……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

Complete:
……… de un cuerpo geométrico es la medida de la extensión de la ……………… medida en unidades cuadradas.
………… es la porción del plano que ocupa la figura, esta depende de la…………..

Conclusión 1

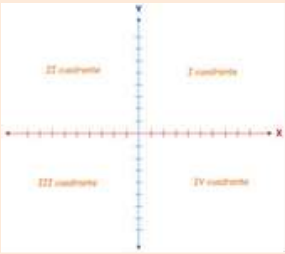


Figura 24: Sistema bidimensional

El sistema cartesiano bidimensional está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal conocida como el eje X o eje de las abscisas, y otra vertical conocida como eje Y o eje de las ordenadas, que se cortan en un punto llamado origen o cero del sistema, de tal manera que forma cuatro cuadrantes o áreas.

Problema 2: *¿Qué es volumen?*

A partir de la figura 25 el estudiante debe completar las siguientes preguntas

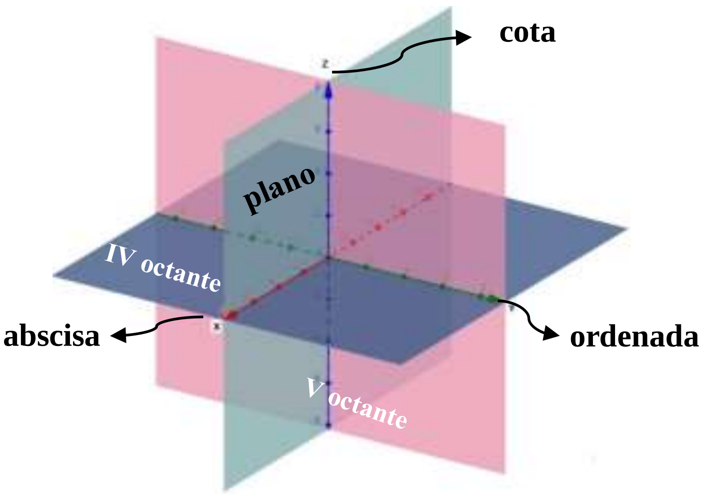


Figura 25: Sistema de coordenadas tridimensionales

El sistema cartesiano ………… está compuesto por ………………, los cuales se intersectan en los ejes coordenados, cuyas distancias tanto para el eje **X, Y, Z** se las denominan como abscisa, ordenada y ………….. respectivamente. Los planos dividen al espacio en …. regiones llamadas ……… así también, para representar un punto en el espacio se necesita de tres coordenadas (x, y, z) y para representar sólidos se necesita de varios de estos puntos.

Observe detenidamente la figura 26 e indique cuales son las coordenadas del punto P.

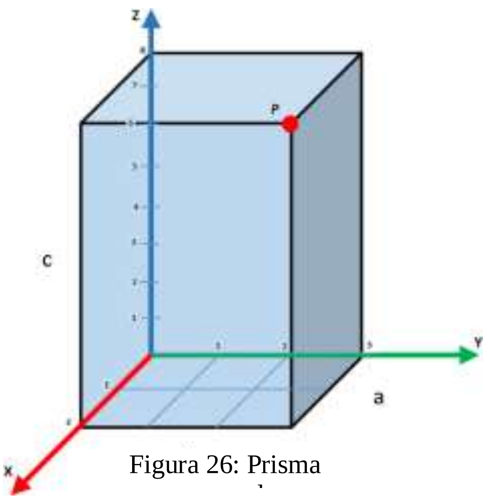


Figura 26: Prisma

$P(\_\_;\ \_\_;\ \_\_)$

¿Qué nombre tomarían las coordenadas del punto P? observe la figura 26 y señale la opción correcta.

____ ancho, largo, altura.

____ largo, ancho, altura.

____ altura, ancho, largo.

____ ninguna de las anteriores.

Observe la figura 27 e indique cuantos cubos contiene la caja y cuantas le falta por ser completada.

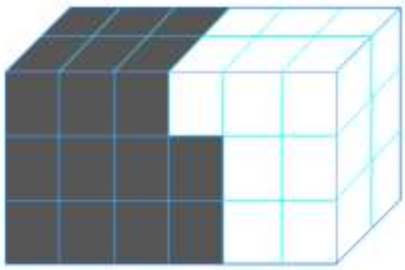


Figura 27: Cuerpo geométrico

Contiene: ______ cubos.

Faltan: _______ cubos.

Si sabemos que $A_T = 2(a \times b + a \times c + b \times c)$ representa el área total o área de la superficie del prisma rectangular, entonces que representa $a \times b \times c$ ……………………………………

Calcule el volumen del siguiente cuerpo geométrico, considerando como unidad de medida un  de $1cm^3$.

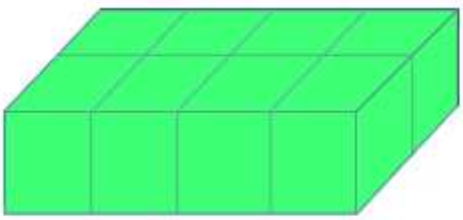


Figura 28: Cuerpo geométrico

Altura: ________ cm
Ancho: ________ cm
Largo: _________ cm

Volumen: __________ cm^3

¿Cuál sería el concepto de volumen?

____

Conclusión 2

Problema 3: *¿Existen procedimientos matemáticos y experimentales para calcular el volumen de sólidos limitado por funciones?*

Observe las siguientes figuras y con sus propias palabras explique cómo hallaría sus volúmenes mediante el proceso experimental y matemático

Figura 29: Cilindro circular

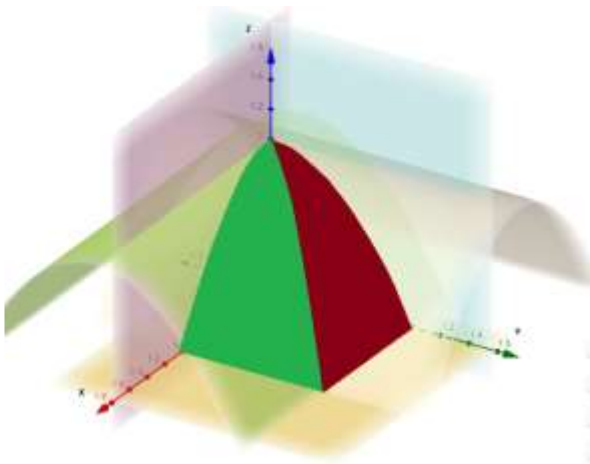


Figura 30: Sólido intersectado por funciones

EXPERIMENTAL:

Figura 29: ____

____

Figura 30: ____

____

MATEMÁTICA:

Figura 29: ____

____

Figura 30: ____

____

Conclusión 3

Problema 4: *¿Qué representa la integral doble?*

El docente mediante el uso de la maqueta trabajará junto con los estudiantes para describir cada elemento matemático y geométrico que aporte a la definición de la interpretación de la integral doble, explicando los siguientes apartados.

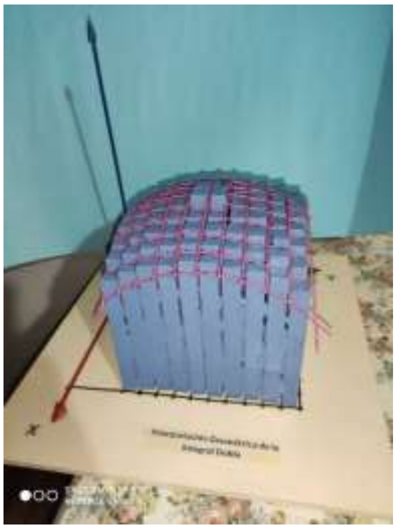


Figura 31: Maqueta de la Interpretación geométrica de la integral doble.

- El sólido se encuentra en el sistema de coordenadas **XYZ.**
- Superficie circular.
- Prisma rectangular proyectado desde el plano **XY.**
- Infinitos prismas rectangulares.
- Región rectangular en el plano **XY.**

1. **¿De qué manera se puede relacionar la maqueta de la interpretación geométrica de la integral doble con lo estudiado en la integral definida de una función de una sola variable?**

____

____

____

____

____

2. **Si ampliamos la región rectangular de la maqueta ilustrada en el problema 4, que esta sobre el plano XY, (observe las figuras 32 y 33) y responda las siguientes interrogantes.**

¡Recuerda!

Los límites de integración sonpuntos arbitrarios del intervalo cerrado $[a, b]$, donde a es el límite inferior y b es el límite superior.

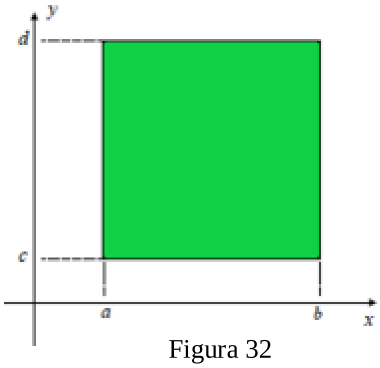


Figura 32

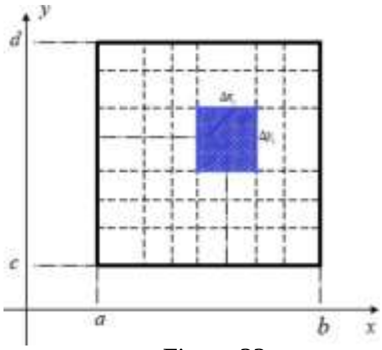


Figura 33

a) Observe la figura 32 y seleccione la respuesta correcta. Los límites de integración con respecto al eje x son:

___ Desde a hasta b.
___ Desde b hasta a.
___ Desde d hasta c.
___ Desde c hasta d.
___ Todas las anteriores.

b) Observe la figura 32 y seleccione la respuesta correcta. Los límites de integración con respecto al eje y son:

___ Desde a hasta b.
___ Desde b hasta a.
___ Desde d hasta c.
___ Desde c hasta d.
___ Todas las anteriores.

c) Observe la figura 33 y señale la respuesta correcta ¿Qué representa geométricamente $\Delta x_i \Delta y_j$?

_____ área de toda la región que se encuentra sobre el plano xy.

_____ área de toda la región que se encuentra sobre el plano xz.

_____ volumen de las n-subregiones que se encuentra sobre el plano xz.

_____ volumen de las n-subregiones que se encuentra sobre el plano xy.

_____ área de cada subregión que se encuentra sobre el plano xz.

_____ área de cada subregión que se encuentra sobre el plano xy.

3. Observe y analice la maqueta ilustrada en el problema 4 y complete:

La altura del prisma rectangular formado sobre el plano XY se denomina ………………… o también conocida como eje ………………

4. Conteste la siguiente pregunta.

¿Que representa geométricamente la integral doble?

____

____

Conclusión 4

Problema 5: *¿Cuál es la expresión matemática que permite encontrar el volumen de un sólido limitado por funciones?*

Si extraemos uno de los prismas de la maqueta presentada en clase y lo ampliamos como se muestra a continuación, conteste:

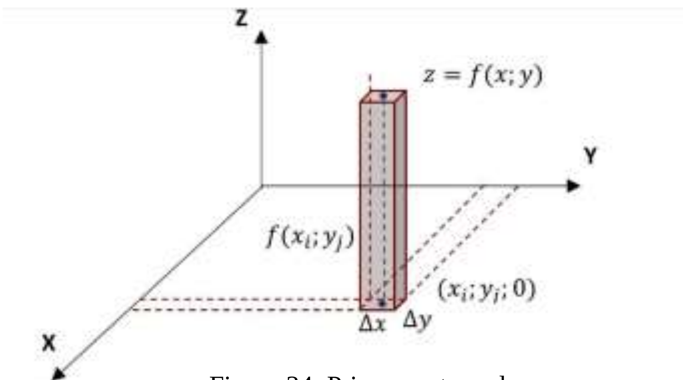


Figura 34: Prisma rectangular.

1. ¿Cómo se escribiría la ecuación del volumen del prisma rectangular?

$$\Delta \boldsymbol{V}_{ij} = \_\_\_ \times \_\_\_$$

2. Complete:

La sumatoria de los volúmenes de los infinitos prismas rectangulares bajo la función es conocida como ___________, permite calcular de forma aproximada el ___________ cuya ecuación está dada por:

$$\boxed{V = \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_}$$

Ecuación de Volumen

Arquímedes quien, tras sus cálculos por hallar el volumen de sólidos, utilizaba figuras conocidas como el cilindro, cono, prisma rectangular, etc., al superponer sus áreas lograba un equilibrio entre las figuras lo cual le permitió acercar más al volumen de dichas figuras, este procedimiento resulto ser laborioso y fue así que le denominó proceso exhaustivo. Fueron entonces Newton y Leibniz quienes dieron la solución a este problema introduciendo así las integrales.

Recordando que el cálculo optimizó el procedimiento de suma de Riemann mediante diferenciales y llegó a establecer una fórmula específica mediante integrales.

Complete:

Desde el punto de vista geométrico la integral doble es el __________ bajo la ________ cuya ecuación es:

$$\boxed{V = \int_{\_\_}^{d} \int_{a}^{\_\_} f(\_,\_)\_dy}$$

Ecuación de Volumen

Problema 6: *¿Qué sucede si la función $f(x, y) = 1$?*

Observe la siguiente figura y señale la opción correcta:

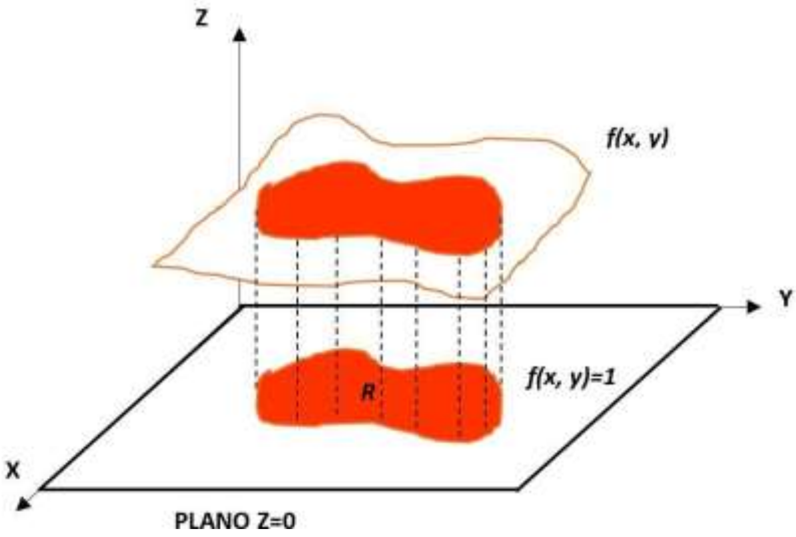


Figura 35: Área de la región cuando $f(x, y) = 1$

___ La integral no existe.
___ El volumen es 1.
___ Obtenemos área.
____Obtenemos perímetro.

Justifique su respuesta: ____
____

Conclusión 5

Tomando en consideración la respuesta del problema 6 escriba la expresión matemática del área mediante integrales dobles.

$$\_\_ = \int_{\_\_}^{b} \int_{a}^{\_\_} 1 \_\_ dy$$

Ecuación de área

SITUACIÓN DE FORMULACIÓN.

Tiempo: 15min

Para compartir las conclusiones los estudiantes formarán grupos de al menos cinco personas con el fin de reflexionar sobre los conceptos vistos en clase y a partir de ello realizarán un cuadro sinóptico con las ideas principales encontradas durante la clase, esta actividad deberá ser entregada al docente.

- ¿Qué es área y superficie?
- ¿Qué es volumen?
- ¿Cuál es el procedimiento experimental para hallar el volumen de un sólido?
- ¿Cuál es el procedimiento matemático para hallar el volumen de un sólido?
- ¿Qué representa geométricamente la integral doble?

Integral Doble

SITUACIÓN DE VALIDACIÓN.

Tiempo: 45min

Cada grupo designará un estudiante para que exponga una de las conclusiones y ecuaciones obtenidas durante la clase, las cuales se presentarán a continuación. Luego de exponer, los demás grupos pueden argumentar con sus ideas.

- El rol del docente es el de corregir ciertas dificultades o confusiones que presenten los estudiantes mediante la explicación teoría y metodológica, resumiendo de manera entendible las conclusiones, unificando ideas, para lo cual el docente puede apoyarse de la *situación de institucionalización* (pág. 69)

PREGUNTAS

- Mediante un ejemplo explique a sus compañeros ¿Qué diferencia existe entre área y superficie?
- Dibuje en la pizarra un cubo ubicado en el origen del sistema tridimensional, de tal manera que pueda elegir un punto cualquiera de uno de sus vértices, explique que representa cada una de las coordenadas de dicho punto y a partir de esto responda que es el volumen de un sólido geométrico.
- Observe en el aula objetos tridimensionales y seleccione un procedimiento (experimental y matemático) para encontrar el volumen de ese sólido.
- Utilizando la maqueta explique que representa geométricamente la Integral Doble.
- Mediante el proceso de sumas de Riemann explique cómo se encuentra el volumen bajo la superficie y escriba su ecuación.
- Escriba la ecuación que le permite calcular el volumen de un sólido geométrico mediante integrales y explique cada uno de sus elementos.
- Explique mediante ejemplos que sucede con la expresión matemática que permite calcular el volumen de un sólido geométrico cuando $f(x, y) = 1$.
- ¿Cuál es la expresión matemática para calcular el área de la región limitada por funciones?

INSTITUCIONALIZACIÓN.

Tiempo: 15min

El rol del docente es el de retroalimentar la clase y a su vez construye los conceptos con sus estudiantes.

CONCEPTOS GENERALES.

Área:

Concepto métrico que permite asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada como unidades de medida denominadas unidades de superficie.

Superficie:

Es la porción del plano que ocupan las figuras.

Volumen:

Es una medida del espacio que ocupa un cuerpo geométrico.

Interpretación geométrica de la Integral Doble:

Al dividir la región R en n subregiones rectangulares de áreas ΔA_k y haciendo que $n \to \infty$ entonces se obtienen varios rectángulos de altura y_k y ancho x_k, si tenemos una función de dos variables $f(x, y) = z$, sobre la región R, para calcular el volumen encerrado entre la superficie y la región tomaremos uno de los n subrectángulos y a partir de ello formaríamos un prisma rectangular o paralelepípedo y si hacemos el mismo procedimiento con el resto de los n subrectángulos, entonces la suma total de los n subparalelepípedos o más conocido como la suma de Riemann dando como resultado el volumen que posteriormente se convierte mediante condiciones de integrabilidad en el concepto de integral doble.

La integral doble representa el volumen que se encuentra acotado entre la superficie $f(x, y)$ y la región R, cuya ecuación está dada por:

$$V = \iint_R f(x, y)dxdy$$

Donde:

$f(x, y) = z$	Altura de los n subparalelepípedos.
$dxdy = dA$	Base de los n subparalelepípedos.
R	Región rectangular.
V	Volumen.

Condiciones para que la función sea integrable:

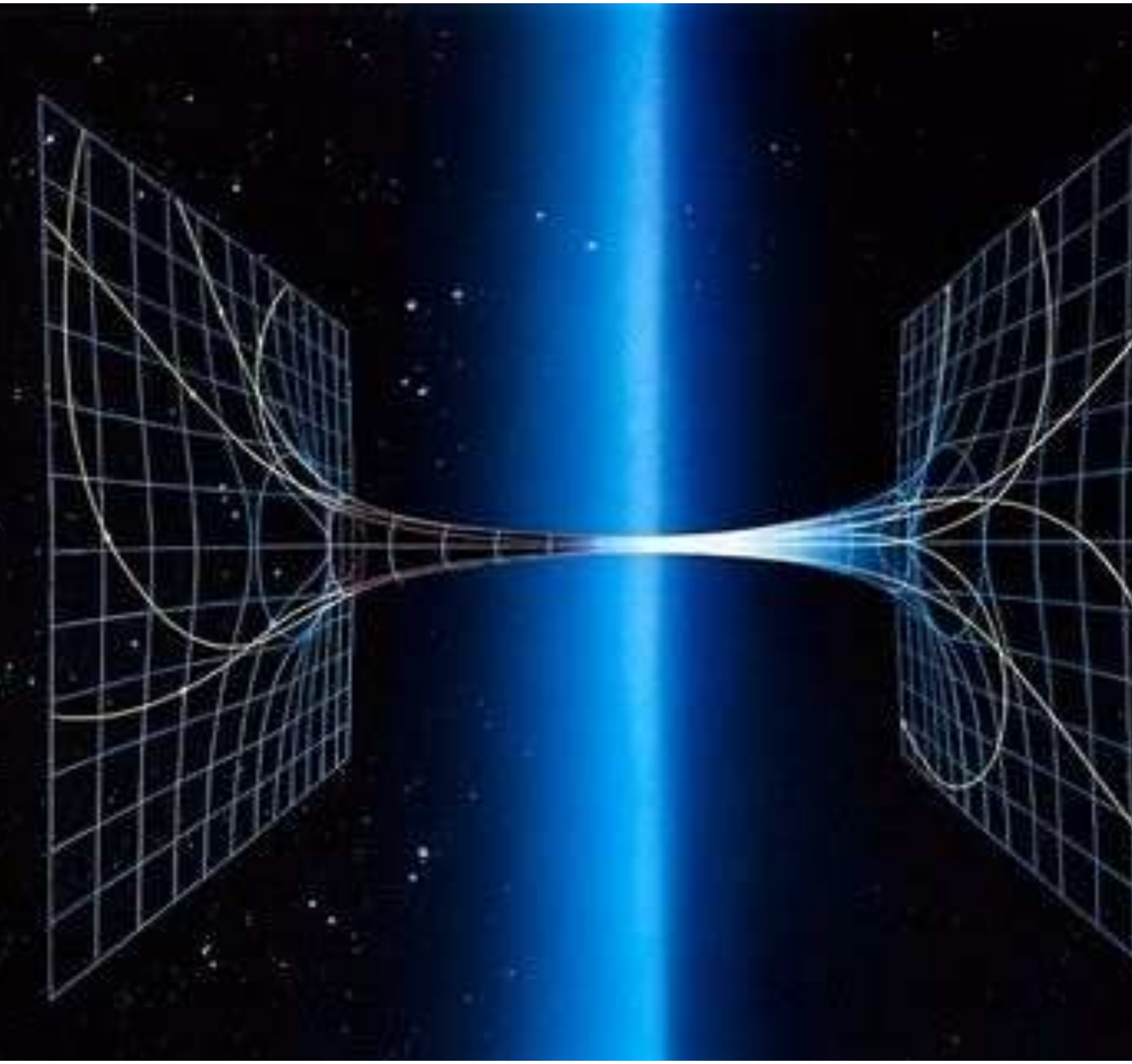
- Función cerrada en la región.
- Continua sobre la región.
- Función derivable.

Área mediante integrales dobles.

Todo cuerpo por más delgado que sea, tiene tres dimensiones, sin embargo, en los cálculos matemáticos para hallar el área de una hoja de papel, no es necesario considerar su espesor, en otras palabras, este análisis se lo realiza sobre el plano $Z = 0$, en donde la altura del sólido es considerada como $z = 1$. Entonces Cuando $f(x, y) = 1$ sobre la región R, entonces obtendríamos el área A de la región, cuya ecuación está dada por:

$$A = \iint_R dA$$

REGIONES GENERALES



"Si no persigues lo que quieres, nunca lo tendrás. Si no vas hacia adelante, siempre estarás en el mismo lugar"

Nora Roberts

Plan de clase

Objetivos:

- Definir los tipos de regiones.
- Identificar los tipos de regiones I y II

Clase Invertida:

Tabla 8: Plan de clase.

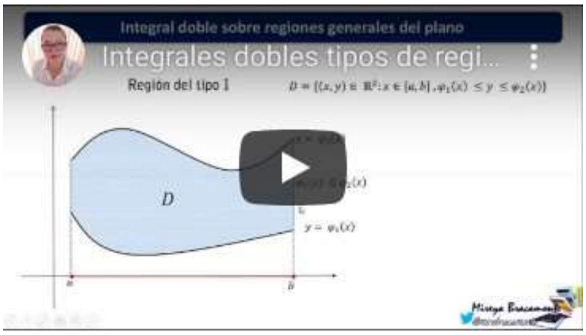
SITUACIÓN	ACTIVIDADES	INDICADORES DE LOGRO	RECURSOS	EVALUACIÓN	TIEMPO
Aprendizaje Autónomo	Conceptualización acerca de los tipos de región I y II mediante la lectura del libro **“Funciones de Varias Variables” Dennis Zill** en las páginas: 754-755 Tipos de regiones. Recopilación de información mediante una tabla de resumen, acerca de los tipos de región, límites, integrales iteradas y sus gráficas. Aplicación de los conceptos de los tipos de región mediante la resolución de ejercicios. Relación de conceptos sobre los tipos de región mediante un crucigrama.	Contesta correctamente las preguntas planteadas sobre los tipos de región. Expone de forma breve las ideas principales, fórmulas y gráficas de las regiones I, II y los temas tratados en la lectura. Resuelve ejercicios sobre los tipos de región.	Hojas de trabajo. Pizarra. Marcadores. Borrador.	Aplica de manera correcta los conceptos estudiados en la resolución de ejercicios propuestos en la hoja de evaluación. Tiempo: 45min	60min
Aprendizaje con acompañamiento docente	Recopilación de las definiciones sobre los tipos de regiones a través de preguntas explorativas. Desarrollo de ejercicios sobre tipos de regiones.				30min
Aprendizaje experimental	Realización de ejercicios de los tipos de región.				45min

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Tiempo: 60min

Pedir a los estudiantes que observen el siguiente video titulado Integrales dobles tipos de regiones para ello deben visitar el link que se le presenta a continuación:

https://www.youtube.com/watch?v=nuU2hlxT1C4



Además, se sugiere leer sobre los tipos de regiones en el siguiente libro: **"Funciones de Varias Variables" Dennis Zill** desde la pág. 754-755.

Guía de Aprendizaje Autónomo:

Esta guía pretende ayudarle a mejorar la comprensión del tema "regiones generales" y su utilidad en la resolución de ejercicios. Debe ser realizada después de revisar la información sugerida, el estudiante entregará en clases las siguientes actividades:

1. **Realizar una tabla de resumen con las ideas principales sobre los tipos de regiones, límites para las variables x & y, integrales iteradas y las gráficas de las regiones de tipo I y II.**

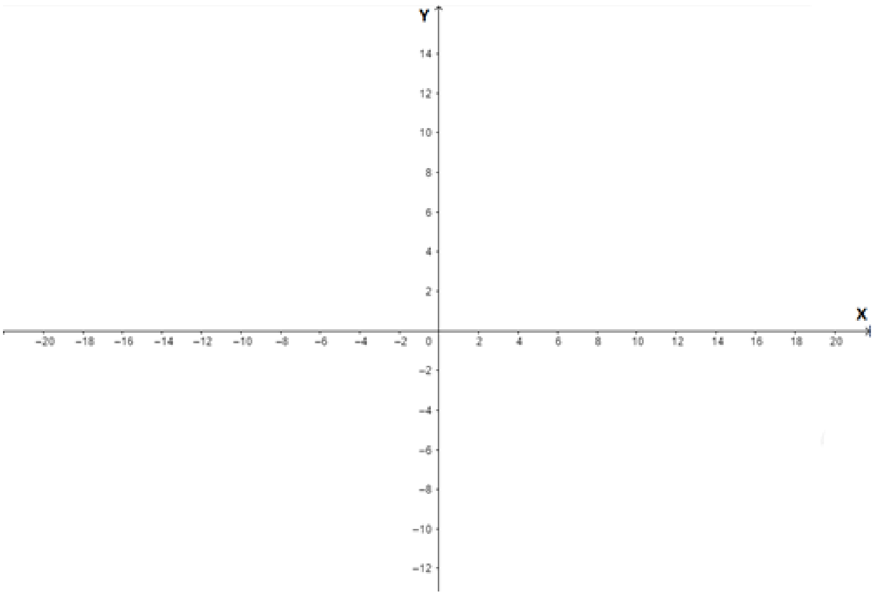
2. Resolver el siguiente ejercicio:

A partir de las funciones $x + y = -1, x + \ y = 2, y = 0, x = -2$.

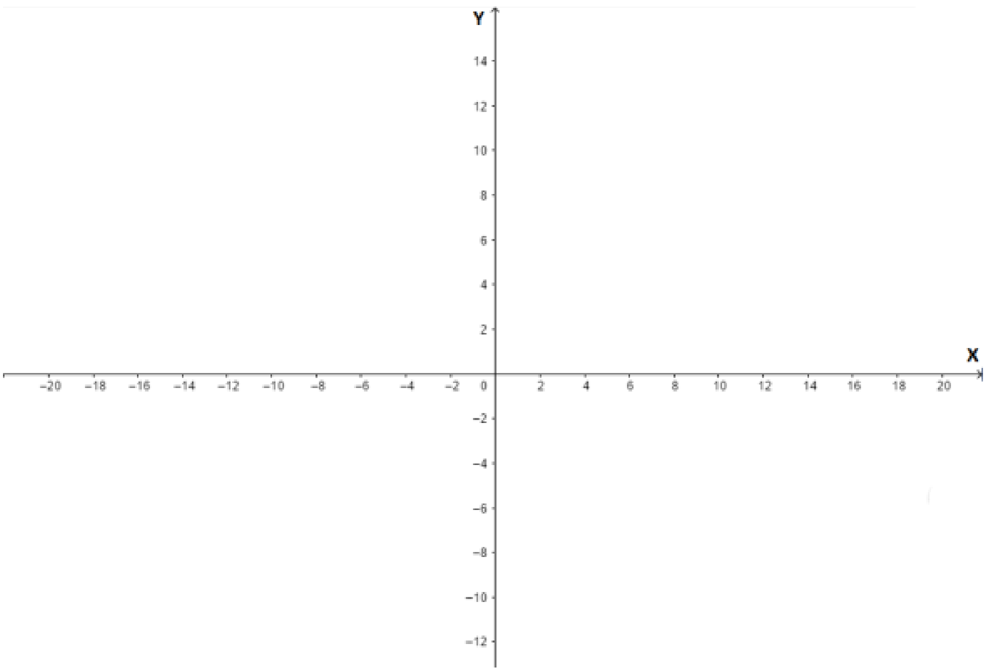
a) Dibuje la gráfica dando valores a las variables x & y.

Tabla 9: Datos obtenidos de las ecuaciones

X	Y



b) Dibuje la región acotada por las funciones y señale a qué tipo de región pertenece.



Región I ___
Justificación:
____

Región II ___
Justificación:
____

Ambos___
Justificación:
____

c) Identifique los puntos de intersección entre las funciones, los intervalos para los cuales las funciones son continuas y explique por qué son necesarios en la resolución de este tipo de ejercicios.

____
____

3. Complete el crucigrama:

REGIONES GENERALES

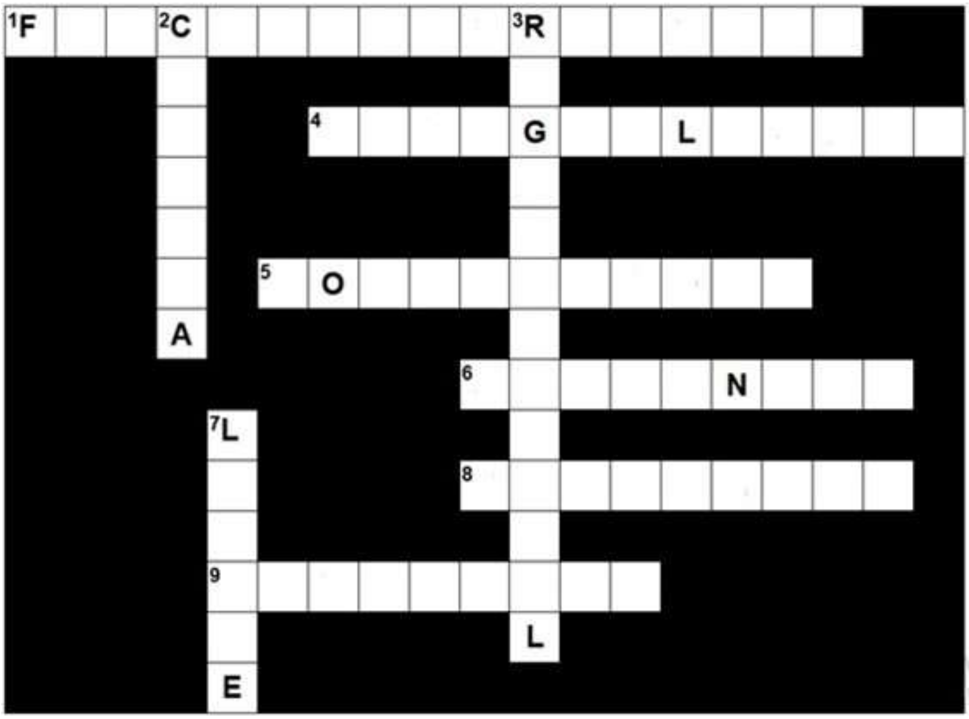


Figura 36: Regiones generales crucigrama

Horizontal:

1 Entidades matemáticas que pueden ser de grado 1, 2 o superior y limitan a una región general.

4 Usa los conceptos de tipos de regiones para facilitar los cálculos matemáticos.

5 Característica de las funciones que se puede dar en un número o en uno o varios intervalos siendo estos abiertos, cerrados semiabiertos.

6 Recinto cuyos límites están definidos para la variable y entre dos números y para la variable x entre dos funciones $f\ (y)$.

8 Recinto cuyos límites están definidos para la variable x entre dos números y para la variable y entre dos funciones $f(x)$.

Vertical:

2 Característica de una curva tal que al seguir la sucesión de puntos con un lápiz sin levantarlo llegamos al punto desde el que comenzamos.

3 Porción del espacio que no tiene una forma regular y que debido a esto el cálculo de su área se realiza mediante aproximaciones.

7 Característica de líneas y funciones, se refiere a la cercanía entre un valor y un punto.

4. Establezca al menos tres preguntas sobres las inquietudes encontradas al momento de estudiar los tipos de regiones.

1. ____
2. ____
3. ____

APRENDIZAJE CON ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE

Tiempo: 30min

El rol del docente es despejar las inquietudes, para ello con el apoyo de la maqueta se realizará preguntas acerca del video para explorar los conocimientos de los estudiantes, en caso de no ser contestadas correctamente el docente deberá retroalimentar los contenidos.

