

UNIVERSIDAD DE CUENCA



Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Educación General Básica

“La metacognición en la invención y resolución de problemas matemáticos”

Trabajo de titulación previo a la
obtención del título de Licenciada
en Educación General Básica

DIRECTORA:

Mgts. María Gabriela Aguilar Feijoo

C.I. 0103937348

AUTORA:

Ruth Estefanía Guzmán Coyago

C.I. 0105349096

Cuenca - Ecuador

2018



RESUMEN

La presente monografía se ubica dentro del campo de la didáctica de la matemática. Mediante la revisión y análisis bibliográfico, se buscó fundamentar teóricamente la intervención de la metacognición en la invención y resolución de problemas matemáticos. En primer lugar, se abordó el concepto y clasificación de la metacognición, para luego ver su pertinencia dentro del sistema educativo actual, su relación con la teoría constructivista y su presencia y aporte dentro de la matemática. En segundo lugar, se presentó la invención y resolución de problemas como ejes centrales dentro de la actividad matemática, por sus aportes al aprendizaje de esta disciplina, al igual que la relación consustancial que comparten estas tareas de manera conjunta en los procesos mentales que requieren para su abordaje. También, se describieron modelos propuestos por varios autores, entre ellos Polya, que mostraron las fases a seguir para un abordaje exitoso de los problemas. En tercer lugar, se analizó como los procesos metacognitivos enfocados al conocimiento y regulación cognitiva están presentes y actúan dentro del trabajo con problemas. Finalmente, se concluyó que inventar y resolver problemas matemáticos requiere de emociones favorables, de conocimiento de lo que se sabe (personas, tareas y estrategias), y de procesos mentales como reflexionar, planificar, cuestionar, evaluar etc. Procesos mentales que concuerdan con los modelos propuestos para trabajar problemas y que permiten evidenciar el actuar de la metacognición. Además, cabe recalcar, el rol que tiene el docente como mediador para promover procesos metacognitivos durante las actividades de invención y resolución de problemas.

Palabras Clave: Metacognición, invención y resolución de problemas matemáticos, modelos de resolución de problemas.

**ABSTRACT**

The present monograph is located within the field of mathematics didactics. Through the review and bibliographic analysis, the aim was to theoretically support the intervention of metacognition in the invention and resolution of mathematical problems. First, the concept and classification of metacognition was addressed, to then see its relevance within the current educational system, its relationship with the constructivist theory, and its presence and contribution within mathematics. Secondly, the invention and problem solving were presented as central axes within the mathematical activity, for their contributions to the learning of this discipline, as well as the consubstantial relationship that these tasks share jointly in the mental processes that they require for its approach. Also, models proposed by several authors were described, among them Polya, models that showed the phases to follow for a successful approach to the problems. In the third place, it was analyzed how the metacognitive processes focused on knowledge and cognitive regulation are present and act within the work with problems. Finally, it was concluded that inventing and solving mathematical problems requires favorable emotions, knowledge of what is known (people, tasks and strategies), and mental processes such as reflecting, planning, questioning, evaluating, etc. Mental processes that agree with the models proposed to work on problems and that allow us to demonstrate the action of metacognition. In addition, it should be emphasized, the role of the teacher as a mediator to promote metacognitive processes during the activities of invention and problem solving.

Keywords: Metacognition, invention and resolution of mathematical problems, problem solving models



ÍNDICE

| | |
|---|----|
| INTRODUCCIÓN | 10 |
| CAPÍTULO I: METACOGNICIÓN COMO PROCESO COGNITIVO DENTRO DEL CAMPO DE LA MATEMÁTICA..... | 13 |
| 1.1. Metacognición: conceptualización y clasificación | 14 |
| 1.1.1. Definición de metacognición | 14 |
| 1.1.2 Metacognición: diferencia con otros conceptos relacionados. | 16 |
| 1.1.3. Clasificación de la metacognición | 17 |
| 1.1.4. Elementos claves dentro de la metacognición. | 19 |
| 1.2. ¿Por qué hablar de metacognición en la educación? | 21 |
| 1.2.1. La necesidad de los procesos metacognitivos en la educación actual. | 23 |
| 1.2.2. La metacognición y la teoría constructivista | 25 |
| 1.2.3. Condiciones para desarrollar la metacognición en la educación. | 30 |
| 1.3. La metacognición dentro del área de matemáticas. | 31 |
| 1.3.1. Metacognición y pensamiento matemático..... | 31 |
| 1.3.2. Metacognición y su aporte al aprendizaje de la matemática..... | 34 |
| CAPITULO II: INVENCION Y RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS | 38 |
| 2.1. La invención y la resolución de problemas matemáticos: dos actividades consustanciales..... | 38 |
| 2.1.1. ¿Qué se entiende por problema matemático? | 39 |
| 2.1.2. Invención de problemas matemáticos | 41 |
| 2.1.3 Resolución de problemas matemáticos | 45 |
| 2.1.4 Invención y resolución de problemas: relación consustancial..... | 48 |
| 2.2. Modelos de invención y resolución de problemas matemáticos..... | 51 |
| 2.2.1. Modelo de Polya | 51 |
| 2.2.2. Modelo de Mayer | 53 |
| 2.2.3. Modelo de Schoenfeld | 54 |
| 2.2.4. Modelo de Pifarré y Sanuy | 55 |
| 2.2.5. Modelo para resolver problemas en los textos matemáticos del Currículo 2016 .. | 56 |
| 2.2.6. Fases para la invención de un problema (Método de proyecto) | 57 |
| CAPÍTULO III: ACTUACIÓN DE LA METACOGNICIÓN EN LA INVENCION Y RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS | 62 |
| 3.1. El conocimiento cognitivo durante la invención y resolución de problemas matemáticos | 62 |
| 3.1.1. Conocimiento referido a personas | 63 |



3.1.2. Conocimiento referido a las tareas.....67
3.1.3. Conocimiento referido a estrategias.....69
3.2. La regulación cognitiva durante la invención y resolución de problemas matemáticos.
.....70
3.2.1. Regulación presente en la planificación71
3.2.2. Regulación presente en la aplicación72
3.2.3. Regulación presente en la evaluación72
3.2.4. Regulación cognitiva en problemas matemáticos: ejemplos74
3.3. Aportes de la metacognición a la invención y resolución de problemas matemáticos.76
3.3.1. Enfrenta dificultades respecto al trabajo con problemas76
3.3.2. Mejora el aprendizaje a través de problemas78
3.4. ¿Necesito metacognición para inventar y resolver problemas matemáticos?.....79
CONCLUSIONES81
RECOMENDACIONES.....83
REFERENCIAS.....85

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Procesos mentales presentes en la invención y resolución de problemas.....61
Tabla 2: Invención de un problema.....76



Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio
Institucional

Ruth Estefanía Guzmán Coyago en calidad de autor/a y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "La metacognición en la invención y resolución de problemas matemáticos", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 20 de noviembre de 2018.

Ruth Estefanía Guzmán Coyago

C.I: 0105349096



Cláusula de Propiedad Intelectual

Ruth Estefanía Guzmán Coyago, autor/a del trabajo de titulación “La metacognición en la invención y resolución de problemas matemáticos”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 20 de noviembre de 2018.

Ruth Estefanía Guzmán Coyago

C.I: 0105349096



AGRADECIMIENTO

A Dios, por brindarme la vida y las oportunidades para no decaer durante las adversidades presentadas en todo este proceso de aprendizaje.

A mi familia por el apoyo emocional y económico para poder realizar este trabajo de titulación con tranquilidad y perseverancia.

A mi tutora, Magíster Gabriela Aguilar por la gran paciencia, los valiosos consejos y la motivación para poder culminar de la mejor manera esta monografía.

Estefanía Guzmán.



DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico a mi familia, en especial a mi madre quien ha sido y es mi mayor inspiración para entender que con sacrificio y esmero se pueden lograr grandes sueños.

Estefanía Guzmán.



INTRODUCCIÓN

La disciplina matemática permite una mejor comprensión y organización de la realidad (Bosch, 2012) y aporta a la “formación del carácter humano” (Isoda y Katagiri, 2016, p.34). Así, Vila y Callejo (2014) mencionan que la matemática es una materia que permite desarrollar y mejorar un pensamiento de alto nivel de complejidad. Dentro de este nivel superior de pensamiento se ubica la metacognición, ya que según Peñalva (2010) “la mayor parte de las competencias asociadas con el aprendizaje de las matemáticas son de tipo metacognitivo” (p.144). La metacognición es definida como esa capacidad para examinar, criticar y ajustar el proceso de pensamiento en destrezas, conceptos y actitudes, que permiten al sujeto ser más efectivo en el logro de sus propósitos (Villarini, 2003), es decir, el individuo es capaz de controlar de manera consciente sus procesos cognitivos y conducirlos apropiadamente para generar actitudes y aptitudes favorables para afrontar actividades que requieran de este nivel de pensamiento. La metacognición provoca un aprender a aprender adecuado por parte del estudiante, e impide una reproducción del conocimiento carente de sentido y conciencia.

Por otro lado, la invención y resolución de problemas “...constituyen el eje vertebrador de la mayor parte de los conocimientos matemáticos escolares” (Ayllón, 2012, p.10). Son actividades que mejoran las habilidades del pensamiento matemático y juntas brindan una mayor calidad respecto a los problemas que se trabajan. Además, inventar un problema favorece su resolución, se hace uso de procesos metacognitivos y ayuda a descubrir errores en los conocimientos matemáticos que se poseen (Fernández y Barbarán 2017). En definitiva, con estas tareas los estudiantes pueden ser más competentes (Ghasempour, Bakar, Jahanshahloo, 2013). Sin embargo, desde las experiencias vividas como estudiante, y en los diferentes niveles de Actividad Pedagógica en la Escuela (APE), se ha evidenciado en las aulas un escaso trabajo



con los niños en actividades con problemas matemáticos. Las pocas veces que se ha visto que los niños resuelven problemas, se ha advertido que el proceso no es el adecuado, ya que no se constituye un reto para los niños sino más bien una aplicación mecánica de algoritmos para tener una respuesta correcta. Por otra parte, el inventar problemas no es una actividad común en las clases de matemáticas, lo que provoca que en la mayoría de casos se presenten problemas alejados de la realidad de los estudiantes y carentes de sentido.

Además, considerando que en varias investigaciones realizadas se afirma que las personas con frecuencia razonan de manera inferior a la que requieren, son significativos los esfuerzos para fomentar a través de métodos las habilidades del pensamiento (Tesouro, 2006) y, teniendo presente que la metacognición contribuye a desarrollar el protagonismo del estudiante dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje (Gusmão, 2006) surge el interés por conocer cómo la metacognición interviene dentro de la invención y resolución de problemas matemáticos.

Hoy más que nunca en nuestra sociedad es necesario que en la educación se fomenten las habilidades del pensamiento en los estudiantes. Se requiere aprender a pensar y no a acumular información (Tesouro, 2006). En este sentido, la metacognición se vuelve relevante para generar mejores procesos de aprendizaje, más cercanos y autónomos. El trabajo con problemas matemáticos permite realizarlo. A pesar de esta importancia, no se han reportado investigaciones en el contexto ecuatoriano acerca de este tema, no así a nivel internacional, en el que se reportan investigaciones sobre esta temática en países como España (Ayllón, Gallego y Gómez, 2016; Fernández y Barbarán, 2017), Colombia, (Iriarte y Sierra, 2011; Klimenko y Alvares, 2009) y México (Peñalva, 2010).

En este contexto, la presente investigación se ha planteado como objetivo general fundamentar teóricamente la intervención de la metacognición en la invención y resolución de



problemas matemáticos. La metodología para alcanzar dicho objetivo ha sido mediante la revisión y análisis bibliográfico tanto de libros como de artículos científicos.

Esta monografía comprende tres capítulos. En el primer capítulo, se busca identificar la naturaleza de la metacognición como proceso cognitivo dentro del campo de la matemática. Para esto, se inicia con el concepto y clasificación de la metacognición. A partir de la comprensión de lo que implica la metacognición, se la aborda desde su pertinencia dentro de la educación actual, y en relación con la teoría constructivista. Finalmente, se refleja dentro del campo de la matemática, como el pensamiento matemático y la metacognición permiten mejores procesos de aprendizaje de la matemática, más autónomos, cercanos a la realidad de los estudiantes, y que valoran los aspectos cognitivos y emocionales del sujeto.

En el segundo capítulo, se explica en qué consiste la invención y resolución de problemas matemáticos, partiendo de la definición de lo que es un problema. También, se evidencia como el inventar y resolver problemas, actividades a la vez individuales pero interdependientes, son claves para fomentar el pensamiento matemático y el aprendizaje en sí. Se finaliza exponiendo desde varios autores, entre ellos, Schoenfeld, Mayer y Polya, modelos propuestos para la invención y resolución de problemas.

Para finalizar, en el tercer capítulo se busca comprender la incidencia de la metacognición en la invención y resolución de problemas matemáticos. Aquí, se analiza la actuación de los procesos metacognitivos referidos al conocimiento cognitivo (personas, tareas y estrategias) y a la regulación cognitiva (planificación, control y evaluación) en actividades de invención y resolución de problemas. Además, se examina, a partir de investigaciones y reflexiones personales, el valor que tiene la metacognición en el trabajo con problemas para la mejora del aprendizaje matemático.



CAPÍTULO I: METACOGNICIÓN COMO PROCESO COGNITIVO DENTRO DEL CAMPO DE LA MATEMÁTICA

El presente capítulo tiene como objetivo principal identificar la naturaleza de la metacognición como proceso cognitivo dentro del campo de la matemática. Con este fin, el capítulo se desarrolla en tres partes. En la primera parte, se aborda el concepto y clasificación de la metacognición recurriendo al origen de este término para luego abordar las perspectivas desde donde se lo investiga y define. En este contexto es importante también diferenciarlo de otros términos con los que la metacognición se halla relacionada. En cuanto a la clasificación y los elementos que lo componen se realizará una descripción detallada que permitirá entender cómo actúan, su función y relación.

En la siguiente parte se aborda la metacognición dentro del ámbito educativo. Se considera importante relacionar este proceso de pensamiento con las necesidades de la sociedad actual, para de esta manera argumentar su pertinencia y aporte a la educación. También se verá la relación con la teoría constructivista, y desde esta perspectiva se definirán categorías importantes como: conocimiento, aprendizaje, docente, alumno y pensamiento. Estas definiciones posibilitan tener claro el aporte de la metacognición en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Para finalizar, se realiza un acercamiento de la metacognición dentro del campo de la matemática, para lo cual se abordan concepciones que se le ha dado al término matemática. Según la concepción que se tenga de ésta disciplina, ha de influir de manera favorable o no para el desarrollo del pensamiento matemático y la metacognición. También, se presentan algunas características del pensamiento matemático que permiten asociarla con la



metacognición. Por otra parte, el conocer las dificultades en el aprendizaje de la matemática permite valorar el aporte de la metacognición a esta disciplina.

1.1. Metacognición: conceptualización y clasificación

Partiendo del origen genealógico y científico del término metacognición, el uso de palabras con el prefijo “meta” y su significado surge con la conceptualización de la metafísica desde una perspectiva filosófica. Un metatérmino empieza a tener un significado que hace referencia a un plano superior, más allá de lo dado, en donde se lo utiliza para fundamentaciones científicas y una nueva construcción reflexiva del saber. Paralelamente, el surgimiento de estas denominaciones coincide con escenarios de crisis paradigmáticas de la ciencia. Así, por los años 30 y 40 se da un auge de metatérminos como la metamatemática y el metalenguaje, ya con un componente reflexivo. Posteriormente, entre los años 40 y 50 se aplican a otras disciplinas (lenguaje y la comunicación) como fundamento discursivo en cuestionamientos a crisis de paradigmas disciplinares (González de Requena, 2010).

Las investigaciones en metacognición se dan desde principios y paradigmas dominantes con diferentes perspectivas teóricas como: paradigmas psicológicos, procesamiento de la información, paradigmas computacionales, enfoques fenomenológicos, y sociocognitivos, que intentan definir y caracterizar a éste término (González de Requena, 2010). Los estudios ya propios sobre la metacognición iniciaron en la década de los 70 por el estadounidense John Flavell, sin embargo, su posterior relación e interés con el ámbito educativo se dio por finales de los 80 (Soto, 2003).

1.1.1. Definición de metacognición

Varios autores han definido la metacognición, uno de ellos es Flavell (2000) para quien la metacognición “...incluye cualquier conocimiento o actividad cognitiva que tenga por objeto, o regule, cualquier aspecto de cualquier empresa cognitiva” (p. 161), en este sentido



desde una perspectiva individual, sería lo concerniente a cada individuo, ya que es éste el que posee conocimientos y a la vez puede regularlos a través de la situación en la que se encuentre. De manera más general y asociándola al pensamiento, para Soto (2003) “la metacognición enmarca la indagación sobre como los seres humanos piensan y controlan sus propios procesos de pensamiento” (p. 28).

Alastre y Alastre (2011) hacen alusión a que la metacognición “es la conciencia y el control de nuestra propia comprensión” (p.134), dejando claro con esto que no es un proceso carente de sentido para el sujeto. En esta misma vertiente, Carretero entiende la metacognición como el conocimiento que los seres humanos edifican en base a su funcionamiento cognitivo, y además, la asocia a operaciones cognitivas en relación con procesos de regulación y supervisión intraindividual de lo que se sabe frente a una actividad (como se citó en Osses y Jaramillo, 2008).