Observe la maqueta “Tipos de Región” y responda las siguientes preguntas:

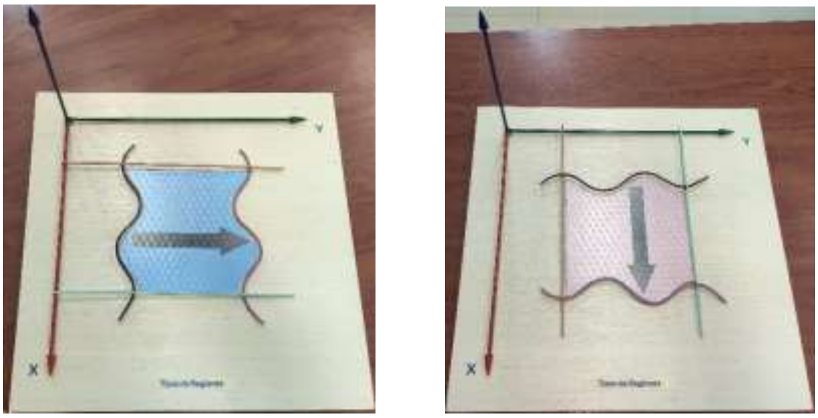


Figura 37: Maqueta de los Tipos de región I y II
Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México.

¿Cuántos tipos de regiones generales existen y cuáles son?

¿Cómo se identifica el tipo de región I?

¿Cómo se identifica el tipo de región II?

¿Qué utilidad tiene el estudio del tipo de regiones para la integración doble?

En la integración doble si se invierte el orden de los diferenciales de dA ¿sigue siendo la misma área? Justifique su respuesta.

¿En dónde se puede observar estos tipos de regiones en nuestro entorno? Cite tres ejemplos.

HOJA DE TRABAJO

Aprendizaje experimental

Regiones Generales

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

Una vez resueltas las inquietudes de los estudiantes, el docente formará grupos mínimo de cinco personas para resolver la hoja de trabajo. El rol del profesor es el de guiar al alumno. Este trabajo será entregado al profesor al final de la clase y será considerado como parte de la evaluación.

Tiempo: 45min

Ejercicio 1:

a) A partir de la figura 38 pinte la región del área acotada por las funciones en el primer cuadrante.

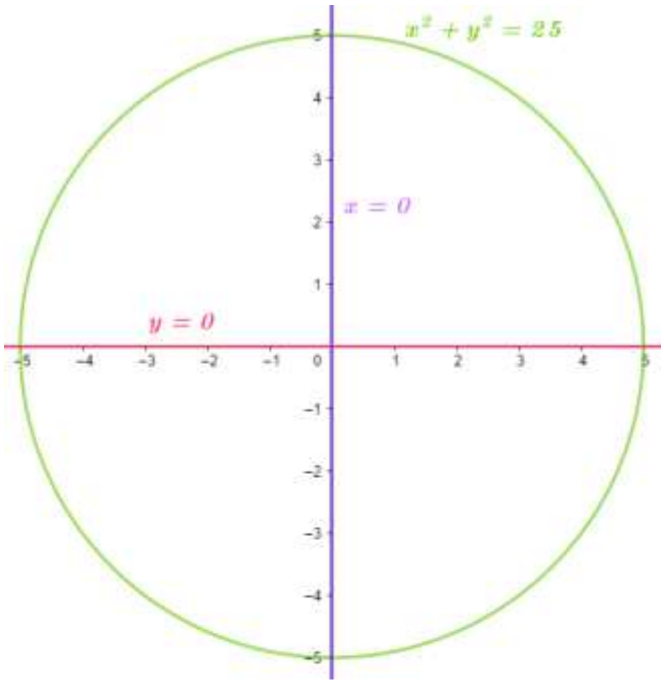


Figura 38: Gráfica del ejercicio 1

b) Señale a qué tipo de región pertenece.

Región I ___

Justificación: ____

Región II ___

Justificación: ____

Ambos___

Justificación: ____

c) Escriba los límites del área pintada

Para la variable x de_________ a _______

Para la variable y de_________ a _______

Ejercicio 2:

a) Dada las siguientes gráficas indique a qué tipo de región pertenecen cada una de ellas y establezca los límites de integración.

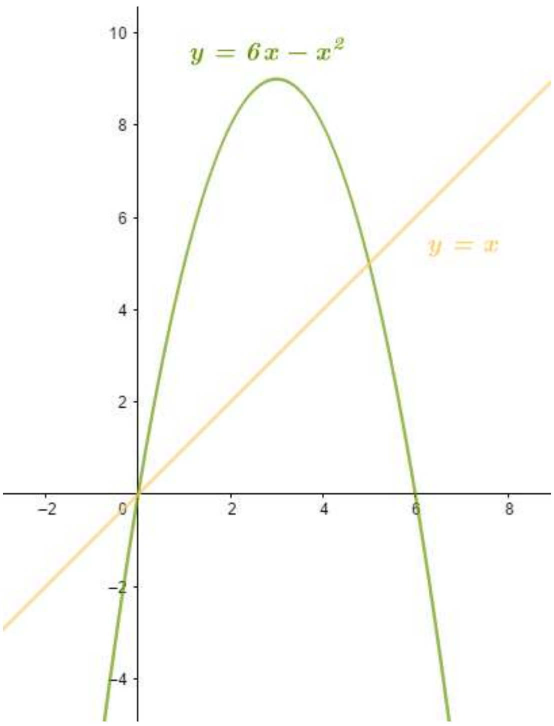


Figura 39: Gráfica del ejercicio 2 literal a

Coloree la región acotada por las funciones.

¿A qué tipo de región pertenece la gráfica?

____

____

Los límites de la región son:

____

____

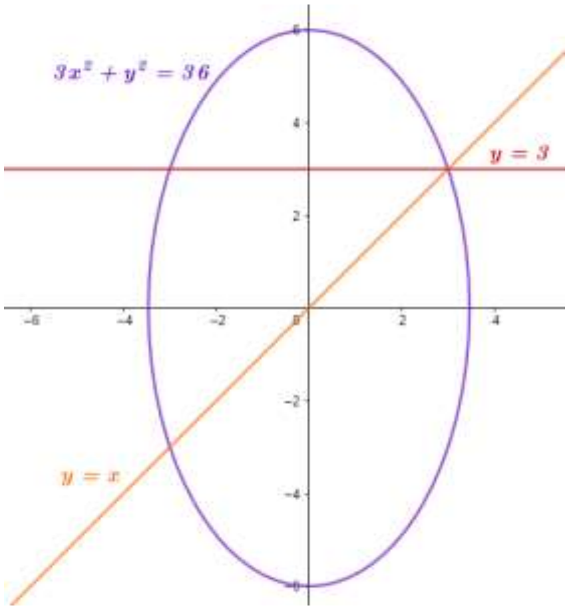


Figura 40: Gráfica del ejercicio 2 literal b

Coloree la región acotada por las funciones.

¿A qué tipo de región pertenece la gráfica?

____

____

Los límites de la región son:

____

____

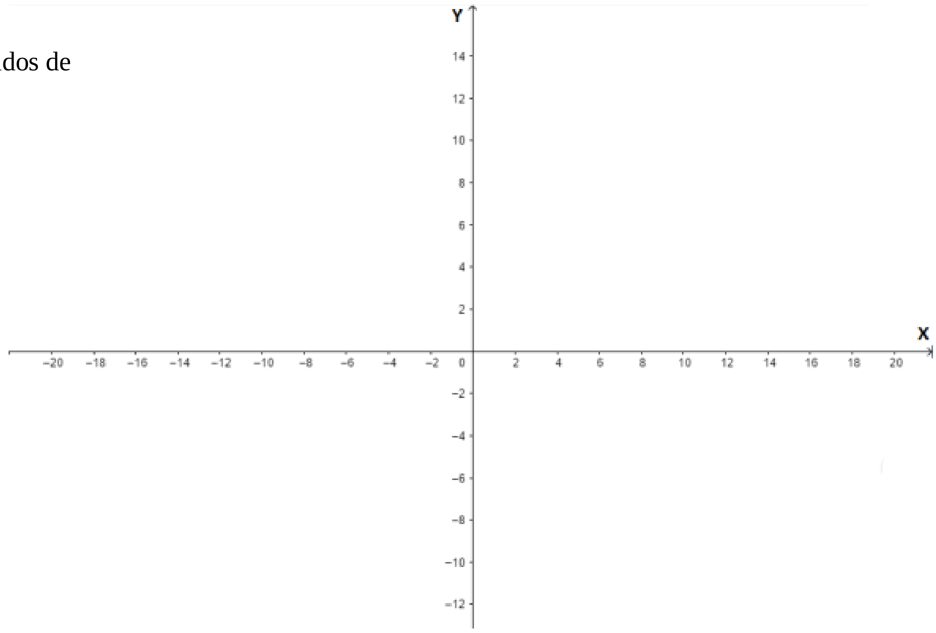
Ejercicio 3:

Dada las ecuaciones grafique e indique a que tipo región pertenece el área limitada por las mismas y establezca los límites de la región. $-x + y = 4, x = 2, y = -2$

a) Grafique ecuaciones dando valores a las variables x & y, pinte la región limitada por las funciones.

Tabla 10: Datos obtenidos de las ecuaciones.

X	Y



b) Seleccione la opción correcta que indique el tipo de región a la que pertenece la gráfica.

Región I ___

Justificación: ____

Región II ___

Justificación: ____

Ambos___

Justificación: ____

c) Escriba los límites de la región.

Para la variable x: .... hasta ......

Para la variable y: .... hasta ......

Ejercicio 4:

Observe la siguiente figura y trabaje en cada uno de los apartados:

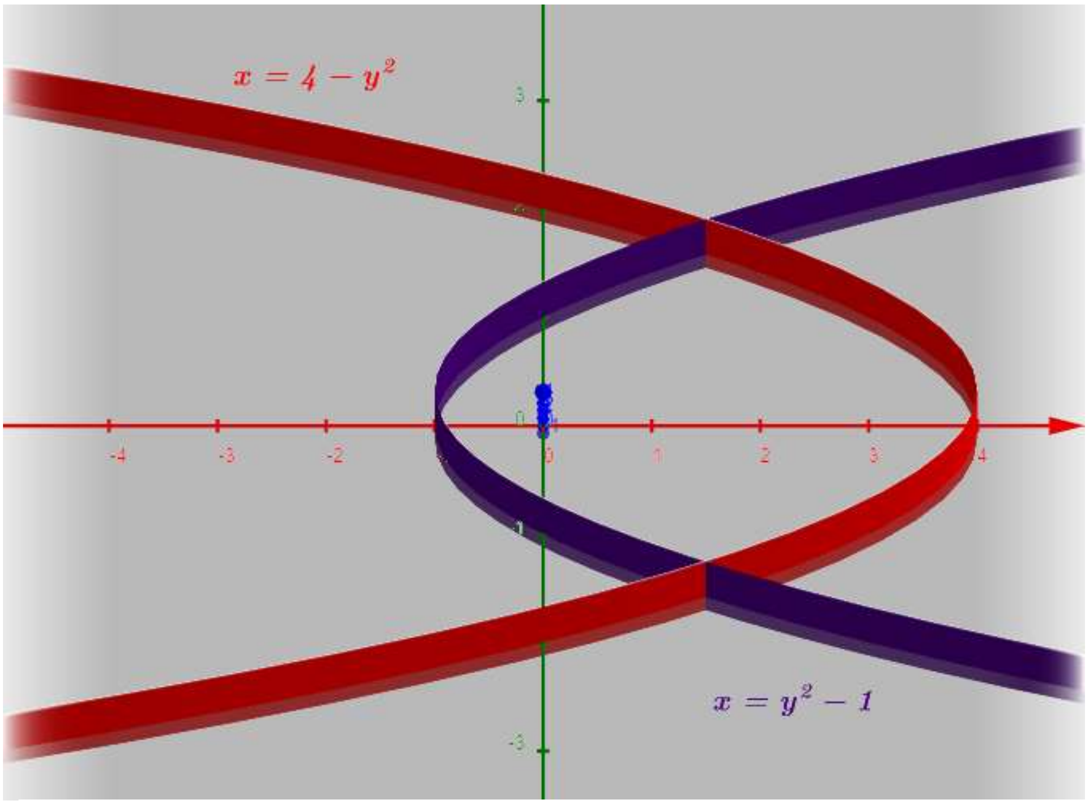
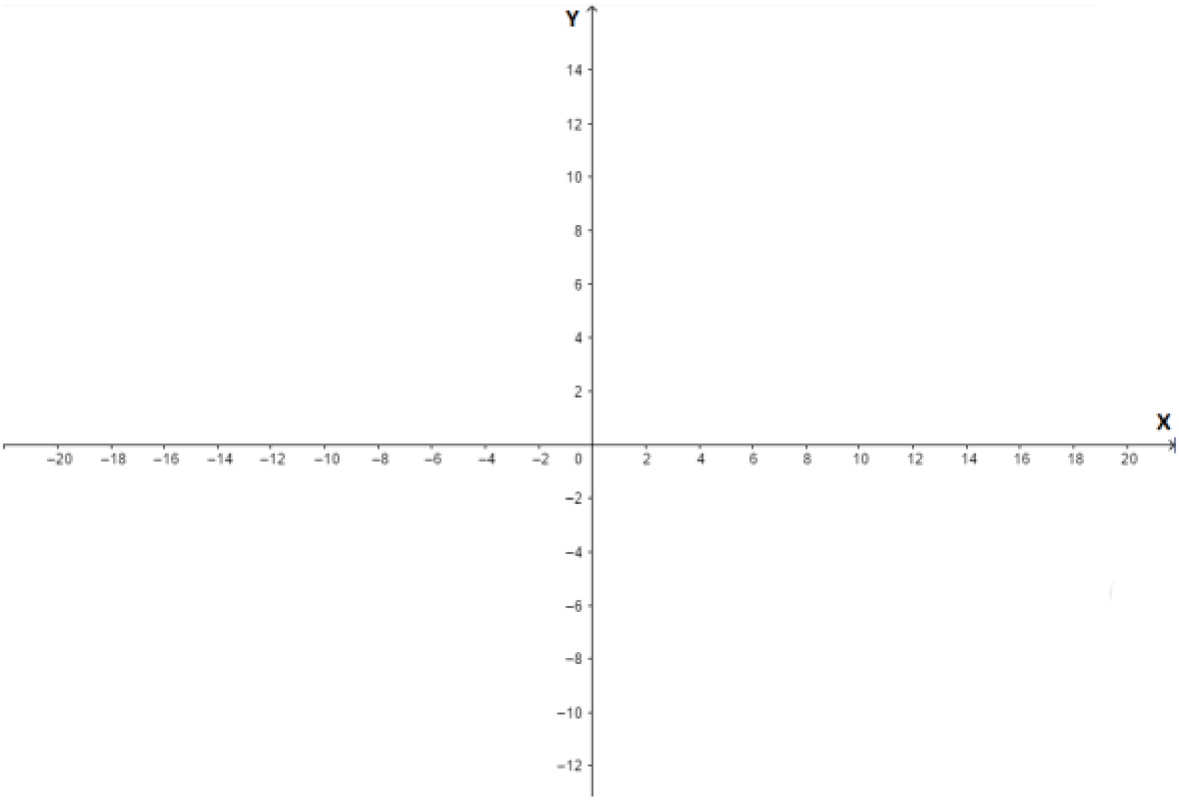


Figura 41: grafica del ejercicio 4

a) A partir de la figura 41 dibuje y pinte la región limitada por las dos funciones.



b) Describa el procedimiento que siguió para identificar el tipo de región.

____

____

____

c) Escriba en forma de intervalo los límites de la región para las variables x & y

____

____

____

d) Escriba en donde cree que podría aparecer esta figura y su utilidad.

____

____

____

____

MATRIZ DE EVALUACIÓN PARA LA PARTICIPACIÓN Y EL TRABAJO DEL ESTUDIANTE

Tiempo: 45min

TEMA:

INTEGRANTES DEL GRUPO:

Tabla 11: Matriz de evaluación.

DIMENSIONES	**NIVELES DE VALORACIÓN**			TOTAL	
	MUY SATISFACTORIO 3	SATISFACTORIO 2	POCO SATISFACTORIO 1		
1.- Exposición: descripción, justificación y proceso de desarrollo. (3min)					
EXPOSICIÓN CLARA Y CONCRETA DEL EJERCICIO O SITUACIÓN USADA COMO EJEMPLO.	Los estudiantes exponen de forma clara y concreta los 4 elementos mencionados.	Los estudiantes exponen de forma clara y concreta de 2 a 3 de los 4 elementos mencionados.	Los estudiantes exponen de forma clara y concreta uno de los 4 elementos mencionados.		/3
2.- ¿Cuál es la conclusión y el aporte de este al conocimiento o beneficio del estudio del tema? (2min)					
APORTE AL CONOCIMIENTO O BENEFICIO DEL ESTUDIO DEL TEMA.	Existe una aporte novedoso al tema estudiado.	Existe una escaso aporte al tema estudiado.	Existe un mínimo aporte al tema estudiado.		/3
3.- Pregunta del guía o docente (1min)					
RESPUESTA CLARA Y CONCRETA (HACE REFERENCIA DIRECTA AL TEMA)	Los estudiantes responden de forma clara y concreta a la pregunta planteada.	La respuesta de los estudiantes demuestran al menos un aspecto de los dos contenidos en la dimensión.	Los estudiantes no demuestran claridad en su respuesta.		/3
4.- Seguridad, conocimiento del tema y utilización adecuada del lenguaje matemático.					
DEMOSTRÓ SEGURIDAD, CONOCIMIENTO DEL TEMA Y UTILIZACIÓN ADECUADA DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN LA EXPOSICIÓN Y RERSPUESTAS A LAS PREGUNTAS PLANTEADAS.	Los estudiantes evidenciaron los 3 aspectos mencionados en toda su exposición.	Los estudiantes evidenciaron 2 de los 3 aspectos mencionados en toda su exposición.	Los estudiantes evidenciaron 1 de los 3 aspectos mencionados en toda su exposición.		/3
TOTAL OBTENIDO SUSTENTACIÓN:					/12
NOTA SOBRE CINCO SUSTENTACIÓN:					/5
TOTAL OBTENIDO TRABAJO EN CLASE SOBRE CINCO:					/5
NOTA TOTAL FINAL SOBRE DIEZ:					/10

CÁLCULO DE ÁREA MEDIANTE INTEGRAL DOBLE

Figura 42: Laguna gigantesca MahaSamutr-Tailandia
Recuperado de: https://natacioncs.com/blog/wp-content/uploads/2018/08/pisci-tailandia-grande.jpg

MahaSamutr se ubica a 200 km al sur de la capital de Tailandia, Bangkok, y posee una laguna cristalina navegable de siete hectáreas, combina privacidad y una sensación de tranquilidad, los residentes tienen acceso a una playa exclusiva y country clubs.

Si te interesa conocer algo más visita:
https://www.youtube.com/watch? v=gobL9gGwVxs

"Sé siempre tú mismo, exprésate, ten fe en ti mismo, no salgas y busques una personalidad exitosa para después copiarla"

Bruce Lee.

Plan de clase

Objetivos:

- Recordar el concepto de área de un sólido a partir de integrales dobles.
- Identificar el área o recinto de integración a través del análisis de gráficas de funciones.
- Calcular el área de una región plana mediante integración doble.

Secuencia didáctica

Tabla 12: Plan de clase.

<table>
<tr><th>SITUACIÓN</th><th>ACTIVIDADES</th><th>INDICADORES DE LOGRO</th><th>RECURSOS</th><th>EVALUACIÓN</th><th>TIEMPO</th></tr>
<tr><td>Anticipación</td><td>Relación de conceptos de funciones con la integral definida mediante una sopa de letras.

Revisión del procedimiento y las condiciones que se utilizan en el concepto de integral definida y el cálculo de área bajo la curva.</td><td rowspan="3">Contesta correctamente las preguntas planteadas.

Describe imágenes de los diferentes tipos de región.

Describe el material concreto.

Resuelve ejercicios sobre el cálculo de áreas mediante integrales dobles.</td><td rowspan="3">Hojas de trabajo.

Maquetas.

Pizarra.

Marcadores.

Borrador.</td><td rowspan="3">Trabajo cooperativo.

Presentación de hoja de evaluación 30min.</td><td>15min</td></tr>
<tr><td>Construcción</td><td>Descripción de las características geométricas presentes en el material concreto usado.

Graficación de las diferentes perspectivas observadas desde los ejes X, Y, Z.

Identificación de los diferentes tipos de región I, II.

Resolución algebraica de los ejercicios propuestos.</td><td>45min</td></tr>
<tr><td>Consolidación</td><td>Identificación de los tipos de región a partir de funciones.
Investigación de superficies cuádricas en la que se indique en donde se evidencia estos cuerpos geométricos.</td><td>30min</td></tr>
</table>

ANTICIPACIÓN:

Aprendizaje Autónomo

Tiempo: 15min

(La siguiente plantilla debe ser realizada por los estudiantes en casa, las palabras de este ejercicio serán utilizadas en las actividades del aula)

1. **En la siguiente sopa de letras encuentre palabras relacionadas a las características visuales de dos funciones que se cortan mutuamente:**

Sopa de letras de:
CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONES EN EL PLANO

P	U	D	I	R	I	S	E	G	U	N	D	O
A	U	D	E	I	N	B	O	R	D	R	T	U
C	L	N	V	U	T	A	V	A	O	O	E	O
O	I	V	T	É	E	N	S	R	O	S	A	F
A	C	B	T	O	R	E	I	C	U	Í	S	U
B	D	R	P	B	S	T	O	U	R	P	R	N
A	O	N	É	V	E	E	I	T	U	M	A	C
J	D	I	J	E	C	C	E	C	I	B	D	I
O	N	S	J	L	C	M	D	A	E	N	I	O
I	Y	N	S	S	I	T	R	O	J	A	A	N
R	Y	I	S	S	Ó	A	R	R	I	B	A	E
E	N	V	E	D	N	S	D	N	A	S	Í	S
C	O	N	C	A	V	I	D	A	D	L	B	C

Figura 43: Funciones en el plano

- Relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda (Plural). _________________________
- Grado de las funciones que tienen la variable independiente elevada al cuadrado. _________________________
- Dirección de la concavidad de una función cuadrática con término ax^2. _________________________
- Característica de una función cuadrática que puede estar dirigida hacia arriba o hacia abajo. _________________________
- Dirección de la concavidad de una función cuadrática con término $-ax^2$. _________________________

- Punto en el que coinciden los dos lados de un ángulo o de un polígono. ________________________
- Pueden ser coplanares, colineales y ser representados en el plano o el espacio. ________________________
- Lugar en que se cortan o se encuentran dos líneas, dos superficies o dos sólidos. ________________________
- Definida por la existencia de un único plano donde una mitad es el reflejo de la otra. ________________________

2. Conteste las siguientes preguntas.

a) ¿Qué representa la integral definida?
____
____
____

b) ¿Cuál es el procedimiento que se realizó para llegar al concepto de integral definida?
____
____
____

c) ¿Qué sucede si la función a integrar es positiva y negativa dentro del intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$?
____
____
____

CONSTRUCCIÓN

Aprendizaje con acompañamiento del docente

Tiempo: 45min

1. Observe y analice cada elemento geométrico.

Presente la siguiente maqueta y junto con los estudiantes trabaje en los siguientes apartados:

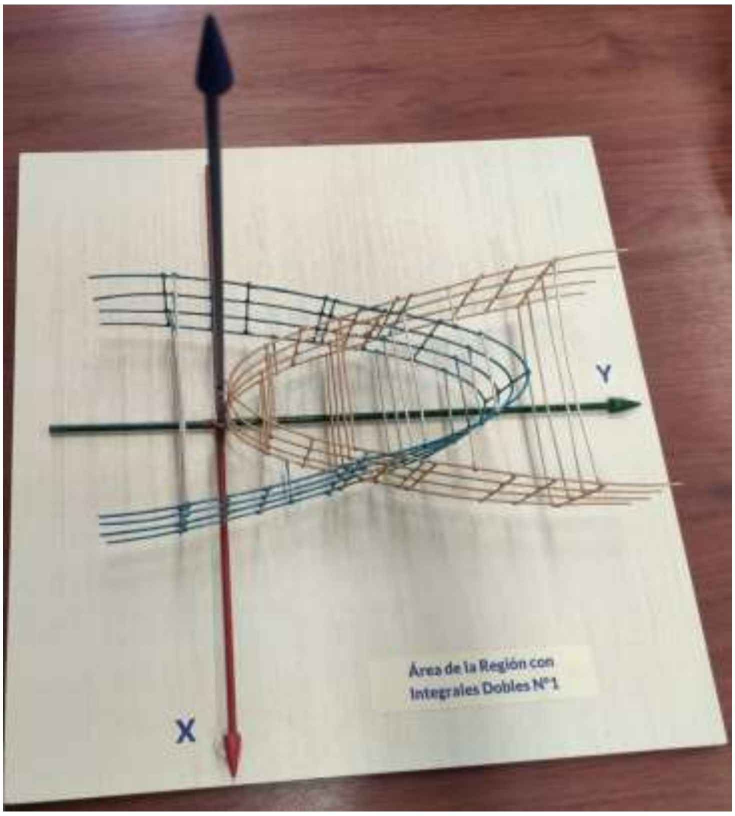
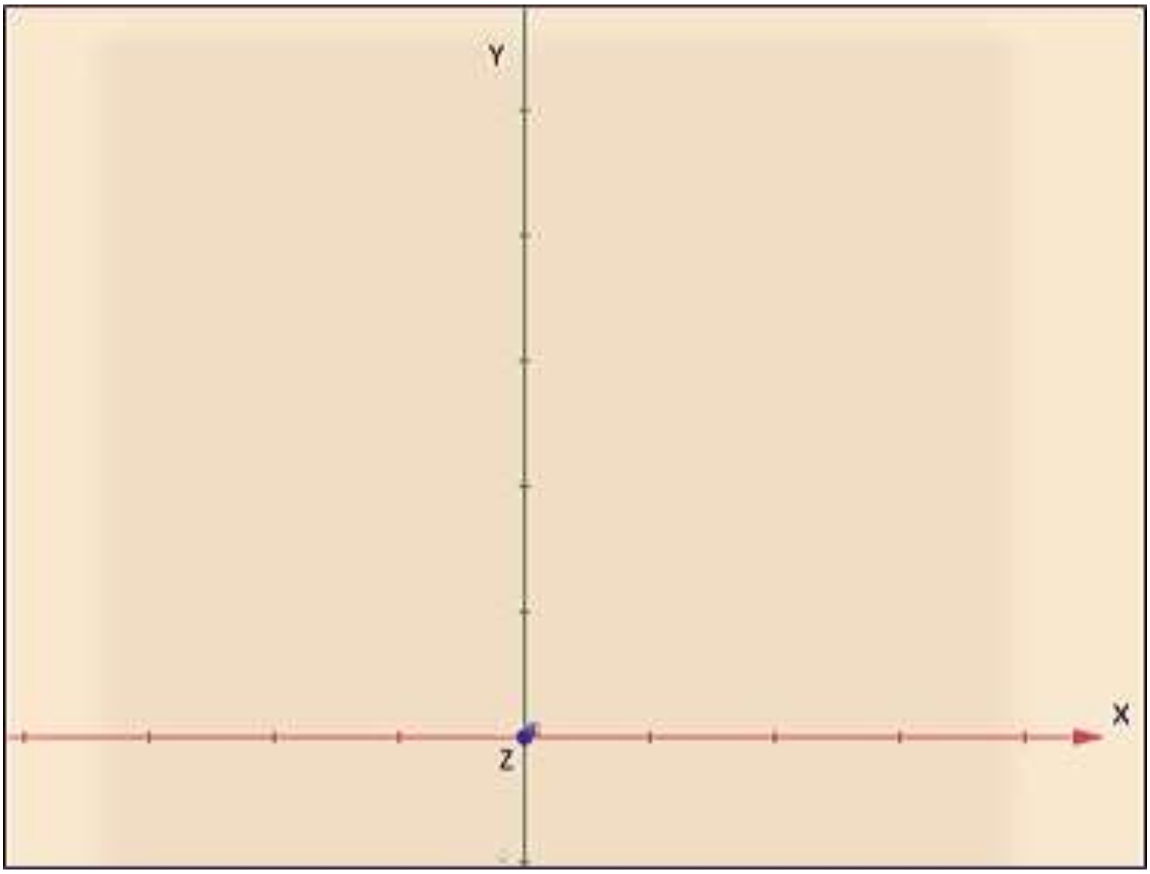


Figura 44: Maqueta para determinar el área de la región con integrales dobles
Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México.

a) Complete:

- La maqueta consta de dos .... las cuales son de .... grado.
- La una tiene concavidad hacia .... y la otra tiene .... hacia ....
- Una de las funciones tiene el .... en el origen y la otra corta en dos……. el eje ....
- Las .... son simétricas respecto al eje ....
- Las funciones se .... en dos puntos.

b) Construya un gráfico de la maqueta vista desde el eje Z, nombre a la función de concavidad positiva $f(x)$ y a la de concavidad negativa $g(x)$ además nombre a los puntos de intersección entre las dos funciones. Finalmente raye o pinte el área encerrada por las dos funciones.



c) Verifique su trabajo y seleccione la gráfica que más parecido tenga con su respuesta:

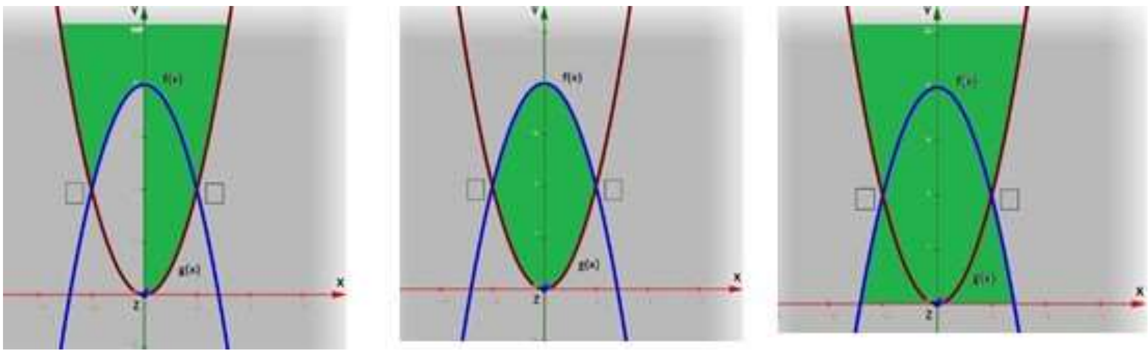


Figura 45: Gráficas del ejercicio 1

a) b) c)

Recordando que el área de un rectángulo viene dada por $A = \_\_ \times \_\_$. Trace y describa el gráfico realizado en el punto anterior y escriba en ese caso cuál sería su base y cuál su altura.

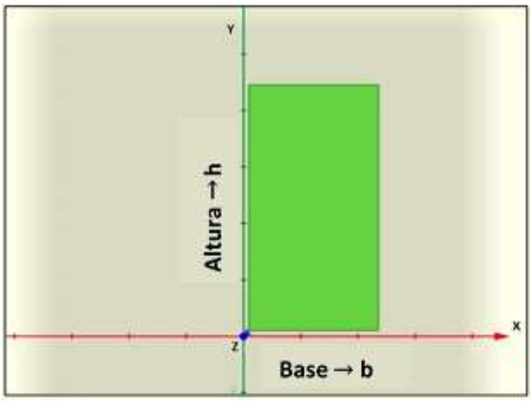
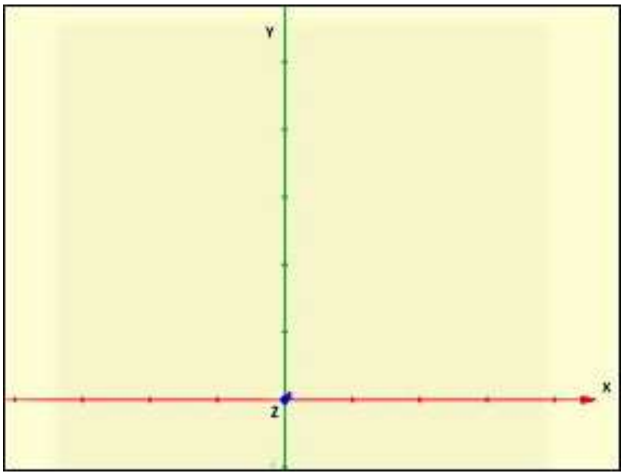


Figura 46: Área del rectángulo



Base=

Altura=

Área= __________ × __________

d) Identifique el tipo de región de la pregunta 1 literal c. Explique su elección y detalle con respecto a que variable se realizaría la primera integral.

____

____

e) Complete:

Los límites de la región para la variable x van desde ________ hasta _______ y para la variable y van desde _______ hasta ________.

Nótese que hasta ahora tiene todos los elementos necesarios para escribir la expresión del área mediante integrales dobles. Por lo tanto, la expresión que permite calcular el área de la región encerrada por las funciones es:

$$A = \int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_} 1.\, d\_\_\, d\_\_$$

2. Resolución parte algebraica:

Las funciones que se han construido en la maqueta son $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ y $\boldsymbol{g(x) = 8 - x^2}$ con lo visto anteriormente plantee la integral y calcule el área encerrada por estas dos funciones.

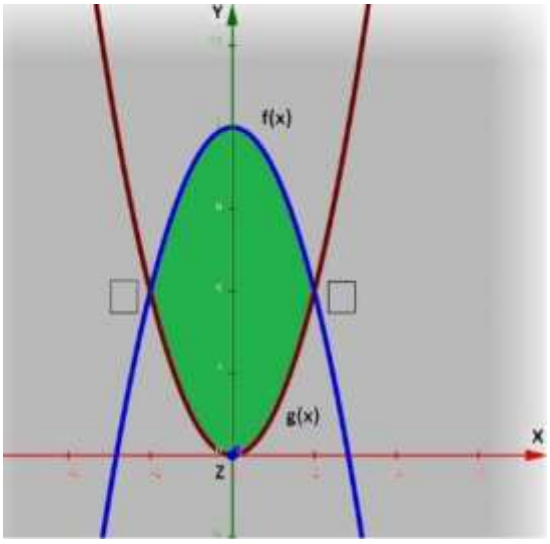


Figura 47: gráfica del área entre dos funciones

Resolución:

CONSOLIDACIÓN

Aprendizaje Autónomo

Tiempo: 30min

1. Evalúe $\iint_R (x+y)dA$ sobre la región limita por las funciones dadas:

$$x = y^2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

a) Seleccione la gráfica correcta de las funciones.

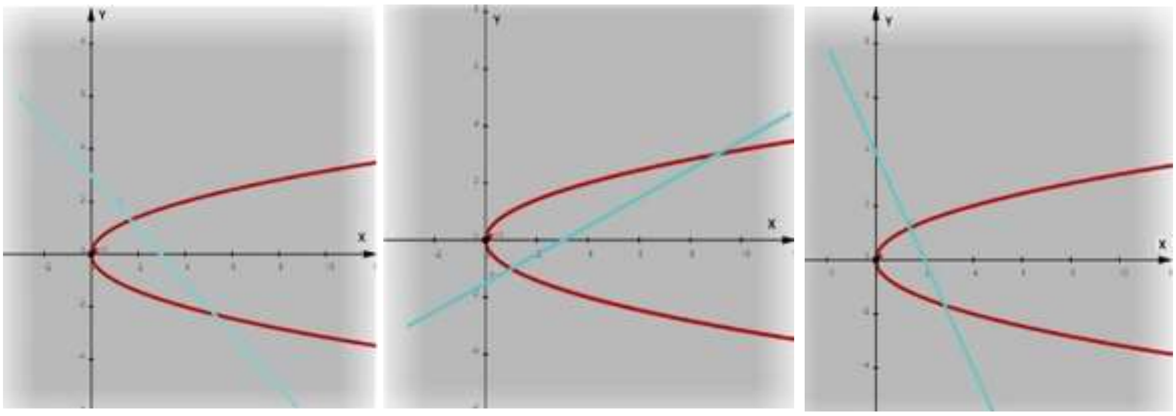
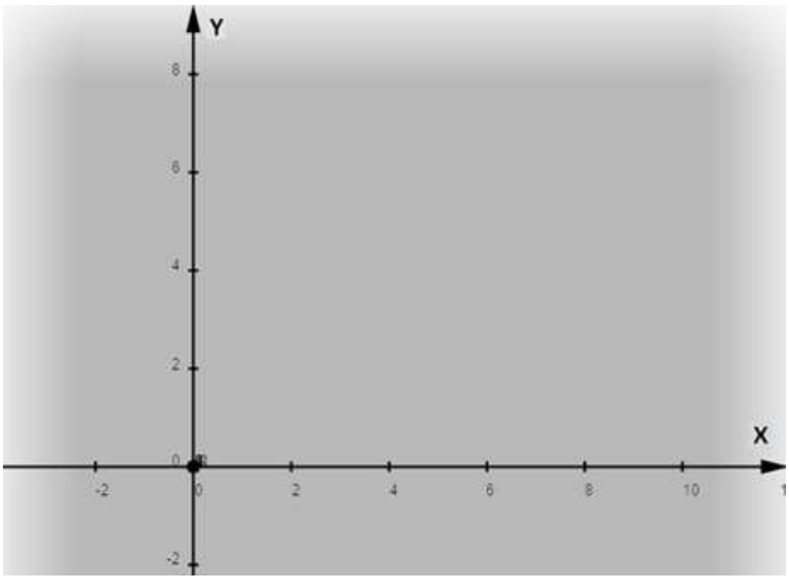


Figura 48: Gráficas de funciones intersectadas.
Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México.

1 **2** **3**

b) Trace la gráfica de las funciones y pinte la región a integrar.



c) Observe y escriba a que región pertenece la gráfica. Justifique su respuesta.

____

____

____

Plantee la o las integrales y resuelva:

Resolución:

2. En la siguiente tabla, investigue cuatro superficies cuádricas curvas e indique en donde podemos evidenciar estos cuerpos. Sugerencia puede visitar:
https://matematicasn.blogspot.com/2015/12/superficies-cuadricas-ejercicios-y.html

Tabla 13: Superficies cuádricas

SUPERFICIE CUÁDRICAS ECUACIÓN	**EJEMPLOS (tres de cada uno)**

HOJA DETRABAJO

Aprendizaje experimental

Cálculo de área mediante integral doble

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

OBJETIVO:

- Identificar el área de integración utilizando la maqueta.
- Determinar el área de la región a través de técnicas de integración en regiones tipo I y II.

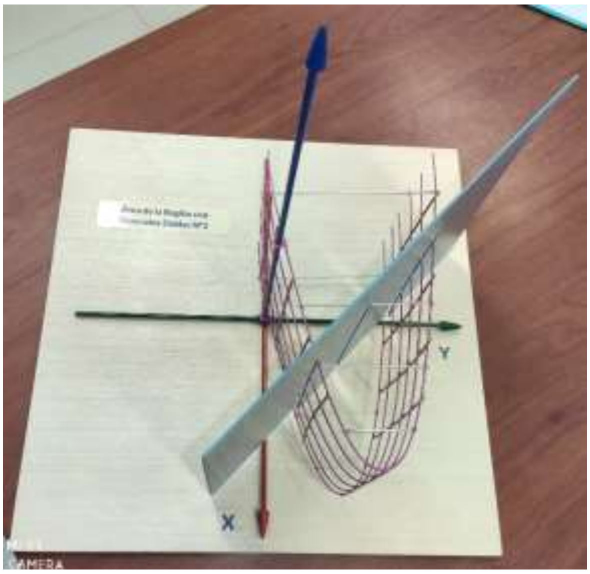


Figura 49: Maqueta de área de la región
Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México.

Materiales:

- Maqueta.
- Lápiz.
- Papel.
- Calculadora

Fundamentación teórica:

El área de cualquier región plana R es el valor de la integral doble.

$$A = \iint_R 1.dxdy$$

Procedimiento:

1. Con el uso de la maqueta, realizar las siguientes lecturas correspondientes al cálculo de área y anotarlas en la tabla. A partir de las funciones $y = -x^2 + 3x,\ y = -2x + 4$

Tabla 14: Datos obtenidos de las ecuaciones.

Región	Seleccionar	Límite	Datos	Área de la región
Tipo I		a		$A = \int_{\_\_}^{\_\_} \int_{\_\_}^{\_\_} 1.d\_\_d\_\_$
		b		
		$g_1(x)$		
		$g_2(x)$		
Tipo II		c		$A = \int_{\_\_}^{\_\_} \int_{\_\_}^{\_\_} 1.d\_\_d\_\_$
		d		
		$h_1(x)$		
		$h_2(x)$		

Con los datos encontrados en la tabla anterior plantee la integral y calcule el valor del área.

Resolución:

Conclusión:

El área acotada por las funciones es: ____

HOJA DE EVALUACIÓN

Cálculo de área mediante integral doble

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

1. Escriba cinco ideas de la importancia que tiene calcular el área de un sólido sobre una región R mediante la doble integral. 5p.

____

____

____

____

____

2. En que contextos le serviría lo aprendido en clase, explique dos situaciones. 2p.

____

____

____

____

____

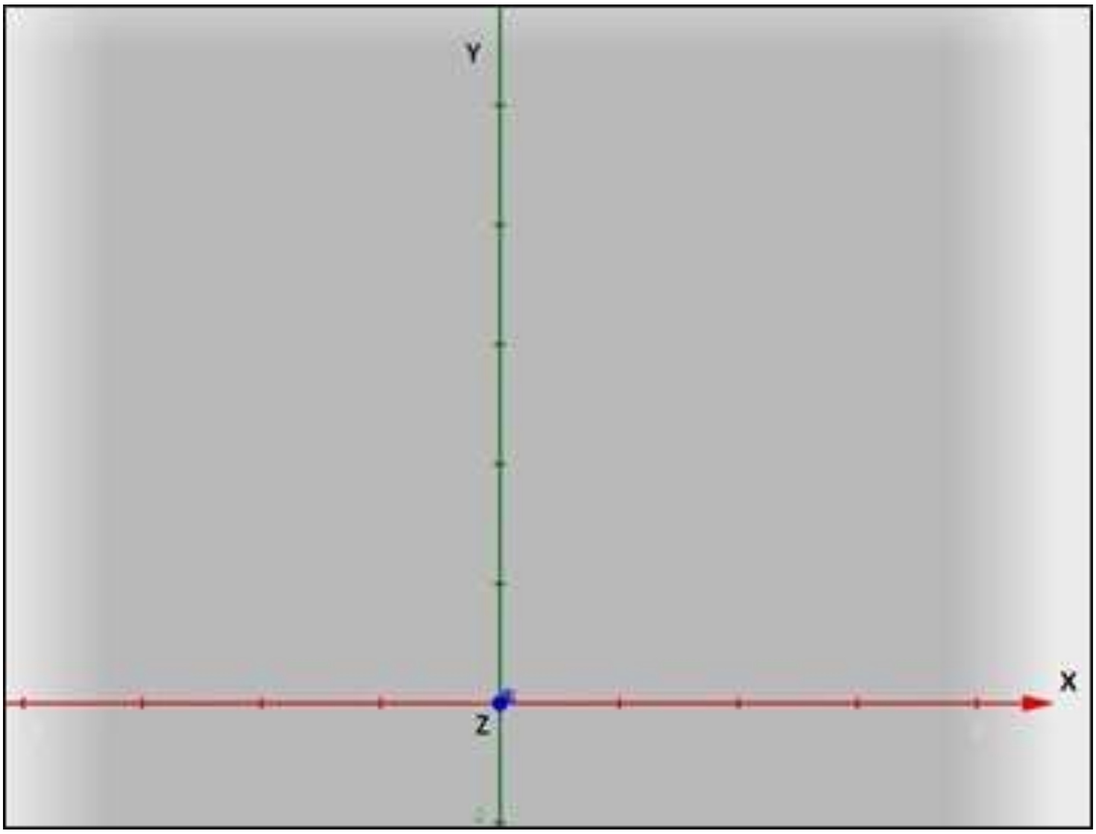
3. ¿Cómo se plantea una integral doble para calcular el área de una región? Explique 3p.

____

____

____

4. Calcule el área de la región R que está acotada por las siguientes funciones $y = -x + 3$
$y = x^3 + 1 \quad x = 0$ (gráfico 5p resolución algebraica 4p respuesta 1p)



Resolución:

Resultado:

El área acotada por las funciones es: ________________________________

Figura 50: Radiotelescopio chino FAST.
Fuente: http://img2.rtve.es/v/3735110?w=1600&preview=1474922950152.jpg

Es el radiotelescopio más grande del mundo, está construido en China su objetivo es investigar el universo para encontrar nuevas señales de radio y, así, triangular su posición para ver de dónde proceden. Las ráfagas de radio rápidas, conocidas como FRB, son uno de los misterios del espacio, pertenecen a los descubrimientos "recientes" (2007) y se han convertido para los investigadores en una obsesión por encontrar más y más, ya que son misteriosas y se desconoce de dónde proceden.
Si te interesa conocer más visita: https://www.youtube.com/watch?v=JKZYS2mOHQM

Plan de clase

Objetivos:

- Recordar el concepto de volumen a partir de integrales dobles.
- Representar gráficamente funciones de varias variables para ubicar límites y regiones a integrar.
- Aplicar técnicas, propiedades y procedimientos de integración doble para calcular el volumen de sólidos.

Secuencia didáctica:

Tabla 15: Plan de clase.

SITUACIÓN	ACTIVIDADES	INDICADORES DE LOGRO	RECURSOS	EVALUACIÓN	TIEMPO
Anticipación	Relación de conceptos bidimensionales con los tridimensionales mediante una sopa de letras. Descripción del sistema de referencia tridimensional a través de gráficas. Ubicación de sólidos en las distintas regiones determinadas por los planos X, Y, Z.	Contesta correctamente las preguntas planteadas. Describe imágenes. Describe material concreto. Resuelve ejercicios sobre el cálculo de volúmenes mediante integrales dobles.	Hojas de trabajo. Maquetas. Pizarra. Marcadores. Borrador.	Trabajo cooperativo. Presentación de hoja de evaluación. 30min	15min
Construcción	Descripción detallada de los elementos geométricos de la maqueta asignada en esta temática. Identificación de los elementos de la maqueta pertenecen las funciones y viceversa.				45min

	Graficación de las perspectivas vistas desde los ejes X, Y, Z. Graficación de la porción del sólido limitado por funciones según convenga. Tabulación de datos obtenidos y realización correcta del proceso algebraico para la resolución de ejercicios.				
Consolidación	Resolución de los ejercicios planteados sobre el cálculo de volumen de sólidos. Investigación de ejemplos en donde se aplique el cálculo mediante integración doble.				30min

ANTICIPACIÓN:

Aprendizaje autónomo

Tiempo: 15min

Se sugiere realizar las siguientes preguntas a los estudiantes para recordar definiciones y conceptos a cerca de volumen de un sólido.

1. ¿Qué representa la coordenada z en el espacio?

____

____

____

2. ¿Por qué la función *z* o *f (x, y)* es igual a 1 en el cálculo de áreas? Explique su respuesta.

____

____

3. ¿Puede un elemento, objeto o cuerpo geométrico existir en el espacio si el espesor (z) es igual a cero? Explique su respuesta.

____

____

____

4. ¿Cuántas regiones tridimensionales forman los planos X, Y, Z en la siguiente figura?

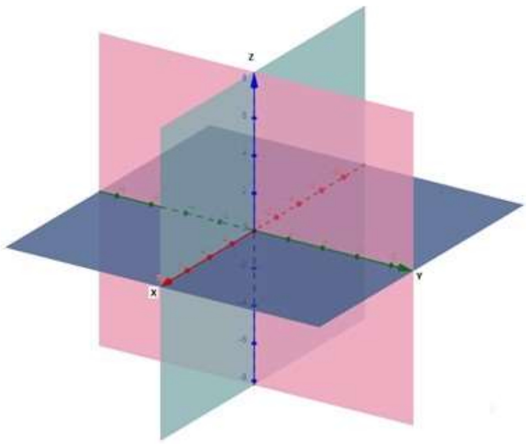


Figura 51: Sistema de coordenadas tridimensional

____

____

____

5. ¿En qué octante se encuentra ubicada la esfera?

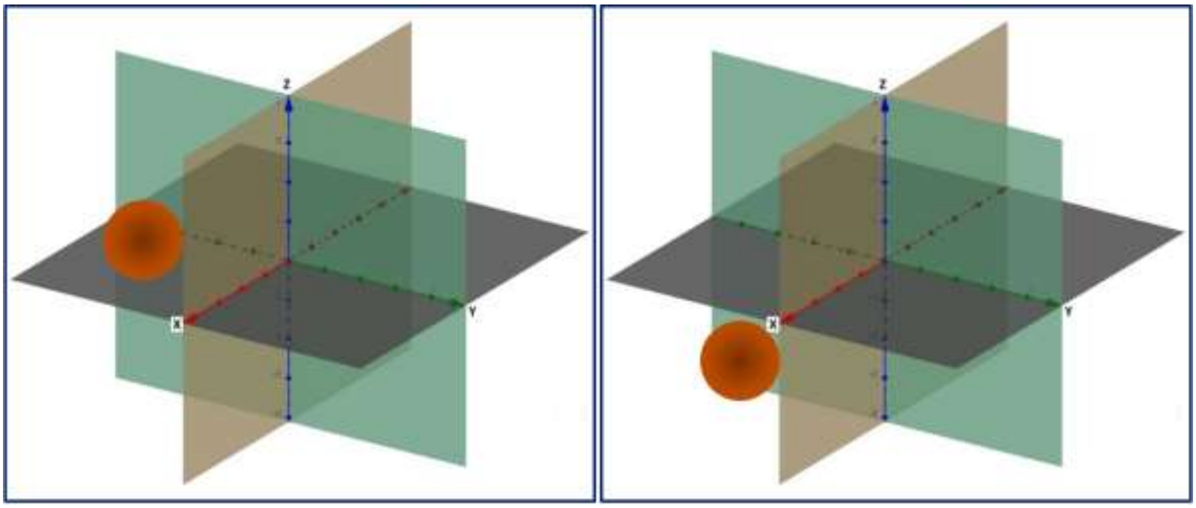


Figura 52: Regiones del sistema tridimensional

________________________ _________________________

CONSTRUCCIÓN

Aprendizaje con acompañamiento docente

Tiempo: 45min

Con la finalidad de orientar uno de los procesos utilizados para el cálculo de volúmenes de sólidos mediante integrales dobles se presenta el siguiente material concreto para ser analizado:

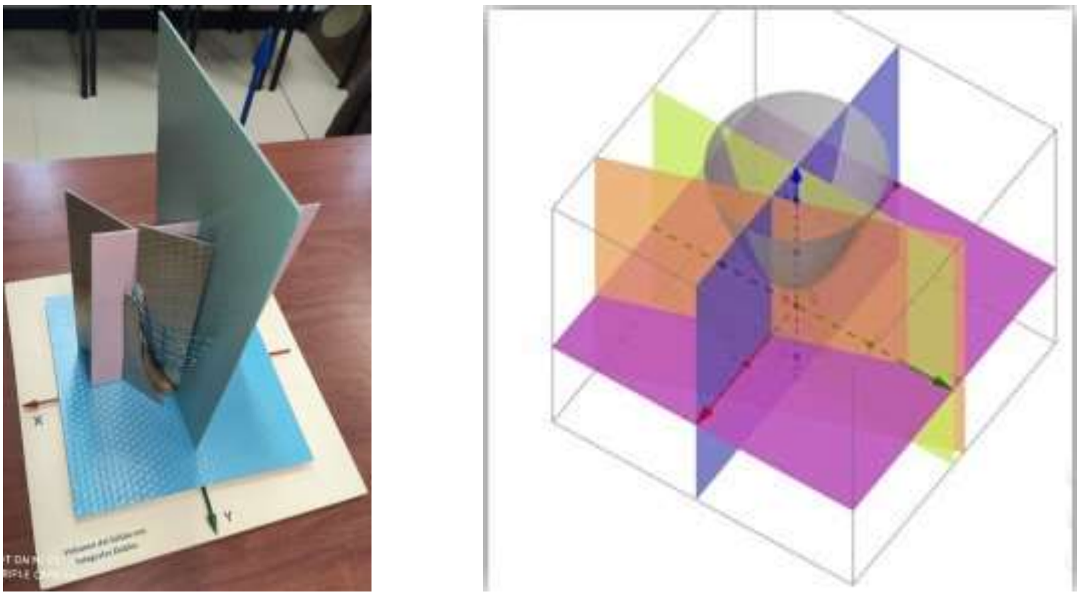


Figura 53: Realidad vs Imagen

Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México.

La siguiente actividad que debe ser realizada en conjunto con los estudiantes en ella se facilita un procedimiento para calcular el volumen de un sólido limitado por planos mediante la integral doble:

1. Dibujar las funciones que limitan al sólido.

a) ¿Cuántos y cuáles sólidos y planos puede observar?

____

____

____

b) La siguiente función $z = 1 + x^2 + y^2$ pertenece a uno de los elementos de la maqueta. ¿Cuál es este elemento?

____

____

c) Sabiendo que el plano que se intersecta por una sección pequeña del solido tiene por ecuación $3x + y = 3$ observe ¿qué elementos dividen simétricamente a otro elemento? ¿cuáles son las ecuaciones de cada uno de esos elementos?

____

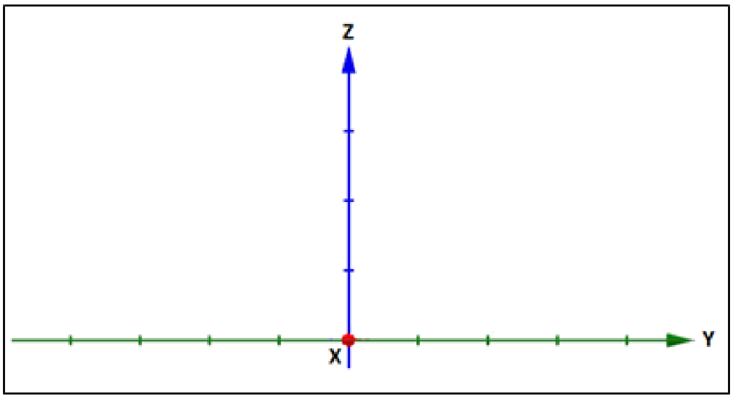
____

____

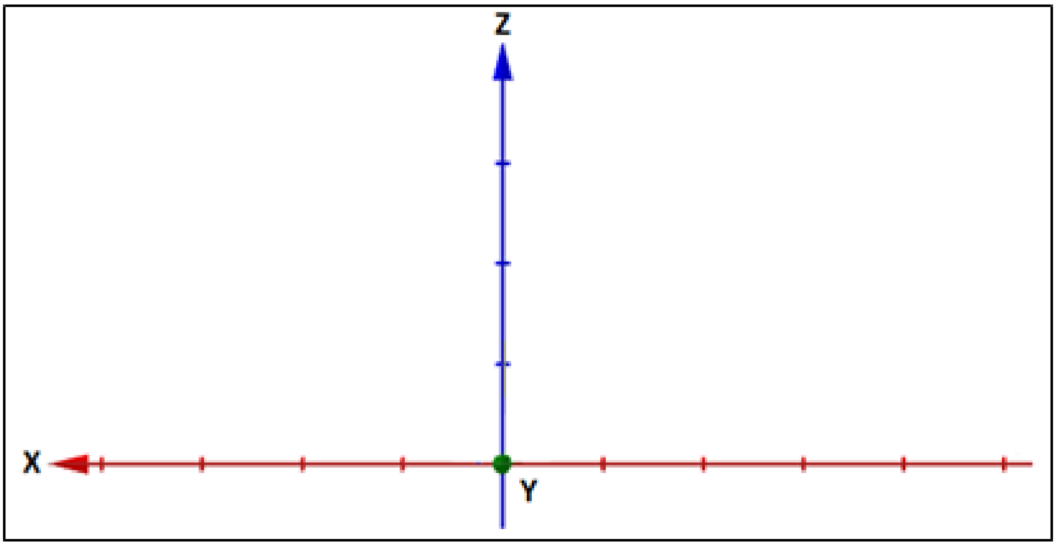
2. Identificar la superficie representativa (proyección sobre el plano XY de la intersección de las funciones).

a) Bosqueje las vistas de la maqueta observadas desde:

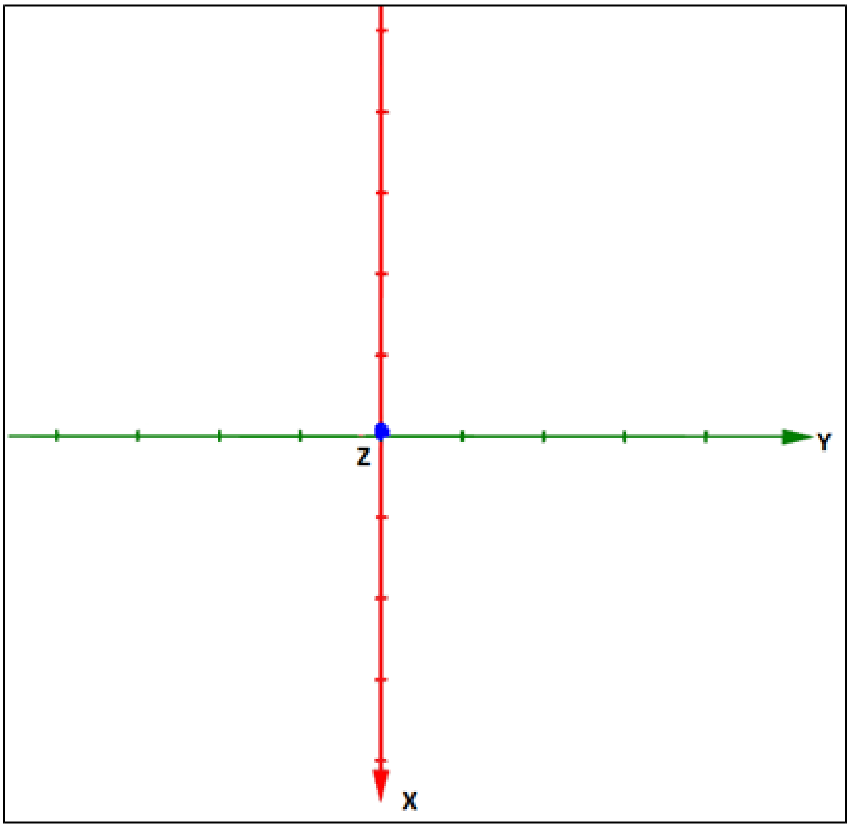
Vista desde el eje X



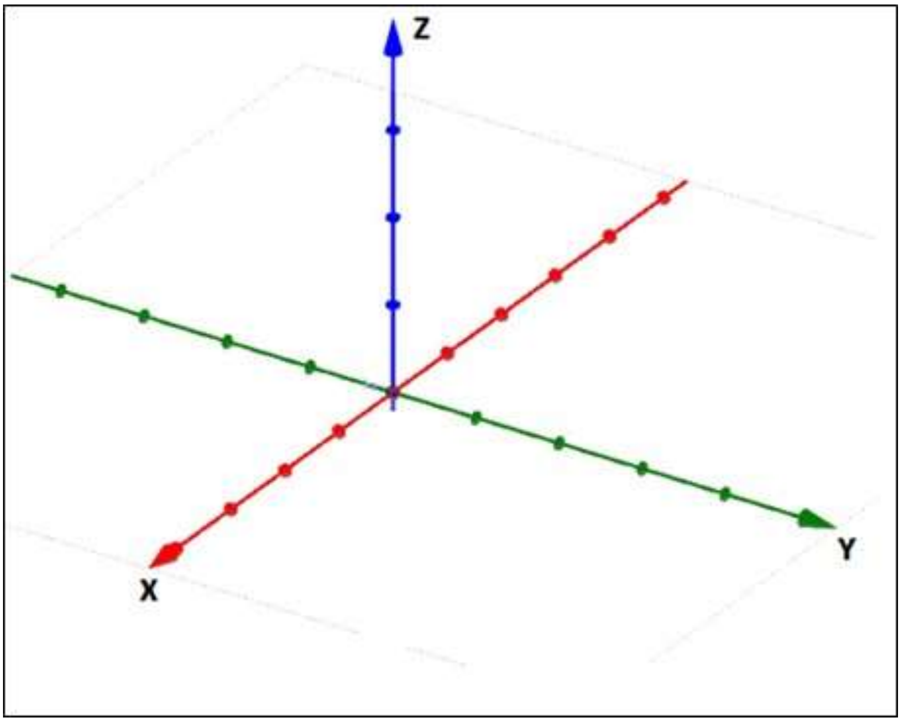
Vista desde el eje Y



Vista desde el eje Z

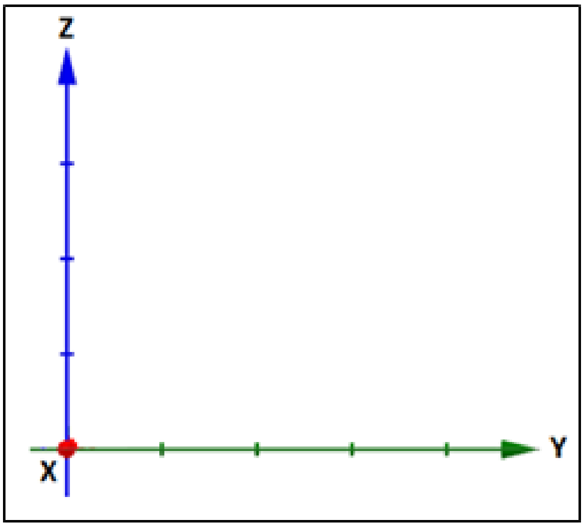


b) Bosqueje lo que se observa en el primer octante de la maqueta:

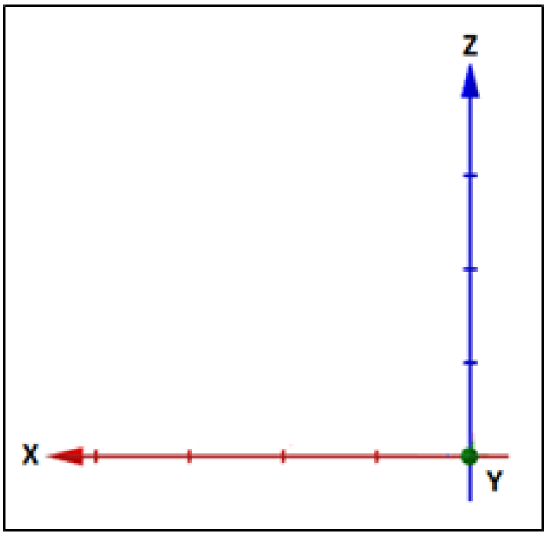


c) Bosqueje las vistas del primer octante de la maqueta observadas desde:

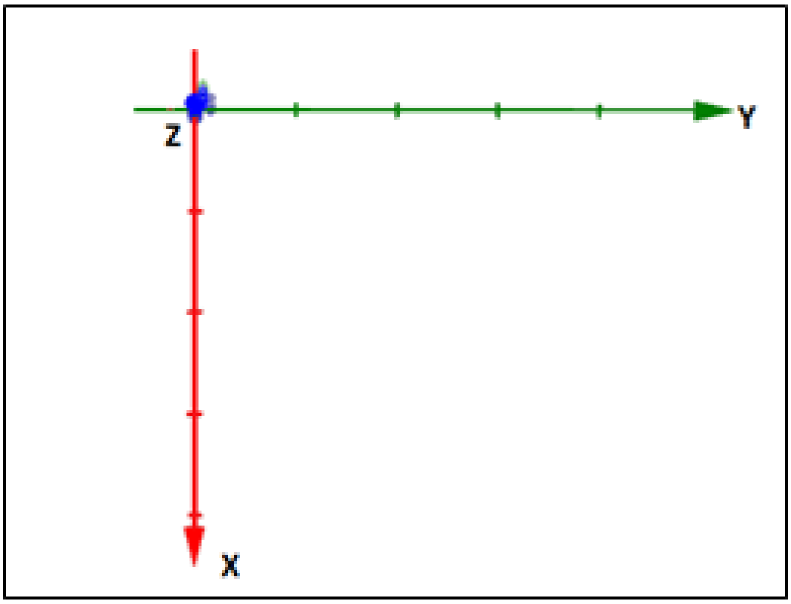
Vista desde el eje X



Vista desde el eje Y



Vista desde el eje Z



3. Dibuje el volumen encerrado entre todos los elementos en el primer octante.

4. Resolución algebraica

Previo a la resolución algebraica si dispone de un medio tecnológico se recomienda verificar la forma del volumen encerrado entre todos los elementos en el primer octante en cualquier simulador o graficador de funciones en tres dimensiones que sea de su agrado.

a) Recopilación de datos obtenidos.

Complete: La ecuación del sólido cuyo nombre es ___________________________ está dada por $z =$_________________________.

b) Las ecuaciones de los planos son:

1 ____________ + ___________ = ____________

2 _____________ = ___________

3 _____________ = ___________

4 _____________ = ___________

El_____________del sólido limitado por los cuatro___________y que se pretende calcular se encuentra ubicado en el______________octante.

c) Identificar qué tipo de región es.

La _____________que se proyecta en el plano XY se la conoce como región __________, sirve para identificar los límites de integración de las variables ____ y _____. Dicha región es de tipo _______.

5. Determinar los límites de la variable x, marcar la respuesta correcta.

a) $a = -1, b = 1$ **b)** $a = 0, b = 1$ **c)** $a = -1, b = -2.$ **d)** $a = -1, b = 1.$

6. Determinar los límites de la variable y, marcar la respuesta correcta.

a) $c = -1, d = 3 + 3x.$ **b)** $c = 0, d = 1.$ **c)** $c = 3x - 3x, d = -2k.$ **d)** $c = 0, d = 3 - 3x.$

7. **Para plantear la integral complete los datos de la siguiente expresión:**

$$\boldsymbol{V = \int_{\_\_}^{\_\_} \int_{\_\_}^{\_\_} (\qquad\qquad\qquad\qquad) dxdy}$$

8. **Resolver la integral con métodos o técnicas de integración y seleccionar la respuesta correcta**

a) Sol/. $20u^3$ **b) Sol/. $256u^3$** **c) Sol/. $4u^3$** **d) Sol/. $5\pi u^3$**

CONSOLIDACIÓN

Aprendizaje autónomo

Tiempo: 30min

Para practicar y a manera de labor investigativa los estudiantes deben realizar las siguientes actividades:

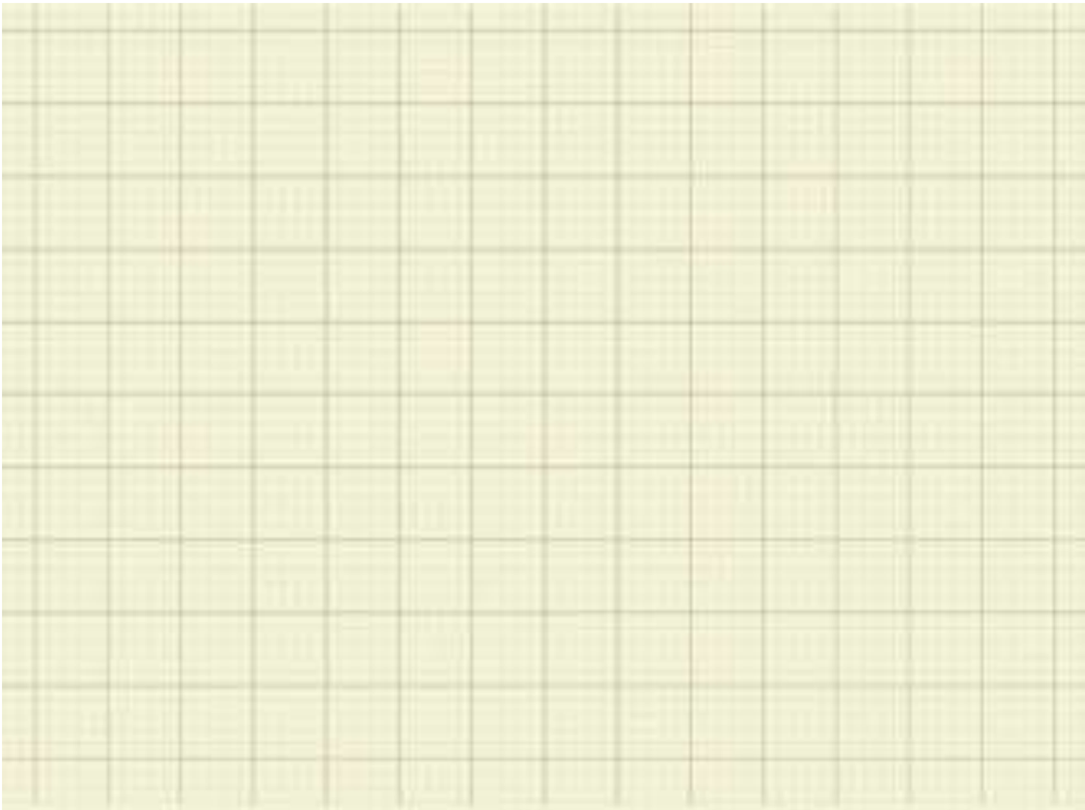
1. **El sólido acotado por la intersección de tres cilindros $x^2 + y^2 = 4$; $y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + z^2 = 4$ recibe el nombre de tricilindro.**

Trabaje en cada uno de los siguientes literales.

a) Realice la gráfica de la figura en el sistema de coordenadas X Y Z.

b) Identifique el volumen a integrar y ubique los límites de cada una de las integrales.

c) Plantee la integral para el cálculo del volumen encerrado por las tres funciones cuando $r = 6$.