Según Botero, Alarcón, Palomino y Jiménez (2017) muchos estudios definen la metacognición como el conocimiento del propio conocimiento que posee un sujeto, y a sus procesos cognitivos cuando se enfrenta a varias actividades, en donde se requiere de la conciencia y el control. Este proceso de conocimiento requiere de un nivel alto de complejidad, invita a salir de lo rutinario y sencillo del pensamiento. Así, la metacognición se convierte en el “conocimiento de los mecanismos responsables del conocimiento” (Peñalva, 2010, p. 143).

En un sentido más holístico, la metacognición es esa capacidad para examinar, criticar y ajustar el proceso de pensamiento en destrezas, conceptos y actitudes para ser más efectivos en el logro de propósitos (Villarini, 2003), esta definición es más amplia por lo que no solo se queda en el aspecto cognitivo, sino que integra las cualidades del sujeto, y enfoca su trabajo cognitivo a un fin.



Tomando en cuenta las definiciones anteriores, se entiende que la metacognición es un proceso mental de alto nivel de complejidad del pensamiento, que requiere de la consciencia, la reflexión, y la comprensión para que el ser humano indague su propio conocimiento; lo que conoce o cree conocer; y regule ese conocimiento a través de la situaciones o actividades que se le presenten, y así lograr los fines propuestos. Es decir, que por medio del enfoque metacognitivo se busca que los sujetos sean conscientes de lo que conocen y a la vez, eso que conocen (ya sean aspectos actitudinales o aptitudinales) puedan interrelacionarlo en la acción, a través de una actividad o situación que amerite el uso de dichas habilidades metacognitivas.

1.1.2 Metacognición: diferencia con otros conceptos relacionados.

Es común en la literatura sobre este tema que al hablar de metacognición también se refiera a otros términos que requieren ser diferenciados. Por ejemplo, metapensamiento, metacompreensión, metamemoria, entre los más mencionados.

Allueva (2002), se refiere a estos términos como modalidades o clases de la metacognición y los define así:

Metapensamiento: Asociado al pensamiento del pensamiento, se considera como actividad global del ámbito cognitivo.

Metacompreensión: Referido a los procesos de comprensión acerca de lo que se hace y su concientización de si es comprendido o no.

Metamemoria: Conocimiento enfocado en la memoria, a lo que conocemos de ella, fortalezas y falencias respecto a la misma.

Los términos presentados, están dentro de la metacognición, es decir, que para que el sujeto logre desarrollar las habilidades metacognitivas requiere de la participación conjunta de aspectos específicos como la memoria, la comprensión y la concientización del pensamiento.



También puede ser común entender como similar a la metacognición con la cognición, en este sentido Organista (2005) manifiesta una diferencia clara entre cognición y metacognición, en donde menciona que la primera se refiere a elementos que actúan en la actividad cognoscitiva, y la segunda a elementos enfocados hacia la comprensión y control de cómo se realiza la actividad cognoscitiva. Del mismo modo, establece a la consciencia que juntamente con la reflexión interpretan, producen y transforman la información, siendo producto de altos procesos cognitivos. Aquí, la metacognición tiene como base fundamental a la consciencia, la que no necesariamente debe estar presente en la actividad cognitiva.

Se podría decir que los términos descritos anteriormente están dentro del campo metacognitivo al estar relacionados con el conocimiento y la regulación de este, estos interactúan para lograr así mejores procesos de conocimiento.

1.1.3. Clasificación de la metacognición

Dentro del ámbito metacognitivo varios trabajos han estudiado los componentes de la metacognición y han concordado en varios de ellos (Silva, 2006; Martí, 1995; Curotto, 2010; Tovar-Gálvez, 2008 y Osses y Jaramillo, 2008). Sin embargo, Soto (2003) resume y aclara de mejor manera estos componentes. Este autor, parte de la presentación de dos grandes clasificaciones que están en sí relacionadas. Por un lado, la primera clasificación está asociada a características del conocimiento de los propios procesos cognitivos y a la regulación de estos procesos. Por otro lado, la segunda clasificación trata del monitoreo metacognitivo y el control metacognitivo, que harían mención a lo mismo descrito en la primera clasificación; es decir, ambas clasificaciones abarcan el mismo sentido, solamente difieren en sus términos. Para el presente trabajo, se ha decidido detallar la primera clasificación.

Entre las características de esta clasificación, la metacognición es asociada: 1) al conocimiento de los propios procesos cognitivos, y 2) a la regulación de los procesos



cognitivos. Dentro del conocimiento de los propios procesos cognitivos se halla una subdivisión en tres categorías concernientes a:

- ***Conocimiento sobre las personas:*** Se refiere a potencialidades y limitaciones de nosotros mismos. Flavell (2000) expande la idea al mencionar que son los conocimientos y creencias que se obtienen con relación a lo que representan los individuos como procesadores cognitivos. Este autor divide este conocimiento en tres subcategorías; conocimientos cognitivos y emocionales dentro de la persona, entre una persona a otra, y a universales cognitivos, que son referidos a conocimientos de la mente del ser humano de manera general. Por ejemplo, el saber que la mente humana posee una memoria a corto plazo y que tiene una capacidad limitada y falible, es parte del conocimiento universal. Con esto se manifiesta el componente social de la metacognición, en la cual el ser humano interactúa con su entorno para generar este tipo de conocimiento.
- ***Conocimiento sobre las tareas:*** Aquí, se consideran los objetivos y características que sirven para saber cómo actuar frente a una tarea. Flavell (2000) manifiesta que dentro de esta categoría se hallan dos subdivisiones concernientes a: la naturaleza de la información, relacionada a sus características y utilidad; y a la naturaleza de las demandas de la tarea, en la cual se valora la complejidad de la misma. Además, dentro del conocimiento sobre las tareas, se presentan factores que determinan si una actividad tiene carácter metacognitivo, y que depende si en el desarrollo de la misma son relacionadas al conocimiento o control del propio aprendizaje, a la autorregulación cognitiva, y a las ideas adecuadas sobre la estructura, producción y organización del conocimiento (Tesouro, 2006).
- ***Conocimiento sobre las estrategias:*** Que sean pertinentes a la tarea y conocidas por el aprendiz. Aquí, la estrategia metacognitiva va más allá de lo que sería una estrategia



cognitiva, ya que permite controlar la actividad que se realiza y brindar información sobre el progreso de la misma (Flavell, 2000).

En cuanto a la regulación de los procesos cognitivos como parte de la metacognición, y relacionada a aspectos procedimentales, se hallan tres procesos que permiten lograr la regulación durante determinada tarea.

- **La planificación:** Proceso antes de la ejecución de una actividad, ésta marca el rumbo y estrategias a seguir.
- **El control:** Se da durante la ejecución de la tarea. Este proceso es asociado a la verificación y revisión constante.
- **La evaluación:** Se relaciona resultados con fines y evalúa la pertinencia de las estrategias usadas.

Los procesos de regulación también se hallarían en la propuesta de Tovar-Gálvez (2008) quien las plantea como dimensiones, con diferentes denominaciones a las anteriores, pero que en general significarían lo mismo:

- **Dimensión de reflexión:** En donde el sujeto reconoce, organiza y evalúa relaciones de sus propias estructuras cognitivas.
- **Dimensión de administración:** Se conjuga componentes cognitivos y se planifica estrategias para dar solución al problema.
- **Dimensión de evaluación:** Aquí, el sujeto valora la implementación de estrategias y resultados frente a lo planificado inicialmente.

1.1.4. Elementos claves dentro de la metacognición.

Después de abordar la definición y la clasificación de la metacognición, es necesario considerar que durante el conocimiento de los procesos cognitivos y su regulación, es



indispensable tener en cuenta la actuación integrada de elementos como la consciencia y la reflexión, elementos que permiten la construcción de los procesos metacognitivos.

Consciencia: Piaget (como se citó en Organista, 2005) menciona que la consciencia involucra niveles superiores de control de la tarea a realizar, en donde los individuos pueden comprender efectos y procesos implicados en las acciones que realizan durante determinada tarea. Por esta misma vertiente, Organista cita a Vigotsky y menciona que la consciencia “es el producto de la internalización de la actividad externa” (p.83). Sin la presencia de la consciencia, no se podría hablar de metacognición, ya que es por medio de ésta que el sujeto dota de sentido a lo que realiza, se vuelve un ser pensante y testigo de su propio pensar.

Reflexión: Este elemento otorga de sentido a la experiencia y constituye un eje elemental para la metacognición, por ende, es un proceso intelectual complejo que demanda de actividades mentales que provoquen un diálogo entre experiencias, teorías y dogmas (Aguilar, 2014) siendo así, un “acto de la conciencia” (p.18). La reflexión se convierte en un repensar que permitirá posteriormente entrar a procesos de concientización.

En conclusión, según lo investigado, la metacognición estaría definida y caracterizada según lo expuesto en la siguiente figura:

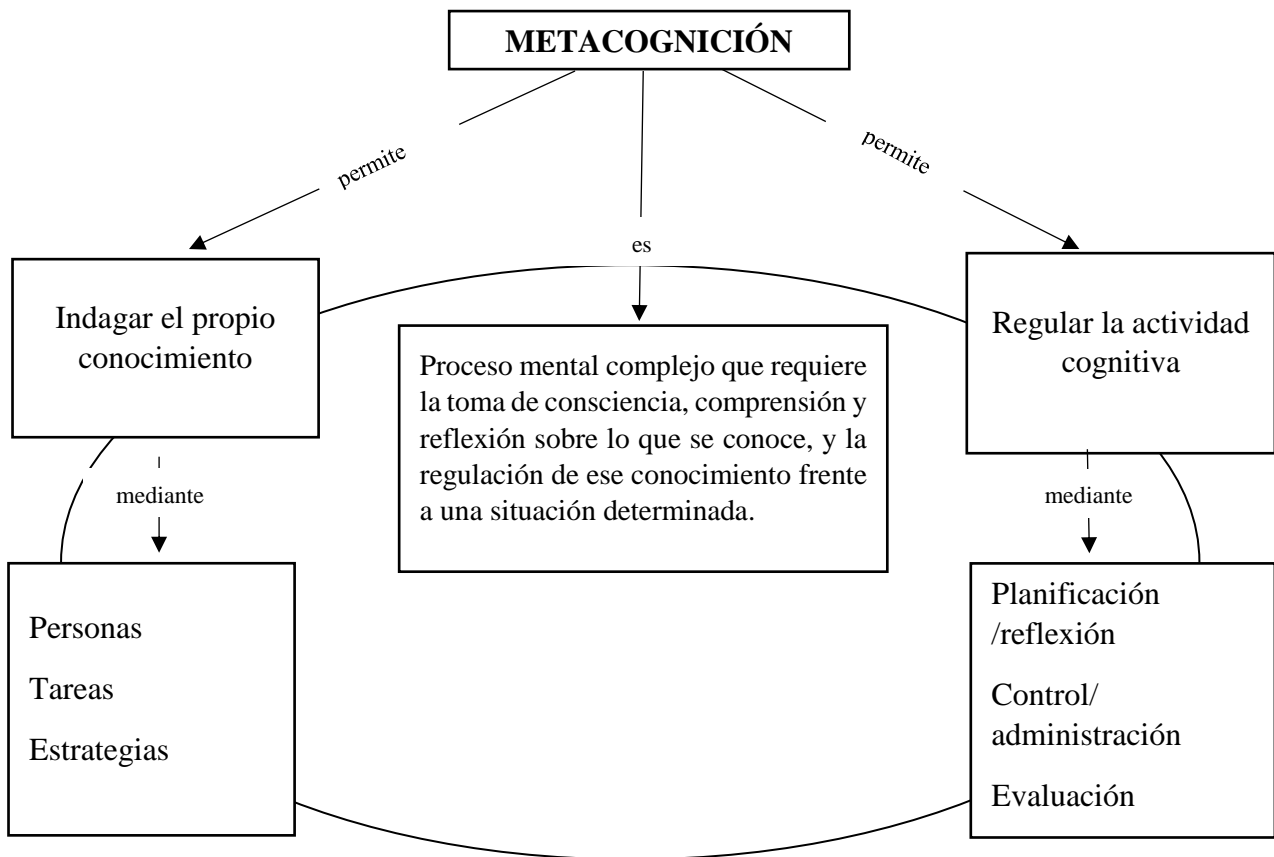


Figura 1. Concepto y caracterización de la metacognición.
Fuente: Elaboración propia.

1.2. ¿Por qué hablar de metacognición en la educación?

...El valor de la educación no está en adquirir información sino en entrenar la mente a pensar sobre las cosas que no se pueden aprender de los libros.

Albert Einstein

En la actual sociedad caracterizada por los avances tecnológicos, las exigencias de una cultura globalizada en cuanto a varios aspectos, entre ellos lo educativo, exigen a los



estudiantes poseer una serie de habilidades para actuar y desarrollarse como seres humanos (Botero *et al.*, 2017). Se busca conseguir por medio de la educación “inteligencias plurales, aptas para pensar de manera autónoma, flexible y creativa” (Ellerani, 2009, p. 7), permitiendo valorar de manera crítica las actividades que se realizan y así conocer y ordenar las experiencias (Báez y Onrubia, 2016). Esto invita a tener presente que los “procesos educativos se convierten en la base para estimular procesos mentales superiores (...)” (Botero *et al.* 2017, p.88). Entre estos procesos mentales superiores, estaría la metacognición.

En correspondencia a lo anterior, Morín, propone que se trate de enseñar un conocimiento integral, para que el sujeto que aprende se concientice en el acto de aprender, donde el deber de la educación se centre en la “construcción de la conciencia” (García, 2014, p. 25). Nuestra actual sociedad invita a una nueva manera de aprender, donde se requiere fomentar la capacidad de pensar, para adquirir y gestionar el conocimiento de manera individual y colectiva, logrando así un aprendizaje continuo y autónomo (Klimenko y Alvares, 2009). Por lo tanto, ahora más que nunca resulta necesario valorar las habilidades metacognitivas dentro del ámbito educativo, ya que permiten concientizar y reflexionar en función del conocimiento que posee el estudiante.

La misión de la educación (...) más que ofrecer al alumno una cantidad enorme de conocimientos referidos a diversos campos especializados, implica posibilitar que sea el estudiante, quien adquiera una autonomía intelectual para utilizar estrategias de orden superior como la metacognición, involucrada en los sujetos que piensan críticamente (Botero *et al.*, 2017, p.88).

Actualmente, el sujeto que aprende debe ser capaz de hacer frente de manera consciente a las situaciones que se le presenten y requieran pensar su actuar, de manera crítica y reflexiva. Todo esto se logra a través de una educación que valore el rol de los estudiantes dentro del



proceso de enseñanza-aprendizaje, en donde se les apoye para que sean aprendices independientes sin importar las condiciones en las que se hallen. El sistema educativo actual, debe ayudar a lograr este propósito a través de procesos educativos activos, conscientes y efectivos que fomenten la autonomía intelectual.

1.2.1. La necesidad de los procesos metacognitivos en la educación actual.

En varias investigaciones realizadas se afirma que las personas con frecuencia razonan de manera inferior a la que requieren, es así que son significativos los esfuerzos para fomentar a través de métodos las habilidades del pensamiento (Tesouro, 2006), en este caso las habilidades metacognitivas. Justamente, en una investigación realizada por Tamayo, Zona y Loaliza (2017) con niños de Colombia, con el propósito de identificar procesos metacognitivos en los estudiantes, se evidenció la “gran dificultad de los estudiantes para referirse a sus propios procesos de pensamiento y de acción cuando resuelven diferentes tipos de actividades escolares” (p.1035). Apoyando esto, los autores mencionados, agregan que hay acuerdos entre los investigadores sobre la presencia de dificultades tanto en docentes y estudiantes para entender procedimientos metacognitivos durante los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Chrobak a través del siguiente ejemplo, evidencia la calidad de aprendizajes adquiridos desde una perspectiva contraria a los procesos metacognitivos.

Se puede mencionar la siguiente descripción de Richard Feynman, (premio Nobel de Física, 1965) que ilustra perfectamente el fenómeno. Cuenta que a un estudiante que estaba a punto de terminar su carrera sobre Grecia, se le pregunta en un examen: ¿Qué ideas tenía Sócrates acerca de las relaciones entre la Verdad y la Belleza? Ante lo cual permanece literalmente mudo, no obstante, al preguntársele ¿Qué dijo Sócrates a Platón en el Tercer Simposio? comienza a hablar sin interrupciones recordando en un griego perfectamente pronunciado, todo lo que dijo Sócrates en el Tercer Simposio. ¡Pero en



el Tercer Simposio, Sócrates habló de la relación entre la Verdad y la Belleza! (como se citó en Marroquín, 2012, p. 58).

De igual manera, en el contexto ecuatoriano, durante las prácticas educativas observadas, se ha podido evidenciar la misma problemática en cuanto a la calidad de los aprendizajes que adquieren los estudiantes. Por ejemplo, en una clase de Estudios Sociales, la docente, después de un trabajo de lectura relacionado al periodo Garciano en el Ecuador, pidió a los niños que escribieran su punto de vista sobre el comportamiento en esa época del presidente García Moreno con el pueblo ecuatoriano; los niños se habían limitado a escribir lo que estaba en el texto, de manera literal e incluso escribiendo ideas que no venían al caso con lo que pedía la docente. Esto evidenció que a los estudiantes les cuesta mirar más allá de lo que está en el texto, se les dificulta establecer relaciones entre lo que leen y lo que ellos piensan al respecto. A continuación se presenta un pequeño escrito de lo que un niño perteneciente al sexto año de Educación General Básica respondió cuando se le planteó la actividad mencionada: “Cooperó con el movimiento revolucionario y era considerado un tirano por sus detractores, fue asesinado en el palacio del gobierno el 6 de agosto de 1875...”

Los ejemplos presentados reflejan un aprendizaje mecánico, con una ausencia de consciencia de lo que se sabe, se generan aprendizajes que limitan la capacidad crítica, reflexiva y asociativa. Se reduce la habilidad de dominio sobre lo que se aprende y su aplicación, a simples procesos de memorización. El actuar de la metacognición en la educación aportaría a la solución de estas problemáticas porque busca que el sujeto sea consciente de lo que aprende y sepa utilizar eficazmente sus conocimientos en diversos contextos.

Al trabajar los procesos metacognitivos, se aporta al desarrollo del pensamiento, a construir y a mejorar la calidad de los aprendizajes, con el fin de formar sujetos más sensatos y autónomos. Se fomenta un pensamiento más formal que independiza al sujeto que aprende



de textos escolares y de interpretaciones del docente (Pérez, como se citó en Báez y Onrubia, 2016). El trabajo con los procedimientos metacognitivos “hacen que los sujetos actúen con más consciencia y reflexión durante el proceso de aprendizaje en las diversas tareas propuestas” (Botero *et al.*, 2017, p.91).

Del mismo modo, la metacognición y su importancia en la educación también se evidencia en las reformas educativas de España y Chile, al incorporar la toma de consciencia en los procesos de construcción del conocimiento, al igual que ubicar como eje transversal el desarrollo del pensamiento para aprender a aprender. Así, la metacognición se incluye en este proceso al ser una habilidad mental. Igualmente, dentro del contexto ecuatoriano se evidencia la presencia del componente metacognitivo en áreas del aprendizaje como la matemática (Ministerio de Educación, 2016b).

La metacognición asociada al ámbito educativo se la ha visto como una clave para evitar reproducir mecánicamente y de manera inerte el conocimiento (González de Requena, 2010), por tal razón, es imprescindible que el sistema educativo fomente el trabajo de estas habilidades metacognitivas dentro de los eventos educativos a desarrollarse en el aula. Además, tanto docentes y estudiantes se enriquecerán mutuamente en el aprendizaje, ya que según la afirmación de Tovar-Gálvez (2008): “la metacognición permite establecer una íntima relación entre los aspectos de la cognición del estudiante y las estrategias didácticas que formula el docente (...)” (p.8). De manera general, se deja al descubierto el valor de la metacognición como respuesta a las necesidades de la educación actual.

1.2.2. La metacognición y la teoría constructivista

El constructivismo ha sido abordado desde diferentes perspectivas teóricas con puntos de encuentro y desencuentro, en donde se ha valorado más los aspectos individuales y en otros casos los sociales dentro del proceso de construcción del conocimiento. Por lo tanto, el enfoque



constructivista sería producto de dos panoramas teóricos: un panorama social, que considera la interacción colectiva y compartida dentro de la clase; y un panorama psicológico, centrado en la actividad personal cognitiva de los discentes mientras interactúan en procesos sociales (Serrano y Pons, 2011).

Según Calero (2009) el constructivismo hace referencia a que las estructuras mentales de una persona no son brindadas del entorno ni heredadas, más bien éstas se construyen a partir del propio individuo cuando desarrolla acciones, mediante la interacción con el ambiente y la sociedad, así, “el desarrollo mental del sujeto es fruto de la interacción permanente entre sus factores internos y externos” (p. 89).

En este sentido, la metacognición como un proceso mental importante dentro del área educativa es ineludible relacionarla con teorías cognitivas del aprendizaje. Por ejemplo: el procesamiento de la información, que sugiere que para cualquier ejecución de una actividad se lleve un control, se sepa utilizar los conocimientos y así se concluya la misma de manera eficaz; con respecto a la teoría de Piaget, se alude a procesos de conciencia y autorregulación para el desarrollo cognitivo a través de la asimilación/ acomodación; y la teoría social de Vigotsky, que aporta con su componente social y la zona de desarrollo próximo a valorar dentro del aprendizaje (Soto, 2003).

Las teorías mencionadas presentan una naturaleza cognitiva, y se orientan al aprendizaje constructivista del conocimiento, ya que toman en cuenta componentes tanto individuales como sociales, que influyen en el individuo para la generación y desarrollo de sus estructuras mentales. Por ende, la metacognición se relacionaría con la concepción del aprendizaje constructivista, que busca superar el modelo educativo tradicional y conductista, ya que “aprender a aprender es el mejor indicador del proceso constructivo” (Calero, 2009, p. 135).



La metacognición, asociada al enfoque educativo constructivista, se aleja de los enfoques educativos tradicionales que conciben desde una perspectiva contraria los procesos de enseñanza-aprendizaje. Para poder comprender como actúa el constructivismo dentro del ámbito educativo, es necesario definir conceptos claves desde esta concepción teórica, como conocimiento, aprendizaje, docente, alumno y pensamiento. Igualmente, esto permitirá, comprender de mejor manera la naturaleza de la metacognición.

Conocer, implica un grado de comprensión, sin este no se estaría hablando de conocimiento, ya que según Allueva (2002) “(...) el conocimiento se refiere a la adquisición de comprensión de las cosas” (p.68). Complementando esta idea, Luna (2003) afirma “que el conocimiento no podría reflejar directamente lo real, no puede sino traducirlo y reconstruirlo en otra realidad” (p.2). En este sentido, se entiende que el conocimiento no es uno solo, ya que va a estar sujeto a las realidades en las que se esté inmerso; comprender su complejidad permitirá entender al sujeto que aprende.

El aprendizaje es definido como: “un proceso de construcción personal e interno, gracias a la interacción con el medio natural o sociocultural” (Calero, 2009, p.88). El aprendizaje “permite al ser humano adquirir los conocimientos, habilidades y destrezas necesarias para poder adaptarse a la realidad de su vida y también transformarla” (Klimenko, 2009, p.14), es decir, que lo que un sujeto aprende no es sinónimo de una simple memorización, sino que se convierte en aptitudes aplicables para la vida. Lo anterior se relaciona con los enfoques cognitivos, en donde el aprendizaje es concebido como un proceso interno, no visible de manera directa, que produce un cambio en el individuo para responder a la situación en la que se halla inmerso (Allueva, 2002). Este mismo autor menciona, que esta concepción del aprendizaje es totalmente contraria a la concebida por las teorías conductistas, en donde se limitaba el aprendizaje a conductas observables.



Dentro del constructivismo, el docente tiene la labor de estimular el encaje entre los procesos mentales del discente, y los significados tanto social como cultural que manifiestan y simbolizan los contenidos a impartir en la escuela. La influencia del docente, se da a través de las interacciones, según las condiciones de enseñanza, la presentación de los contenidos y su significación, la indagación y apreciación de respuestas de los discentes, y por el proceso de traspaso gradual de regulación y responsabilidad de los aprendizajes a los estudiantes (Serrano y Pons, 2011). El docente, sería un mediador entre el estudiante y el aprendizaje, esta mediación ha de considerar los contenidos, las relaciones sociales, la participación etc., para que inviten a promover un aprendizaje más autónomo y consciente en los estudiantes.

El alumno, es considerado un sujeto que construye conocimientos, está en constante interacción con el ambiente, es un agente activo, y en base a esto va cambiando sus conocimientos por las influencias externas e internas, sin ser necesariamente limitado por las características del entorno o los aspectos biológicos. Se valora al alumno en su totalidad, considerando lo cognitivo y afectivo durante determinada actividad constructiva (Serrano y Pons, 2011). Este sujeto que aprende es un ser en constante reorganización, que difiere de los demás en cuanto a identidad y formas de aprender, a pesar de ser de la misma especie (Luna, 2003).

En cuanto al pensamiento, según lo mencionado en el documento Principios para la Integración del Currículo de Puerto Rico, se dice que es la “capacidad que tiene el ser humano para construir una representación e interpretación mental significativa de su relación con el mundo” (como se citó en Villarini, 2003, p. 36), al decir significativa, se refiere a que la misma no es un proceso alejado de las experiencias vividas del sujeto, por ende, si se busca desarrollar su pensamiento no se puede dejar de lado el contexto y significados que el sujeto trae consigo. También, De Vega (1984) describe y detalla lo que implica el pensamiento y lo considera una actividad mental integral y compleja:



El pensamiento es una actividad mental no rutinaria que requiere esfuerzo. Ocurre siempre que nos enfrentamos a una situación o tarea en la que nos sentimos inclinados a hallar una meta u objetivo, aunque existe incertidumbre en el modo de hacerlo. En estas situaciones razonamos, resolvemos problemas, o de modo más general pensamos. El pensamiento implica una actividad global del sistema cognitivo (...). Se trata de un proceso mental de alto nivel que se asienta en procesos más básicos, pero incluye elementos funcionales adicionales, como estrategias, reglas y heurísticos (p. 439).

Con lo expuesto anteriormente se puede entender al pensamiento como esa capacidad que toda persona tiene para hacer frente a una situación no común, que lo pone en acción bajo un margen de incertidumbre, y lo invita a integrar sus habilidades cognitivas de mayor y menor nivel para cumplir un propósito determinado. De estos niveles del pensamiento, Villarini (2003) menciona tres: el pensamiento automático, relacionado a hacer algo sin la necesidad de pensar; el pensamiento sistemático, detenerse a pensar sobre nuevas respuestas a determinado evento; y el pensamiento crítico, que involucra el analizar o hacer consciente la manera en que pensamos. Como se puede deducir, la metacognición estaría relacionada con el tercer nivel del pensamiento descrito por Villarini.

La metacognición enmarcada dentro del enfoque teórico constructivista, permite valorar al estudiante y su rol en la construcción autónoma, reflexiva y crítica del conocimiento, fomentando así el aprender a aprender (Marroquín, 2012; Ellerani, 2009; González, 2014). Este aprender a aprender, se logra a través de los procesos metacognitivos, que están asociados a un pensamiento crítico. Dentro del ámbito educativo ¿qué condiciones se deberían considerar para desarrollar la metacognición en los estudiantes?



1.2.3. Condiciones para desarrollar la metacognición en la educación.

Calero (2009) presenta algunos lineamientos que son recomendados por psicopedagogos a docentes, con el fin de conseguir la metacognición dentro del área educativa, algunos a nombrar:

- ***Tener normas generales que guíen a estrategias metacognitivas:*** Poseer conocimiento de la temática, y saber: qué, dónde, cuándo y cómo aplicarlo. También, se requiere controlar dicho conocimiento, desde un dominio interno, para asignar recursos cognitivos, tomar conciencia de los aciertos y problemas de usar determinadas estrategias mediante juicios de calidad.
- ***Utilizar preguntas:*** que permitan al estudiante analizar, reflexionar y evaluar su actuar durante la ejecución de determinada actividad.
- ***Aplicar los significados de aprendizaje a diversos contextos:*** brindar situaciones relacionadas con diversos entornos para que puedan desarrollar, aplicar y promover sus capacidades.
- ***Valorar y desarrollar:*** la inteligencia emocional, que involucra poner afecto en lo que se hace y en el trato con los demás, aportando así al desarrollo personal; la inteligencia racional, que considera la habilidad de comprensión, orden y expresión en la resolución de problemas; y la acción, que se puede dar desde abordajes fáciles o complejos, pero que ayudan a brindar una solución en variados entornos.
- ***Brindar una guía por parte del docente a los estudiantes:*** en donde se fomente el pensar, planear, ejecutar y evaluar la actividad a realizar.
- ***Estimular la curiosidad científica:*** que ayude a la mente a ampliar nuevos horizontes desde las características científicas.

Las condiciones mencionadas tienen como eje central al estudiante. Se consideran sus aspectos cognitivos y emocionales a través de la estimulación externa para ayudarlo a que tenga



un mejor aprendizaje. Cabe mencionar que el docente se vuelve clave para brindar situaciones que inviten al estudiante a pensar, ampliar su mente para conocer mejor lo que conoce, y a ejecutar ese conocimiento según la demanda de las diversas situaciones a las que se tenga que enfrentar. Dentro del conocimiento matemático se puede brindar un espacio para estimular el desarrollo de la metacognición debido a la naturaleza de esta disciplina.

1.3. La metacognición dentro del área de matemáticas.

Las matemáticas son una rica fuente para desarrollar el pensamiento, debido “al grado de complejidad y abstracción que ésta presenta” (Alastre y Alastre, 2011, p.128). En las matemáticas se maneja un lenguaje diferente y se interpreta el mundo desde la sintáctica y semántica de los códigos y signos matemáticos. Desde esta disciplina, “el pensamiento matemático es la habilidad más importante para inculcar en los niños la habilidad de pensar y tomar decisiones independientes” (Isoda y Katagiri, 2016, p.68). Por ende, si se quiere ver el rol de la metacognición dentro de la matemática, es necesario abordar acerca de lo que es el pensamiento matemático.

1.3.1. Metacognición y pensamiento matemático.

Entender la definición del pensamiento matemático implica conocer cómo se concibe a la ciencia de las matemáticas desde diversas perspectivas, para luego delimitar qué visión fomenta el desarrollo del pensamiento matemático. Vila y Callejo (2014) mencionan que es necesario abordar estas visiones de la matemática porque influyen en la forma de desarrollar la actividad matemática, así como el uso y aplicación de la misma.

Se ha visto que hay contrastes en cómo es concebida la ciencia matemática, una visión es la de Vila y Callejo (2014) en donde muestran que las creencias que engloban a lo que se concibe como matemáticas son orientadas solo a números, alejadas de la realidad, centradas en algoritmos, en procesos de memorización y en la obtención de respuestas correctas. Mulero,



Segura, y Sepulcre (2013) reafirman esta visión al realizar una investigación en España, en donde los estudiantes dan sus percepciones respecto a la matemática, y llegan a la conclusión de que las matemáticas son difíciles y motivan sentimientos negativos como indiferencia, aburrimiento y opresión hacia ellas, a más de mirarlas como abstractas.

Desde esta visión se puede afirmar que el desarrollo del pensamiento matemático sería reducido a un: “axioma (...) que consiste en desarrollar, memorizar y aplicar leyes, fórmulas y procedimientos”(Castro y Castro, 2015, p. 4). Así visto el pensamiento matemático, no se podría fomentar espacios para la metacognición, ya que desde éste punto de vista, la disciplina matemática es considerada como una verdad incuestionable, que no requiere demostración sino solo aplicación de leyes sin cuestionamiento.

La matemática estructura la mente, requiere esfuerzo, dificultad y reta al sujeto que aprende. Desde esta perspectiva, las matemáticas son concebidas como la ciencia del razonamiento, ya que fomentan procesos de pensamiento y raciocinio, que cuando se dominan son aplicables a diversos contextos (Berini, Bosch, Casadevall, Guevara y Sabaté, 2010). La matemática posee un rol primordial para la organización, relación y comprensión de la realidad (Bosch, 2012). Su valor se evidencia en Mulero *et al.* (2013), que mencionan que las matemáticas “no son sólo la base de todo conocimiento, sino también de cualquier tipo de desarrollo científico y tecnológico” (p. 2144). Desde éste ámbito, la matemática se vuelve: “una materia idónea para ejercitarse en el arte de pensar y para tratar de mejorarlo” (Vila y Callejo, 2014, p.11).

Dentro de esta visión de las matemáticas, el pensamiento matemático involucra procesos de reflexión y apreciación, permite que los estudiantes aprendan y les guste pensar por sí mismos. Según Isoda y Katagiri (2016) el pensamiento matemático ayuda a valorar el uso del conocimiento, las habilidades, y aprender a aprender para lograr así un aprendizaje



autónomo. En este sentido, la metacognición tiene las condiciones para actuar y desarrollarse dentro de la disciplina matemática.

El aporte del pensamiento matemático a la vida, es que permite interpretar mejor la realidad, y formar pensadores con carácter metacognitivo, debido a que este pensamiento matemático “se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas” (Bosch, 2012, p.17). Así, se aporta a una educación matemática que permita entender a la gente el significado consciente de lo que se hace o escribe cuándo utiliza números o se enfrenta a algún problema concreto (Berini et al., 2010). Estos autores recalcan el valor de utilizar en la sociedad actual diversos contextos para hacer sentir que las matemáticas están presentes en la vida diaria, a través de la utilización de problemas.

Es importante insistir que aprender matemáticas no solo se reduce a aspectos cognitivos, pues mediante el pensamiento matemático también se refleja un componente emocional, a tal punto que, Isoda y Katagiri (2016) llegan a afirmar lo siguiente: “La educación matemática está hecha para la formación del carácter humano”(p.34). Así, aprender matemáticas está constituido por aspectos cognitivos y emocionales.