2. Busque 5 imágenes de construcciones u objetos creados por el hombre que puedan ser representados por funciones y en los que el uso de métodos de integración permita el cálculo de su volumen. En cada uno de ellos muestre la función del sólido, de los elementos que lo intersectan (si es que los hay) y explique cómo calcularía la mitad del volumen de dichos sólidos.

HOJA DETRABAJO

Aprendizaje experimental

Cálculo de volumen mediante integral doble

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

Esta hoja debe ser llenada por el alumno y entregada al docente. Tiene una valoración total de 20 puntos.

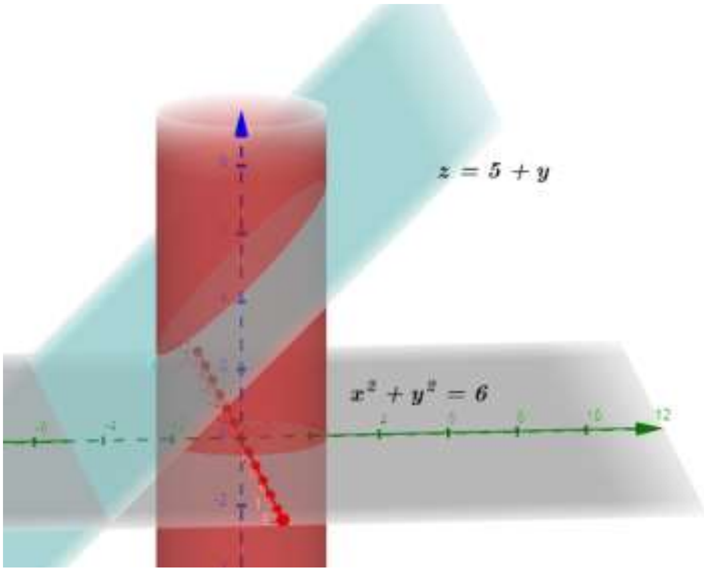


Figura 54: cilindro intersectado por un plano

1. Responda las siguientes preguntas fundamentándolas con los conceptos estudiados.

a) ¿Describa de que figura se trata? ¿ésta tiene un nombre propio? ¿Cuáles son sus principales características geométricas (simetría, ubicación, posición)? 2p.

- ____
- ____
- ____

____

b) ¿Qué representa la función z o $f\ (x, y)$ y que pasaría con el sólido si ésta no existe? 2p.

____

____

2. **Ordene los pasos que se siguieron en el método estudiado en clases para encontrar el volumen de un sólido mediante integración doble.** **4p.**

___ Resolver la integral con métodos o técnicas de integración.

___ Bosquejar las funciones que limitan al sólido.

___ Ubicar el volumen requerido.

___ Identificar los datos.

___ Identificar el tipo de región.

___ Plantear la integral.

___ Determinar los límites de x.

___ Determinar los límites de y.

3. **A partir de la figura 54 halle los límites de integración:**

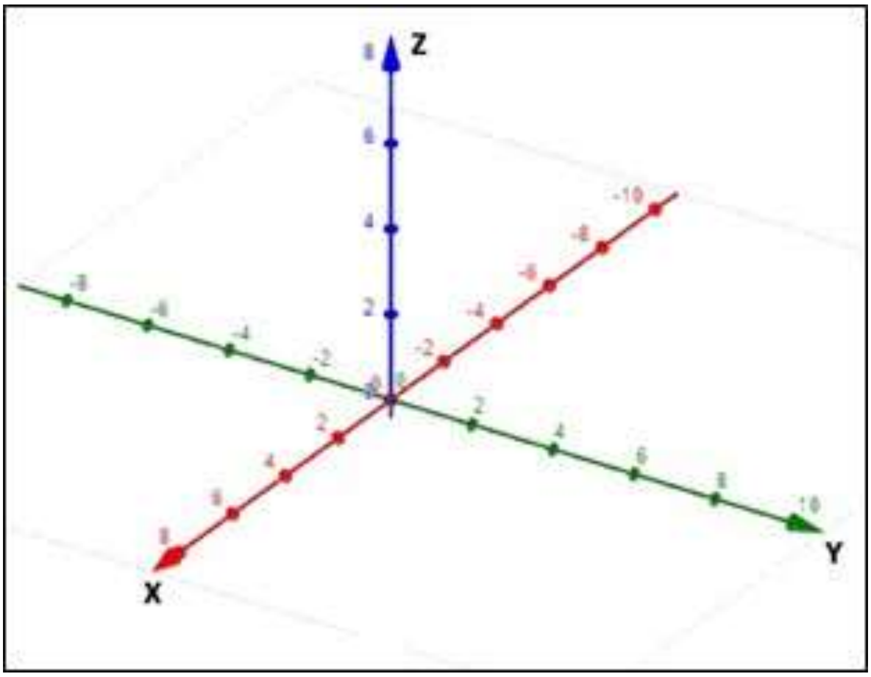
Los límites del sólido con respecto a x son: 2p.

De ______ hasta ______

Los límites del sólido con respecto a y son: 2p.

De________hasta______

4. **Dibuje el volumen de la figura que se desea calcular** **3p.**



5. Complete. La integral que representa el volumen del sólido es: 3p.

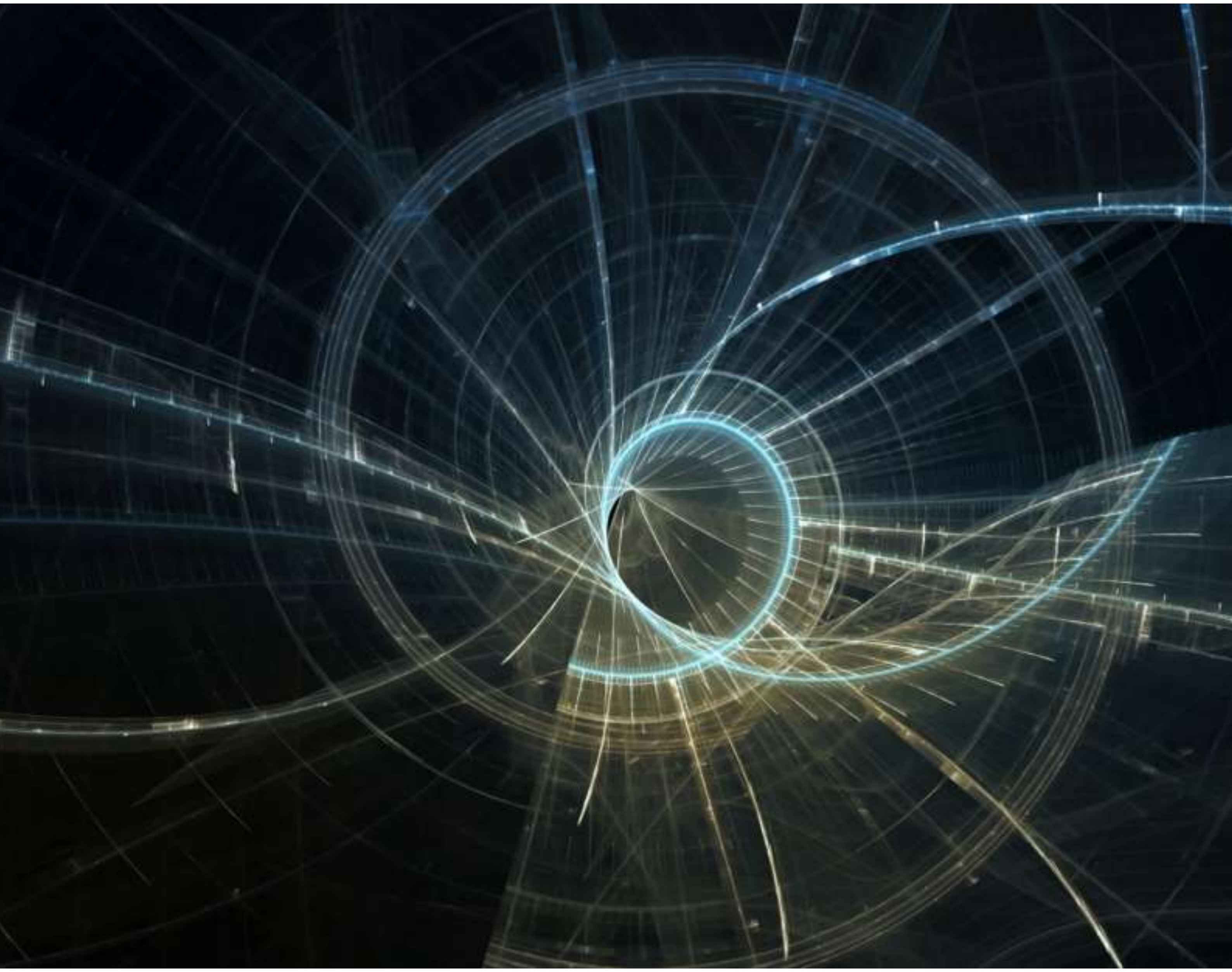
$$\boldsymbol{V} = \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} (\qquad\qquad\qquad\qquad) \boldsymbol{dxdy}$$

$$\boldsymbol{V} = \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} (\qquad\qquad\qquad\qquad) \boldsymbol{dxdy}$$

6. Por lo tanto ¿Cuál es el valor de V? 2p.

$$\boldsymbol{V} =$$

CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN MEDIANTE LA INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS POLARES



"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber"

Albert Einstein

Plan de clase

Objetivos:

- Describir el sistema de coordenadas polares y explicar el comportamiento de las variables radial r y angular θ.
- Demostrar la utilidad del cambio de coordenadas de un sistema a otro.
- Deducir las ecuaciones usadas en el cálculo de área y volumen con integrales dobles en coordenadas polares.

Clase invertida:

Tabla 16: Plan de clase

SITUACIÓN	ACTIVIDADES	INDICADORES DE LOGRO	RECURSOS	EVALUACIÓN	TIEMPO
Aprendizaje Autónomo	Conceptualización de las integrales dobles en coordenadas polares mediante la lectura del libro **“Funciones de Varias Variables” Dennis Zill** en las páginas: 573-574 Sistema de coordenadas polares y transformaciones de coordenadas. 576-578 Gráficas de ecuaciones polares. 581 Círculos con centro sobre un eje. 768-771 Integrales dobles en coordenadas polares. Resumen de ideas principales, fórmulas y gráficas en una tabla de parámetros. Aplicación de los conceptos de coordenadas polares e integrales dobles mediante la resolución de ejercicios.	Contesta correctamente las preguntas planteadas sobre área y volumen con integrales dobles. Expone de forma breve las ideas principales, fórmulas y gráficas de las coordenadas polares y los temas tratados en la lectura. Resuelve ejercicios sobre coordenadas polares e integrales dobles. Proposición de diferentes métodos de resolución de ejercicios de cálculo de área y volumen con integrales dobles en coordenadas polares.	Hojas de trabajo. Pizarra. Marcadores. Borrador.	Aplica de manera correcta los conceptos estudiados en la resolución de ejercicios propuestos en la hoja de evaluación. Tiempo: 45min	60min
Aprendizaje con acompañamiento docente	Resumen de las definiciones de integrales dobles en coordenadas polares a través de preguntas				30min

	explorativas. Desarrollo de ejercicios sobre conversiones entre los sistemas cartesianos y polares.				
Aprendizaje experimental	Realización de ejercicios de cálculo de área y volumen con integrales dobles en coordenadas cartesianas y polares.				45min

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Tiempo: 60min

Los estudiantes en casa deben leer sobre las coordenadas polares, sus gráficas, las transformaciones de coordenadas y la resolución de integrales en coordenadas polares en el siguiente libro: **"Funciones de Varias Variables" Dennis Zill** en las páginas:

573-574	Sistema de coordenadas Polares y transformaciones de coordenadas.
576-578	Gráficas de ecuaciones polares.
581	Círculos con centro sobre un eje.
768-771	Integrales dobles en coordenadas polares.

Guía de Aprendizaje Autónomo:

La siguiente guía pretende mejorar el estudio del tema "Calculo de área y volumen mediante la integral doble en coordenadas polares" Debe ser realizada después de revisar la información sugerida, el estudiante entregará en clases las siguientes actividades:

1. **Completar a mano los parámetros de la siguiente tabla de resumen usando la información expuesta en la lectura: (puede usar hojas cuadriculadas si considera necesario recuerde que en cada celda se considerará la calidad de sus argumentos)**

Tabla 17: Integrales dobles en coordenadas polares.

CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN MEDIANTE LA INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS POLARES			
Subtemas	**Concepto/procedimiento**	**Ecuaciones**	**Gráfica/ejemplo**
Sistema de coordenadas polares.			
Transformaciones de coordenadas.		polar a rectangular	
		rectangular a polar	
Gráfica de ecuaciones polares.			
Círculos centrados en el origen y rectas que pasan en el origen.			
Círculos con centro sobre un eje.			
Integrales dobles en coordenadas polares.		Área tipo I: Área tipo II: Volumen tipo I: Volumen tipo II:	

2. **Marque verdadero (V) o Falso (F) a final de cada uno de los siguientes enunciados relacionados con la simetría de ecuaciones polares. (Sugerencia: puede usar las gráficas que se presentan a continuación como ayuda para elegir su respuesta).**

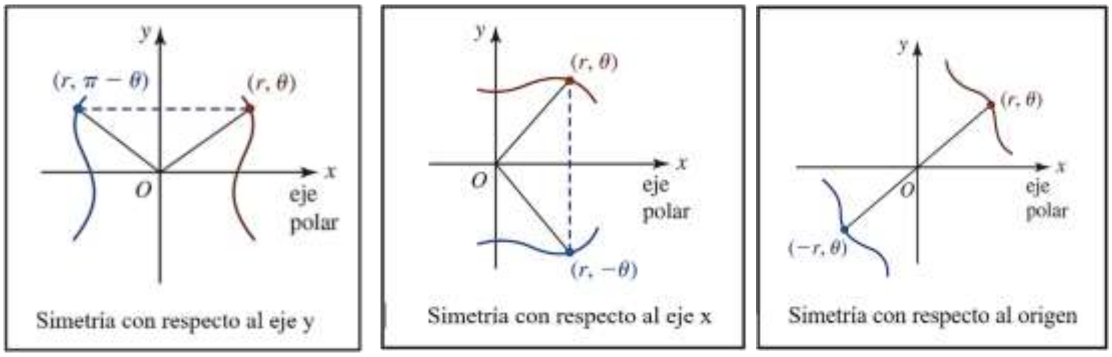


Figura 55: Simetría de ecuaciones polares.
Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México.

Tabla 18: Simetría de ecuaciones polares.

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje y si al sustituir (r, θ) por (r, π, θ) resulta la misma ecuación.	
La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje x si al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ resulta la misma ecuación.	
La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje origen si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ resulta la misma ecuación.	
La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje origen si al sustituir (r, θ) por $(r, \pi, -\theta)$ resulta la misma ecuación.	

3. **Resuelva los siguientes ejercicios.**

Ejercicio 1: A partir de la siguiente tabla encuentre los valores de la variable r, luego bosqueje la gráfica de las ecuaciones y calcule el área de la región acotada por la siguiente ecuación:

$\boldsymbol{r = 2\sin\theta}$, $\boldsymbol{r = 1}$ área común.

Tabla 19: Datos obtenidos de las ecuaciones.

$\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\boldsymbol{r}$													

Gráfica

Planteamiento:

Resolución:

Resultado:

Ejercicio 2: Transforme las ecuaciones cartesianas a polares, luego bosqueje la gráfica de las ecuaciones a partir de la tabla de valores que se presenta a continuación y finalmente calcule el volumen de la región acotada por las ecuaciones:

$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 9 \quad z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Tabla 20: Datos obtenidos de las ecuaciones.

$\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\boldsymbol{r}$													

Gráfica

Planteamiento:

Resolución:

Resultado:

APRENDIZAJE CON ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE

Tiempo: 30min

El rol del docente es despejar las inquietudes, para ello realizará preguntas acerca de la lectura con el fin de explorar los conocimientos de los estudiantes, en caso de no ser contestadas correctamente el docente deberá retroalimentar los contenidos.

1. Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las coordenadas polares y en donde se utiliza?

b) ¿Qué es un sistema de coordenadas polares?

c) ¿Cuál es el beneficio de transformar las coordenadas cartesianas a polares?

d) ¿Cuáles son las unidades de medida de la variable θ, cuál de ellas es utilizada en los cálculos de área y por qué?

e) A partir de la gráfica obtenida en el ejercicio 1 (actividad de aprendizaje autónomo) realice la conversión de coordenadas polares a rectangulares del punto $P(r,\theta)$

f) ¿Cuáles son las ecuaciones polares que definen la gráfica de un círculo con centro en el origen?

g) ¿Cuáles son las ecuaciones polares que definen la gráfica de un círculo con centro sobre uno de los ejes positivos?

h) ¿Cuáles son las ecuaciones polares que definen la gráfica de un círculo con centro sobre uno de los ejes negativos?

i) ¿Utilizar coordenadas polares facilita de alguna manera el resolver integrales dobles? Argumente su respuesta con un ejemplo.

j) Así como en coordenadas cartesianas existen regiones de tipo I y II ¿en el sistema de coordenadas polares existen estos dos tipos? Explique gráficamente.

k) ¿Cuál es la expresión matemática que define el volumen mediante la integral doble en coordenadas polares sobre una región R?

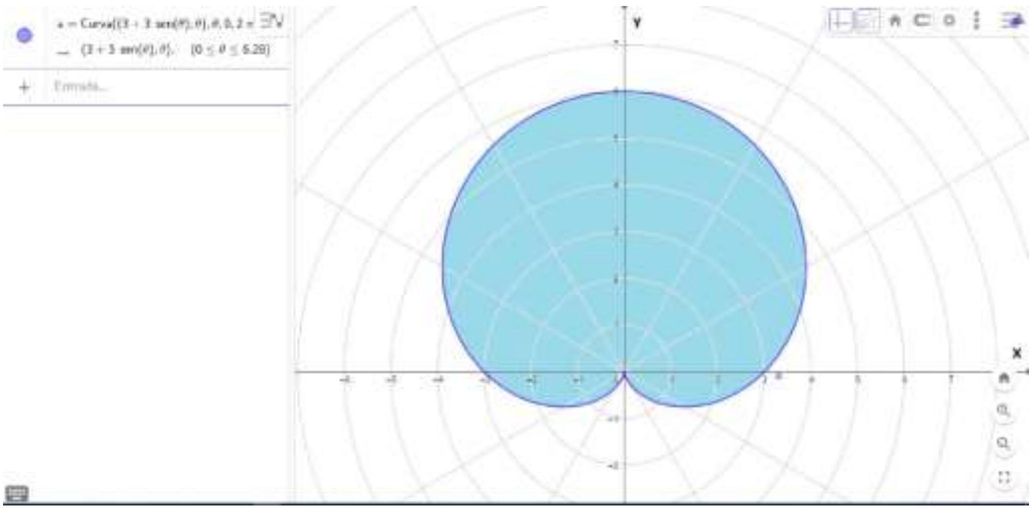
l) ¿Cuál es la expresión matemática que define el área mediante la integral doble en coordenadas polares sobre una región R?

2. Ejercicios modelo.

A continuación, el docente realizará dos ejercicios demostrativos con el fin de que los estudiantes analicen un procedimiento sugerido para calcular áreas y volúmenes de figuras a través de la integral doble en coordenadas polares.

Ejercicio modelo 1: emplee la integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares que se indican: $\boldsymbol{r = 3 + 3\sin\theta}$

a) La ecuación polar se representa en Geogebra.



b) Planteamiento de la integral:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3+3\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

c) Resolución:

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 + 3\sin\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(3+3\sin\theta)^2}{2}\right] d\theta$$

$$= \left[\frac{9\theta - 6\cos\theta + 9}{2}\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{9(2\pi)}{2}\frac{-6\cos(2\pi)}{2} + \frac{9}{2}\left(\frac{1(2\pi)}{2} - \frac{\sin 2(2\pi)}{4}\right)\right]$$

$$= \left[9\pi - 3 + \frac{9}{2}(\pi - 0)\right] - \left[0 - 3 + \frac{9}{2}(0)\right]$$

$$= \left(9\pi - 3 + \frac{9}{2}\pi\right) - (-3)$$

$$= 9\pi + \frac{9}{2}\pi$$

$$= \frac{18\pi + 9\pi}{2}$$

d) Resultado:

$$\frac{27\pi}{2}u^2$$

Ejercicio modelo 2: Calcule la siguiente integral:

$$\iint_R \frac{y^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy$$

Donde la región de integración es:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \le y, x \ge 0\}$$

a) Resolución:

Se realiza el cambio a coordenadas polares con las siguientes ecuaciones:

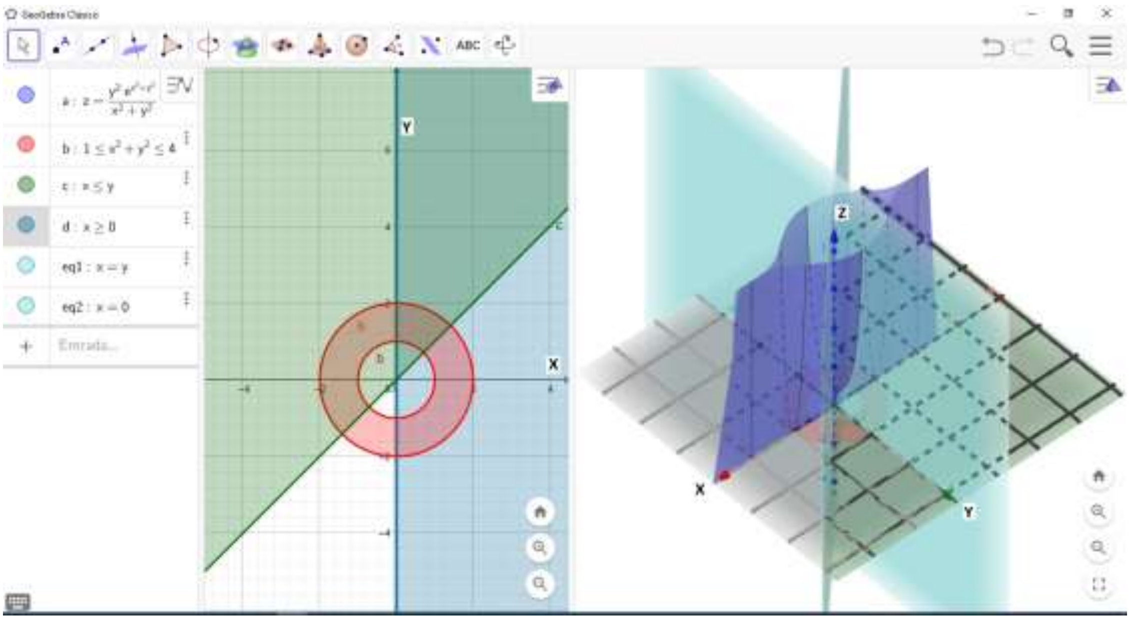
$$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$$

Con la transformación la región es:

$$R^{*} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le r \le 2, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

b) La ecuación polar se representa en Geogebra.



c) Planteamiento de la integral:

$$\iint_R \frac{r^2\sin^2\theta\, e^{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\, r dr d\theta$$

$$\iint_R \frac{r^2\sin^2\theta\, e^{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\, r dr d\theta$$

d) Resolviendo:

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{1}^{2} \sin^2\theta\, e^{r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{1}^{2} \sin^2\theta \, e^{r^2} r dr d\theta$$

$$= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta \right) \left(\int_{1}^{2} e^{r^2} r dr \right)$$

$$= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \right) \left(\frac{1}{2} \int_{1}^{2} e^{r^2} 2r dr \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{r^2} \right) \Bigg|_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] (e^4 - e)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) (e^4 - e)$$

$$= \frac{1}{16} (\pi + 2)(e^4 - e)$$

e) Resultado:

$$= 16.67u^3$$

HOJA DE TRABAJO

Aprendizaje experimental

Cálculo de área y volumen mediante la integral doble en

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

Una vez resueltas las inquietudes de los estudiantes, el docente formará grupos mínimo de tres personas para resolver los siguientes ejercicios. El rol del profesor es el de guiar al alumno.

Tiempo: 45min

1. **Emplee la integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación polar que se indica: $r = 2 + \cos\theta$**

θ	r
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
π	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{4\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{3}$	
$\frac{11\pi}{6}$	
2π	

Gráfica:

Planteamiento:

Resolución:

Resultado:

2. Empleando coordenadas rectangulares, exprese $\iint_R \frac{1}{x^2+y^2}\,dA$ como una integral iterada, donde R es la región en el primer cuadrante que está acotada por, las gráficas de $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $y=x$. Luego evalúe la integral doble utilizando coordenadas polares.

Integral iterada:

Integral en coordenadas polares:

Resolución:

Resultado:

3. Encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas. $r = 1 + \cos\theta$, $z = y$, $z = 0$. En el primer octante.

$\boldsymbol{\theta}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\boldsymbol{r}$													

Gráfica:

Planteamiento:

Resolución:

Resultado:

4. Evalúe la integral iterada que se indica cambiando a coordenadas polares.

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

Gráfica:

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r}$
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
π	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{4\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{3}$	
$\frac{11\pi}{6}$	
2π	

Planteamiento:

Resolución:

Resultado:

5. Evalúe la integral iterada que se indica cambiando a coordenadas polares

$$\int_{-5}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} (4x+3y)\,dydx$$

Gráfica:

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r}$
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
π	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{4\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{3}$	
$\frac{11\pi}{6}$	
2π	

Planteamiento:

Resolución:

Resultado:

HOJA DE EVALUACIÓN

Cálculo de área y volumen mediante la integral doble en coordenadas polares.

Tiempo: 45min

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

1. **Mediante un gráfico explique cuál es el procedimiento que se sigue para representar el punto $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ en un sistema de coordenadas polares. 3p.**

Gráfico:

Explicación: --

----

2. **Marque verdadero (V) o Falso (F) a final de cada uno de los siguientes enunciados relacionados con la simetría de ecuaciones polares. 3p.**

La ecuación de $r = a\sin\theta$ representa un círculo con centro sobre el eje x	
La ecuación de $r = a\cos 2\theta$ representa un círculo con centro sobre el eje x	
La ecuación de $r^2 = a\sin\theta$ representa un círculo con centro sobre el eje y	
La ecuación de $r = a\sin\theta$ representa un círculo con centro sobre el eje y	

3. Complete los siguientes enunciados relacionados con simetría de una gráfica polar e integrales dobles en coordenadas polares. 2p.

Una ecuación polar es simétrica al _____________ sí al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ resulta la misma ecuación.

El orden de integración de una región polar de tipo II inicia evaluando primero la variable ______ y luego la variable _______.

4. Dibuje la región de integración de $\int_{-2}^{2} \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y)\, dy dx$

Gráfico:

5. Utilice una integral doble para encontrar el volumen del sólido que se muestra en la siguiente gráfica: 7p.

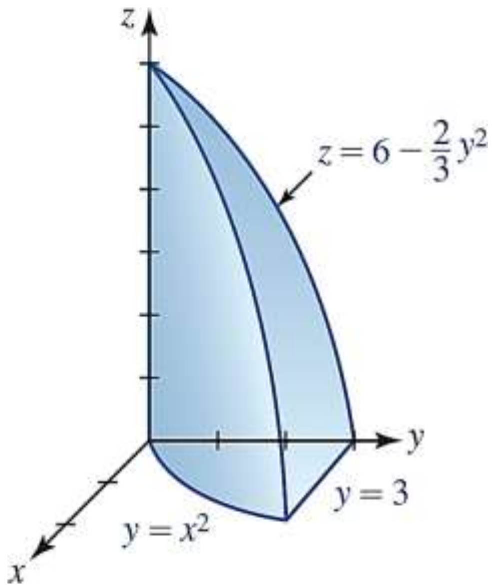


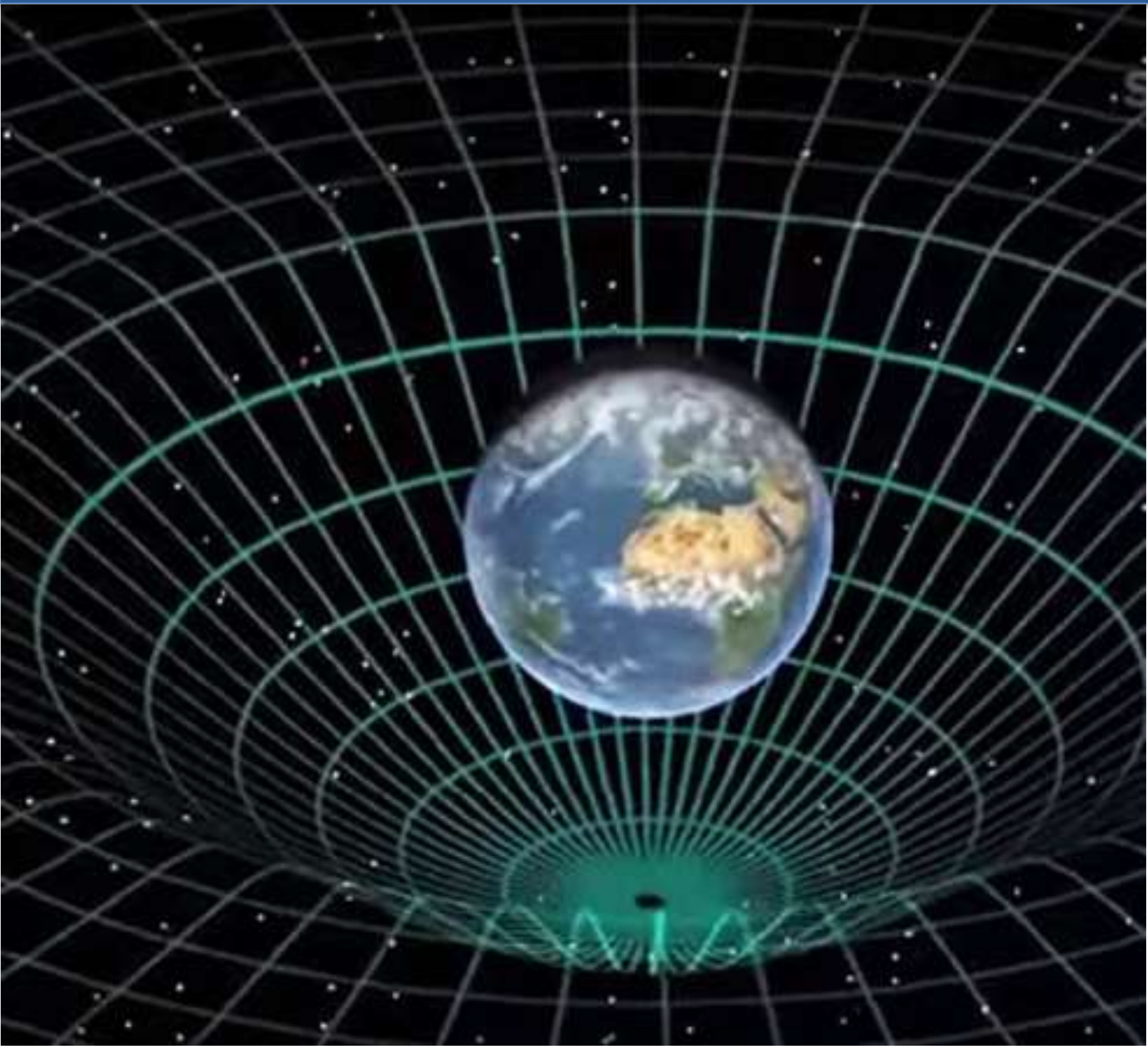
Figura 56: Ejercicio 5 evaluación.

Planteamiento:

Resolución:

Resultado:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL TRIPLE EN REGIONES GENERALES



"El hombre que es un maestro de la paciencia es un maestro de todo lo demás"

George Saville

Plan de clase

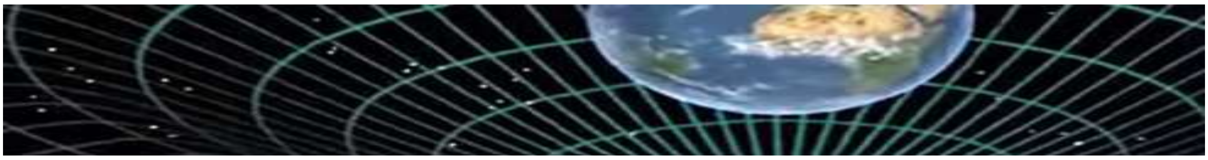
Objetivos:

- Explicar el significado geométrico de la integral triple.
- Discutir la relación existente entre los resultados que se obtienen al resolver una integral triple y la cuarta dimensión.
- Aplicar la integración triple en ejercicios de coordenadas cartesianas para calcular el volumen e hipervolumen de sólidos.