Estructura del pensamiento matemático: El desarrollo del pensamiento matemático no es un proceso fácil, debido a que integra una serie de tipologías en cuanto a la forma de pensar dentro de la matemática, que según la clasificación de Isoda y Katagiri (2016) se subdividen en dos grandes categorías:

- *Pensamiento relacionado a métodos matemáticos generales:* que permiten la aplicación de procesos de inducción, deducción, analogía, abstracción, generalización etc.



- *Pensamiento del contenido matemático en cuanto al fondo:* referido a contenidos concernientes a: idea de conjuntos, operaciones, algoritmos, expresiones, entre otros.

Además, Isoda y Katagiri (2016), aluden a las **actitudes matemáticas**, las mismas que están asociadas a la mentalidad del sujeto, su apertura emocional, la comprensión de la situación en la que se halla, la búsqueda de la sencillez, claridad, sencillez y mejora de ideas. Los autores mencionados, conciben a las actitudes matemáticas como esa disposición frente a la actividad matemática y también como la fuerza impulsora que permite el desarrollo de los dos tipos de pensamiento matemático mencionados; es decir, que sin actitudes matemáticas no es posible desarrollar los métodos matemáticos, ni el contenido matemático.

Es así que, dentro de los tipos de pensamiento matemático se evidencia la interrelación de las aptitudes de los sujetos, los contenidos matemáticos y los métodos matemáticos generales. Esto demuestra que la habilidad del pensamiento matemático integra una serie de dominios que permiten al sujeto que aprende matemáticas poseer aspectos cognitivos y emocionales significativos para hacer frente a las situaciones de la vida que requieran del pensamiento matemático.

Si se considera este tipo de visión más integral del pensamiento matemático, entonces se genera un rico espacio para desarrollar la metacognición dentro del área de la matemática y así aportar a la mejora de los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

1.3.2. Metacognición y su aporte al aprendizaje de la matemática.

Algunos problemas han sido manifestados en el aprendizaje de la matemática, referidos a, contenidos trabajados de manera no integral tanto dentro de la matemática como en su relación con la vida cotidiana, incapacidad de los estudiantes para reconocer errores en los



conocimientos que poseen respecto a esta área, entre otros. Todo esto provoca que las matemáticas sean consideradas poco útiles (Curotto, 2010). De esta manera, se dificulta el uso de estrategias complejas en las actividades planteadas a los estudiantes, siendo producto según Schoenfeld de la “herencia de la práctica tradicional” (como se citó en Curotto, 2010, p. 13) dentro del proceso de enseñanza- aprendizaje. Esta situación, también refleja, que no se están trabajando verdaderos procesos que fomenten el desarrollo del pensamiento matemático, por ende, tampoco la metacognición.

La metacognición ayudaría a superar estas dificultades motivando a la mejora de los procesos de aprendizaje y al desarrollo del pensamiento matemático. Su importancia se ve reflejada en el currículo ecuatoriano propuesto por el Ministerio de Educación (2016b) en el cual se evidencia, el logro de la metacognición (aprender a aprender) como uno de los objetivos del área matemática. Decididamente, en el desarrollo de la metacognición, la matemática juega un rol importante, ya que “la mayor parte de las competencias asociadas con el aprendizaje de las matemáticas son de tipo metacognitivo” (Peñalva, 2010, p.144).

Como se ha visto, la metacognición está muy relacionada con la disciplina matemática y ayudaría a enfrentar los problemas de aprendizaje de esta disciplina descritos anteriormente. Entre los aportes de la metacognición a la matemática se encuentran los siguientes:

- ***Fomenta aprendizajes significativos, por descubrimiento y autorregulados:*** En la cual, el estudiante tiene un papel central y activo. Por medio del aprendizaje autorregulado, se orienta la información, y se la reconstruye a través de la toma de conciencia, integrando motivación y cognición (Klimenko y Alvares, 2009).
- ***Comprensión del lenguaje matemático:*** Necesario para una mejor interpretación de los conceptos y desarrollar el pensamiento lógico. Aquí, “la metacognición jugará un papel fundamental, porque permitirá que el discente regule el proceso de aprendizaje de los



diferentes símbolos y signos que se utilizan en el estudio de la matemática (...)” (Alastre y Alastre, 2011, p.135). Se recalca la necesidad de trabajar el lenguaje matemático para así superar interpretaciones carentes de sentido y significado.

- ***Aporta al propósito de la Matemática:*** Que como se vio anteriormente es desarrollar el pensamiento matemático.
- ***Permite un aprendizaje profundo:*** El mismo que se evidencia cuando se tiene la habilidad de realizar diversas acciones mentales en una determinada actividad. El pensamiento interactúa con percepciones y actitudes frente al aprendizaje, y a la vez, este aprendizaje requiere de un pensamiento crítico, creativo y metacognitivo (Báez y Onrubia, 2016).
- ***Integra aspectos cognitivos y motivacionales:*** Esto permite la predisposición del estudiante para el aprendizaje, la ordenación de la acción y su regulación (Botero *et al.*, 2017). La motivación desde la metacognición alude a la emoción que siente un sujeto al comprender el valor y la naturaleza de su proceso de reflexión (Soto, 2003), esto es algo fundamental para generar gusto por el aprendizaje de las matemáticas.
- ***Permite estimular la autonomía:*** Que sea el estudiante que piense en la manera de aprender y actuar durante una tarea o situación, que aprenda a darle sentido a los contenidos matemáticos, esto permite romper con la creencia de que “si los estudiantes pueden hacer cálculos, eso es suficiente” (Isoda, y Katagiri, 2016, p. 68).
- ***Propicia mejores procesos mentales para el trabajo con problemas matemáticos:*** Debido a que la metacognición se vuelve un eje conductor e inseparable para el trabajo con los problemas matemáticos dentro de la actividad matemática (Pérez y Beltrán, 2011; Curotto, 2010).



En conclusión, la metacognición se vuelve un factor clave para mejorar los procesos de aprendizaje, debido a que toma en cuenta los conocimientos que poseen los estudiantes y la aplicación de dichos conocimientos, a través de procesos de concientización y reflexión. Como se ha visto, responde a las necesidades que demanda la sociedad y la educación actual, volviéndose necesaria para la mejora de la calidad del aprendizaje. También, va en contra de los procesos tradicionales de la educación, en donde no se valoraban los conocimientos de los estudiantes y se enfocaban más en los procesos de memorización, relacionándose así la metacognición con la teoría constructivista. También, su valor dentro de la reforma ecuatoriana es evidente, en especial para la matemática, una disciplina que por sus condiciones y problemáticas busca fomentar un pensamiento matemático. Por tal motivo, después de ver el valor de la metacognición dentro de la educación, cabe preguntarse ¿qué actividades fomentarían los procesos metacognitivos dentro de la matemática? Como respuesta a esta interrogante, en el siguiente capítulo se presenta el trabajo con problemas matemáticos, como una de las actividades con mayor valor metacognitivo dentro de la matemática.



CAPITULO II: INVENCION Y RESOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS

En este capítulo se tiene como propósito explicar en qué consiste la invención y resolución de problemas matemáticos. Primeramente, se expone acerca de lo que es un problema y se lo diferencia de un ejercicio. Posteriormente, se presenta a la invención y resolución de problemas como actividades claves para fomentar el pensamiento matemático en la escuela, aquí se abordan definiciones, características y beneficios de manera individual de estas dos actividades para luego establecer puntos de unión que permitirán evidenciar su relación consustancial.

Finalmente, se describe, a partir de literatura investigada sobre el tema, diferentes modelos propuestos por varios autores para el trabajo con problemas matemáticos. Estos modelos se refieren a los diferentes procesos mentales que se utilizan, o que deben ser utilizados, al momento de inventar y resolver problemas matemáticos.

2.1. La invención y la resolución de problemas matemáticos: dos actividades consustanciales.

La matemática es una de las áreas del conocimiento más importantes dentro del sistema educativo ecuatoriano, que conjuntamente con la asignatura de Lengua y Literatura son consideradas como las disciplinas de mayor carga horaria designada para su enseñanza¹. De igual manera, es indiscutible como las matemáticas están presentes en la vida cotidiana de cada persona y de la sociedad en sí. Como se señaló en el capítulo anterior, el fin de las matemáticas es desarrollar el pensamiento, un pensamiento de alto nivel, que motive a un aprender a pensar

¹ Desde el ACUERDO Nro. MINEDUC-ME-2016-00020-A, planteado por el Ministerio de Educación del Ecuador (2016a), la matemática tiene una carga horaria de 8 horas pedagógicas y Lengua y Literatura con 10 horas.



y genere autonomía en el estudiante. Ahora, para el desarrollo del pensamiento, en este caso el matemático, la invención y resolución de problemas se vuelven actividades primordiales para mejorar el aprendizaje de esta disciplina.

Isoda y Katagiri (2016) recalcan el valor que tienen los problemas para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático, ya que es una actividad que posee múltiples beneficios para ayudar al niño a pensar por sí mismo y a generar habilidades matemáticas relacionadas a las ideas, el raciocinio y los valores. Se ha reflejado el valor de los problemas como actividad matemática, con el fin de generar mejores aprendizajes y acercar la matemática a la realidad de los estudiantes. Los procesos mentales que se generan cuando un individuo se enfrenta con un problema matemático es lo que ha permitido valorar su papel dentro de la disciplina matemática (Castro y Castro, 2015; Isoda y Katagiri, 2016; Vila y Callejo, 2014).

2.1.1. ¿Qué se entiende por problema matemático?

Desde la experiencia, quizás se posea una noción de lo que significa un problema, o al menos hay referencias de lo que podría ser según la vivencia escolar, sin embargo, se requiere analizar si la concepción de problema que se tiene permite fomentar el desarrollo del pensamiento matemático.

El término “problema” desde el ámbito matemático, se menciona como una situación que demanda de una solución, la cual no es directa ni rápida, y durante su proceso requiere de la toma de decisiones. Dentro de esta actividad se busca: investigar, relacionar, analizar, implicar afectos y plantear estrategias para dar con la solución, de igual manera, se señala que un problema será relativo al contexto y al sujeto al que se le plantea el mismo (Iriarte, 2011). Ésta definición contrasta a la acotada por Pérez y Beltrán (2011) en donde de manera habitual se dice que un problema hace referencia a la presentación de un enunciado que busca un resultado a partir de datos prescritos. Desde esta perspectiva no se proyecta la riqueza de un



problema, sino que se la comprime a procesos poco discutibles y a una mera manipulación de datos.

Vila y Callejo (2014) mencionan que a veces al problema se lo confunde con el ejercicio y es limitado a una aplicación de conocimientos y algoritmos presentados en clase. Se busca una respuesta única, con poco potencial para el desarrollo del pensamiento matemático, con una finalidad ilustrativa (enseñar ejemplos de estructuras matemáticas) o acreditativa (aplicar estructuras matemáticas aprendidas), es decir, reducir los problemas a simples tareas acerca de los contenidos matemáticos vistos en clase. Propiamente, con ésta confusión, un problema sería entendido como: “una pregunta con enunciado verbal donde se espera encontrar pistas para hallar la solución” (p.78). Por lo tanto, desde la presente definición no habría espacio para el desarrollo intencionado del pensamiento matemático ni de la metacognición. Por ende, se vuelve indispensable dentro del presente trabajo comprender que:

Un problema no es simplemente una tarea matemática, sino una herramienta para pensar matemáticamente, un medio para crear un ambiente de aprendizaje que forme sujetos autónomos, críticos y propositivos, capaces de preguntarse por los hechos, las interpretaciones y las explicaciones, de tener su propio criterio estando a la vez abiertos a los de otras personas (Vila y Callejo, 2014, p.12).

Se requiere hacer una clara diferenciación entre lo que es un problema y un ejercicio matemático, ya que se puede caer en estructurar problemas que no permitan procesos para el desarrollo del pensamiento matemático. Para esto, desde los trabajos de Castro y Castro (2015) y Vila y Callejo (2014) se dan una serie de características, tanto de los problemas, como de los ejercicios que permiten entender de mejor manera sus contrastes:

Ejercicios: Se evidencian de manera clara, con una fácil solución y solo requieren su ejecución, por lo que su resolución requiere poco tiempo. Se da un uso mecánico de algoritmos



y no hay relación afectiva entre la tarea y la persona, simplemente es reducida a cuestiones cerradas.

Problemas: Provocan un reto en la persona, ya que requieren de una comprensión profunda, para lo cual se necesita de un tiempo determinado. A través de éstos, se recurre a conocimientos y experiencias para tener éxito frente a la situación planteada. Aquí hay una relación afectiva durante el análisis del problema, que requiere voluntad, perseverancia y otros sentimientos que pueden ser positivos o negativos. Además, permiten la apertura a nuevas ideas y problemas.

Los problemas vistos como una herramienta para pensar matemáticamente, requieren de procesos de alto nivel cognitivo por parte de los estudiantes, en donde se demanda de una implicación integral del sujeto en la actividad. Mediante el trabajo con problemas se interrelacionan los tipos de pensamiento matemático, y a la vez se alude a las actitudes matemáticas. En efecto, los problemas se enfocan en los procesos de pensamiento y los métodos indagadores del estudiante, superando así las rutinas algorítmicas poseedoras de un escaso nivel cognitivo (Vila y Callejo, 2014)._Desde esta visión de lo que es un problema, es necesario valorar el uso de la invención y resolución de problemas matemáticos, para analizar su aporte y relación.

2.1.2. Invención de problemas matemáticos

Varias investigaciones realizadas en contextos educativos advierten del potencial que posee la invención de problemas para mejorar los procesos de aprendizaje matemático (Ayllón y Gómez, 2014; Ayllón et al., 2016; Fernández y Barbarán, 2012; Espinoza y Segovia, 2013; Espinoza-González, Lupiáñez-Gómez, y Segovia-Alex, 2015; Irvine, 2017; Cázares, Castro y Rico, 1998). Estas investigaciones reflejan la utilidad así como la necesidad de incorporar la invención de problemas dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.



Así mismo, en el contexto ecuatoriano, el Ministerio de Educación del Ecuador (2016b), presenta algunas destrezas matemáticas que incitan a trabajar la invención de problemas, cabe destacar que aunque se utilizan términos como formular o plantear, hacen referencia a lo mismo. A manera de ejemplo, se presenta una destreza con criterio de desempeño (DCD) correspondiente a la Educación General Básica Media que invita a trabajar esta actividad en las aulas de clase:

“(...) **plantear** problemas con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números decimales, utilizando varias estrategias, e interpretar la solución dentro del contexto del problema” (Ministerio de Educación, 2016b, p.712).

2.1.2.1. Definición y características

A pesar de que a la invención de problemas se le ha dado diversas denominaciones como generación, reformulación, formulación y planteamiento, según diversos autores todas éstas hacen referencia al mismo hecho (Espinoza, Lupiañez y Segovia, 2013; Castro, 2011) por lo tanto, en el presente trabajo se usa la terminología invención de problemas, en vista de que se han encontrado más artículos con esta denominación. Así, la invención de problemas consiste tanto en la creación de un nuevo problema partiendo de unas condiciones dadas como en la reformulación de un problema dado en el proceso de resolución del mismo (Ayllón, Castro, y Molina, 2010; Castro, 2008).

En correspondencia con lo anterior, Rodríguez, García y Lozano (2015) manifiestan que la invención de un problema puede ser de manera “colectiva o individual” (p. 110). Así, se entiende que es una actividad que se presta para la interrelación con el otro, en este caso, entre compañeros y el docente. Además, se menciona que este proceso matemático puede tener lugar antes durante y después de la resolución de un problema (Espinoza y Segovia, 2013). No debe



ser copiado de otras fuentes sino producto de la propia experiencia y conocimiento del sujeto (Ayllón, Castro y Molina, 2011).

Como se puede ver, la invención de problemas considera aspectos como el trabajo individual y grupal, pero sin dejar de lado, la interrelación y aplicación de los conocimientos que poseen los estudiantes al interactuar con esta actividad.

Por otro lado, cabe mencionar algunas variables a considerar durante la invención de un problema. Espinoza-Gonzales *et al.* (2015) realizaron una investigación con estudiantes con el fin de aplicar un esquema de análisis para caracterizar los problemas inventados por el estudiantado y que permitan visualizar la complejidad, profundidad y apropiación de conocimientos durante dicha actividad. En el esquema de análisis de estos autores, se evidenciaron las siguientes variables:

La estructura sintáctica: En donde se considera, la longitud del enunciado, enfocado al número de proposiciones que aportan datos tanto relevantes como irrelevantes; y el tipo de proposición interrogativa relacionada con el enunciado.

La estructura matemática: Relacionada a tres aspectos, al tipo de estructura operatoria, en este caso los autores asociaron según estructuras aditivas - multiplicativas y su número de etapas dentro del problema; al tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo implicados, que se refiere al número de operaciones que se requieren para abordar el problema; y a la cantidad de pasos distintos para resolver el problema.

La estructura semántica: Alude a las relaciones distintas de contenido semántico que se hallan presentes en el problema y que permiten clasificar el tipo de problema que se está trabajando.

En lo referente a las variables descritas a considerar cuando se inventa un problema, se evidencia que no es una simple actividad que se ejecuta sin considerar criterios. Para que



realmente se cumpla con la riqueza de un problema que puede ser sencillo pero coherente, preciso y lógico, es importante que la persona o grupo de personas que inventan un problema tomen en cuenta las variables mencionadas anteriormente y así evitar caer en un proceso de mecanización de esta actividad. Además, al considerar dichas variables, también se aprende a entender la estructura de los problemas.

2.1.2.2 Aportes de la invención de problemas al aprendizaje de las matemáticas

Se han reportado aportes favorables en el trabajo con la invención de problemas. Varias investigaciones concuerdan en su mayoría de escritos con los beneficios de este tipo de actividad para la mejora de la educación, en este caso de la matemática. A continuación se menciona a partir de los trabajos de Ayllón, *et al.* (2016); Ayllón y Gómez (2014); Castro (2011) y Silver (1994) varios beneficios de la invención de problemas:

Uno de los aportes, es que ayuda al aumento del conocimiento matemático, debido a que el sujeto que interactúa con la tarea de invención de un problema, genera conexiones entre sus conocimientos, que muchas veces pueden estar estructuradas de una manera poco asociada. Además, Espinoza *et al.* (2013) mencionan también que con el uso de esta actividad hay mejora en la habilidad para resolver problemas.

También, mediante la invención de problemas se fomenta la motivación, ya que trabajar con esta actividad en el aula puede generar un mejor rendimiento, en donde el niño se llena de curiosidad, interés y motivación, llevándolo a incrementar su éxito y participación académica.

Se ha hablado de otro factor que puede provocar problemas con la matemática, que está relacionado a las emociones negativas, es por eso, que por medio de la invención de problemas se logra reducir la ansiedad que algunos niños pueden tener hacia la materia. Esto permite tener una mejor predisposición y responsabilidad hacia la actividad matemática.



Los errores matemáticos pueden ser detectados a través de la invención de un problema. Los niños necesitan altos niveles de concentración para seleccionar que información realmente aporta a la correcta elaboración de un problema, y al mismo tiempo reconocer errores que se posea en cuanto a conocimientos matemáticos.

Otro aporte es, a la creatividad, se evidencia que hay mucha relación entre ésta actividad y la creatividad. El niño cuando inventa un problema hace uso de sus procesos creativos para generar problemas innovadores y de calidad.

El profesorado, también puede valerse de ésta actividad para evaluar las capacidades matemáticas de los discentes, así como, su manera de razonar y pensar cuando trabajan en tareas de invención de problemas. Con esto, se dejaría de valorar tanto el resultado obtenido, sino más el proceso de pensamiento matemático realizado por el estudiante.

2.1.3 Resolución de problemas matemáticos

A partir de los años 80's la resolución de problemas ha comenzado a tener valor dentro de la matemática en la escuela (Espinoza, *et al.* 2013). Su incorporación en los currículos ha sido muy considerada en varios países, y en nuestro país tampoco ha sido la excepción. Es así, que en la nueva reforma curricular ecuatoriana se incluye la resolución de problemas como un eje transversal de la matemática y como un aporte a la metacognición (Ministerio de Educación, 2016b). Sus contribuciones a la mejora del aprendizaje de las matemáticas se visualizan en los trabajos de Castro, Olmo y Castro (2002); Pérez y Beltrán (2011); Isoda y Katagiri (2016) y Vila y Callejo (2014).

2.1.3.1. Definición y características

A la resolución de problemas se la concibe como un “proceso que implica [...] acciones para la obtención de una respuesta adecuada a una dificultad con intención de ser resuelta [...], el sujeto pone en manifiesto conocimientos, habilidades, capacidades, motivaciones,



afectividades de tipo cognitivo y metacognitivo” (Iriarte y Sierra, 2011, p. 59). Además, Pérez y Beltrán (2011) agregan que: “resolver un problema es hacer lo que se hace cuando no se sabe qué hacer, pues si se sabe lo que hay que hacer ya no hay problema” (p. 78). Con esto se afirma que resolver un problema no implica hacer algo que ya se sabe o repetir procesos de resolución ya mecanizados, sino que requiere enfrentarse a lo desconocido y concentrar, invocar y relacionar aspectos cognitivos y afectivos, con el fin de brindar una solución al problema al cual se enfrenta un sujeto.

Así, se podría definir a la resolución de problemas: “Como creadora de un proceso mental, donde influyen habilidades, competencias, conocimientos tanto declarativos, procedimentales como actitudinales” (Iriarte y Sierra, 2011, p.58). Esta definición muestra que el trabajo con problemas se convierte en una actividad enriquecedora e integral para los que se enfrentan con éste tipo de tareas dentro de la matemática.

Igualmente, la resolución de problemas no se enfoca solamente en los resultados, sino en los conocimientos matemáticos que se hallan inmersos dentro de esta actividad y en las formas de abordar los problemas durante su proceso de resolución y formulación (Isoda y Katagiri, 2016). Resolver problemas demanda, “además de aplicar distintos tipos de conocimientos, un buen control y regulación del proceso y unas actitudes y creencias adecuadas” (Vila y Callejo, 2014, p.43).

En correspondencia con lo anterior, es necesario tener claro que un problema no se resuelve mediante la aplicación mecánica de una regla. Su solución involucra “examinar atentamente su contenido para conocer su estructura y poder aplicar los procesos que conduzcan a su conclusión” (Castro y Castro, 2015, p.8), caso contrario no se estaría hablando de un verdadero problema, sino quizás de un ejercicio. Por eso es necesario considerar lo que realmente implica resolver un problema, qué procesos se requieren y el propósito que se tiene



con el mismo. Decididamente, se vuelve clave entender que: “en la resolución de un verdadero problema intervienen el saber, el saber hacer y el saber cómo hacer donde se incluye la regulación cognitiva y emocional; en éste último se podría hablar de saber sentir” (Vila y Callejo, 2014).

Por otro lado, se discurre que para la solución de un problema, se deben considerar según Schoenfeld (como se citó en Castro y Castro, 2015) ciertos postulados, tales como: los recursos, asociados a los conocimientos y nociones que posean los estudiantes para poder entender el problema; la heurística, estrategias y técnicas a aplicar para dar con la solución de un determinado problema; la metacognición, relacionada a cómo el sujeto maneja los conocimientos que posee para poder cumplir su propósito; y las creencias, opiniones que influyen en lo que se cree acerca de la resolución de problemas, las mismas que pueden ser positivas o negativas. Es importante considerar estas premisas, justamente porque evita que los problemas que se resuelvan se los realice sin tomar en cuenta los procesos cognitivos y el actuar del pensamiento matemático.

En referencia a las premisas a considerar dentro de los procesos de resolución de problemas, merece especial atención la relacionada a las creencias que se tenga en cuanto a esta actividad, las cuales pueden ser favorables o no. En éste sentido Vila y Callejo (2014) incluyen en su trabajo seis creencias que son pertinentes para resolver problemas: 1) considerar la resolución de problemas como un acto de creatividad; 2) tener claro que todos pueden afrontar la resolución de un problema; 3) que para trabajar con un problema se precisa de una actitud abierta, tiempo para la familiarización e indagación de diversas estrategias; 4) que se requieren seguir procesos de búsqueda, tanteos con la intervención de la intuición; 5) revisar los procesos del problema; 6) creer que el esfuerzo y la persistencia mejoran la habilidad de resolución de problemas.



2.1.3.2. Aportes de la resolución de problemas al aprendizaje de las matemáticas

Dentro de la resolución de problemas se da la oportunidad para valorar los propios pensamientos, producir nuevas ideas e identificar el conocimiento que se posee, por ende, también sus falencias respecto a dicho conocimiento. Se considera un medio para aprender a aprender, ya que permite al sujeto que se enfrenta con esta actividad analizar su propio proceso de pensamiento, contribuyendo así, al desarrollo del pensamiento matemático (Isoda y Katagiri, 2016).

También, la resolución de problemas aporta a plantearse retos de alto nivel intelectual y a mejorar aptitudes como el razonamiento, la creatividad, el incremento del conocimiento y la habilidad para inventar problemas. Permite relacionar el conocimiento matemático con la realidad y la utilización de diversas estrategias para su resolución (Castro y Castro, 2015).

El resolver un problema se considera esencial en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que permite ver su utilidad en el mundo, dando así vida propia a esta disciplina, además, mediante su proceso de resolución ayuda a la sistematización de la actividad matemática e influye en la autoestima y la confianza hacia esta área del saber (Pérez y Beltrán, 2011). El valor de la resolución de problemas, también se refleja dentro de la nueva reforma curricular propuesta por el Ministerio de Educación (2016b) en donde es considerada como medio y como fin para el logro de aprendizajes, en especial, el logro de un aprendizaje significativo, por lo que se fomenta el trabajo con problemas de la vida real que demanden la aplicación del conocimiento matemático.

2.1.4 Invención y resolución de problemas: relación consustancial

Dentro de los procesos de la actividad matemática se abordan varias dimensiones entre las cuales se encuentra la de inventar y resolver problemas (Iriarte y Sierra, 2011). Estas dos dimensiones a pesar de tener sus particularidades están relacionadas ya que contribuyen a un



mismo fin, que es, aportar al aprendizaje de las matemáticas. Esta correspondencia también la afirman Ayllón y Gómez (2014) al mencionar que tanto la resolución como la invención de problemas comparten una relación ineludible. No por algo Cázares menciona que “formular un problema se convierte en algo esencial para que el niño comprenda qué es un problema” (como se citó en Ayllón, Castro y Molina, 2008, p. 226). Por ende, si ayuda a entender mejor lo que es un problema, también aporta a comprender mejor su resolución. Es en el proceso mental que exigen estas actividades en donde se comparten experiencias de aprendizaje que mejoran el pensamiento matemático.

A pesar de que se ha dado más peso a la resolución de problemas, actualmente se están realizando investigaciones que reflejan esta relación entre invención y resolución de problemas. Ayllón *et al.* (2016) muestran en sus resultados de trabajo de investigación, que las razones escolares son las que priman en los discentes para argumentar la utilidad de resolver problemas. Quizás por eso, los problemas creados por los estudiantes, están relacionados a los contenidos matemáticos que se están viendo en la clase (Ayllón *et al.*, 2008; Ayllón *et al.*, 2011). Los niños resuelven problemas, pero estos son solamente valorados en contextos educativos y no relacionados con la vida. Es aquí, en donde trabajar conjuntamente con la invención de problemas ayudaría a acercar más la resolución de problemas a la realidad de los estudiantes, ya que ellos pueden crear a partir de su propia concepción de lo que es un problema y desde sus propios contextos.

En alusión a lo anterior, en el trabajo de investigación de Irvine (2017) se evidenció que cuando se les pedía a los estudiantes que inventen un problema, ellos reproducían problemas similares a los trabajados en clase con la maestra; es decir, imitaban lo que la maestra ponía en la pizarra, y además, eran poco acercados a problemas de su realidad. Esto cambió al incorporar una metodología de trabajo que les permitió a los niños durante un determinado tiempo trabajar con la invención de problemas desde sus realidades, mejorando también la capacidad para



resolver problemas. Si estas investigaciones reflejan un tecnicismo que puede haber en la resolución de problemas ¿sería ilógico pensar que por medio de la invención de problemas no se rompería con éstos dilemas y así realmente mejorar el trabajo con los problemas matemáticos?

La invitación a trabajar la invención y resolución de problemas de manera conjunta se refleja, a manera de ejemplo, en una destreza y un objetivo pertenecientes a la reforma curricular propuesta por el Ministerio de Educación (2016b):

Destreza con criterio de desempeño: “Resolver y plantear, de forma individual o grupal, problemas que requieran el uso de sumas y restas con números hasta de cuatro cifras, e interpretar la solución dentro del contexto del problema” (p.511). Hay varias destrezas con estos comandos en todos los subniveles de Educación General Básica.

Objetivo del área de Matemática para el subnivel Elemental de Educación General Básica: “Integrar concretamente el concepto de número, y reconocer situaciones del entorno en las que se presenten problemas que requieran la **formulación** de expresiones matemáticas sencillas, **para resolverlas**, de forma individual o grupal, utilizando los algoritmos de adición, sustracción, multiplicación y división exacta” (p.509). Es el único objetivo dentro de todos los subniveles que invita a trabajar la invención y resolución de problemas de manera conjunta.

En correspondencia con lo anterior, la invención y resolución de problemas se vuelven actividades consustanciales, en donde ambas tareas permiten la mejora de cada una de ellas; es decir, a la vez que se inventa un problema se requiere pensar en su proceso de resolución y de igual manera, cuando resuelvo un problema, internamente voy generando nuevos problemas con base a las propias dudas y conocimientos que se van generando con estas actividades. Además, si se consideran sus aportes para el aprendizaje de la matemática se pueden ver



elementos de interrelación como la creatividad, la cercanía a la realidad, el desarrollo del pensamiento, la construcción del conocimiento, entre otros. Ahora, es necesario tener cuidado en no caer en una mecanización de los problemas y tener claro los fines que se busca con los mismos, para esto: “los estudiantes deberán tener las oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo” (Ministerio de Educación, 2016b, p. 221).

2.2. Modelos de invención y resolución de problemas matemáticos

Cuando se habla de modelos de resolución de problemas, se hace alusión a la heurística, término que hace referencia a estrategias universales de resolución y normas de decisión manipuladas por los que resuelven problemas, estas estrategias son basadas en las experiencias con problemas parecidos, muestran el camino y posibles orientaciones para llegar a una determinada solución. La heurística es descrita como arte y ciencia del descubrimiento, tanto de la invención como la resolución de problemas, y a través de ella se fomentan procesos de creatividad que den uso del pensamiento divergente (Agudelo, Bedoya y Restrepo, 2008).

Los modelos a presentar a continuación permiten considerar las fases y procesos mentales que se deberían presentar cuando se resuelve un problema. Igualmente, dentro de la invención de problemas, se presenta un proceso para su realización. Los modelos que se han considerado, han sido por la diferenciación entre sus fases y los elementos innovadores que algunos de éstos incluyen cuando se trabaja con problemas matemáticos. Estos modelos permitirán establecer relaciones generales de los procesos mentales presentes en cada uno de ellos.

2.2.1. Modelo de Polya

Polya es considerado uno de los primeros matemáticos en proponer las fases a tener en cuenta para enfrentarse a un problema. Su modelo ha prevalecido en el tiempo e incluso muchas



de las propuestas actuales tienen como fundamento las fases de Polya (Iriarte y Sierra, 2011), razón por la cual se considera interesante conocer su planteamiento.

Antes de abordar las fases presentes en este modelo cabe recalcar el valor que Polya (1965) da al componente emocional, ya que menciona que éste se vuelve determinante cuando un individuo se enfrenta a un problema: “Debe concentrarse en el problema y desear ansiosamente su solución. Si no puede hacer nacer el deseo real de resolverlo, más vale abandonarlo. El secreto del éxito real radica en entregarse al problema en cuerpo y alma” (p. 57). Se evidencia que todo parte de la voluntad del sujeto, para lo cual debe ponerse en una actitud favorable si desea trabajar con problemas. El componente emocional actuaría como una fuerza transversal dentro del trabajo con problemas matemáticos, si el sujeto no tiene una buena actitud frente a un problema, difícil es que pueda salir exitoso de dicha actividad, o peor aún, que aplique y desarrolle los procesos mentales que se requieren para el trabajo con problemas. A continuación se describen las cuatro fases del modelo de Polya para dar con la solución de un problema:

Comprensión del problema: Incluye desear resolverlo, tener el enunciado verbal claro. Polya menciona que “es tonto contestar una pregunta que no se comprende” (p.28). Por ende, es importante que el enunciado sea comprendido para así generar interés y deseo por resolverlo. En ésta fase, es necesario preguntarse acerca de: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos? ¿cuál es la condición que plantea el problema? ¿es posible satisfacer la condición planteada en el problema? Estas preguntas ayudarán a una mejor comprensión del enunciado.

Concebir un plan: Según la experiencia en tareas, cuando ya se tienen ideas de que cálculos y razonamientos aplicar para descubrir la incógnita, hay que considerar que la misma puede llevarnos al error constantemente. Aquí, se pueden plantear preguntas como: ¿se conoce algún problema relacionado? ¿se puede enunciar el problema de forma diferente? ¿ha empleado



todos los datos? ¿se ha hecho uso de toda la condición que plantea el problema? ¿conoce algún problema que tenga una incógnita similar?

Ejecución del plan: No se considera una etapa fácil, debido a que implica conocimientos, hábitos de pensamiento, concentración y paciencia. En este camino se vuelve clave no olvidar el plan, para lo cual es fundamental que el estudiante lo haya elaborado. Este plan puede ser guiado por ayudas externas como la del docente; sin embargo, es el estudiante el que debe ser consciente de los pasos del plan. También, durante esta etapa es necesario que se vaya verificando cada paso: ¿puede ver claramente que el paso es correcto? ¿puede demostrar que es correcto?

Visión retrospectiva: Se busca reexaminar el resultado y el camino que se ha realizado. A pesar de que se hayan hecho los pasos anteriores de manera cuidadosa y razonada, eso no es suficiente para pensar que puede estar bien: ¿puede verificar el resultado? ¿puede verificar el razonamiento? ¿puede obtener un resultado de modo distinto? ¿se puede emplear el método utilizado en otro problema? Esta fase puede ayudar a descubrir nuevos aprendizajes.