Secuencia didáctica:

Tabla 21: Plan de clase.

SITUACIÓN	ACTIVIDADES	INDICADORES DE LOGRO	RECURSOS	EVALUACIÓN	TIEMPO
Anticipación	Revisión de la integral simple y doble completando enunciados teóricos y a través de la resolución de ejercicios y actividades de opción múltiple.	Completa correctamente los enunciados relacionados con la integral simple y doble. Realiza los ejercicios de volumen mediante integrales triples siguiendo un procedimiento gráfico y algebraico. Resuelve ejercicios propuestos en la hoja de trabajo.	Hoja de trabajo. Pizarra. Marcador. Borrador.	Aplicación de manera correcta los conceptos estudiados en la resolución de actividades propuestas en la hoja de evaluación. Tiempo: 45min	30min
Construcción	Resolución de ejercicios de integrales triples en coordenadas cartesianas e interpretación de los resultados. Conceptualización de la integral triple y su significado geométrico. Aplicación de conceptos de la integral triple en ejercicios de volumen en coordenadas cartesianas.				60min
Consolidación	Resolución de ejercicios de volumen en coordenadas cartesianas de manera gráfica y geométrica.				45min



ANTICIPACIÓN.

Aprendizaje autónomo

Tiempo: 30min

Para verificar los conocimientos previos del estudiante se sugiere realizar las actividades propuestas a continuación.

1. Complete:

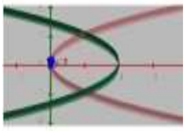
La integral definida representa el _______ bajo la _____________. Para el caso de que $f(x) = 1$ sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ la integral definida indica la _________de un segmento de _________.

La integral doble representa el ______________ bajo la ___________________. Para el caso de que $f(x, y) = 1$ sobre una región R, entonces la integral doble define el _______________ de la región R.

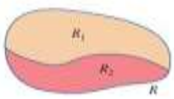
2. Una correctamente con líneas lo siguiente:

Región tipo I

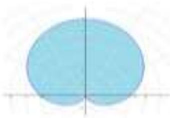
Coordenadas polares



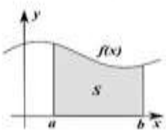
Región rectangular



Región tipo II

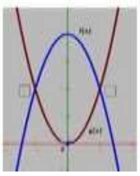


Volumen bajo la superficie



Área bajo la curva

Regiones generales



Integral simple

3. **Resuelva los siguientes ejercicios y arme el rompecabezas.**

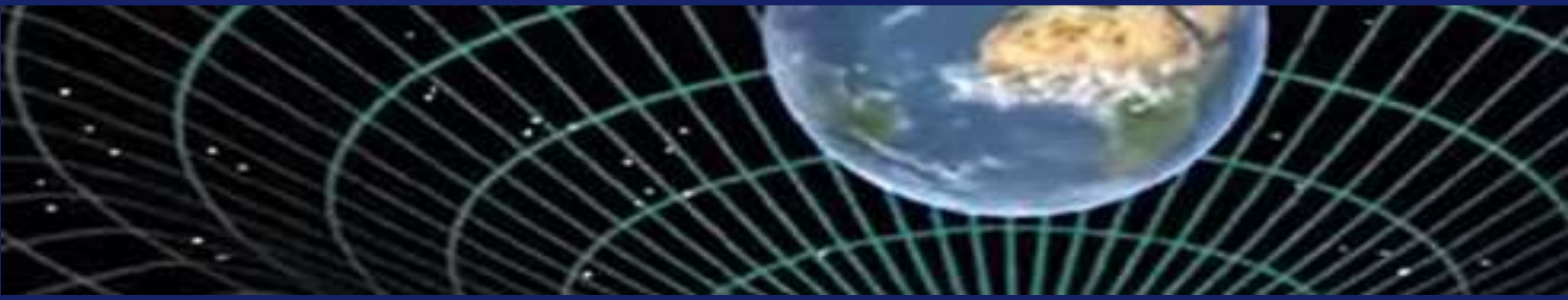
   A continuación, se presenta una actividad lúdica, el docente debe entregar una copia del rompecabezas y los ejercicios, para que el estudiante pueda trabajar.

$R = \frac{1}{4}\pi(e-1)$ | $R = 0{,}285$ | $R = (2e-4)$

$R = 2\pi$ | $R = 18$ | $R = 0{,}297$

Figura 57: Integral triple rompecabezas

Fuente: https://scontent.fcue2-1.fna.fbcdn.net/v/t1.0-9/13244768_1096498533748448_7517685503391061302_n.jpg?_nc_cat=105&_nc_ohc=uPqM0btRXg0AX9wfEY6&_nc_ht=scontent.fcue2-1.fna&oh=fda79c344e328c4d6da3e5881eeb5773&oe=5ED68E6D



CÁLCULO DE ÁREA Y VOLUMEN CON INTEGRAL DOBLE

(Conocimientos previos)

NOMBRE:

FECHA:

Evalúe la integral.

$$\iint_R (2x + 4y + 1)dA;\ y = x^2;\ \ y = x^3$$

Evalúe la integral.

$$\iint_R x dA;\ y = \tan^{-1} x;\ \ y = 0;\ \ x = 1$$

Evalúe la integral en coordenadas polares.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$$

A partir de la gráfica halle el volumen del sólido acotado por funciones.

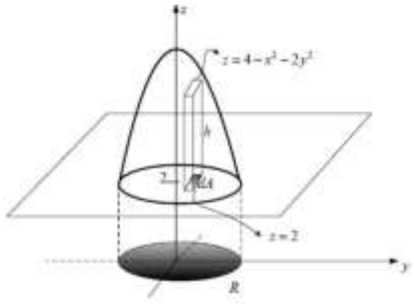


Figura 59: Volumen del sólido

Determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

$$2x + y + z = 6;\ \ x = 0;\ \ y = 0;\ \ z = 0$$

En el primer octante.

A partir de la gráfica halle el área del sólido acotado por funciones. En el primer cuadrante.

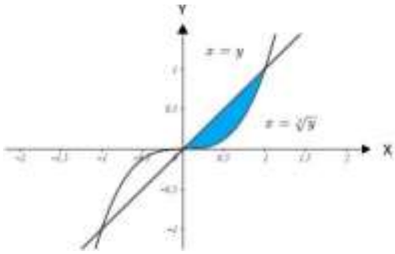
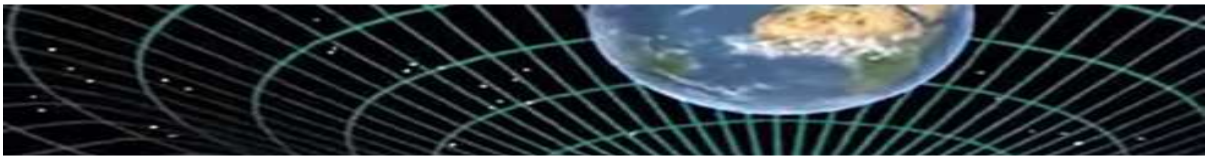


Figura 58: Área del sólido



CONSTRUCCIÓN.

Aprendizaje con acompañamiento docente

Tiempo: 60min

Integrales triples

Una cosa es saber calcular integrales simples, doble, triples o hasta óctuples, y otra muy distinta es saber **¿Cómo interpretarlas?**

1. A continuación, se presentan un artículo que describe la cuarta dimensión con el propósito de definir e interpretar el concepto de integral triple.

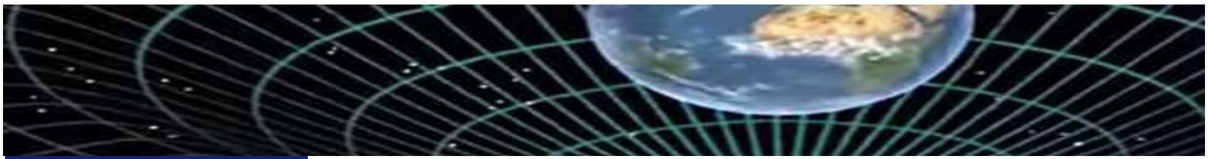
El docente entregará una copia a cada estudiante, lo cual deberá leer y responder las preguntas planteadas.

Resumen: La cuarta dimensión y la ética

(Federico Ludueña)

La cuarta dimensión es un concepto geométrico que indica el inicio de una posible serie de dimensiones espaciales superiores a las tres que percibimos. (La teoría de cuerdas, por ejemplo, ha llegado a elaborar hipótesis basadas en 26 dimensiones). Ésta es necesaria para entender hacia dónde se curva el espacio-tiempo de la relatividad. A partir de la cuarta dimensión se realiza una comprensión intuitiva de las dimensiones pues simplemente se las puede escribir, pero no representarlas, por ejemplo: La longitud de un segmento de diez centímetros se puede notar así: $10\ cm$. La superficie de un cuadrado de diez centímetros de lado: $100cm^2$. El volumen de un cubo con caras de diez centímetros cuadrados: $1000cm^3$. Y el hipervolumen de un tesseract, o hipercubo, cuyos límites sean cubos de diez centímetros cúbicos: $10000cm^4$.

Cabe aclarar que en este artículo no se habla del tiempo como cuarta dimensión, tal como lo concibe la teoría de la relatividad. La cuarta dimensión a la que se hace referencia es la espacial. Puede decirse que las dimensiones indican el grado de libertad de movimiento de un cuerpo en el espacio.



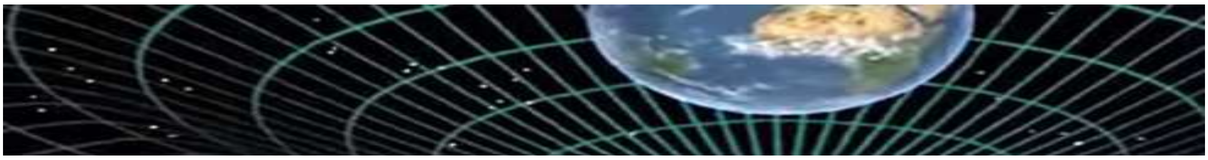
En el siglo XVII, Jean-François, matemático francés, lo representó así en su libro La perspective curieuse, donde un arquitecto construye una casa con forma de hipercubo para sus habitantes.

Salvador pinto así en su Corpus Hypercubus (1954). Es un hipercubo de plegado con sus ocho cubos en el mismo espacio tridimensional.

De esta manera: un punto encerrado en una línea tiene sólo un grado de libertad de movimiento, atrás-adelante; un punto prisionero en un cuadrado posee dos grados de libertad de movimiento, atrás-adelante y derecha-izquierda; un punto atrapado en un cubo goza de tres grados de libertad de movimiento, atrás- adelante, derecha-izquierda, y arriba-abajo. Finalmente, un punto en un hipercubo navega en cuatro grados de libertad de movimiento, atrás-adelante, derecha-izquierda, arriba-abajo, y ana-kata. Éstas últimas son las denominaciones técnicas que Charles Hinton (1904) "el pensador fundamental de la cuarta dimensión" propuso para la dirección que va y vuelve en la cuarta dimensión, como las anteriores direcciones lo hacen en sus dimensiones correspondientes.

Para ubicar un punto del tesseract son necesarias cuatro coordenadas, sin embargo, no es posible obtener representación subjetiva del objeto. Las dimensiones se organizan de modo ortogonal de modo que la segunda es perpendicular a la primera, y la tercera perpendicular a las dos anteriores. Por lo tanto, la cuarta dimensión indica una dirección que es perpendicular a las tres dimensiones habituales, pero nadie puede señalar hacia dónde se halla.

Referencia: Ludueña, F. Abril, 2010. La cuarta dimensión y la ética. Aesthethika Revista internacional de estudio e investigación interdisciplinaria sobre subjetividad, política y arte, Vol. 5 (N 2), pp 5-11. Recuperado de: http://www.aesthethika.org/La-cuarta-dimension-y-la-etica?fbclid=IwAR230Wb6QqY08MoqxTmn8Iqlrs7BCBsANO450EEHgWlSf9q9DW TAIVEI11o



Desarrollar las siguientes actividades

Responda V (verdadero) o F (falso) a los enunciados relacionados con la cuarta dimensión, que se presentan a continuación.

La cuarta dimensión geométricamente corresponde a un concepto de tiempo. ______

La cuarta dimensión geométricamente corresponde a un concepto espacial. ________

La cuarta dimensión geométricamente corresponde a un concepto astral. ________

La cuarta dimensión geométricamente corresponde a un concepto ficticio. _________

Una correctamente con líneas los siguientes enunciados:

Un punto encerrado en una línea	Tiene cuatro grados de libertad de movimiento.
Un punto prisionero en un cuadrado	Posee tres grados de libertad de movimiento.
Un punto atrapado en un cubo	Tiene dos grados de libertad de movimiento.
Un punto en un hipercubo	Posee un grado de libertad de movimiento.

Con sus propias palabras explique si es posibles bosquejar un elemento de cuatro dimensiones.

____

____

____

2. Resolución del ejercicio modelo.

a) Evaluar la integral iterada triple

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2x) dzdydx$$

Solución: las variables x & y permanecen constantes y se integra con respecto a z.

$$= \int_0^2 \int_0^x e^x \left(yz + 2\frac{z^2}{2} \right)_0^{x+y} dydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x e^x [(y(x+y) + (x+y)^2) - (0)]\, dydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x e^x (xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2)\, dydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x e^x (x^2 + 3xy + 2y^2)\, dydx$$

Para la segunda integración mantener la variable X constante y se integra con respecto a Y.

$$= \int_0^2 e^x \left[x^2 y + 3x\frac{y^2}{2} + 2\frac{y^3}{3} \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^2 e^x \left[\left(x^2(x) + 3x\frac{(x)^2}{2} + 2\frac{(x)^3}{3} \right) - (0) \right] dx$$

$$= \int_0^2 e^x \left(x^3 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^3 \right) dx$$

$$= \int_0^2 e^x \left(\frac{19}{6} x^3 \right) dx$$

$$= \frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x dx$$

Finalmente se integra con respecto a la variable x

$$= \frac{19}{6}\left[e^{x}(x^{3} - 3x^{2} + 6x - 6)\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{19}{6}\left[e^{2}(2^{3} - 3(2)^{2} + 6(2) - 6) - e^{0}(2^{0} - 3(0)^{2} + 6(0) - 6)\right]$$

$$= \frac{19}{6}\left[e^{2}(8 - 12 + 12 - 6) + 6)\right]$$

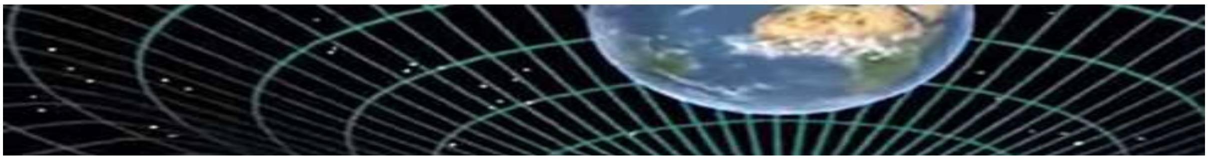
$$= \frac{19}{6}(2e^{2} + 6)$$

$$= 65.797u^{4}$$

<u>Preguntas explorativas:</u>

¿Qué resultado se obtiene al resolver el ejercicio? ¿Qué unidad tiene?

Con la lectura realizada del artículo anterior, con sus propias palabras escriba que representa el resultado obtenido en el ejercicio modelo.



3. Definición de la integral triple y ordenes de integración.

Complete:

La integral triple representa el _________________________ por debajo de la _____________________ en cuatro dimensiones.

La integral triple de f sobre $\boldsymbol{R}$, se denota por:

$$\iiint\limits_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{f(x, y, z)dxdydz}$$

Donde:

$dxdydz$ representa el __________________

R representa _________________

$f(x, y, z)$ representa ________________

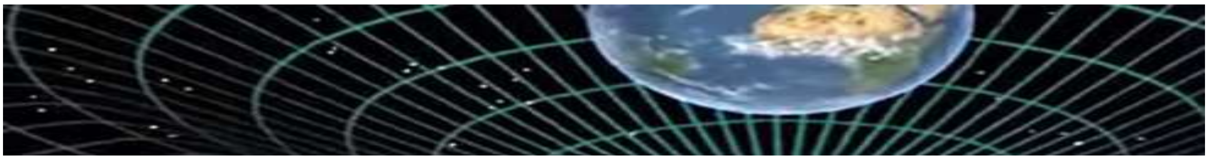
Señale con una X la opción correcta. Si la función $\boldsymbol{f(x, y, z) = 1}$ la integral triple viene dada por:

_____ $\iint\limits_R dxdz$ Cuyo resultado pertenece a la cuarta dimensión.

_____ $\iint\limits_R dA$ Cuyo resultado pertenece a la cuarta dimensión.

_____ $\iint\limits_R dxdydz$ Cuyo resultado está definido en $\mathbb{R}^2$.

_____ $\iiint\limits_R dV$ Cuyo resultado viene en unidades cúbicas.



4. Señale la opción correcta. ¿Qué se obtiene al resolver una integral triple definida con $f(x, y, z) = 1$?

___ la integral no existe.
___ obtenemos volumen.
___ obtenemos área sobre cualquiera de los planos XY, XZ, YZ.
___ obtenemos área de la superficie.

Justifique su respuesta

____

____.

RECUERDA

En las integrales dobles había solo dos posibles ordenes de integración, definidos de la siguiente manera:

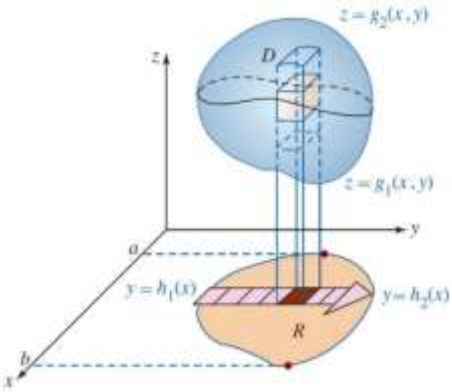
$$\int_{a}^{b}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx\,;\quad \int_{c}^{d}\int_{h_1 y}^{h_2 y} f(x,y)dxdy$$

5. Complete los siguientes enunciados que amplían este razonamiento a una región R que puede ser proyectada en los tres planos:

Las integrales triples tienen __________________posibles ordenes de integración.
En las integrales triples existen regiones de tipo _____ y _____.

Observe las gráficas y escriba los límites correctos para los casos en los cuales las regiones son proyectadas en:

Plano XY



$$\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_} \boldsymbol{f(x,y,z)dzdydx}$$

$$\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_} \boldsymbol{f(x,y,z)dzdxdy}$$

Figura 60: Región sobre el plano XY.

Plano YZ

$$\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_} \boldsymbol{f(x,y,z)dxdydz}$$

$$\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_} \boldsymbol{f(x,y,z)dxdzdy}$$

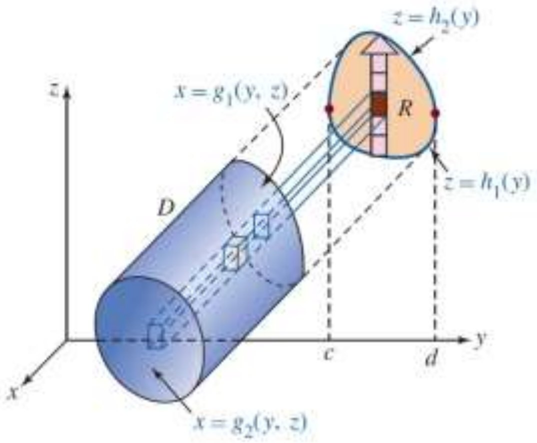


Figura 61: Región sobre el plano YZ

Plano XZ

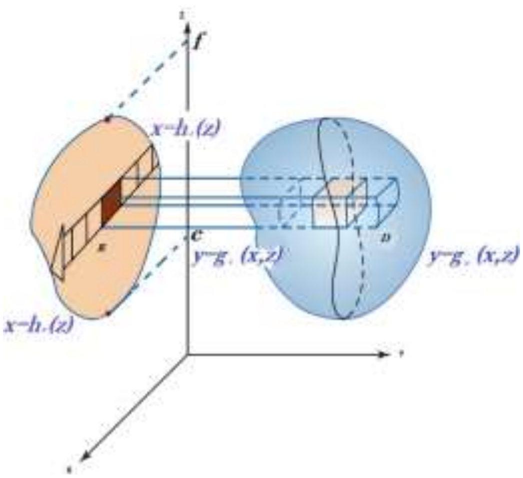


Figura 62: Región sobre el plano XZ

$$\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_} \boldsymbol{f(x,y,z)dydxdz}$$

$$\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_}\int_{\_\_}^{\_\_} \boldsymbol{f(x,y,z)dydzdx}$$

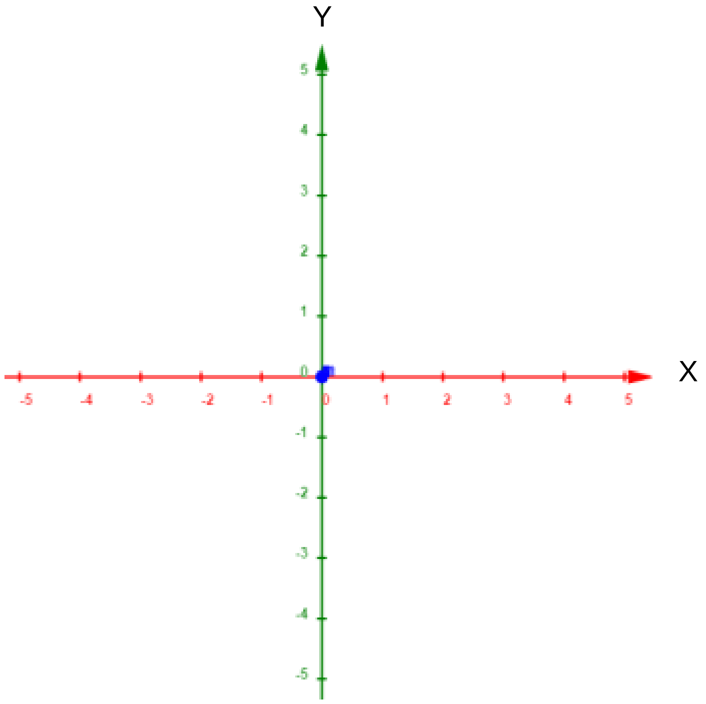
Ejercicio modelo

Determinar el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 2y^2$ & $z = 5 - x^2$

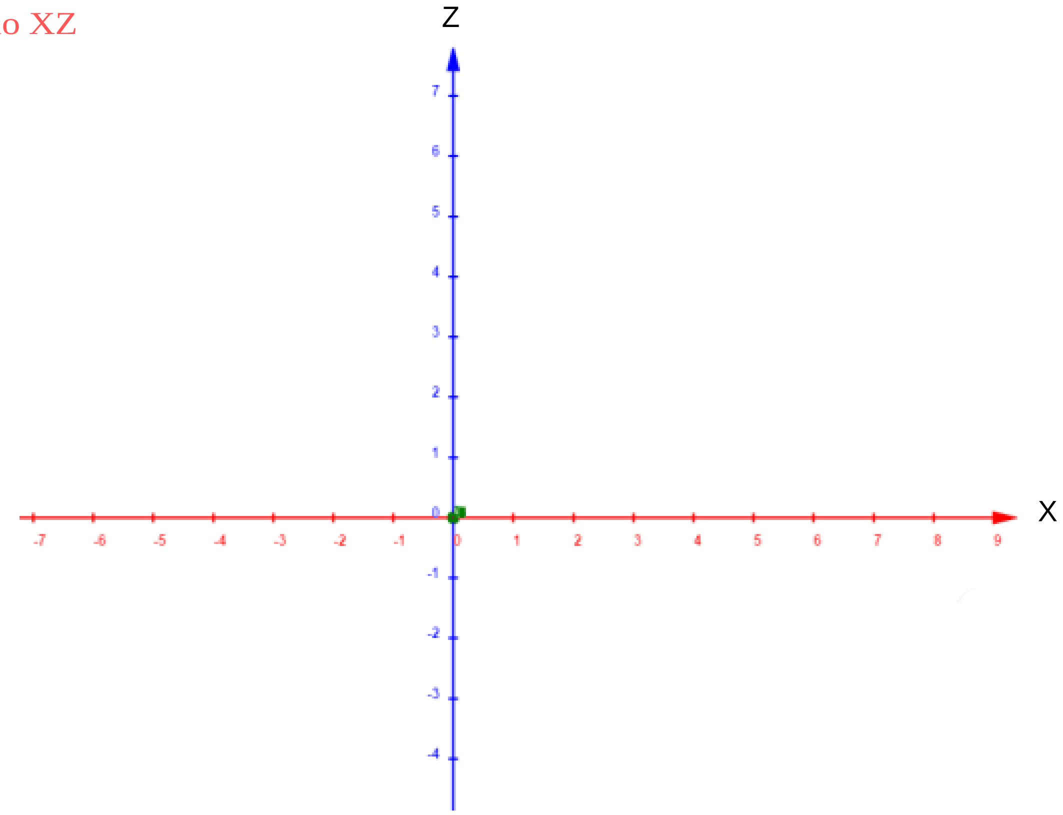
Pasos para bosquejar la gráfica:

a) Bosqueje las funciones en los planos XY, XZ, YZ si es posible.

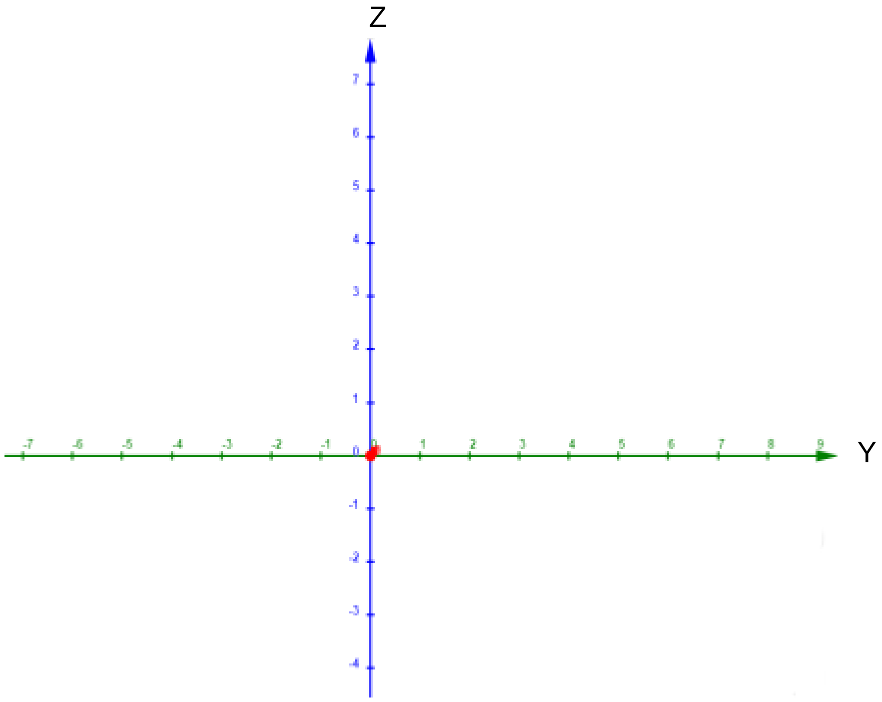
Plano XY



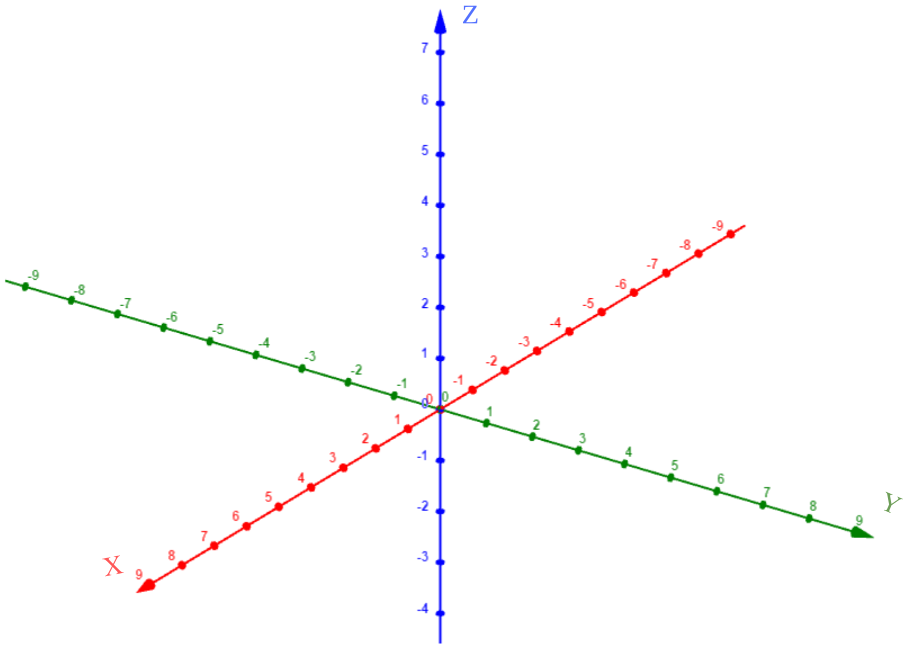
Plano XZ



Plano YZ

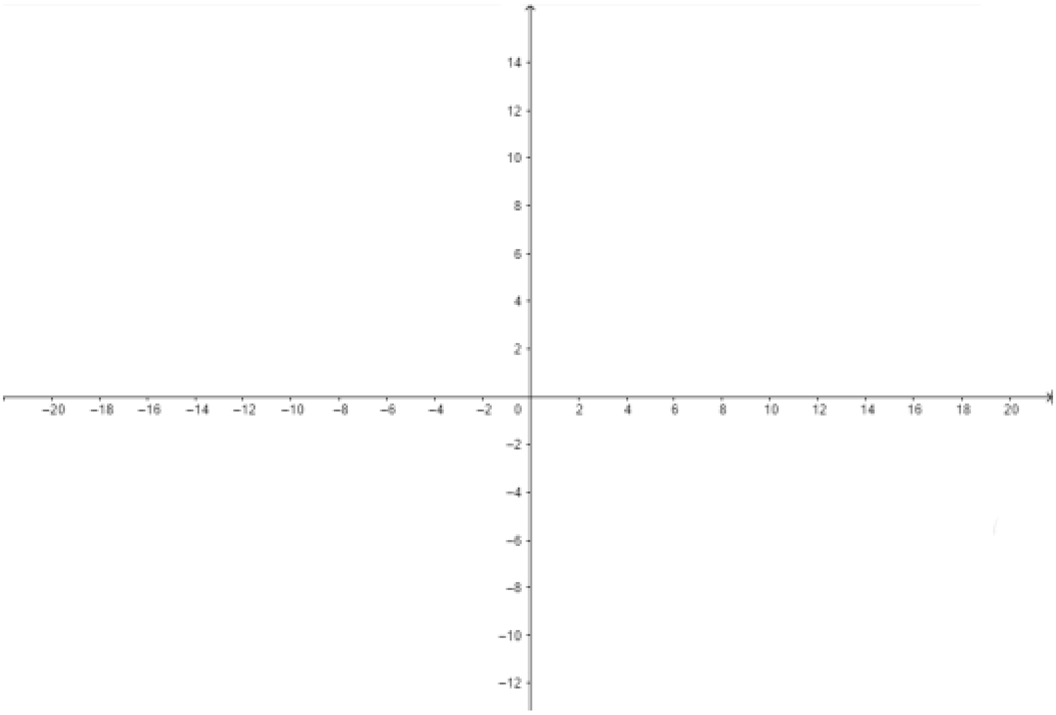


b) Utilice los planos para bosquejar las funciones en tres dimensiones.



c) Determinar los límites de integración para las variables X, Y, Z.

RECOMENDACIÓN: *Proyectar a conveniencia el volumen acotado por las funciones a cualquiera de los planos, de manera que se pueda identificar el tipo de región con la finalidad de establecer los límites para plantear la integral triple.*



d) Observe y describa a qué tipo de región pertenece la gráfica.

Tipo I: ____

Tipo II: ____

e) Los límites de integración son:

Resolución:

f) Plantee la integral.

Resolución:

HOJA DE TRABAJO

Aprendizaje experimental

Interpretación Geométrica de la Integral Triple en regiones generales

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

Una vez resueltas las inquietudes de los estudiantes, el docente formará grupos mínimo de tres personas para resolver los siguientes ejercicios. El rol del profesor es el de guiar al alumno.

Tiempo: 45min

Resuelva los siguientes ejercicios.