2.2.2. Modelo de Mayer

Según Iriarte y Sierra (2011) este modelo es producto de observaciones a estudiantes cuando resuelven problemas, comparando entre “buenos y malos resolutores”. Posee un marcado carácter procedimental en los procesos que realiza el estudiante, sus fases son:

Traducción del problema: En esta fase se requiere transformar el lenguaje del enunciado de manera interna para entender mejor el problema, el autor del modelo menciona que se requiere considerar tanto el conocimiento lingüístico del enunciado como su conocimiento semántico.



Integración del problema: Se busca desechar información irrelevante e integrar las afirmaciones del enunciado de manera coherente, precisa y esquematizarlos según la tipología de los problemas.

Planificación de la solución y supervisión: En ésta fase se elabora un plan dentro del problema, para lo cual se requiere la planificación de objetivos, subobjetivos y la regulación de los procesos a seguir. Aquí se evidencia el conocimiento estratégico.

Ejecución de la solución: Aquí se refleja el conocimiento procedimental, se busca aplicar las normas de la actividad matemática y hacer explícito el plan elaborado en la fase anterior.

2.2.3. Modelo de Schoenfeld

Iriarte y Sierra (2011) mencionan que en este modelo también se hallan cuatro fases para la resolución de problemas: 1) análisis, en la cual se requiere de la comprensión del enunciado, la simplificación y reformulación del problema; 2) exploración, para la búsqueda y asociación de problemas parecidos; 3) ejecución, que debe ser paso a paso y verificando lo planificado; 4) comprobación, que se puede dar de manera general y específica (Schoenfeld, 1985). Además, dentro de éste modelo se habla de dimensiones que se dan durante el proceso de resolución de problemas (Iriarte y Sierra, 2011):

Dominio de conocimientos y recursos: Desde la persona que se enfrenta al problema, se requiere considerar lo que se conoce y la forma de ejecutar dicho conocimiento ante la situación planteada.

Estrategias cognoscitivas: Que sean eficaces para la situación planteada, se asocia a recursos heurísticos como deducción, inducción, analogías etc.



Estrategias metacognitivas: Involucra la conciencia de lo que se está utilizando para la resolución del problema y así poder llevar un control del proceso mental.

Sistema de creencias: Que se refieren a las opiniones creadas acerca de la disciplina y naturaleza matemática en concordancia al trabajo con problemas.

2.2.4. Modelo de Pifarré y Sanuy

Este modelo está relacionado con los aspectos metacognitivos y está compuesto de cinco estrategias generales a considerar dentro de la resolución de problemas que son: 1) entender y analizar el problema, 2) planificar un plan de resolución, 3) organizar los datos y el plan de resolución en un cuadro de doble entrada, 4) resolver el problema 5) evaluar el proceso de resolución del problema y el resultado obtenido (Iriarte y Sierra, 2011). Las estrategias mencionadas son evidenciadas en la guía “hojas para pensar el problema” que invitan a describir los acciones mentales que realizan los estudiantes cuando trabajan con problemas (Pifarré y Sanuy, 2001).



| | |
|---|---|
| <p>1) Entender el problema</p>  | <p>Lee el enunciado del problema. Subraya los datos más relevantes: ¿Qué te pide el problema? ¿Qué datos del enunciado son los más importantes?</p> <p>¿Qué te pide el problema? ¿Qué tienes que encontrar? ¿Dónde tienes que llegar?</p> <p>¿Qué datos ya conoces? Anótalos brevemente.</p> <p>Anota los datos que tienes que encontrar para solucionar el problema.</p> |
| <p>5) Evaluar el resultado del problema</p>  | <p>¿Has conseguido encontrar la solución del problema?</p> <p>¿Por qué? Justifica tu respuesta explicando los indicadores en que te basas para saber si has conseguido hallar la solución al problema.</p> <p>Haz un gráfico con los principales datos del problema (datos del enunciado y datos que tú has calculado). ¿Cómo puedes explicar la evolución que siguen los datos en el gráfico?</p> <p>¿Has encontrado algún error en la representación de los datos?</p> <p>¿Alguna de las partes del problema se podría calcular de alguna otra manera?</p> <p>¿Cómo?</p> <p>Repasa los cálculos que has realizado. ¿Has encontrado algún error?</p> <p>¿De qué tipo de error se trata?</p> <p>¿Cómo puedes evitar en el futuro cometer este tipo de error?</p> |

Imagen 1. Proceso para resolver un problema
Fuente: Tomado de Pifarré y Sanuy (2001, p. 303)



2.2.5. Modelo para resolver problemas en los textos matemáticos del Currículo 2016

Según se ha visto, varios textos escolares de matemática plantean un orden a seguir cuando se resuelve un problema. En este caso se ha identificado en años superiores como sexto de básica, que al proponer el trabajo con problemas se presentan las consignas de leer, luego identificar y finalmente verificar. De manera personal, la presentación del proceso a seguir para solucionar un problema es muy guiado por el agente externo, sin embargo, cabe valorar el uso de preguntas que se dan dentro de un problema ya que motivan al razonamiento. A continuación, a manera de ejemplo, se muestra una estructura de la resolución de problemas que constantemente aparece en los textos escolares de matemática, sobre todo en los del subnivel de educación básica medio y superior.

4 Leo la información, **identifico** los datos y **verifico** las respuestas.

En nuestro país existen 369 especies de mamíferos; de los cuales, aproximadamente, el 33% son murciélagos.

- ¿Cuántas especies de murciélagos hay en el Ecuador?
- ¿Qué número decimal se relaciona con 33%?
 $\frac{33}{100} = 0,33$
- ¿Cuántas especies de mamíferos hay en el país?
369 especies de mamíferos.
- ¿Cómo se puede determinar el número de especies de murciélagos que hay en el país? *Multiplicando el total de las especies de mamíferos por el número decimal que representa al porcentaje de murciélagos: $369 \times 0,33 = 121,8$. Como el número de especies debe ser un número entero, es necesario aproximarlo.*

Respuesta: *En el Ecuador existen, aproximadamente, 122 especies de murciélagos.*

Imagen 2. Proceso para resolver un problema

Fuente: Texto de matemáticas correspondiente al sexto de básica. Ministerio de Educación (2016d, p.91)



Con respecto al subnivel de educación básica elemental, se refleja en el texto correspondiente al cuarto de básica el proceso para resolver problemas de manera más precisa y en un sentido más explícito. Cabe recalcar que este proceso detallado no se presenta de modo frecuente en los textos escolares, sin embargo, muestran un camino enriquecedor para trabajar con problemas matemáticos partiendo desde la predisposición del estudiante.

Para resolver un problema, hay algo que no te puede faltar: aptitud, actitud positiva y perseverante.

| Leer y analizar | Obtener información | Razonar | Aplicar | Verificar y redactar |
|--|--|--|---|---|
| El papá de Andrés recibió \$1 500 de sueldo y \$1 000 por comisión. Con este dinero adquirió un purificador de agua en \$1 200. ¿Cuánto dinero le sobró al papá de Andrés? | ¿Cuánto dinero recibió el papá de Andrés por su sueldo? \$1 500. ¿Cuánto dinero recibió como comisión? \$1 000. ¿Cuánto cuesta el purificador de agua? \$1 200. | ¿Qué me solicita la pregunta? Saber el sobrante de dinero después de comprar el purificador. ¿Puedo graficar el problema y su pregunta? ¿Qué operaciones debería realizar para resolverlo? Suma y resta. | La adición de $1\ 500 + 1\ 000$ y, de ese total, la sustracción de $1\ 200$, así: $\begin{array}{r} 1\ 500 \\ + 1\ 000 \\ \hline 2\ 500 \\ - 1\ 200 \\ \hline 1\ 300 \end{array}$ | Verifico aplicando un proceso inverso • $1\ 000 + 1\ 500 = 2\ 500$ • $1\ 300 + 1\ 200 = 2\ 500$ Redacto de acuerdo con la pregunta: Al papá de Andrés le sobran \$1 300. |

Imagen 3. Proceso para resolver un problema

Fuente: Texto de matemáticas correspondiente al cuarto de básica. Ministerio de Educación (2016c, p.87)

2.2.6. Fases para la invención de un problema (Método de proyecto)

Respecto a la invención de problemas, no se han encontrado demasiados modelos a comparación de la resolución de problemas, quizás sea por las recientes investigaciones en cuanto a este tema. Sin embargo, para el presente trabajo, se considera un modelo propuesto por Rodríguez *et al.* (2015), que refleja claramente los pasos a tener en cuenta para inventar un problema. A continuación se describirá cada fase en el orden a ejecutarse:

Identificar la situación: en esta fase la persona analiza, valora y determina qué clase de problema formular para posteriormente delimitar los contenidos matemáticos a usar.



Elaborar elementos estructurales del problema a formular: en la cual hay que tener en cuenta la organización de los datos, que sean coherentes y precisos, que se consideren las relaciones matemáticas que se van a tener explícitas e implícitas, y la escritura de las preguntas que reflejen lo conocido y lo no conocido.

Redactar el problema matemático: se analiza la situación del problema que se narra y su componente educativo. Se relaciona el contexto con la situación descrita y con las consideraciones del lenguaje tanto matemático como maternal.

Resolver y comprobar el problema: esto con el fin de valorar si se ha planteado de manera correcta, precisa y coherente el problema y así, poder corregir errores.

En correspondencia con lo anterior, en una destreza de formulación de problemas presente en los textos escolares de matemática del Ministerio de Educación (2016e), específicamente en el texto de tercero de básica, se evidencia una actividad en la que se pide al docente que conjuntamente con los niños se planteen problemas relacionados con el entorno. Se parte de aspectos concretos, para pasar a asociaciones de las estructuras del problema, luego, a la representación del mismo de manera mental, y finalmente hacia su resolución. Se evidencia una relación con las fases del modelo establecido por Rodríguez *et al.* (2015), aunque no se considera la evaluación del problema que el niño ha representado. La siguiente imagen muestra un ejemplo de cómo se plantea el proceso de invención o formulación de un problema.

4. **Analizo** el problema de forma concreta. **Represento** mentalmente la situación y **resuelvo** aplicando lo aprendido.



Imagen 4. Ejemplo para formular un problema

Fuente: Texto de matemáticas correspondiente al tercero de básica. Ministerio de Educación (2016e, p.116)



De manera general, algunos modelos presentados para el trabajo con problemas matemáticos difieren en los nombres asignados a cada fase, sin embargo se evidencian similitudes y contrastes en los procesos planteados. Dentro de las similitudes, todos los modelos presentados parten de la comprensión del problema al cual se enfrenta un individuo, y del análisis de los componentes del enunciado para luego poder ir a la resolución del problema. Además, en la mayoría de modelos se presencia el papel de las preguntas como una pauta para entender el problema, conocer los propios conocimientos y evaluar tanto la pertinencia del plan como de la solución a la que se llega en el problema.

Por otro lado, algunos contrastes están relacionados con la evaluación de los problemas, ya que modelos como el de Schoenfeld y de los textos escolares de matemática, no reflejan de forma clara la evaluación del proceso de trabajo con problemas, sino que hacen hincapié en el resultado. En las fases propuestas por Mayer, no se presenta la evaluación y su propuesta termina con la resolución del problema. El modelo de Pifarré y Sanuy arguye el valor de organizar la información del enunciado de manera concreta a través del trabajo con cuadros comparativos, lo cual permite al sujeto que se enfrenta con problemas un mejor entendimiento de su proceso de pensamiento.

Los modelos para el trabajo con problemas, reflejan en todos sus pasos componentes estratégicos, procesos actitudinales, conceptuales y procedimentales que fomentan el desarrollo del pensamiento matemático y la metacognición. A continuación, se presenta un cuadro comparativo de los modelos tratados, con el fin de esclarecer de mejor manera sus similitudes y diferencias en base a procesos mentales como: comprender, planificar, aplicar y evaluar.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

UNIVERSIDAD DE CUENCA
INVENCIÓN DE PROBLEMAS

COMPONENTE EMOCIONAL

| Categorías | Modelo de Polya | Modelo de Mayer | Modelo de Schoenfeld | Modelo de Pifarré y Sanuy | Textos escolares de matemática | El método de proyecto |
|----------------------|--|---|---|---|---|---|
| COMPRENSIÓN | Comprensión del problema. Preguntas sobre el problema. | Traducción del lenguaje del problema. Integración del problema; ¿me sirve esta información? | Análisis; simplifica y reformula el problema. | Entender y analizar el problema. | Leer e identificar los datos y analizar el problema | Identificar la situación problemática a formular |
| PLANIFICACIÓN | Concebir un plan. Preguntas sobre los conocimientos que se requieren para solucionar el problema. | Planificación de la solución y supervisión. | Exploración; asociación con otros problemas. | Planificar un plan de resolución. Organizar los datos y el plan de resolución en un cuadro de doble entrada. | Razonar: ¿qué se requiere hacer? | Elaborar elementos estructurales del problema a formular; relaciones entre datos y preguntas. |
| APLICACIÓN | Ejecución del plan Preguntas sobre el proceso del plan. | Ejecución de la solución. | Ejecución por pasos según lo planificado | Resolver el problema de manera justificada. | Aplicar el conocimiento matemático | Redactar el problema matemático Resolver el problema. Análisis y valoración del problema. |
| EVALUACIÓN | Visión retrospectiva. Preguntas sobre el resultado y el proceso del problema. | | Comprobación general y específica del problema. | Evaluar el proceso de resolución del problema y el resultado obtenido. | Verificar, según respuesta y pregunta inicial | Comprobar el problema: Para ver pertinencia y corregir errores. |

Tabla 1: Procesos mentales presentes en la invención y resolución de problemas

Fuente: Elaboración propia



En conclusión, el trabajo con problemas matemáticos en el aula, desde su invención y resolución, fomenta el desarrollo del pensamiento matemático, y con esto aporta a la mejora de la calidad de aprendizajes en la matemática. Cabe recalcar, que tanto la invención como la resolución de problemas actúan de manera conjunta y se ayudan para a más del fomento del desarrollo del pensamiento matemático generar otras contribuciones como: aumento del conocimiento matemático, cercanía a la realidad, actitudes favorables hacia la matemática, entre otros. De igual manera, estas actividades permiten integrar tanto el aspecto cognitivo como emocional del sujeto cuando se enfrenta a un problema. El componente emocional está asociado a la actitud matemática que se convierte en una fuerza impulsora para el desarrollo de los tipos de pensamiento matemático. Se considera fundamental valorar las actitudes dentro del trabajo con problemas y promover que las mismas sean favorables. Finalmente considerar las fases para el trabajo con problemas es básico porque permite desarrollar procesos de concientización, análisis y reflexión que impedirán procesos mecánicos y reducidos a algoritmos, corriendo el riesgo de evitar el desarrollo de procesos complejos del pensamiento como la metacognición.



CAPÍTULO III: ACTUACIÓN DE LA METACOGNICIÓN EN LA INVENCIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

En este capítulo se busca comprender la incidencia de la metacognición en la invención y resolución de problemas matemáticos. Con este fin se abordan los procesos de conocimiento y regulación presentes en la metacognición y que también actúan en el trabajo con problemas. Dentro de los procesos de conocimiento cognitivo, se hace alusión a cómo los problemas permiten un mejor conocimiento (tanto emocional como cognitivo) del propio sujeto y de su entorno social, de las tareas a las cuales se enfrenta y de las estrategias.

En cuanto a la regulación, que es referida ya propiamente a la acción cognitiva de un sujeto durante una determinada actividad, se evidencia cómo la planificación, control y evaluación son procesos metacognitivos que se hallan presentes durante todo el proceso de trabajo con problemas matemáticos.

Igualmente, mediante resultados de investigaciones recientes y reflexiones personales, se reitera la intervención y el valor que tiene la metacognición en la invención y resolución de problemas matemáticos.

3.1. El conocimiento cognitivo durante la invención y resolución de problemas matemáticos

El conocimiento cognitivo alude a las potencialidades, creencias y limitaciones que posee un individuo respecto a su propio funcionamiento cognitivo (Flavell, 2000). Este mismo autor, divide este conocimiento en tres categorías, en las cuales se consideran tanto



aspectos cognitivos como emocionales referidos a: el conocimiento de las personas, el conocimiento de las tareas, y finalmente, el conocimiento de las estrategias a utilizar frente a determinada actividad. A continuación, se evidencia como estas categorías se desarrollan y aparecen cuando se trabaja con problemas matemáticos, tanto en su invención como en su resolución.

3.1.1. Conocimiento referido a personas

Este conocimiento, según Flavell (2000) abarca tres subdivisiones referidos al conocimiento propio, del otro y de la especie humana en general.

Conocimiento personal: El trabajo con problemas matemáticos, se convierte en una actividad clave para evidenciar y mejorar este conocimiento personal, debido a que se recurre a motivaciones, conocimientos y destrezas con una gran demanda cognitiva por parte del sujeto (Iriarte y Sierra, 2011), y así, tener éxito durante el problema al cual se enfrenta. El estudiante necesita mediante el conocimiento intrapersonal saber qué ventajas y limitaciones tiene en cuanto a los saberes que posee, si estos realmente son suficientes, si están consolidados dentro de su esquema mental o presentan errores, y cómo emocionalmente se siente durante esta introspección.

Los problemas matemáticos aportan al niño a pensar por sí mismo, a identificar la calidad de conocimientos que posee y le permite aprender a aprender (Isoda y Katagiri, 2016). Según se demostró en el capítulo II, tanto la invención como la resolución de problemas promueven el aumento del conocimiento matemático, la autoevaluación, la conexión con los conocimientos previos, la detección de errores respecto a los conocimientos que posee el estudiante, promoviendo así, el conocimiento personal y matemático. No por algo, Vila y Callejo (2014) mencionan que en el trabajo con problemas interviene el saber qué, el saber



cómo y el saber sentir de manera articulada, provocando un trabajo interno integral por parte del sujeto.

El componente emocional asociado al saber sentir, se vuelve determinante para el trabajo con problemas matemáticos (Polya, 1965). El sujeto aprende a conocerse tanto cognitivamente como emocionalmente porque requiere tener una predisposición favorable para enfrentarse a problemas matemáticos. Por ejemplo, dentro de la resolución de problemas, al permitir ver la utilidad de las matemáticas en el mundo, influye en la autoestima y la confianza hacia esta disciplina (Pérez y Beltrán, 2011), lo cual mejora su apertura y dominio emocional frente a esta tarea. Cabe recalcar que de manera general una actitud positiva permite mejores procesos de aprendizaje.

El valor de este conocimiento personal, también se ve reflejado en los modelos propuestos para el trabajo con problemas matemáticos, en los que la mayoría invitan a un diálogo interno entre el sujeto y el problema. Por ejemplo, en el modelo de Polya, se plantea de manera constante el trabajo con preguntas como ¿conoce algún problema que tenga una incógnita similar? Que invitan a que el sujeto se cuestione respecto a su propio conocimiento, realice asociaciones, identifique problemas similares resueltos con anterioridad, etc.

Finalmente, al ser las creencias parte del saber interno del ser humano, también se requiere su identificación y concientización a través de este conocimiento personal, ya que se vuelve fundamental que las mismas sean favorables para el trabajo con problemas. Creencias apropiadas para trabajar con problemas serían, que el niño sea consciente que puede enfrentar problemas matemáticos, tener una predisposición y actitud abierta, darse el tiempo para interactuar con el problema y considerar que el esfuerzo y la perseverancia ayudan a mejorar el trabajo con estas actividades (Vila y Callejo, 2014). A través de los problemas matemáticos,



interactúan las creencias, emociones y conocimientos; y se los modifica de ser necesario con el fin lograr un mejor aprendizaje.

Conocimiento de una persona a otra: Flavell (2000) alude a que en este conocimiento interindividual, se pretende conocer las características y destrezas cognitivas de los demás, al igual que sus creencias. Este conocimiento respecto al otro, ayudaría a través de los problemas matemáticos a valorar la interacción entre estudiantes y docente, para conocer y mejorar los propios procesos cognitivos en función de lo que se sabe respecto al otro.

Cabe recalcar que dentro del constructivismo se afirma que el aprendizaje matemático es de construcción individual con sensibilidad a las intervenciones sociales, estos factores culturales influyen mucho en los procesos cognitivos y en la invención como en la resolución de problemas, llevando a plantear diferentes maneras de trabajo con estas actividades (Ghasempour *et al.*, 2013). Este conocimiento respecto al otro, es importante para determinar hasta qué punto el otro influye en mi manera de conocer. Dentro del contexto educativo, se haría referencia a estudiantes y docentes como los elementos para referirse a este tipo de conocimiento.

En el trabajo con problemas, el docente se convierte en el primer mediador para trabajar procesos metacognitivos en los discentes. Tiene que lograr una transferencia progresiva del poder de regulación y responsabilidad de los aprendizajes a los estudiantes (Serrano y Pons, 2011). De no ser así, se correría el riesgo de dificultar el trabajo con problemas matemáticos. Por ejemplo, se ha evidenciado en investigaciones de Ayllón *et al.* (2016) e Irvine (2017) cómo la influencia del docente puede hacer que los estudiantes tengan una creencia errada y poco significativa del trabajo con problemas matemáticos. Los autores mencionados, demostraron en sus respectivos trabajos que los estudiantes no ven una cercanía ni utilidad a su vida al trabajar con problemas. Igualmente, en el trabajo de invención de problemas se reproducen



modelos asociados a los que plantea el docente y según los contenidos matemáticos que se están estudiando. Los problemas planteados son alejados de la realidad de los estudiantes y limitados a la aplicación de conocimientos matemáticos.

Definitivamente, una de las condiciones para desarrollar de manera exitosa el trabajo con la invención y resolución de problemas, es el actuar del docente. Si el docente, actúa durante su quehacer pedagógico de un modo que no propicia el desarrollo metacognitivo a través de las actividades con problemas matemáticos, difícilmente se podrán generar procesos metacognitivos en los estudiantes. El constructivismo valora la construcción del conocimiento por parte del estudiante, sin dejar de lado la influencia del otro para lograr este conocimiento. Así, se vuelve clave entender que a través de la metacognición, el docente puede adecuar su praxis educativa en función de los procesos mentales que posee el sujeto (Tovar-Gálvez, 2008). El estudiante percibirá estos procesos metacognitivos en el otro (docente) e influirá en sus procesos mentales cuando trabaje con problemas.

Conocimiento de los procesos cognitivos humanos: esta categoría está enfocada a creencias y saberes que una persona se genera respecto a la mente humana, como el ser consciente de que se posee una memoria frágil, que uno se olvida las cosas o las recuerda después, y que a veces entiende mal algo (Flavell, 2000). Estas creencias y saberes generales contruidos socialmente pueden ser favorables o no para el aprendizaje del sujeto.

Los problemas matemáticos, invitan a evaluar los conocimientos o creencias sociales que se van generando según las experiencias que ha cultivado el individuo. Por ejemplo, si un sujeto ha llegado a construir socialmente que las matemáticas son difíciles, abstractas y poco útiles, a través del trabajo con problemas matemáticos se posibilitaría que esta creencia cambie, siempre y cuando el proceso de resolución de problemas sea el adecuado, de lo contrario podría fortalecer una creencia negativa hacia el aprendizaje de la matemática. A través de la invención



y resolución de problemas bien abordados se acerca la matemática a la realidad del estudiante, se motiva al aprendizaje y se rompe con prejuicios negativos referidos a la matemática.

El conocimiento respecto al yo y a los demás, trabajan de manera interrelacionada, aportan al conocimiento del sujeto y a la vez este conocimiento permite tener otras perspectivas respecto a los procesos cognitivos de los demás. Cabe recalcar que el conocimiento no es una representación fiel de la realidad (Luna, 2003) dependerá mucho de las experiencias construidas por cada individuo según el entorno en el que se encuentre. La invención y resolución de problemas se convierten en actividades que permiten este interactuar interno y externo del sujeto para la construcción de conocimiento, e invitan a despojarse de egocentrismos y a considerar que las demás personas son influyentes en la generación de aprendizajes. Ghasempour *et al.* (2013) y Ley (2014) concuerdan en que el trabajo con problemas es una actividad que propicia la interrelación colaborativa con los demás para una mejor consciencia de lo que se aprende y una oportunidad para recibir una retroalimentación. Este trabajo colaborativo fomenta procesos de discusión de opiniones entre los estudiantes y el docente, permitiendo desarrollar procesos metacognitivos como la reflexión y la autorregulación (Iriarte, 2011).

3.1.2. Conocimiento referido a las tareas

Dentro de este proceso, según Flavell (2000) se da una subdivisión en dos categorías referentes a la naturaleza de la información y a la naturaleza de las demandas de la tarea.

Naturaleza de la información: La invención y resolución de problemas permiten el trabajo concientizado y reflexionado de dicha información, invitan a establecer juicios respecto a si la información presente en los problemas es pertinente, adecuada, y útil para ser utilizada. Dentro de las fases para inventar y resolver problemas, esta dimensión estaría reflejada



explícitamente dentro de la primera fase denominada “comprensión”, ya que es en ésta parte donde se analiza y selecciona información pertinente para cumplir el propósito de la tarea.

En la fase de comprensión, se empieza a evidenciar el componente metacognitivo, ya que no es una etapa carente de sentido, sino que va ligada a un fin. La metacognición contribuye a la comprensión del problema, a la selección de estrategias adecuadas, al monitoreo de estrategias de solución de manera efectiva. Así, se identifica y superan los obstáculos para resolver problemas. La metacognición se vuelve un elemento clave para incorporar información y estrategias apropiadas durante el trabajo con problemas (Ghasempour *et al.*, 2013).

Todos los modelos vistos referentes a la invención y a la resolución de problemas abordan esta etapa de comprensión, dejando ver que sin ésta no es posible continuar con el desarrollo de la actividad matemática. Por ejemplo, el modelo de Polya, incorpora preguntas relacionadas a descubrir cuál es la incógnita, los datos etc... Además, este autor considera que es ilógico abordar sobre algo que no se comprende; el modelo de Mayer trata de la interpretación del lenguaje matemático y el desecho de información irrelevante; y el modelo de Schoenfeld menciona que se puede simplificar y reformular el problema, es decir interpretar el problema por medio de pasos. Estos modelos reflejan diversas estrategias para identificar y comprender la información presentada y así poder seleccionar la más pertinente según la actividad planteada.

Naturaleza de las demandas de la tarea: Está relacionada a las experiencias que permiten ver si las tareas son fáciles o difíciles y qué nivel de demanda cognitiva se requiere para abordarlas (Flavell, 2000). En este punto, cabe recalcar que una tarea metacognitiva, debe tener en cuenta ciertas condiciones relacionadas al conocimiento o control del propio aprendizaje, autorregulación cognitiva e ideas adecuadas sobre la estructura, producción y



organización del conocimiento (Tesouro, 2006). Según las características presentadas, la invención y resolución de problemas cumplen dichas condiciones, debido a que impulsan a usar los conocimientos que se posee y a regularlos en función del fin que se busca.

Si se trabaja conjuntamente la invención y la resolución de problemas, esto permitirá comprender de mejor manera la demanda de estas tareas. Se podría hacer alusión a la investigación de Espinoza-Gonzales *et al.* (2015), quienes trabajaron con un esquema de análisis para caracterizar los problemas inventados por el estudiantado. Este esquema poseía las variables relacionadas a la estructura sintáctica, matemática y semántica de los problemas que se inventaron. Estas variables permiten conocer de mejor manera las características de lo que es un problema, el cómo está compuesto, por ende conocer mejor la naturaleza y demanda de esta tarea.

3.1.3. Conocimiento referido a estrategias

Este conocimiento consiste en conocer sobre estrategias tanto cognitivas como metacognitivas y saber cuándo y dónde se torna oportuno usarlas (Gurat y Medula 2016). El trabajo con problemas matemáticos, representa una de las actividades más adecuadas para fomentar el conocimiento y uso de estrategias.

En el capítulo II se abordaron los modelos para el trabajo con problemas matemáticos, que son relacionados a la heurística, considerada como estrategias universales para el trabajo con problemas, que guían y encaminan procesos para llegar a soluciones (Agudelo *et al.*, 2008). Al considerar esos modelos, los problemas permiten la exploración y aplicación de estrategias que se poseen así como su mejora y pertinencia según las características de la tarea, en este caso, de los problemas. Frente a esto, Gurat y Medula (2016) arguyen que: “en el trabajo con problemas se refleja la utilización de estrategias metacognitivas” (174).



Los problemas matemáticos, reflejan en su trabajo la riqueza de estrategias a aprender y usar, tales como, hacer preguntas, enumerar detalles importantes, trabajar de manera grupal. También, se puede optar por realizar ilustraciones, descomponer el problema, mirarlo por partes, asociarlo con la vida real, usar la estrategia de prueba o error etc... Se establecen vínculos entre las partes del problema para ver la pertinencia de la estrategia, y dependerá de la familiaridad con el problema a trabajar para usar determinada estrategia. Si no se conocen estrategias metacognitivas, el trabajo con problemas tiene menos probabilidades de ser una actividad exitosa, las estrategias están en el centro del trabajo con problemas y afectan a las etapas de la misma (Gurat, y Medula, 2016).

Los autores mencionados, concluyen que de manera general, “tareas, estrategias y personas están relacionadas con los problemas matemáticos” (p. 171). Así, se vuelve importante concientizar que estos conocimientos permitirán una mejor regulación ya en la acción propia del trabajo con problemas.

3.2. La regulación cognitiva durante la invención y resolución de problemas matemáticos.

La regulación cognitiva está dirigida a los procesos cognitivos que se dan cuando un sujeto se enfrenta a determinada tarea (Botero *et al.*, 2017). Aquí, los procesos a ser utilizados son referidos a la planificación, el control y la evaluación. Estos procesos permiten regular la actividad o tarea en la que se halle el sujeto. Cabe recalcar que no en todas las actividades se requiere del uso de estos procesos, sino que va a depender de la demanda de la tarea. La invención y resolución de problemas matemáticos son tareas con una demanda de procesos cognitivos de alto nivel y son una gran oportunidad para evidenciar el rol que cumplen los procesos de regulación mencionados. A continuación, se presenta como los procesos de regulación están asociados a las fases para inventar y resolver problemas.



3.2.1. Regulación presente en la planificación

La planificación es una fase presente en todos los modelos de invención y resolución de problemas, se enfoca en la elaboración de un plan referido a qué se requiere hacer para lograr el propósito de la tarea a la cual se enfrenta un sujeto. Dentro de la metacognición también se presencia la planificación como parte de los procesos de regulación. Desde la metacognición, la planificación es descrita como un proceso de reflexión, en la cual el sujeto marca, a partir de sus relaciones cognitivas, el camino y estrategias a seguir según la tarea en la que se encuentra (Soto, 2003; Tovar-Gálvez, 2008). Se puede ver la presencia de este proceso metacognitivo como requerimiento para el trabajo con problemas matemáticos dentro de los modelos propuestos.

En correspondencia con lo anterior, la planificación considerada desde la perspectiva metacognitiva se torna primordial para el trabajo referido a la invención y resolución de problemas matemáticos. Los modelos heurísticos presentados en el capítulo II presentan a la planificación con un elemento transversal a ser considerado dentro de los problemas, debido a que en esta etapa se busca razonar acerca de qué se requiere hacer y cómo.

La consciencia y la reflexión permiten a los estudiantes mejorar sus habilidades para escoger apropiadas estrategias, para aprender conceptos y resolver problemas (Alzahrani, 2017). Dentro de la fase de planificación esto es evidente. La mayoría de modelos en esta fase, evalúan con una serie de preguntas los procesos cognitivos del sujeto que se enfrenta al problema, lo invitan a cuestionarse, reflexionar y tomar conciencia sobre las características del problema, por ejemplo: ¿se han empleado todos los datos? ¿me sirve esta información? ¿he visto antes este tipo de problemas? ¿qué me solicita la pregunta? Es evidente que la regulación está presente durante esta etapa y actúa para mejorar el trabajo con problemas.



3.2.2. Regulación presente en la aplicación

Dentro de la invención y resolución de problemas la aplicación está presente también en todos los modelos heurísticos presentados, con sus respectivas similitudes y diferencias. De igual manera, dentro de la metacognición esta fase estaría asociada al proceso de regulación denominado control o administración, que es descrita como el momento de la ejecución de las tareas y se revela en actividades de comprobación, rectificación y revisión constante de las estrategias que se han decidido usar (Silva, 2006).

Los modelos para el trabajo con los problemas matemáticos, dejan ver en esta fase de aplicación, la constante autovaloración de cómo se están ejecutando las estrategias planificadas. Polya y su propuesta para trabajar con problemas, menciona que no es un proceso fácil porque demanda del dominio de los conocimientos, requiere de concentración para no desviarse del plan propuesto en la fase anterior, y paciencia. Polya propone que se vaya realizando durante este proceso una evaluación constante de cada paso, para lo cual nuevamente propone el uso de preguntas, por ejemplo ¿se puede ver que el paso es correcto? En cambio, en el modelo referido al método de proyecto para la invención de un problema, refleja en esta fase un doble proceso, ya que es aquí en donde se requiere redactar el problema matemático para posteriormente resolverlo con el fin de analizar y valorar su pertinencia. Es evidente que la invención de problemas en esta etapa requiere de un mayor proceso de regulación de la actividad.

3.2.3. Regulación presente en la evaluación

Esta última fase presenta más diferencias que similitudes dentro de los modelos para trabajar con problemas matemáticos. Algunos modelos como el de los textos escolares de matemática reducen esta fase solo a la verificación de la respuesta en concordancia con la pregunta inicial. El modelo de Mayer, ni siquiera considera esta fase dentro del trabajo con problemas matemáticos. Los dos modelos descritos no se pueden asociar al proceso de



regulación referido a la evaluación, ya que este proceso debe contrastar los resultados con los propósitos definidos previamente (Silva, 2006). Debe buscar ver la pertinencia de las estrategias usadas y planificadas para llegar al resultado obtenido (Tovar-Gálvez, 2008; Soto, 2003). Desde la regulación, la evaluación, busca valorar todo el proceso llevado a cabo en el trabajo con problemas y así generar más aprendizajes considerando el valor del proceso evaluativo.

Dentro de esta evaluación, el modelo de Polya, es el único que hace referencia a que en ésta fase se pueden adquirir nuevos aprendizajes. Se invita a realizar una visión retrospectiva, no solo de la respuesta o de la fase de ejecución, sino de todo el proceso que se tuvo para llegar a la solución del problema. Se considera que este modelo refleja de manera más clara como debe ser la evaluación desde una perspectiva metacognitiva. No obstante, el modelo de Pifarré y Sanuy, de Schoenfeld, y del método de proyecto de Rodríguez et al., también reflejan una evaluación que no solo se queda reducida a valorar el resultado.