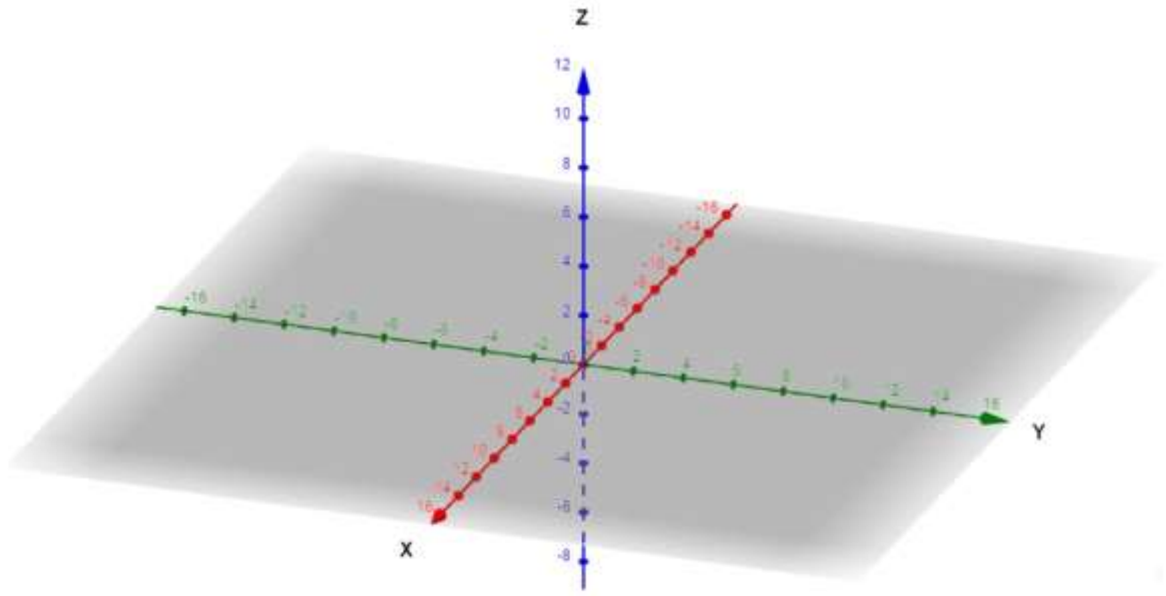
1. Encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

$\boldsymbol{y = x^2 + z^2}$, $\quad \boldsymbol{y = 8 - x^2 - z^2}$

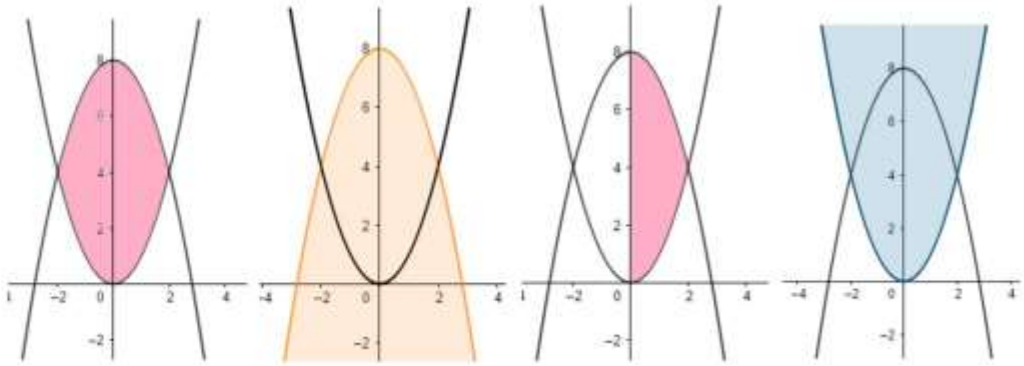
Ejercicio tomado de:

Fuente: Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México

a) Grafique las funciones.



b) Señale la gráfica correcta, la región acotada por las ecuaciones vista desde el eje Z sobre el plano XY es:



a) _____ b) _____ c) _____ d) _____

c) ¿A qué tipo de región pertenece la figura seleccionada en el ejercicio anterior?

Tipo I ___ Tipo II ___

Justifique su respuesta

____

____.

d) Después de identificar el tipo de región a la que pertenece la figura, indique ¿Cuáles son los límites de integración para las variables X & Y?

Variable X: ________________________

Variable Y: ________________________

e) ¿Cuáles son los límites de integración de la variable Z?

Variable Z: ________________________

f) Plantee la integral y resuelva.

$$\boldsymbol{V} = \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \boldsymbol{dz}\_\_\_\_$$

Resolución:

2. Exprese el volumen del sólido dado en la siguiente figura como una o más integrales iteradas utilizando los seis ordenes de integración y elija uno de ellos para determinar el volumen.

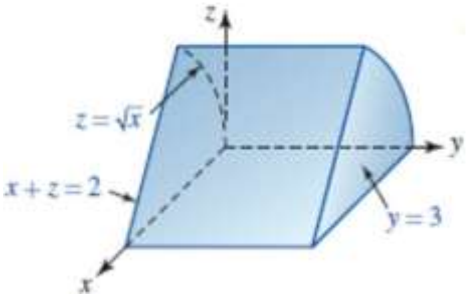


Figura 63: Volumen con integrales triples.
Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México

a) Halle los límites de integración.

En el plano XY.

$$\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_} dzdydx$$

$$\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_} dzdxdy$$

En el plano XZ.

$$\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_} dydxdz$$

$$\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_} dydzdx$$

En el plano YZ.

$$\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_} dxdydz$$

$$\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_} dxdzdy$$

b) Halle el volumen utilizando una de las seis integrales.

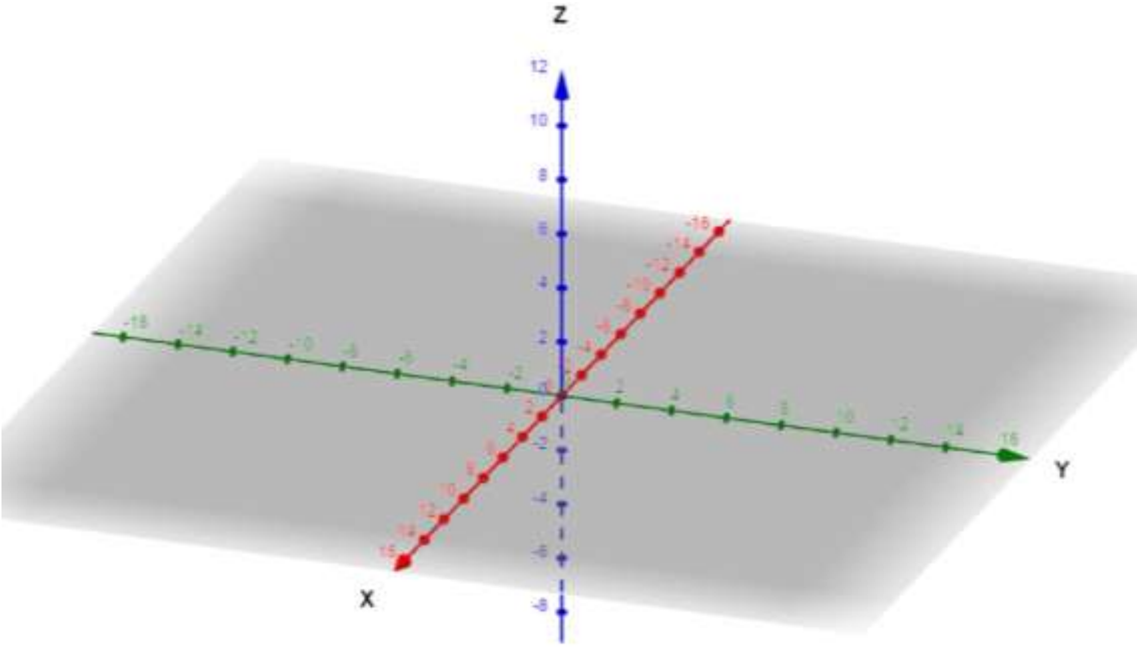
$$V = \int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_}\int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Resolución:

3. A partir de la integral iterada, realice las siguientes actividades.

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{3-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdzdy$$

a) Bosqueje las funciones.



b) Evalúe la integral.

Resolución:

HOJA DE EVALUACIÓN

Interpretación geométrica de la integral triple en regiones generales

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

a. Explique analíticamente la definición de la integral triple. **1p.**

____
____
____
____.

b. ¿Qué representa geométricamente la cuarta dimensión? Explique con sus propias palabras. **0.5p.**

____
____
____
____

c. **Complete:** **0.5p.**

Cuando $f(x, y) = 1$ la integral doble permite calcular ________________, mientras que en integrales triples cuando $f(x, y, z) = 1$ permite calcular _______________.

d. **Señale la respuesta correcta.** **0.5p.**

En la integral triple los dos _______________ diferenciales indican el plano de coordenadas en el cual se localiza la ___________.

a) primeros, integral.
b) primeros, región.
c) últimos, región.
d) últimos, integral.

e. De las integrales a), b), c), ¿Cuál es igual a $\int_3^4 \int_0^2 \int_{-1}^3 f(x,y,z)dzdydx$? 0.5p.

$$a)\ \int_2^4 \int_0^1 \int_{-1}^3 f(x,y,z)dzdxdy$$

$$b)\ \int_{-1}^3 \int_0^2 \int_3^4 f(x,y,z)dxdydz$$

$$c)\ \int_0^2 \int_3^4 \int_{-1}^3 f(x,y,z)dydxdz$$

Explique: ____.

f. Hallar el valor de a en la siguiente integral triple 2p.

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} dzdxdy = \frac{14}{15}$$

Resolución:

Resultado:

El valor de a es: ____

g. Plantee una integral triple para el volumen del siguiente sólido en el primer octante acotada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$ 2p.

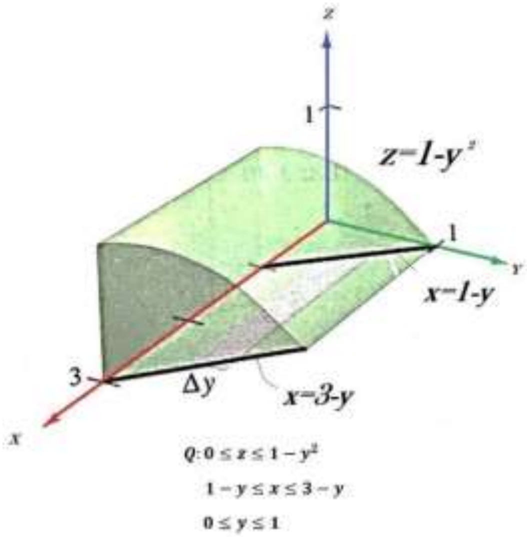


Figura 64: Gráfica del problema 7

Resolución:

h. En el siguiente ejercicio, utilizar integral triple para hallar el volumen del sólido de la siguiente figura. 3p.

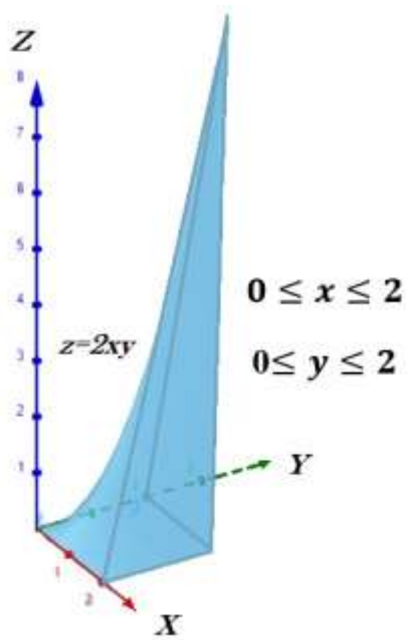
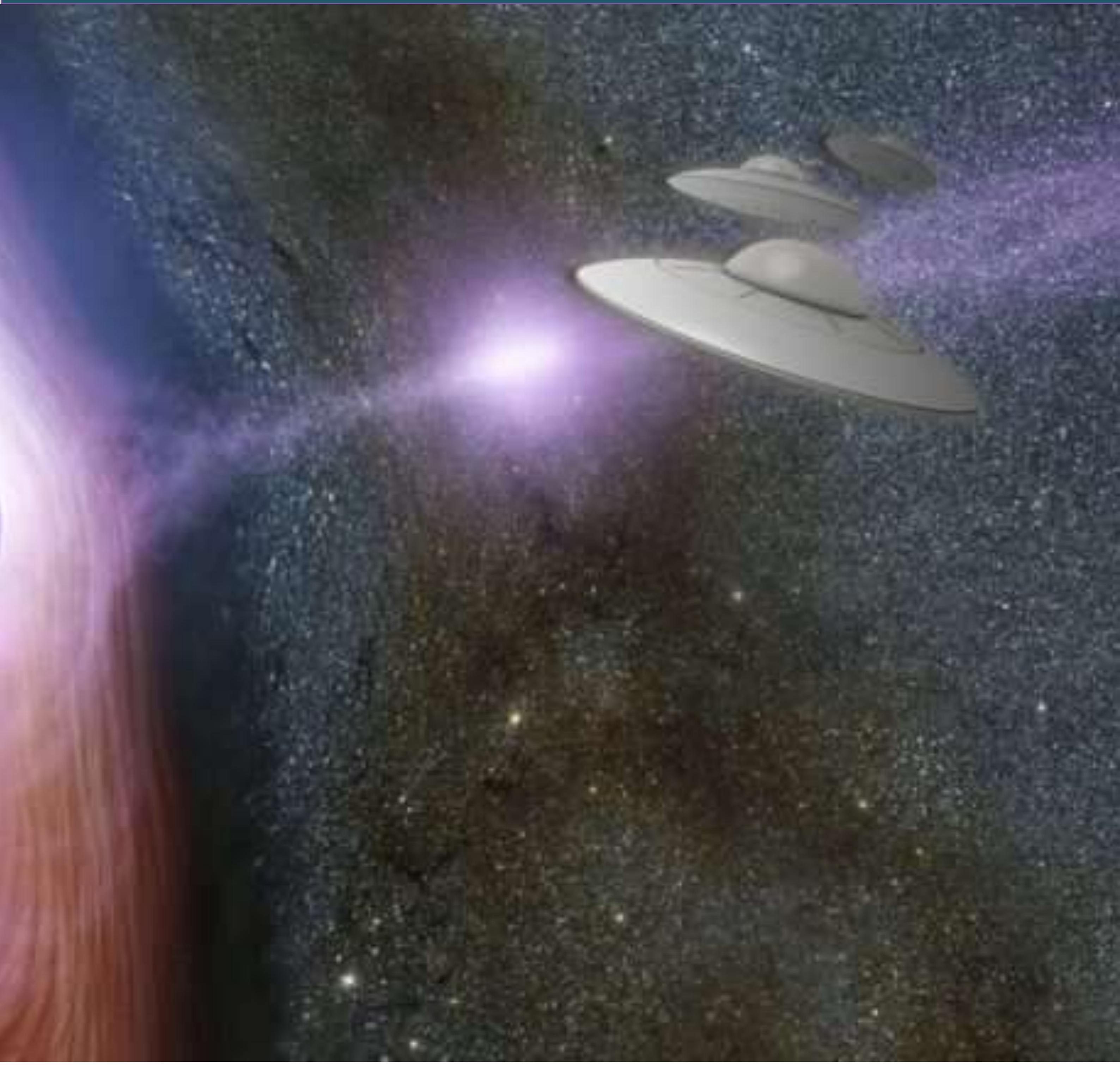


Figura 65: Gráfica del problema 8

Resolución:

CÁLCULO DE VOLUMEN CON INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS



"Emplea todos tus esfuerzos, incluso cuando las posibilidades jueguen en tu contra"

Arnold Palmer

Plan de clase

Objetivos:

- Explicar los conceptos de volumen con integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.
- Recordar los conceptos de la Integral doble en coordenadas polares.
- Utilizar material concreto para identificar porciones de volumen.

Secuencia didáctica:

Tabla 22: Plan de clase

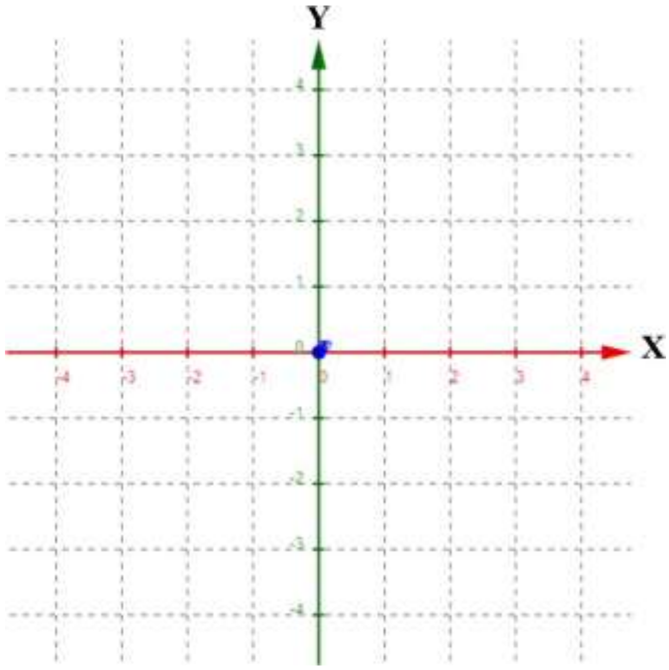
SITUACIÓN	ACTIVIDADES	INDICADORES DE LOGRO	RECURSOS	EVALUACIÓN	TIEMPO
Aprendizaje autónomo	Revisión de los conceptos relacionados con la integral doble con cambio de coordenadas de sistema cartesiano a polar y viceversa mediante actividades con enunciados teóricos, respondiendo preguntas guía y resolviendo ejercicios.	Completa correctamente los enunciados relacionados con el cálculo de volumen con integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas. Realiza los ejercicios del cálculo de volumen con integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas siguiendo un procedimiento gráfico y algebraico. Resuelve ejercicios propuestos en la hoja de trabajo.	Maquetas Hoja de trabajo. Pizarra. Marcador. Borrador.	Aplicación de manera correcta los conceptos estudiados en la resolución de actividades propuestas en la hoja de evaluación. Tiempo: 30min	15min
Aprendizaje con acompañamiento docente	Conceptualización del volumen con integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas mediante la resolución de ejercicios con cambio de coordenadas y actividades para completar				45min
Aprendizaje experimental	Resolución de ejercicios del cálculo de volumen con integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas mediante el uso de maquetas.				30min

APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Tiempo: 15 min

Para verificar los conocimientos previos del estudiante se sugiere realizar las actividades propuestas a continuación.

1. Mediante la gráfica en coordenadas rectangulares, expresar y explicar de manera geométrica como se obtiene las coordenadas polares a partir de las coordenadas rectangulares.



____

____

____

2. Escribir las ecuaciones de conversión de coordenadas cartesianas a polares y viceversa.

Cartesiana a Polar:

_______________________ _______________________

Polar a Cartesiana:

_______________________ _______________________

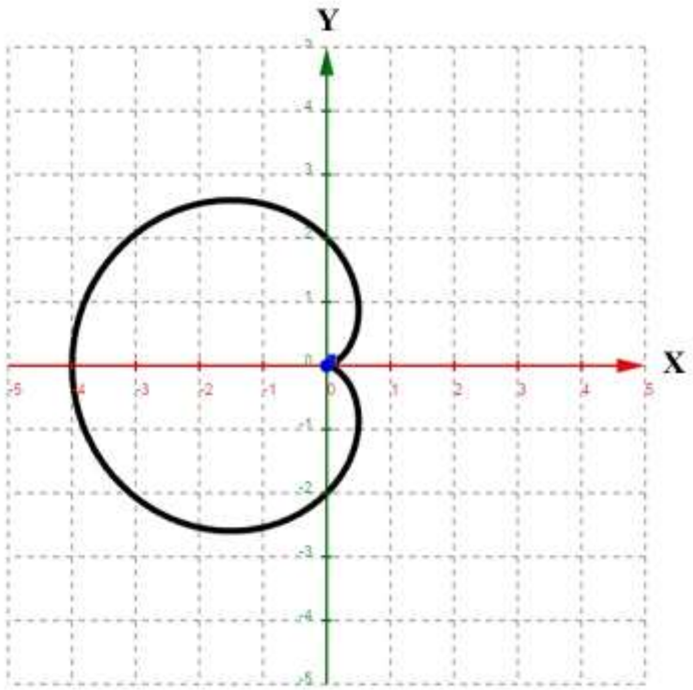
3. Sin desarrollar cálculos, identificar la integral doble que representa la integral de $f(x) = x^2 + y^2$ sobre un círculo de radio 4. Explicar el razonamiento.

$$a)\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2 dr d\theta \qquad b)\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^3 dr d\theta$$

$$c)\int_0^{4}\int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta \qquad d)\int_0^{2\pi}\int_{-4}^4 r^3 dr d\theta$$

Explicación:

4. Dada la siguiente figura, explique ¿Qué es más conveniente utilizar para evaluar la integral doble coordenadas rectangulares o polares?



5. En el siguiente ejercicio utilizar integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ en el primer octante

Resolución:

Resultado:

El volumen es: ____.

APRENDIZAJE CON ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE

Tiempo: 45 min

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

El docente mediante una gráfica expondrá una pequeña introducción sobre las coordenadas cilíndricas y además planteará actividades para el estudiante con fin de construir o descubrir conceptos.

¡Recuerda!

El sistema de coordenadas cilíndricas es una extensión de las coordenadas polares del plano al espacio tridimensional. Como se observa en la imagen las tres coordenadas r, θ, z define la ubicación de un punto en el espacio en coordenadas cilíndricas de la misma manera como se realizó en coordenadas polares.

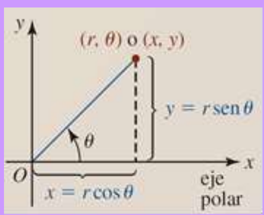


Figura 66: Sistema cartesiano en coordenadas polares y rectangulares

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

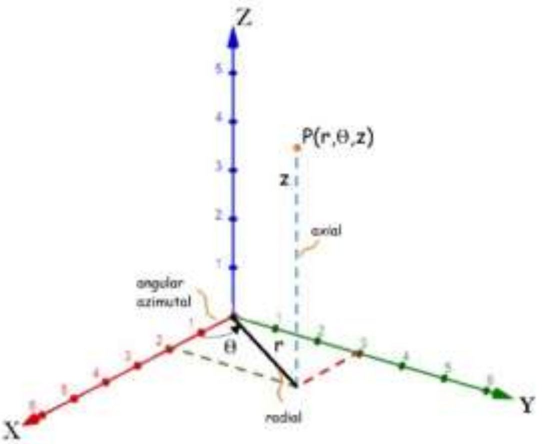


Figura 67: sistema tridimensional en coordenadas cilíndricas

Actividad del estudiante para la adquisición de conocimientos nuevos.

1. Complete:

____ llamado también _______, distancia entre el eje Z y un punto $P(r, \theta)$ o entre la proyección de un punto $P(r, \theta, z)$ en el plano XY.

____ conocido como: __________ o _________, es el ángulo que forma el eje X y la proyección del vector posición del punto P(r,θ,z) en el plano XY medido de manera antihoraria.

____ llamada también coordenada ______, es la distancia con valor positivo o negativo desde el plano XY hasta el punto P.

2. Observe las imágenes y conteste lo siguiente.

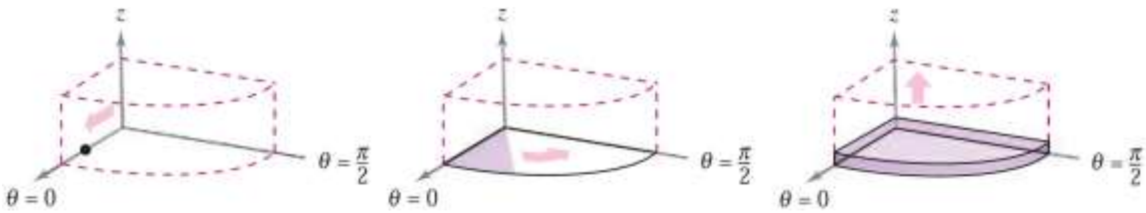


Figura 68: Gráfica del sistema tridimensional en coordenadas cilíndricas.
Fuente: Zill, D.G y Wright, W.S. (2011). Cálculo de varias variables cuarta edición. D.F, México

¿Qué valores puede tomar la variable r?

____

¿Qué valores puede tomar la variable θ?

____

¿Qué valores puede tomar la variable z?

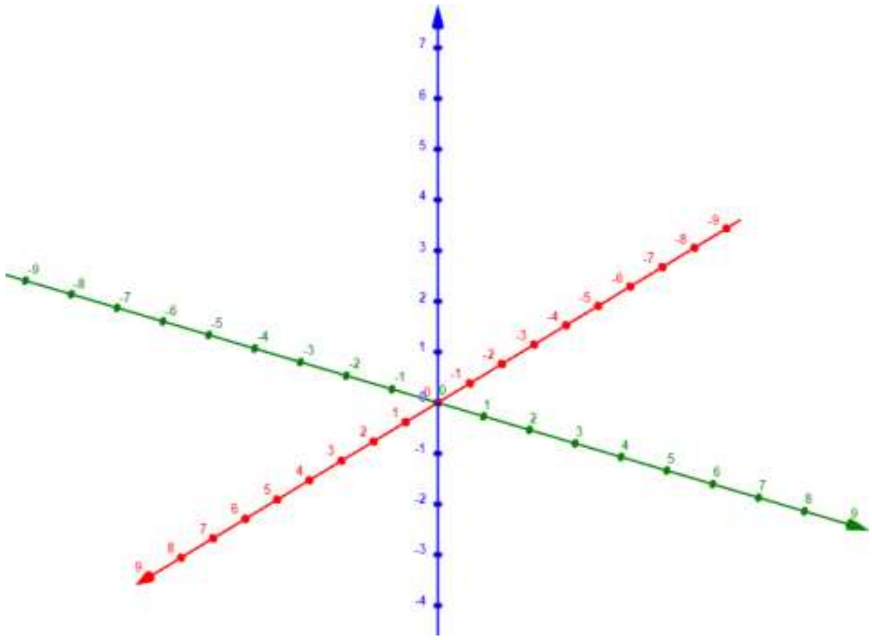
____

Las transformaciones de coordenadas cartesianas a cilíndricas y de cilíndricas a cartesianas son las mismas ecuaciones de las coordenadas polares a excepción de la coordenada z ya que su valor sigue siendo el mismo tanto en cilíndricas como en cartesianas.

Coordenadas cartesianas a cilíndricas	**Coordenadas cilíndricas a cartesianas**
$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin\theta$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

ACTIVIDAD PARA PENSAR

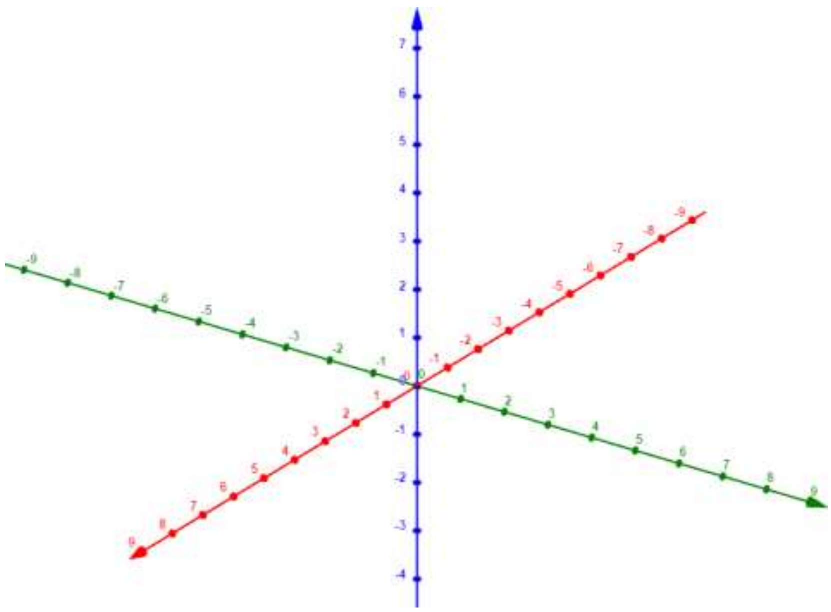
a) Bosqueje y describa la gráfica que se obtiene cuando: en el espacio tridimensional las coordenadas r; θ crecen y la coordenada z se mantiene constante.



Descripción:

____
____
____.

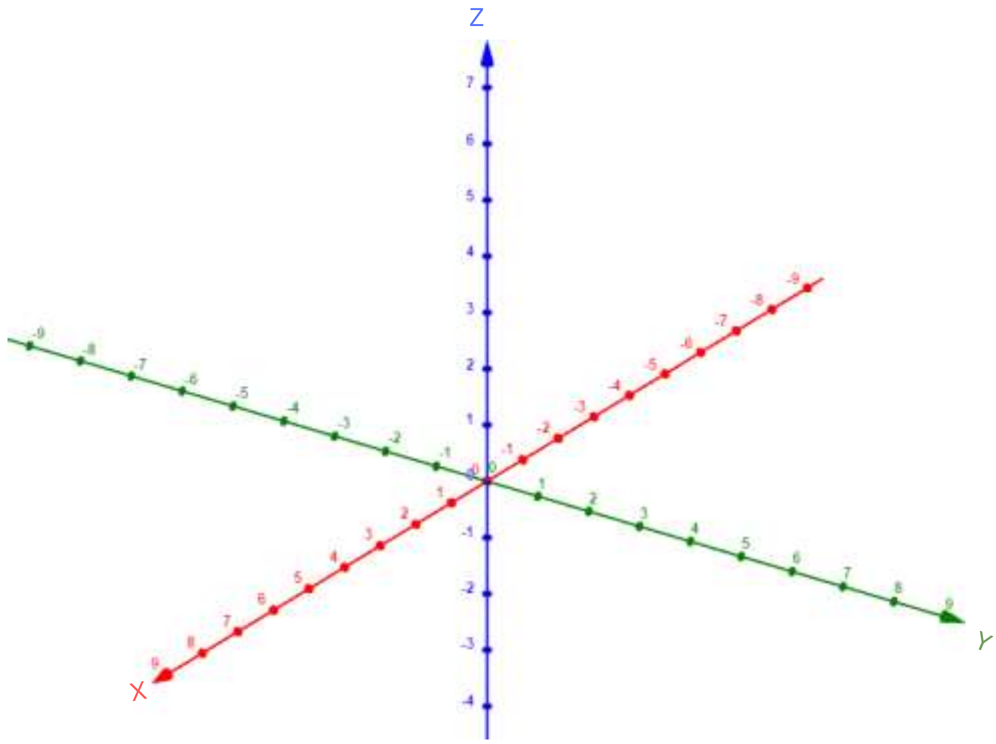
b) Bosqueje y describa la gráfica que se obtiene cuando: en el espacio tridimensional las coordenadas $\theta; z$ crecen y la coordenada r se mantiene constante.



Descripción:

____
____.

c) Bosqueje y describa la gráfica que se obtiene cuando: en el espacio tridimensional las coordenadas r ; z crecen y la coordenada θ se mantiene constante.



Descripción:

____
____.

Consideraciones previas antes de resolver las integrales triples en coordenadas cilíndricas.

La integral triple en coordenadas cilíndricas tiene la forma de:

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \int_{h_1(\theta,z)}^{h_2(\theta,z)} f(r,\theta,z) r dr d\theta dz$$

Ejemplo:

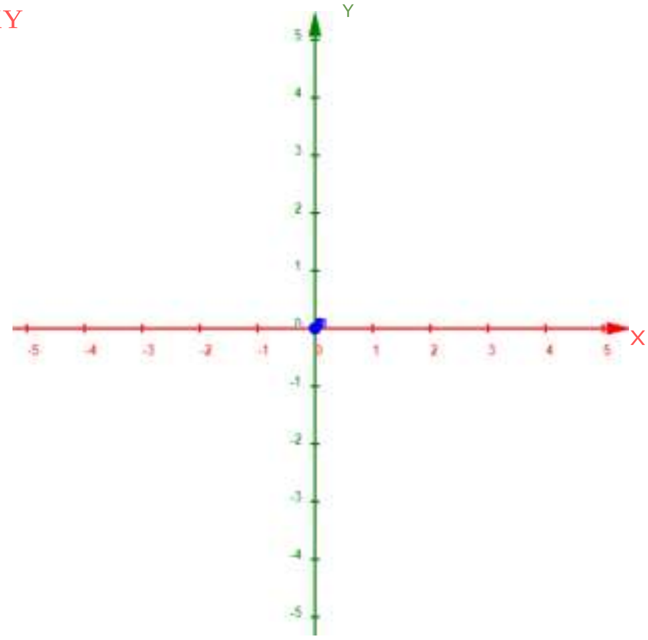
Encuentre los límites de integración en coordenadas cilíndricas para integrar una función $f(r,\theta,z)$ de la región D que corta en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ el cilindro $r = 3cos\theta$.

Solución:

Paso 1: ______________________________________

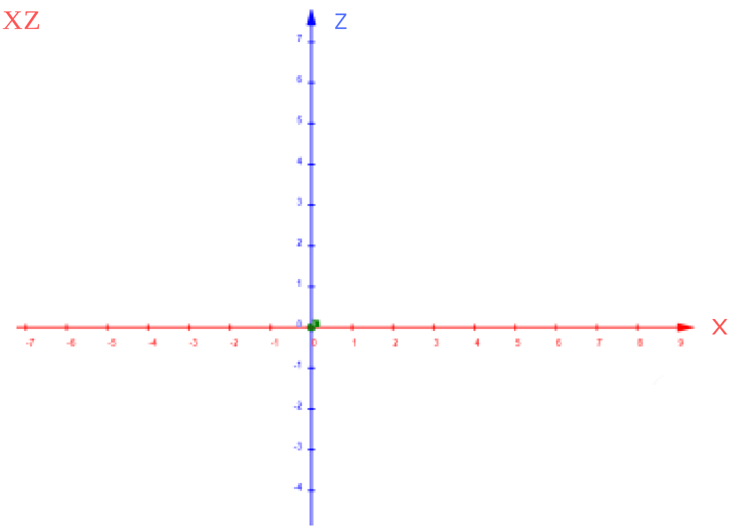
esfera		cilindro	
X	Y	X	Y

Plano XY



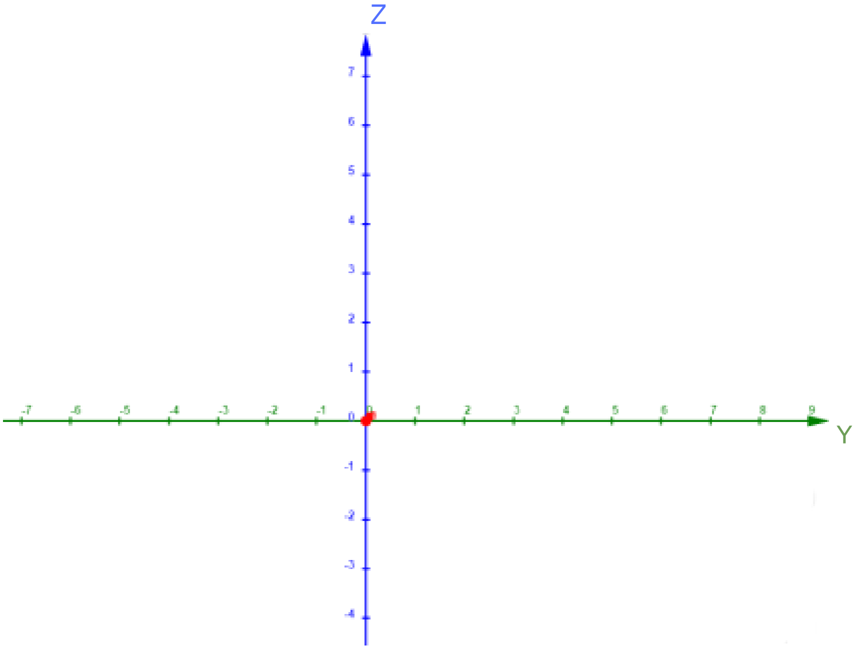
esfera		cilindro	
X	Z	X	Z

Plano XZ

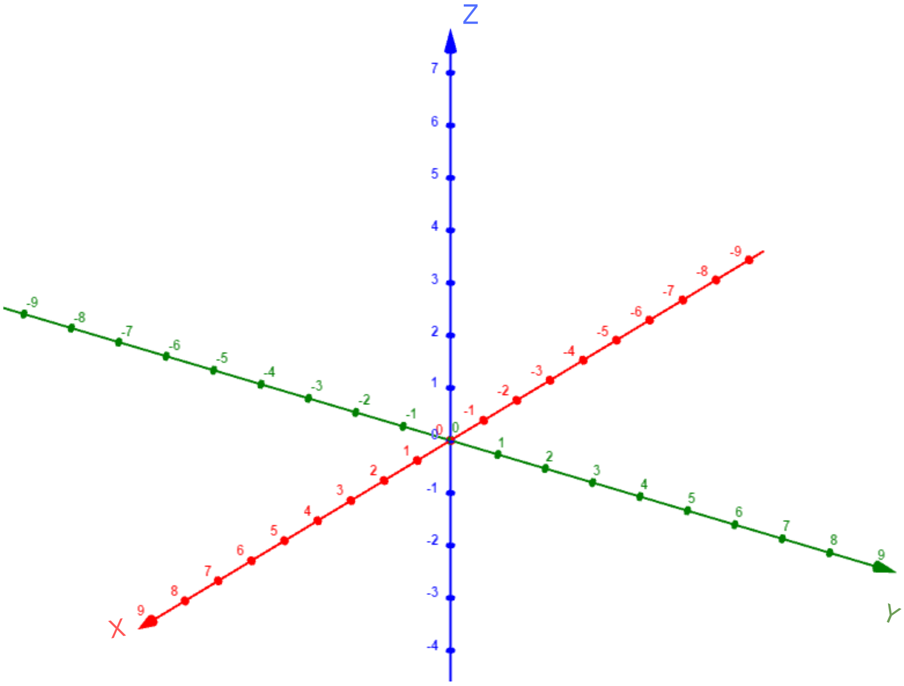


Plano YZ

esfera		cilindro	
Y	Z	Y	Z



Paso 2 ____



a) Plantee los límites de integración en coordenadas cilíndricas de las funciones:

Resolución:

b) Plantee la integral.

Resolución:

Integrales triples en coordenadas esféricas

Otra de las transformaciones que son utilizadas en ejercicios de integración triple son las coordenadas esféricas. El docente mediante una gráfica expondrá una pequeña introducción sobre las coordenadas esféricas y además planteará actividades para el estudiante con el fin de construir o descubrir conceptos.

El sistema esférico, como se observa en la imagen mediante tres coordenadas $\rho, \emptyset, \theta$ se define la ubicación de un punto, dicho punto en pocas palabras queda determinado por su distancia al origen de coordenadas y dos ángulos.

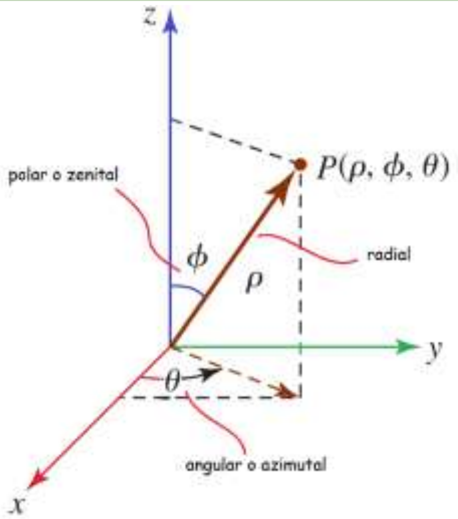


Figura 69: Sistema tridimensional en coordenadas esféricas

Actividad del estudiante para la adquisición de conocimientos nuevos.

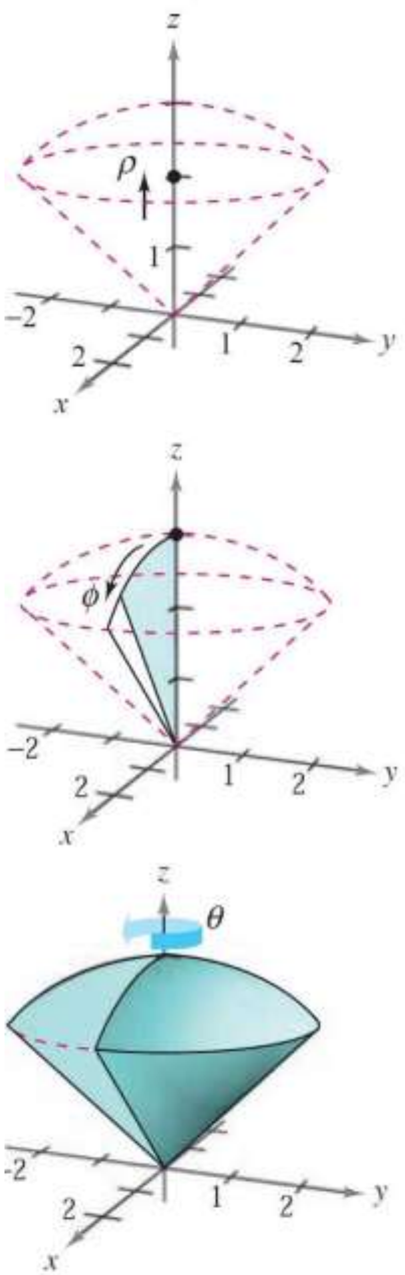
1. Complete:

_____ llamado también coordenada _________, distancia entre el origen y un punto $P(\rho, \emptyset, \theta)$.

_____ conocido como coordenada ___________ o ________, es el ángulo que forma entre el eje Z y el vector posición del punto $P(\rho, \emptyset, \theta)$ medido de manera horaria.

_____ llamada también coordenada ___________ o _________, es el ángulo que forma el eje X y la proyección del vector posición del punto $P(\rho, \emptyset, \theta)$ en el plano XY medido de manera antihoraria.

2. Observe la figura 70 y conteste lo siguiente:



¿Qué valores puede tomar la variable ρ?

____

¿Qué valores puede tomar la variable ∅?

____

¿Qué valores puede tomar la variable θ?

____

Figura 70: coordenadas esféricas

3. Mediante la construcción de triángulos rectángulos y utilizando razones trigonométricas, halle las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a esféricas.

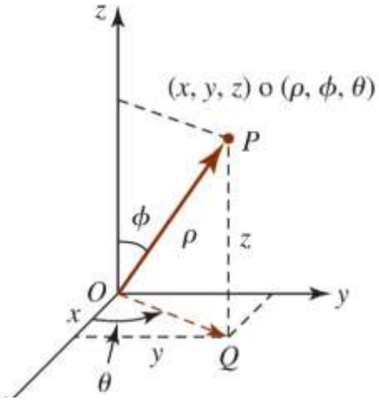


Figura 71: Sistema tridimensional en coordenadas esféricas

Resolución:

x=

y=

z=

Puesto que la distancia $OQ = \rho \sin \emptyset$ y $OP = \rho$, las ecuaciones halladas se convierten en:

x=

y=

z=

4. **Determine de la misma manera las ecuaciones de transformación para convertir las coordenadas rectangulares x, y, z a coordenadas esféricas $\rho, \emptyset, \theta$.**

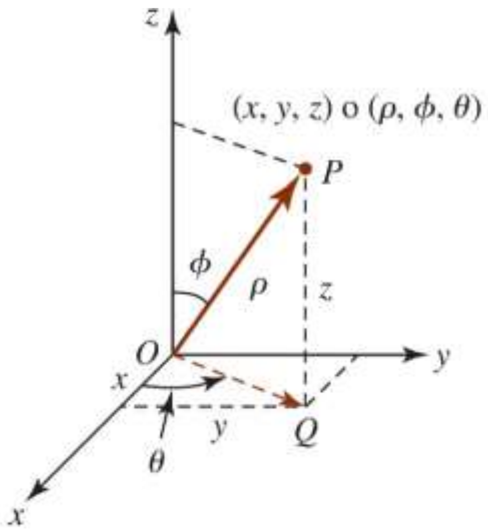


Figura 72: Sistema tridimensional esférico

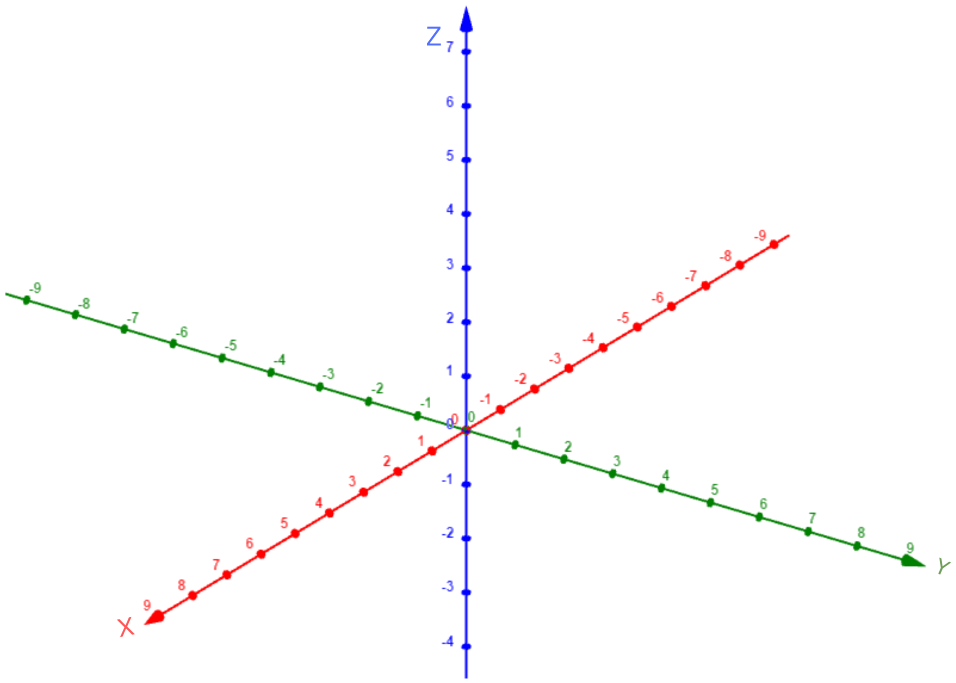
Resolución:

$\rho^2 =$

$\tan \theta =$

$\cos \emptyset =$

a) Bosqueje y describa la gráfica que se obtiene cuando: en el espacio tridimensional las coordenadas $\rho, \emptyset$ crecen y la coordenada θ se mantiene constante.

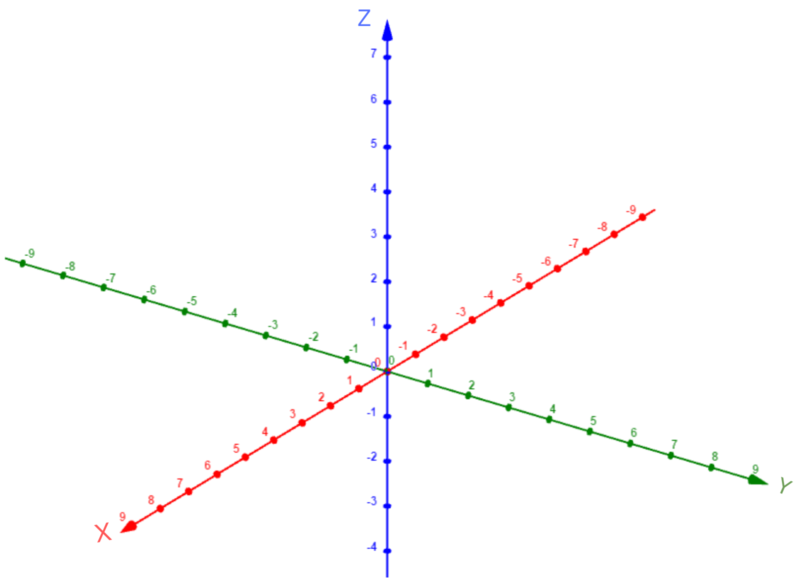


Descripción:

____

____.

b) Bosqueje y describa la gráfica que se obtiene cuando: en el espacio tridimensional las coordenadas ρ & θ crecen y la coordenada $\emptyset$ se mantiene constante.



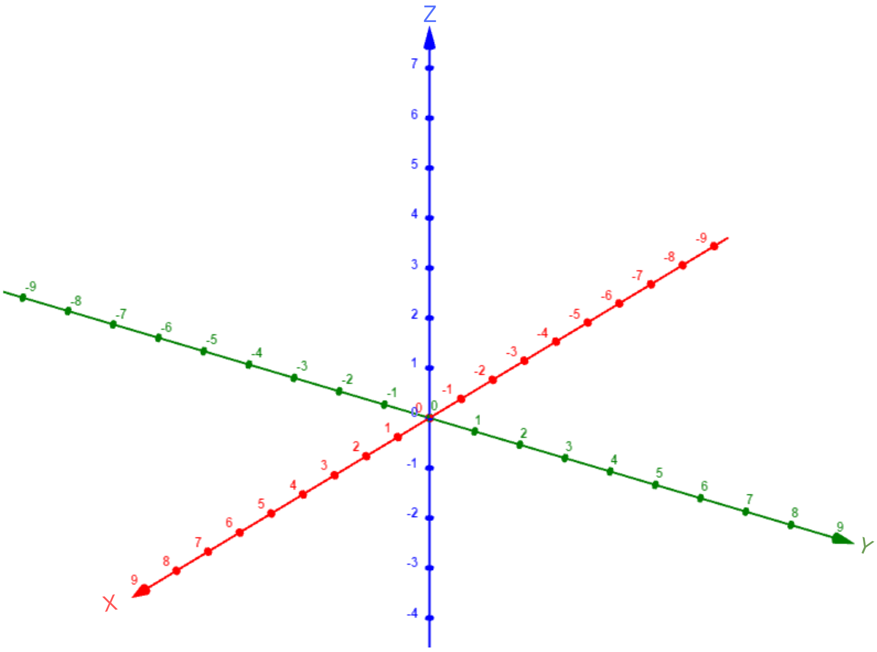
Descripción:

____

____

____.

c) Bosqueje y describa la gráfica que se obtiene cuando: en el espacio tridimensional las coordenadas $\emptyset$ & θ crecen y la coordenada ρ se mantiene constante.



Descripción:

____

____

Consideraciones previas antes de resolver las integrales triples en coordenadas esféricas.

La integral triple en coordenadas esféricas tiene la forma de:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(\emptyset,\theta)}^{h_2(\emptyset,\theta)} f(\rho,\emptyset,\theta)\rho^2 \sin\emptyset \, d\rho d\emptyset d\theta$$

Donde: $\rho^2 \sin\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$ define el diferencial de volumen dV en coordenadas esféricas.

Ejemplo:

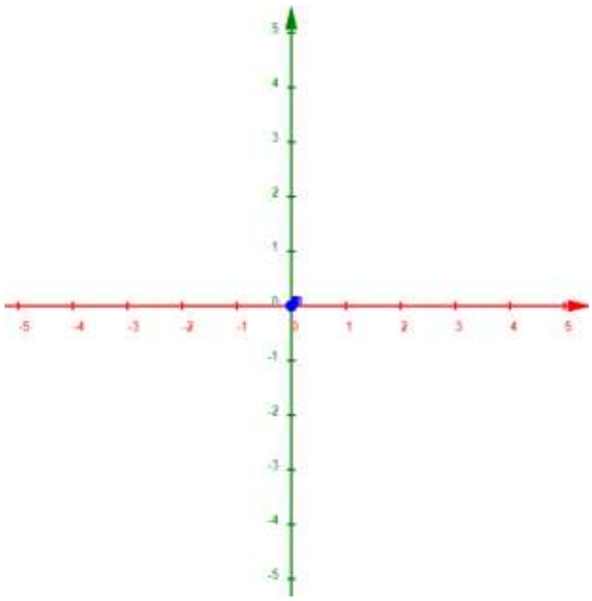
Mediante integrales triples y coordenadas esféricas determine el volumen de un sólido que está acotado por las ecuaciones $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Solución:

Paso 1: ______________________________________

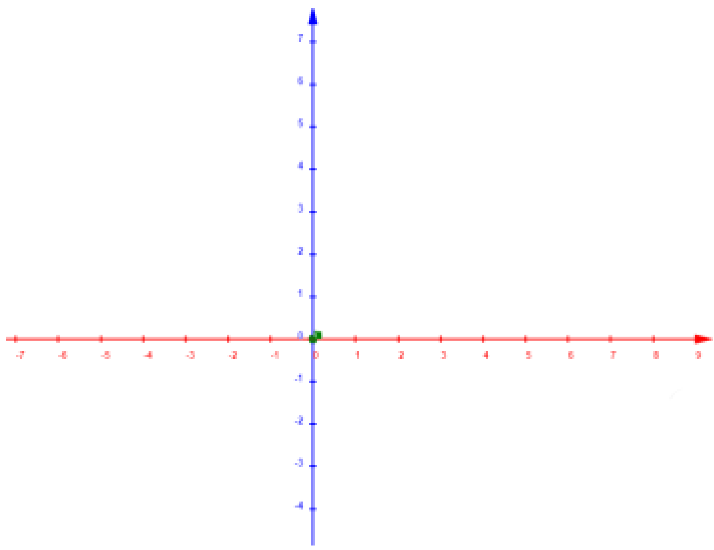
Ecuación 1		Ecuación 2	
X	Y	X	Y

Plano XY



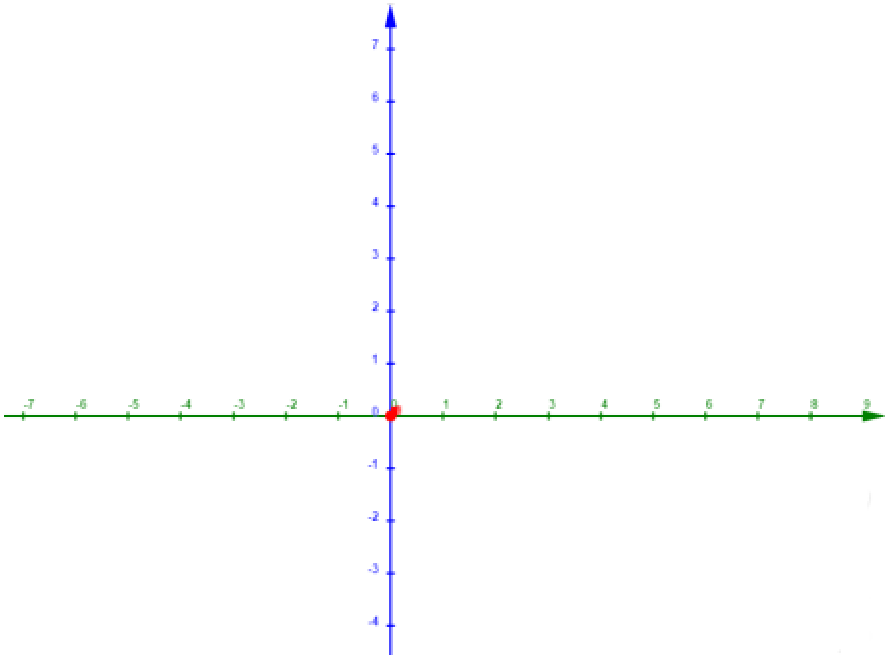
Ecuación 1		Ecuación 2	
X	Z	X	Z

Plano XZ

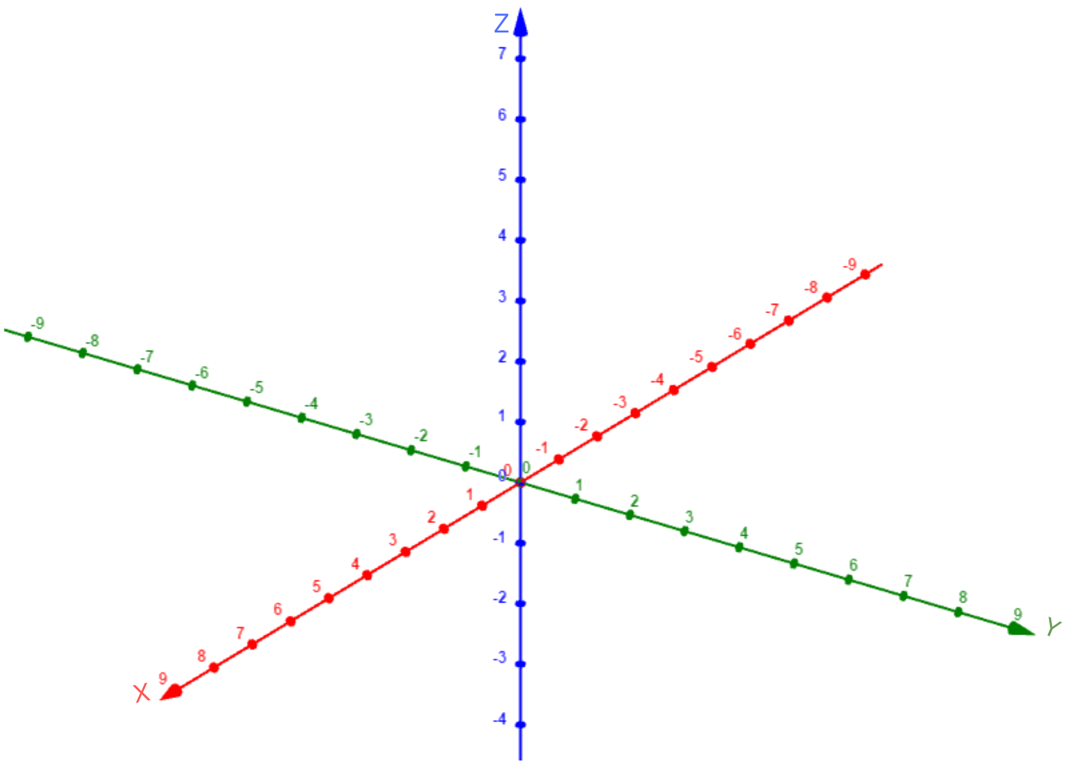


Plano YZ

Ecuación 1		Ecuación 2	
Y	Z	Y	Z



Paso 2 ____



a) Plantee los límites de integración en coordenadas esféricas de las funciones:

Resolución:

b) Plantee la integral.

Resolución:

HOJA DE TRABAJO

Aprendizaje experimental

Cálculo de volumen con Integrales Triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

NOMBRE: **ASIGNATURA:**

FECHA: **CURSO:**

Una vez resueltas las inquietudes de los estudiantes, el docente formará grupos para resolver los siguientes ejercicios. El rol del profesor es el de guiar al alumno.

Tiempo: 30 min

Ejercicios en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Grupo 1. Con el apoyo de la maqueta que se observa en la figura 73, resuelva el ejercicio.

Calcule, usando coordenadas cilíndricas, el volumen del sólido, limitado por la porción de paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$, la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, y el plano $x = y$ en el primer octante.

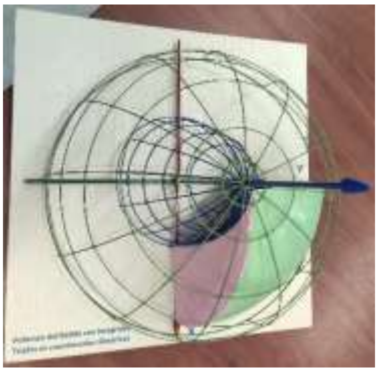


Figura 73: Volumen del sólido con integrales triples en coordenadas cilíndricas

Resolución:

Grupo 2. con el apoyo de la maqueta que se observa en la figura 74, resuelva el ejercicio.

Calcule, usando coordenadas esféricas, el volumen del sólido, limitado por la porción del paraboloide $z^2 = x^2 + y^2 + 2$, y la porción de la esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

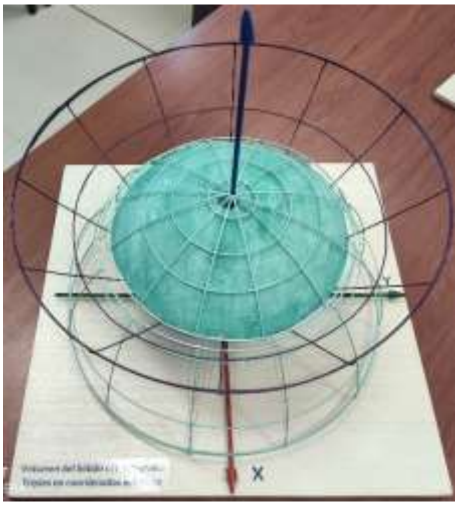
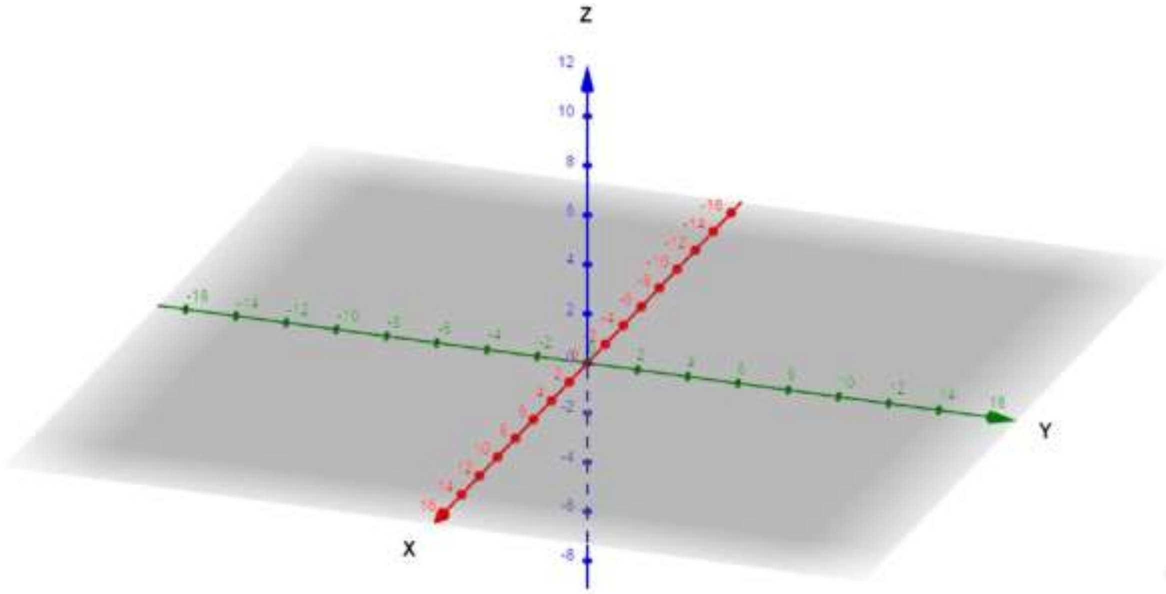


Figura 74: Volumen del sólido con integrales triples en coordenadas esféricas

Resolución:

Grupo 3. Bosqueje las ecuaciones y resuelva el ejercicio.

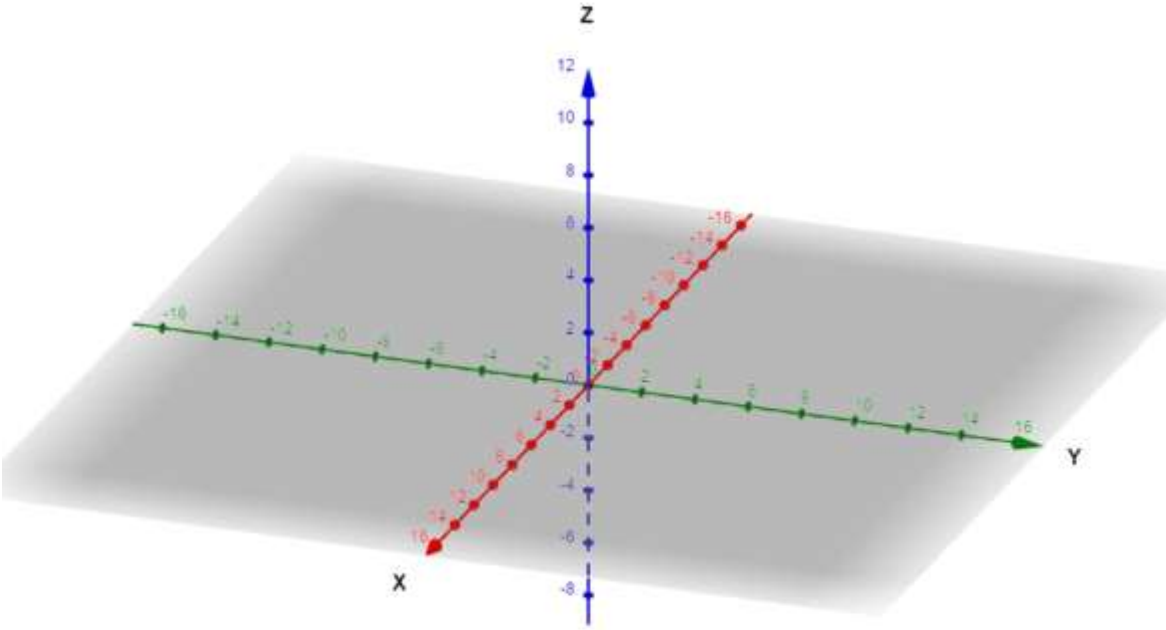
Calcule mediante integral triple y coordenadas cilíndricas el volumen de una cuña metálica limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y por los planos $z = 0$, $y + z = 6$



Resolución:

Grupo 4. Bosqueje las ecuaciones y resuelva el ejercicio.

Calcule mediante integral triple y coordenadas esféricas el volumen del sólido limitado por debajo de $z^2 = x^2 + y^2$ y por encima de $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.



Resolución:

RÚBRICA DE EVALUACIÓN

SOCIALIZACIÓN

Se formarán cuatro grupos de estudiantes dos de ellos construirán una maqueta que represente el diferencial cilíndrico y los otros dos construirán una maqueta que represente el diferencial esférico. La maqueta debe servir como recurso didáctico para explicar cómo se obtiene el concepto respectivo y esto se sustentará en la siguiente clase.

Tabla 23: Rúbrica de evaluación

DIMENSIONES	NIVELES DE VALORACIÓN			TOTAL	
	MUY SATISFACTORIO 3	SATISFACTORIO 2	POCO SATISFACTORIO 1		
1.- Exposición: descripción, justificación y proceso de desarrollo. (3min)					
EXPOSICIÓN CLARA Y CONCRETA DEL EJERCICIO O SITUACIÓN USADA COMO EJEMPLO.	Los estudiantes exponen de forma clara y concreta los 4 elementos mencionados.	Los estudiantes exponen de forma clara y concreta de 2 a 3 de los 4 elementos mencionados.	Los estudiantes exponen de forma clara y concreta uno de los 4 elementos mencionados.		/3
2.- ¿Cuál es la conclusión y el aporte de este al conocimiento o beneficio del estudio del tema? (2min)					
APORTE AL CONOCIMIENTO O BENEFICIO DEL ESTUDIO DEL TEMA.	Existe un aporte novedoso al tema estudiado.	Existe un escaso aporte al tema estudiado.	Existe un mínimo aporte al tema estudiado.		/3
3.- Pregunta del guía o docente (1min)					
RESPUESTA CLARA Y CONCRETA (HACE REFERENCIA DIRECTA AL TEMA)	Los estudiantes responden de forma clara y concreta a la pregunta planteada.	La respuesta de los estudiantes demuestran al menos un aspecto de los dos contenidos en la dimensión.	Los estudiantes no demuestran claridad en su respuesta.		/3
4.- Seguridad, conocimiento del tema y utilización adecuada del lenguaje matemático.					
DEMOSTRÓ SEGURIDAD, CONOCIMIENTO DEL TEMA Y UTILIZACIÓN ADECUADA DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN LA EXPOSICIÓN Y RERSPUESTAS A LAS PREGUNTAS PLANTEADAS.	Los estudiantes evidenciaron los 3 aspectos mencionados en toda su exposición.	Los estudiantes evidenciaron 2 de los 3 aspectos mencionados en toda su exposición.	Los estudiantes evidenciaron 1 de los 3 aspectos mencionados en toda su exposición.		/3
			TOTAL OBTENIDO SUSTENTACIÓN:		/12
			NOTA SOBRE CINCO SUSTENTACIÓN:		/5
			TOTAL OBTENIDO TRABAJO EN CLASE SOBRE CINCO:		/5
			NOTA TOTAL FINAL SOBRE DIEZ:		/10

HOJA DE EVALUACIÓN

Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

1. Complete: **1p.**

Se llama diferencial de volumen al:

____

____.

2. Indique (F) si es falso o (V) si es verdadero cada uno de los siguientes enunciados, en caso de ser falso corrija. **1p.**

___ La coordenada θ también es denominada azimutal.

___ La coordenada θ también es denominada radial.

___ La coordenada ∅ también es denominada azimutal.

___ La coordenada ∅ también es denominada radial.

3. Complete: **2p.**

Use las siguientes palabras para completar los siguientes enunciados:

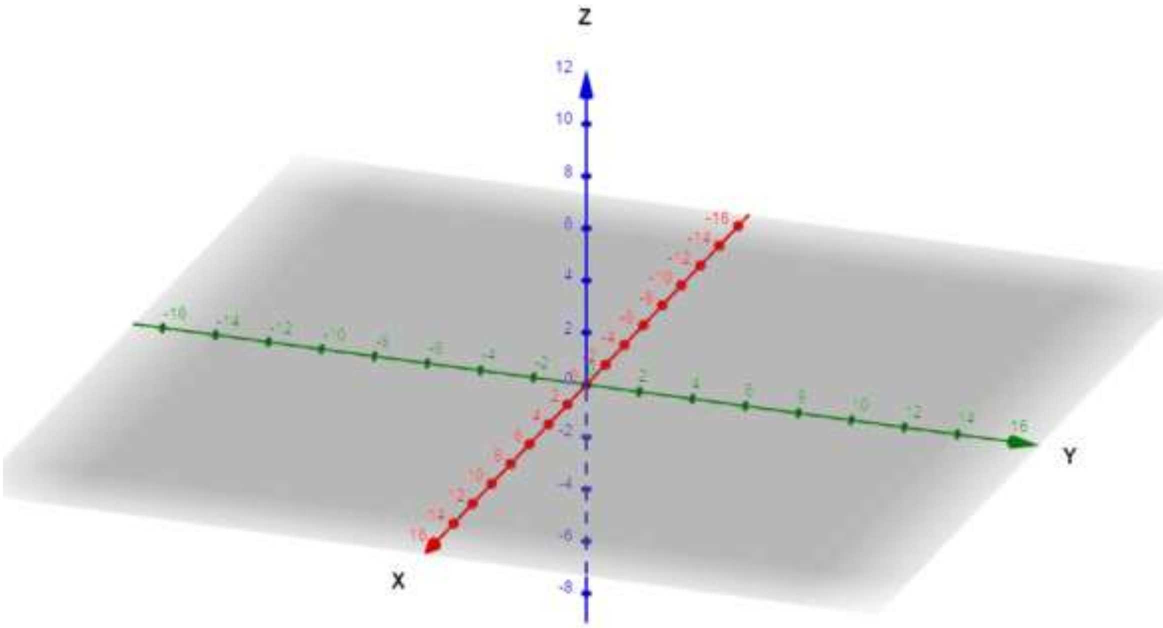
región integración solución $x^2+y^2;\ x^2+y^2+z^2$ sencilla integrando

La integral triple en coordenadas cartesianas se utiliza cuando la integral planteada es________ directamente y se puede hallar su __________ directamente.

Usar la integral triple en coordenadas cilíndricas es necesario cuando el___________ posea una función del tipo x^2+y^2 o si la __________ de __________sobre el plano XY es un sector circular (truncado).

Se usa integral triple en coordenadas esféricas cuando el integrando posea una función que contenga expresiones del tipo ______________o si la región de integración contiene gráficas de superficies que en coordenadas esféricas presentan una ecuación sencilla comparada con su ecuación en coordenadas cartesianas, como por ejemplo esferas, cilindros, conos, etc.

4. Hallar el volumen con integrales triples de la superficie limitada por las siguientes ecuaciones. $x^2 + y^2 = 2z$; $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $z = 0$ **6p.**



Resolución:

ÁREA DE LA SUPERFICIE

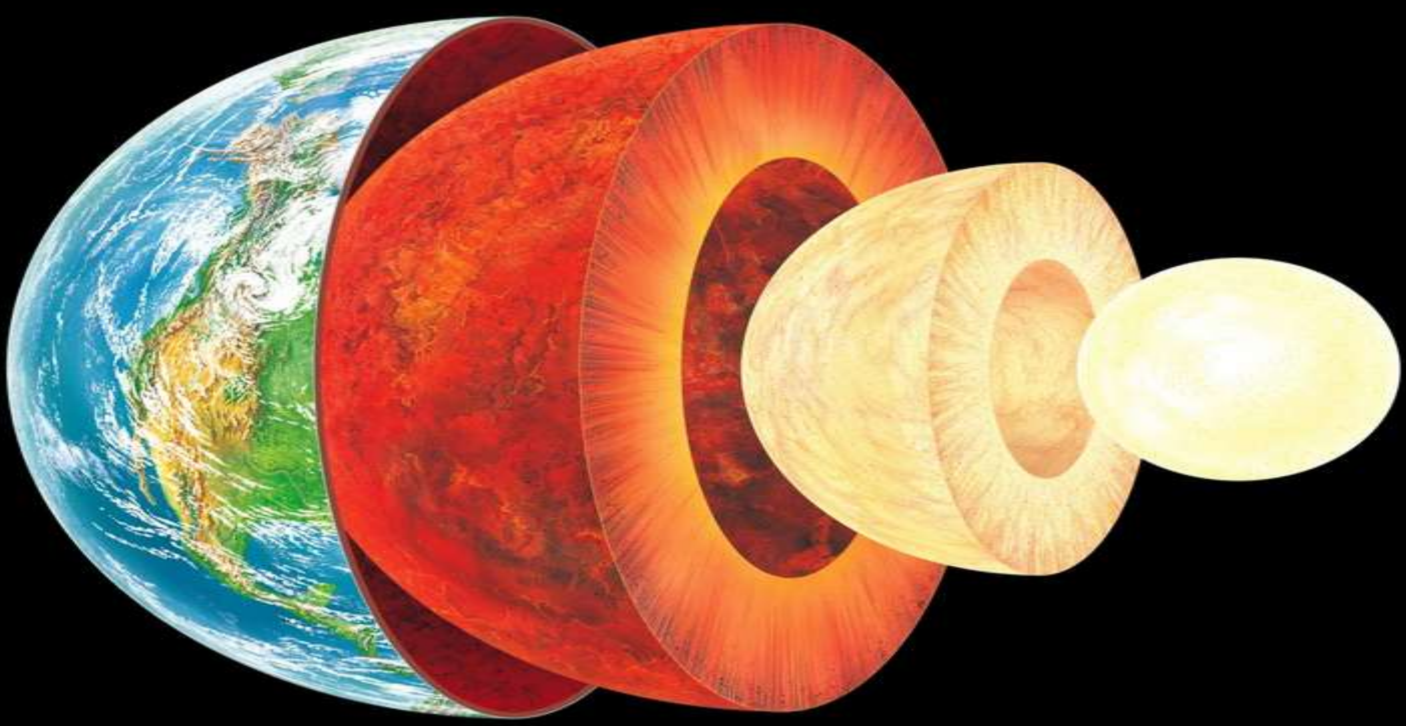


Figura 75: Sección de una superficie esférica.

Fuente: https://2.bp.blogspot.com/-unsqtVk1sWI/XBA0fTVpPuI/AAAAAAAAHUw/SGskJKECTMkIap4Awb8ADn7PSgA7F3fOwCLcBGAs/s1600/Cient%25C3%25ADficos%2Bencuentran%2Bun%2Becosistema%2Bdebajo%2Bde%2Bla%2BTierra%2Bque%2Bes%2Bel%2Bdoble%2Bdel%2Btama%25C3%25B1o%2Bde%2Blos%2Boc%25C3%25A9anos%2Bdel%2Bmundo.jpgpng

Superficie terrestre. Se denomina corteza terrestre o superficie terrestre a la capa más superficial de la estructura de la Tierra; su espesor varía de 12 km, en el fondo oceánico, hasta 60 km en las zonas montañosas de los continentes; los elementos más abundantes de esta capa son el silicio, el oxígeno, el aluminio y el magnesio. Las cortezas de la Tierra, nuestra luna, Mercurio, Venus y Marte han sido generadas por procesos ígneos, y estas cortezas son más ricas en elementos incompatibles que sus mantos subyacentes. También las lunas de otros planetas poseen cortezas formadas por procesos similares: por ejemplo, una luna de Júpiter, también posee una corteza formada por procesos ígneos.

Si te interesa conocer más visita: https://www.youtube.com/watch?v=JnV0LCDWVYk

Plan de clase

Objetivos:

- Revisar los conceptos de área de la superficie e integrales parciales.
- Escribir un algoritmo que permita calcular el área de la superficie usando los conceptos matemáticos.
- Aplicar la integración doble en ejercicios de cálculo de área de la superficie de sólidos.

Aula invertida:

Tabla 24: Plan de clase.

<table>
<tr><th>SITUACIÓN</th><th>ACTIVIDADES</th><th>INDICADORES DE LOGRO</th><th>RECURSOS</th><th>EVALUACIÓN</th><th>TIEMPO</th></tr>
<tr><td>Aprendizaje autónomo</td><td>Revisión de las derivadas parciales y el área de la superficie mediante bibliografía sugerida, completando enunciados teóricos y respondiendo preguntas guía.</td><td rowspan="3">Completa correctamente los enunciados relacionados con derivadas parciales y el área de la superficie

Realiza los ejercicios del área de la superficie siguiendo un procedimiento gráfico y algebraico.

Resuelve ejercicios propuestos en la hoja de trabajo.</td><td rowspan="3">Maqueta

Hoja de trabajo.

Pizarra.

Marcador.

Borrador.</td><td rowspan="3">Aplicación de manera correcta los conceptos estudiados en la resolución de actividades propuestas en la hoja de evaluación.
Tiempo: 45min</td><td>40min</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje con acompañamiento docente</td><td>Conceptualización del área de la superficie y su importancia mediante la lectura de un artículo científico.

Aplicación de conceptos matemáticos a través de la creación de un algoritmo que sirva para calcular el área de la superficie de sólidos.</td><td>45min</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje experimental</td><td>Resolución de ejercicios del área de la superficie mediante el procedimiento elegido por el estudiante y/o el visto en la clase.</td><td>30min</td></tr>
</table>

Metodología: Aula invertida

APRENDIZAJE AUTÓNOMO:

Tiempo: 40min

Los estudiantes en casa deben:

- Leer sobre las derivadas parciales en el libro: "Cálculo" Ron Larzon &Bruce H. Edwards en las pág. 908-912

- Leer sobre el diferencial de área de la superficie y el uso de la integral doble para calcular el área de la superficie en el siguiente libro: "Funciones de Varias Variables" Dennis Zill en las pág. 773-775

Guía de Aprendizaje Autónomo:

La siguiente guía pretende mejorar el estudio del tema **"Cálculo de área de la superficie mediante la integral doble".** Debe ser realizada después de revisar la información sugerida, el estudiante entregará en clases las siguientes actividades:

1. **Resuma los textos leídos mediante una tabla de atributos, ésta debe contener: definiciones, fórmulas, descripción de elementos matemáticos.**

Tabla 25: Derivadas parciales y área de la superficie

Derivadas parciales – Área de la superficie			
Subtemas	Definición	Ecuaciones	Gráfica/ejemplo
Derivadas parciales	Derivada parcial respecto a X		
	Derivada parcial respecto a Y		
Derivadas parciales para una función de tres variables			
Área de la superficie			

2. Complete el siguiente enunciado:

Si $z = g(x, y)$ entonces para hallar g_x se considera ___________ constante y se deriva con respecto a _________. De manera similar, para calcular g_y se considera __________ constante y se deriva con respecto a __________.

3. Indique: la simbología (dos de ellas) que se utilizan para escribir la derivada parcial de una función respecto a una variable.

____

____.

4. Responder las siguientes preguntas acerca del área de superficie S sobre una superficie dada positiva $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano XY.

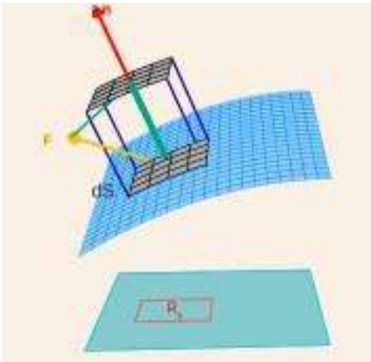


Figura 76: Área de la superficie

a) ¿Es posible para S igualar el área de R? ¿Por qué?

____

____

b) ¿Puede S ser mayor que el área de R? ¿Por qué?

____

____

c) ¿Puede S ser menor que el área de R? ¿Por qué?

____

____

5. Resuelva el siguiente ejercicio relacionado con derivadas parciales:

La concentración molecular $C(x, t)$ viene dada por $C(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/kt}$ Verifique que esta función satisface la ecuación de difusión unidimensional.

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

APRENDIZAJE CON ACOMPAÑAMIENTO DOCENTE.

Tiempo: 45min

1. **A continuación, se presenta un artículo que describe la utilidad de la integral de superficie y su relación con otros temas del cálculo y la física. El docente entregará una copia a cada estudiante:**

Integral de Superficie

Un gran número de fenómenos físicos se modelizan mediante funciones vectoriales. Por ejemplo, son magnitudes vectoriales la fuerza en un campo gravitatorio y la velocidad en el movimiento de un fluido o un sólido. En este tema se tratan las integrales de superficie y se enuncian los resultados del teorema de Stokes (1819-1903) y de Gauss (1777-1855) relativos a flujos de campos vectoriales. La relación entre las integrales de superficie y el área es comparable a la relación entre las integrales de línea y la longitud de arco. Mientras que en una integral de línea integramos sobre una curva, en una integral de superficie integraremos sobre el conjunto de puntos que forman una superficie.

El teorema de Stokes establece la igualdad entre una integral de línea y una integral de superficie. Generaliza al teorema de Green (1793-1841) considerando la curva en el espacio y la superficie una cuyo borde o frontera sea tal curva. El teorema de Green, que relaciona también la integral curvilínea sobre una curva con una integral doble sobre la región limitada por dicha curva, tiene ahora su extensión en el teorema de la divergencia al relacionar el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral triple de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie.

El teorema de la divergencia se conoce también con el nombre de teorema de Gauss–Ostrogradski (1801-1862) ya que, aunque fue Gauss quien demostró el resultado en tres casos particulares, su enunciado más general se debe al matemático ruso Mikhail Ostrogradski quien lo presentó a la Academia de Ciencias en París en 1826. Este teorema tiene vital importancia en electromagnetismo y en dinámica de fluidos.

Recuperado de: https://www.giematic.unican.es/index.php/integral-de-superficie

Con respecto al trabajo realizado y al artículo leído, responda las siguientes preguntas:

a) Con sus propias palabras explique la importancia que tiene el estudio del área de la superficie:

____

____

b) ¿Cuál es el procedimiento que se utiliza para calcular las derivadas parciales de una función $f(x, y)$?

____

____

c) ¿Cuál es la fórmula que define el área de la superficie?

____

____

2. Conjuntamente con el docente resolver el siguiente ejercicio, y en cada uno escribir el algoritmo utilizado.

Determine el área de la superficie de aquella porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ que está sobre la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 5$.

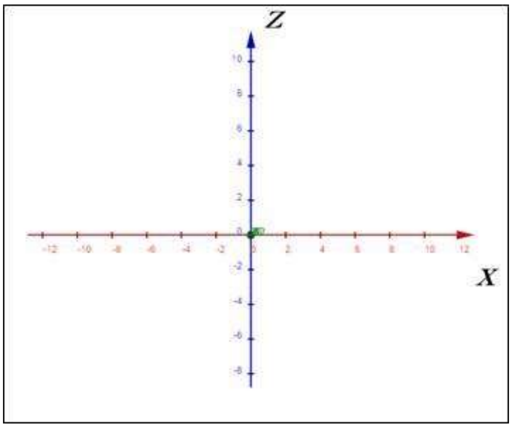
Parte gráfica

a. ____________________________________

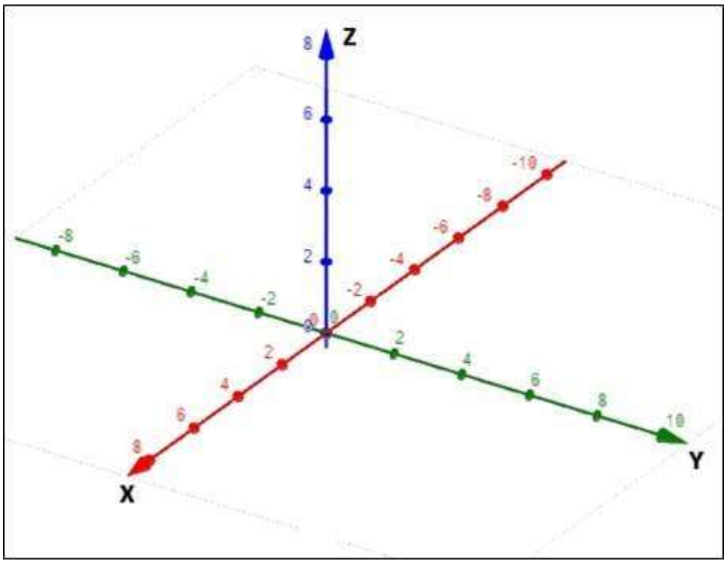
Como $y = 0$ dando valores a X para obtener Z (en la tabla) resulta:

Tabla 26: Datos obtenidos de las ecuaciones.

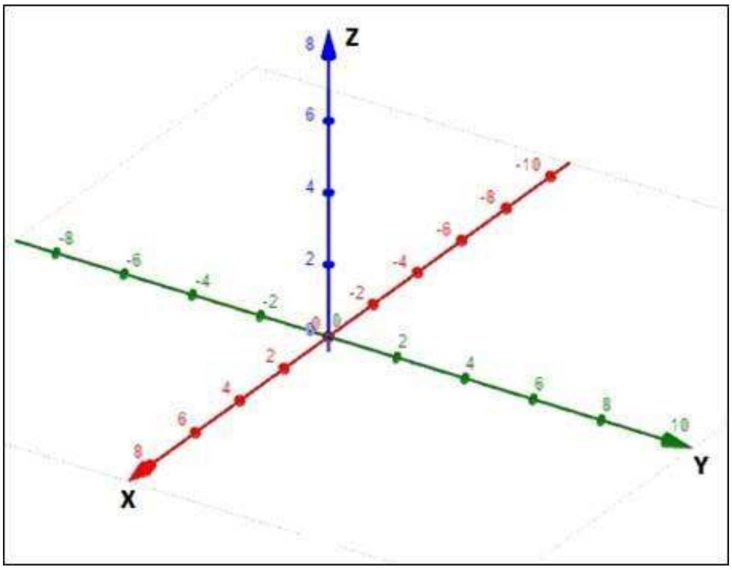
X	Z



b. ____



c. ____



Parte algebraica.

d. Despejar la variable z de la función

$z =$

e. Hallar las derivadas parciales de la función $z = f(x, y)$

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} =$$

f. Sustituir en la fórmula de integral de la superficie los datos obtenidos

$$\iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2}\, dA$$

g. Reducir la fórmula de integral de la superficie y completar la integral con sus límites:

e. Resolver la integral de superficie.

f. Una vez concluida la resolución del ejercicio. Enliste y detalle los pasos que siguió para resolver el ejercicio:

HOJA DE TRABAJO

Aprendizaje experimental

Cálculo del área de la superficie de sólidos

NOMBRE: ______________________ **ASIGNATURA:** ______________________

FECHA: ______________________ **CURSO:** ______________________

Esta hoja debe ser llenada por el alumno y entregada al docente. Tiene una valoración total de 20 puntos

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Una empresa de juguetes produce un objeto esférico de 25cm de radio. Se hace una perforación de 4 cm de radio a través del centro del objeto. Calcular a) el volumen del objeto y b) el área de la superficie exterior del objeto.

El siguiente ejercicio debe ser resuelto con el procedimiento visto en clases.

2. Encuentre el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está arriba de la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 0,\ y = 0,\ 4x^2 + y^2 = 25$ (Sugerencia: Integre primero con respecto a x.)

3. Mediante el uso de la maqueta de la figura 77 Plantee la integral que representa el área de la superficie de la porción de la grafica $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Figura 77: Maqueta del ejercicio 3.

HOJA DE EVALUACIÓN

Cálculo del área de la superficie de sólidos.

NOMBRE:

ASIGNATURA:

FECHA:

CURSO:

1. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

2. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

CONCLUSIONES

- La metodología y los resultados obtenidos permitieron la elaboración de la guía didáctica y los recursos manipulables, considerando las dificultades y obstáculos tanto en la enseñanza como en el aprendizaje y también en base a los requerimientos de los estudiantes.
- La guía didáctica para mejorar la enseñanza de la integración múltiple aplicada al cálculo de área y volumen de sólidos, fue uno de los principales recursos que los estudiantes consideran importantes dentro del aula de clases.
- Al revisar la bibliografía sobre estrategias de aprendizaje con recursos educativos podemos afirmar que, estos deben estar presentes dentro del proceso educativo pues facilitan las condiciones para un aprendizaje significativo.
- La organización jerárquica y secuencial de los elementos de la guía didáctica debe ser correcta pues solo de esta manera se interconectan entre ellos y los recursos construidos.
- Los recursos manipulables deberían estar presentes en el aula de clase ya que representan una opción selecta por los estudiantes y más que nada una alternativa cuando se aborda temas complejos.
- Las estrategias metodológicas con las cuales se diseñaron las clases en la guía didáctica, interactúan con el estudiante construyendo conocimientos nuevos con actividades desarrolladas por el mismo.

RECOMENDACIONES

- Dado que la construcción de sólidos es un campo poco abordado por los profesionales en matemáticas, se recomienda dar mayor importancia a la implementación de recursos manipulables en temas de matemáticas avanzadas.
- Todos los recursos educativos considerados por los estudiantes en esta investigación deberían de ser investigados detalladamente de modo que, se deja abierta la posibilidad a que futuros profesionales amplíen y continúen con esta importante temática.
- Las clases sobre integración múltiple deberían contar con diversas herramientas que sirvan para las explicaciones de conceptos, razón por la cual los docentes deberían considerar implementar maquetas o recursos tangibles en cada clase.
- Se recomienda implementar nuevas estrategias metodológicas en los temas de integración múltiple con el propósito de alcanzar mejores resultados.
- Los docentes deberían trabajar en la parte creativa buscando nuevas alternativas para la enseñanza de manera que, desarrolle en los estudiantes habilidades espaciales.

BIBLIOGRAFÍA:

Aretio, L. G. (2009). La guía didáctica. *Boletín Electrónico de Noticias de Educación a Distancia BENED.* Recuperado de: http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Maestria/MTE/Gen02/diseno_cursos_linea/unidad_2/la%20guia%20didactica.pdf

Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación matemática*, 15(3), 57-76. Recuperado de: file:///C:/Users/Usuario/Desktop/espacial.pdf

Báez, M. D., & Hernández, S. (2002). El Uso de Material Concreto para la Enseñanza de la Matemática. *Taller de Matemáticas del Centro de Ciencia de Sinaloa*, *13*, 2007. Recuperado de: http://absta.info/el-uso-de-material-concreto-par-la-enseanza-de-la-matemtica.html

Ballester Vallori, A. (2005). El aprendizaje significativo en la práctica. In *V Congreso Internacional Virtual de Educación*. Recuperado de: http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/24385

Campos, H. B. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6886/6572

Cousinet, R. (1962). Qué es enseñar. *Archivos de Ciencias de la Educación*. Recuperado de: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/12012/Documento_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Feijoo, R. M. A. (2004). La guía didáctica, un material educativo para promover el 9/aprendizaje autónomo. Evaluación y mejoramiento de su calidad en la modalidad abierta ya distancia de la UTPL. *RIED. Revista iberoamericana de educación a distancia*, *7*(1-2), 179-192. Recuperado de: http://revistas.uned.es/index.php/ried/article/download/1082/998

García Hernández, I., & de la Cruz Blanco, G. D. (2014). Las guías didácticas: recursos necesarios para el aprendizaje autónomo. *Edumecentro*, *6*(3), 162-175. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/pdf/edu/v6n3/edu12314.pdf

Hernández, C. A., Leal, L. H., & Rodríguez, M. L. O. (2011). La modelación de la variación, un análisis del uso de las graficas cartesianas en los libros de texto de biología, física y química de secundaria. *Revista de Ciencias*, *15*, 93-128. Recuperado de: http://nexus.univalle.edu.co/index.php/revista_de_ciencias/article/view/520/642 https://hera.ugr.es/tesisugr/15518620.pdf

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico)*. Recuperado de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/35752312/Dificultades_de_aprendizaje_del_cu00E1lculo_FINAL.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1559081743&Signature=LGUfUS5qN%2Bpw7KCciA4BXwLtDPg%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DDificultades_en_el_aprendizaje_del_calcu.pdf

Mogollón, E. (2010). Aportes de las neurociencias para el desarrollo de estrategias de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Electrónica Educare*, *14*(2), 113-124. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3642017.pdf

Moreira, M. A. (2005). Aprendizaje significativo crítico. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*, (6), 83-102. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1340902

Oré, F. A. C. (2012). La evolución de la didáctica de la matemática. *Horizonte de la Ciencia*, *2*(2), 20-25. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5420575

Osuna, D. A. L., Pérez, D. G. M., & Gutiérrez, E. T. TEORÍAS E INVESTIGACIONES SOBRE EL APRENDIZAJE. Recuperado de: http://www.geocities.ws/roxloubet/teorias_del_aprendizaje.html

Perossa, M., & Marinaro, A. E. (2014). Between Rational Training and Learning to Learn (Entre La Formación Racional Y El Aprender a Aprender). *Revista Global de Negocios*, *2*(2), 79-97. Recuperado de: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2498094

Ruiz Martín, V. (2012). *La maqueta y el modelo tridimensional como recursos didácticos en el área de educación plástica y visual en la ESO* (Master's thesis). Recuperado de: https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/664956/ruiz_martin_vanessa_tfm.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, *5*, 13-66. Recuperado de: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=8HSr-gj8F8QC&oi=fnd&pg=PA13&dq=Sadovsky,+P.+(2005).+La+teor%C3%ADa+de+situaciones+did%C3%A1cticas:+un+marco+para+pensar+y+actuar+la+ense%C3%B1anza+de+la+matem%C3%A1tica.+Reflexiones+te%C3%B3ricas+para+la+educaci%C3%B3n+matem%C3%A1tica,+5,+13-66.+&ots=_Ug4WXqX23&sig=FXKLfYaYZV9vT5nnz2JVRP0JKTk#v=onepage&q&f=false

Souza Melo, S. (2009). Un análisis de los errores de los alumnos en clases virtuales de geometría descriptiva bajo las teorías del desarrollo del pensamiento geométrico y del concepto figural. *Revista Iberoamericana de Educación*, *51*(1), 3. Recuperado de: file:///C:/Users/Usuario/Downloads/3140Melo.pdf

Urbina Laza, O. (2010). Metodología para la evaluación de las competencias laborales en salud. *Revista Cubana de Salud Pública*, 36, 165-174. Recuperado de: https://www.scielosp.org/pdf/rcsp/2010.v36n2/165-174/es

ANEXOS

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Facultad de Filosofía Letras y Ciencias de la Educación
CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
ENCUESTA:

Con el motivo de desarrollar el Trabajo de Titulación previo a la obtención del título de licenciado. con el tema “GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLÚMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS”. Se le solicita y agradece su colaboración, recordando que la presente encuesta es confidencial y sus resultados serán presentados en forma tabulada sin revelar datos personales; es importante que sus respuestas sean en honor a la verdad.

Edad: _____

Fecha: _______________

Ciclo: _________________

1. ¿Cree usted que adquirió buenas bases matemáticas para tomar la asignatura de Funciones de Varias Variables?

SI ____ NO ____

¿Por qué?

____

____

2. ¿En qué contenidos matemáticos relacionados a la integración múltiple presenta confusión? señale más de una opción si es necesario.

____ Límites de integración.

____ Sistemas de coordenadas.

____ A partir de la función encontrar la gráfica en el espacio.

____ Diferenciales cartesianos, cilíndricos y esféricos.

____ Interpretación geométrica de la integral doble.

____ Integrales dobles y triples.

____ Todas las anteriores.

6. Indique el grado de dificultad que representa para usted analizar y calcular el área de un sólido acotado por funciones.

____ Fácil.
____ Difícil.
____ Muy difícil.

7. Indique el grado de dificultad que representa para usted analizar y calcular el volumen de un sólido acotado por funciones.

____ Fácil.
____ Difícil.
____ Muy difícil.

8. Señale el grado de dificultad que tiene usted para visualizar una figura en tres dimensiones.

____ Fácil.
____ Difícil.
____ Muy difícil.

9. Durante la enseñanza del cálculo de área y volumen de sólidos. ¿El docente relaciona los conceptos con el entorno?

____ Siempre
____ Casi siempre
____ Muchas Veces
____ Pocas veces
____ Nunca

10. ¿Considera usted que los textos utilizados para abordar la asignatura de Funciones de Varias Variables fueron suficientes para complementar su estudio?

SI ____ NO ____

¿Por qué?

____

____

11. ¿Qué materiales didácticos utiliza el docente para representar los conceptos tridimensionales? Señale más de una opción si lo considera necesario.

____ Textos
____ Videos
____ Simuladores
____ Otros

Indique cuales

____

____

12. ¿Considera que la implementación de recursos educativos dentro del aula ayuda a reducir la complejidad de la asignatura?

SI ____ NO ____

¿Por qué?

____

____

13. Señale del uno al cinco siendo 1 el más importante aquellos recursos que deberían implementarse, para la enseñanza de la integración múltiple aplicada al cálculo de área y volumen de sólidos.

____ Videos.
____ Guía Didáctica de enseñanza.
____ Material tangible.

____ Simuladores.

____ Otros.

Indique cuales:

____

____

14. ¿Considera que es posible mejorar la enseñanza del Cálculo de área y volumen de sólidos mediante el uso de recursos educativos en el aula?

SI ____ NO ____

Si su respuesta es NO explique que considera usted necesario para mejorarla.

____

____

15. ¿Considera útiles o aplicables los conceptos aprendidos en este tema?

SI ____ NO ____

¿Por qué?

____

____

____

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía Letras y Ciencias de la Educación

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

CUESTIONARIO:

Con el motivo de desarrollar el Trabajo de Titulación previo a la obtención del título de licenciado. con el tema "GUÍA DIDÁCTICA PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE APLICADA AL CÁLCULO DE ÁREA Y VOLÚMEN DE SÓLIDOS CON APOYO DE RECURSOS EDUCATIVOS". Se le solicita y agradece su colaboración, recordando que el presente cuestionario es confidencial y sus resultados serán presentados en forma tabulada sin revelar datos personales; es importante que sus respuestas sean en honor a la verdad.

Edad: _____ Fecha: _______________ Ciclo: _________________

En los siguientes problemas indique si el enunciado es verdadero V o falso

1.- $\int_{-2}^{3}\int_{1}^{5} e^{x^2-y} dxdy = \int_{1}^{5}\int_{-2}^{3} e^{x^2-y} dydx$ ___

2.- En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación del plano $y = x$ es la misma. ___

Conteste:

3.- $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} dxdy$ produce el área de un ____

4.- La región acotada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36, y = -2, y = 5$ es una región de tipo ____

5.- La ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$en coordenadas cilíndricas es ___________, en tanto que en coordenadas esféricas su ecuación es _____________________________

6.- ¿Que representa geométricamente la integral doble?

____
____
____

7.- ¿Que representa la integral triple desde el punto de vista geométrico?

____
____
____

8.- Plantee la integral que representa el volumen del sólido acotado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ & $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

9.- Plantee la integral que representa el área de la superficie de la porción de la grafica $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Formulario

Coordenadas cilíndricas a rectangulares:

$x = r cos\theta \qquad y = r sen\theta \qquad z = z$

Coordenadas rectangulares a cilíndricas:

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$

Coordenadas esféricas a rectangulares:

$x = \rho sen\theta cos\emptyset \qquad y = \rho sen\theta sen\emptyset \qquad z = \rho cos\emptyset$

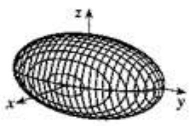
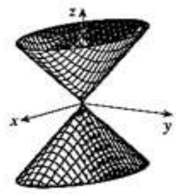
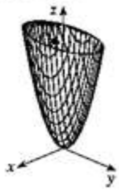
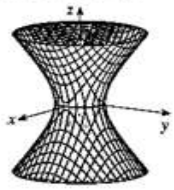
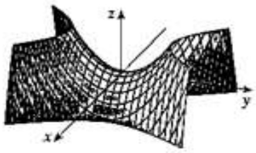
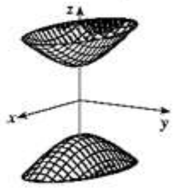
Coordenadas rectangulares a esféricas:

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad tan\theta = \frac{y}{x} \qquad cos\emptyset = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Área de la superficie de un sólido:

$$\iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2}\, dA \qquad \text{ó} \qquad \iint_R \frac{\sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}}{|F_z|}\, dA$$

Gráficas de superficies cuádricas:

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todas las trazas son elipses. Si $a = b = c$, la elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x = k$ y $y = k$ son hipérbolas si $k \neq 0$ pero son pares de rectas si $k = 0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas Se ilustra el caso donde $c < 0$.	Hiperboloide de dos hojas 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales en $z = k$ son elipses si $k > c$ o $k < -c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS

Trabajo de Titulación: Guía didáctica para mejorar la enseñanza de la integración múltiple aplicada al cálculo de áreas y volúmenes de solidos con apoyo de recursos educativo

Estudiantes responsables: Ricardo Aucapiña, Tannya Sacta

N°	ASPECTOS GENERALES	INDICADOR	VALORACIÓN		
			SÍ	NO	NA
1	ESTRUCTURA Y ORGANIZACIÓN	Los materiales guardan relación y correspondencia con los contenidos que se pretenden enseñar.	X		
		Su presentación despierta y mantiene el interés.	X		
		El material didáctico es versátil.	X		
		En su elaboración existe una variedad de materiales.	X		
		Su confección es prolija y agradable visualmente.	X		
		El material ayuda a despertar la posibilidad de análisis y reflexión.	X		
2	ENFOQUE Y OBJETIVO	Se podría reproducir con facilidad.	X		
		Con el material se pueden proponer distintas actividades que fomenten el aprendizaje.	X		
		El material ayuda a relacionar los temas a impartir con el mundo real.	X		
		Puede ser utilizado por otros docentes/grupos.	X		
		Facilita la incorporación de otros materiales y recursos en el proceso didáctico.	X		
		El material ayuda a desempeñar un papel activo en el proceso de aprendizaje.	X		
3	APROBADO		X		

SUGERENCIAS

Cuenca, 28 de enero de 2020

Mgt. Tatiana Quezada
Evaluador 1

Mgt. Freddy Guachun
Evaluador 2