La evaluación durante todo el proceso, ya sea de manera individual o grupal es clave para ir regulando la tarea que se está realizando. Respecto a esto, Alzahrani (2017) señaló en su trabajo de investigación que: “evaluar el pensamiento del estudiante al lidiar con problemas matemáticos puede ser considerado un pilar fundamental a través de la metacognición” (p.532). El mismo autor, mencionó que esta fase ayuda a considerar cuán importante es la retroalimentación y la evaluación entre los discentes al tratar con problemas matemáticos de un compañero, ya que ayuda a regular, monitorear y dirigir a los estudiantes.

A continuación, se presentan ejemplos de problemas matemáticos que permiten esclarecer de mejor manera cómo actúa la regulación cognitiva en cada proceso de desarrollo de estas actividades.



3.2.4. Regulación cognitiva en problemas matemáticos: ejemplos

Como se vio en el capítulo II, un problema no es igual a un ejercicio. Un problema es un reto para la persona que lo va a resolver, lo invita a una entrega hacia la actividad tanto cognitiva como emocional. Hay que tener presente que un problema dependerá mucho del contexto y del sujeto al cual se plantee para que sea considerado como tal. A continuación, se presentan ejemplos de problemas matemáticos que estimulan a pensar, además, se explica cómo cada problema invita a trabajar la regulación cognitiva.

Problema 1: *Tienes dos relojes de arena, uno de 4 minutos y uno de 7 minutos. Si solamente puedes usar estos dos relojes ¿Cómo puedes medir 9 minutos?* (Olsen, 2016, p. 2)

Este problema, no requiere de una mera aplicación de algoritmos preestablecidos, por ende no es un ejercicio. ¿Cree que lo puede resolver de manera rápida? No lo creo, bueno al menos que se haya trabajado previamente con este problema. Es un problema que invita a razonar y analizar en función de los conocimientos que se posea, ¿qué estrategias usar para responder la pregunta? Invita a un pensar matemáticamente mediante procesos metacognitivos.

Planificación: ¿Qué se requiere hacer? ¿por dónde empiezo? Aquí, se puede usar la representación gráfica, la estrategia de ensayo y error o experimentar de manera concreta.

Aplicación: Se tendrá que dominar contenidos básicos como sumas y restas, ¿fallo en algunos de estos conocimientos? ¿cómo voy a usar o aplicar lo que sé? ¿estoy realizando bien los pasos planificados?

Evaluación: Este problema permite analizar todo el proceso para asegurar de que está bien la respuesta y las estrategias usadas. La pregunta del enunciado invita a recorrer de nuevo todo el proceso de manera constante para ver si se cumple con los criterios que pedía el problema.



Problema 2: *Escriba un problema basado en la siguiente tabla cuya solución requiera una suma y una resta.*

| Cientes | Ahorro bancario |
|----------------|------------------------|
| Sara | \$340,00 |
| Paola | \$ 120,00 |
| Carlos | \$ 220,00 |
| Daniel | \$110,00 |
| María | \$ 245,00 |

Tabla 2. Invención de un problema
Fuente: Adaptado de Ghasempour, Bakar y Jahanshaloo (2012, p. 62)

En este caso se pide al niño que invente un problema con los datos presentados. Se debe crear un problema respetando las condiciones dadas, de caso contrario no será válido. Está claro que el sujeto que realice esta actividad también requiere de un proceso cognitivo de alto nivel.

Planificación: Se requiere identificar qué situación se quiere plantear, es decir en qué contexto se quiere ubicar los datos que se plantean. Además, ver qué estructuras del lenguaje matemático se van a usar, así como su relación con la pregunta a formular, ¿qué operaciones tengo que considerar? ¿con qué situación relaciono el problema?

Aplicación: Se redacta el problema con las consideraciones planificadas. Luego hay que resolverlo para ver si cumple con los criterios de un verdadero problema, ¿presenta algún error el problema? y ¿cumple con las condiciones a considerar?



Evaluación: El problema creado cumple o no con las consignas que se tenían que plasmar ¿hay errores? ¿podrá resolver otra persona el problema?

Los problemas presentados, no son problemas rutinarios que exigen la aplicación de algoritmos mecanizados, sin motivación, y hasta incluso sin realizar procesos de razonamiento. Estos problemas invitan a que el estudiante se involucre en la búsqueda de respuestas de manera consciente y reflexiva, en un permanente diálogo y cuestionamiento consigo mismo. Alzahrani (2017) arguye que es difícil que se den aprendizajes basados en un enfoque metacognitivo cuando el rol de los estudiantes está limitado a recibir información sin ser partícipe de su búsqueda. Se requiere que el estudiante sea el centro del proceso de enseñanza aprendizaje y se cree una atmosfera constructiva. Con la invención y resolución de problemas se presenta una rica fuente para desarrollar la participación de los estudiantes dentro del proceso de enseñanza- aprendizaje y considerar a la metacognición como eje central de éstas actividades.

3.3. Aportes de la metacognición a la invención y resolución de problemas matemáticos

Se ha visto la pertinencia de la metacognición dentro de la educación actual para la generación de aprendizajes centrados en el estudiante y en sus potencialidades. Igualmente, dentro de la matemática, la invención y resolución de problemas se vuelven tareas importantes para evidenciar y trabajar procesos metacognitivos. Cabe recalcar que la “invención y resolución de problemas comparten similitudes asociadas a la metacognición” (Ghasempour *et al.*, 2013, p. 65), ya que ambas tareas se prestan para trabajar procesos cognitivos complejos y aspectos emocionales que parten del propio sujeto.

3.3.1. Enfrenta dificultades respecto al trabajo con problemas

Crear que trabajar tanto la invención, como la resolución de problemas matemáticos dentro del aula ya es suficiente para aprender matemáticas, es un error, ya que es necesario considerar



también los procesos metacognitivos para evitar que se den dificultades asociadas a la falta del control y regulación del conocimiento. Algunas de estas dificultades se describen a continuación.

En Estados Unidos y Malasia se realizaron investigaciones con estudiantes para evaluar el rol de la metacognición relacionado a los problemas, dentro de estas indagaciones se detectaron algunas dificultades asociadas al trabajo con problemas matemáticos. Mayer (1998) menciona que los estudiantes no saben cómo diseñar un plan según la tarea, hay una falta de motivación que provoca fracaso y apatía hacia la actividad. Además, investigaciones posteriores agregan inconvenientes relacionados a la incapacidad para comprender el problema, para adaptar experiencias a los problemas, a la mala elección de estrategias de solución, a la aplicación de conocimientos inadecuados y a dudas de la pertinencia de las respuestas a las cuales se llega (Kazemi, Reza y Bayat, 2010). Estas dificultades generadas responden a la falta de procesos metacognitivos, por ende es clave no descuidar dichos procesos dentro del trabajo con problemas.

De igual manera, estudios realizados por Fernández y Barbarán (2017) en la ciudad de México con niños de 6 a 14 años de edad para trabajar con modelos de situaciones problemáticas, concuerdan en sus conclusiones con dificultades relacionadas a los anteriores, pero además arguyen que el no trabajar la autocorrección y la metacognición ya se convierte en un inconveniente para un correcto abordaje de los problemas matemáticos.

La metacognición permite evitar y superar estas dificultades al trabajar con problemas, permitiendo que el estudiante logre mejores procesos de control y regulación de sus conocimientos y emociones, lo que lo conducirá a un progreso y éxito en el trabajo con problemas matemáticos.



3.3.2. Mejora el aprendizaje a través de problemas

Desoete, Roeyers y Buysse (2001) en su trabajo de investigación con niños, llegaron a comprobar el “valor de la metacognición en la resolución de problemas con estudiantes” (p.455). La metacognición asociada al trabajo con problemas contribuye a la mejora de la comprensión y del éxito matemático. Sobre todo, para “una solución exitosa de problemas” (Suriyon, Imprasitha y Sangaroon 2013, p.589)

Dentro de los aportes cabe mencionar que permite generar estudiantes más competentes cuando se integra un modelo cognitivo-metacognitivo en la invención y resolución de problemas (Ghasempour *et al.*, 2013). Igualmente, contribuye al desarrollo de las competencias matemáticas y a otras relacionadas a la lingüística, la independencia, la iniciativa, y el aprender a aprender (Fernández y Barbarán 2017). Esto permite más autonomía cuando los estudiantes trabajan con problemas, ellos no precisan que alguien les diga si está bien o mal su proceso de trabajo, sino que por su propia cuenta van reflexionando y tomando consciencia de su propio pensamiento.

La metacognición mejora el trabajo con problemas matemáticos, porque permite “incorporar información y estrategias apropiadas durante la solución de problemas”. (Ghasempour *et al.*, 2013, p. 66). También, se genera una rapidez y mejora en la resolución de problemas, y se posibilita el gusto por estas tareas (Fernández y Barbarán 2017). Se promueve un pensamiento de alto nivel que motiva a los estudiantes a ser partícipes en la transformación y comprensión del conocimiento, a ser conscientes y activos para tomar iniciativas y responsabilidades en su propio aprendizaje (Ghasempour *et al.*, 2013). El autoconocimiento referido a los procesos metacognitivos son elementos importantes para un aprendizaje eficaz, consciente y autorregulado (Ley 2014).



Otra consideración de la metacognición, es que impediría la mecanización de problemas matemáticos, ya que se evitaría caer en una confusión respecto a los mismos, es decir, confundir los problemas con los ejercicios, o volverlos procesos mecánicos que impidan ejercitar el pensamiento matemático. La metacognición exige procesos de concientización y reflexión respecto al qué se sabe y cómo se aplica el conocimiento, que no serían considerados en el trabajo con ejercicios. Así, se ataca al modelo tradicional en donde se da valor a la memorización y a la solución de “problemas” por mera aplicación de algoritmos. Dentro de la metacognición se invita a hacer pensar a los estudiantes (Alzahrani, 2017), esto ayuda a que en el trabajo con problemas matemáticos no se pierda este propósito y que los estudiantes piensen y reflexionen sus procesos de pensamiento.

El pensamiento matemático al integrar los métodos matemáticos y contenidos, los mismos que son impulsados por las actitudes matemáticas, es la habilidad que mejor se desarrolla con la utilización de procesos metacognitivos en la invención y resolución de problemas. En el trabajo con problemas, los estudiantes necesitan interactuar con factores emocionales y cognitivos.

De manera general, se vuelve importante tener en cuenta la metacognición dentro del trabajo con problemas matemáticos, ya que ayudará al estudiante a sentirse mejor y más competente frente a estas actividades tanto de manera cognitiva como emocional. De igual manera, permitirá que se generen aprendizajes más conscientes y eficaces dentro de la matemática.

3.4. ¿Necesito metacognición para inventar y resolver problemas matemáticos?

Si se quiere aprovechar la riqueza de las tareas de invención y resolución de problemas para generar aprendizajes más centrados en los procesos de pensamiento de los estudiantes, la



respuesta es que sí. De igual manera, si se quiere desarrollar procesos metacognitivos en los estudiantes, el trabajo con problemas matemáticos se vuelve una actividad idónea para desarrollar dichos procesos.

El trabajo con problemas matemáticos desarrolla la metacognición. Tafur menciona que en los problemas se “posibilita procesos de reflexión y análisis, lo cual, (...) promueve el desarrollo de habilidades metacognitivas (como se citó en Ley, 2014, p. 212), por ende, se evidencia una relación consustancial entre metacognición y trabajo con problemas matemáticos, ya que las dos se apoyan mutuamente. Con respecto a esta misma idea, Kazemi *et al.* (2010) en sus resultados de investigación realizados con niños evidenciaron “que las habilidades metacognitivas se activan en problemas no rutinarios y para facilitar la resolución de ellos” (p.424), con esto, se deja claro, que la metacognición actúa con problemas que realmente sean un reto cognitivo para el estudiante.

Este apoyo mutuo entre los problemas matemáticos y la metacognición permite que se ayude en la identificación del problema, en entender cuál exactamente es la dificultad y cómo alcanzar la solución (Ngan, Chang y Peng, 2001). Resulta ineludible afirmar que se vuelven necesarios los procesos metacognitivos para un mejor trabajo con problemas matemáticos y la mejora del aprendizaje en general. En suma, la invención y resolución de problemas matemáticos permite reflejar cómo interviene y se desarrolla la metacognición a través de factores cognitivos y emocionales del sujeto, al igual que las interacciones con el entorno en el que se halla.



CONCLUSIONES

- La metacognición concibe al aprendizaje, al conocimiento, y a los actores involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva constructivista, en donde el docente valora el rol del estudiante y sus procesos cognitivos (Marroquín, 2012; Ellerani, 2009; González, 2014). Considerando esto, la metacognición es definida como un proceso mental consciente y reflexivo, que permite conocer los propios procesos cognitivos y regularlos en actividades que demanden de este nivel de pensamiento. Dentro de la metacognición existe una clasificación que aborda dos categorías: la primera referida al conocimiento cognitivo, que abarca el conocimiento de personas, tareas y estrategias; y la segunda categoría enfocada a la regulación cognitiva, que considera procesos mentales como la planificación, el control y la evaluación. Estas dos categorías están interrelacionadas y actúan juntas según la demanda de la tarea.
- La metacognición está asociada al pensamiento matemático porque promueve a un pensar, a estructurar la mente, a comprender la realidad e integrar el componente emocional y cognitivo durante el aprendizaje de la ciencia matemática. La enseñanza de la matemática que busca desarrollar el pensamiento matemático, posibilita también el desarrollo de la metacognición.
- Dentro de la actividad matemática, el trabajo con problemas se considera una actividad clave para generar mejores aprendizajes de esta disciplina. La riqueza de un problema no es reducida a un ejercicio o a aplicación de algoritmos mecanizados. Un problema permite que la matemática se conecte con la realidad, invita a pensar al sujeto, lo reta e impulsa a que se involucre en esta tarea, tanto a nivel cognitivo como emocional. Desde esta concepción de lo que es un problema se puede entender su riqueza para el aprendizaje de la matemática.



- La invención de problemas significa crear un problema de manera individual o grupal, a partir de unas condiciones dadas, o por la reformulación de un problema existente. Por otro lado, la resolución de un problema hace alusión a brindar una solución a un problema ya establecido, enfrentándose tanto cognitivamente como emocionalmente a lo desconocido. Ambas tareas permiten un aumento del conocimiento matemático, la conexión con conocimientos previos, el fomento de la motivación y predisposición hacia la disciplina matemática, la generación de procesos creativos y evaluativos respecto al conocimiento que se posee, y lo mejor, ambas tareas se ayudan y mejoran mutuamente. Igualmente, dentro de la didáctica de la matemática, se presentan varios modelos para el trabajo con problemas, que incitan a considerar una serie de procesos mentales como comprender, planificar, evaluar, entre otros, para que la gestión tanto de la invención como de la resolución de problemas sea enriquecedora.
- Dentro de los procesos metacognitivos referidos tanto al conocimiento como a la regulación cognitiva, se evidencia como los problemas matemáticos requieren y permiten el conocimiento de las limitaciones, motivaciones, experiencias y creencias del sujeto y su entorno social, al igual que el conocimiento de las tareas y estrategias más pertinentes a usar. Igualmente, dentro de los modelos propuestos para un trabajo adecuado en la invención y resolución de problemas, se reflejan procesos mentales como planificar, controlar y evaluar; el motivar estos procesos mentales implica la regulación cognitiva.
- Las investigaciones revisadas, evidencian la contribución de la metacognición en el trabajo con problemas, ya que se aporta al desarrollo del pensamiento matemático y a generar autonomía en el sujeto que aprende, porque estimula a pensar sobre los procesos mentales que se conocen y a regularlos de manera apropiada. Además, se impide que los problemas matemáticos sean trabajados de manera mecánica o se los



confunda con los ejercicios, lo que permite incrementar el valor de la matemática. En definitiva, permite concientizar y reflexionar las tareas de invención y resolución de problemas y por ende, mejorarlas.

RECOMENDACIONES

- Reconocer el valor de la metacognición dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje, en especial dentro de la disciplina matemática resulta imperativo, debido a que aporta a las demandas de la sociedad actual en la que se requiere que los estudiantes aprendan a aprender. Considerar el fomentar la metacognición, implica valorar al sujeto que aprende como un ser capaz de generar y construir conocimientos de manera integral.
- Diferenciar entre lo que es un problema y un ejercicio matemático durante el trabajo en clases. Para esto se puede recurrir a las características de un problema y a los procesos metacognitivos como planificación, control y evaluación necesarios en el abordaje de problemas matemáticos, esto permitirá ver si realmente se está retando intelectualmente al estudiante e involucrándolo de manera afectiva y cognitiva.
- Incorporar la invención y resolución de problemas matemáticos de manera conjunta en el aula, debido a que así se propiciarán mejores aplicaciones de la actividad matemática y se generarán aportes como creatividad, motivación y éxito en el abordaje de estas tareas. Es importante para esto, que se utilicen de manera explícita modelos para el trabajo de invención y resolución de problemas matemáticos que consideren procesos metacognitivos, para así evitar mecanizar el trabajo con estas actividades.
- Fomentar procesos de reflexión en el docente, para que comprenda que no se puede dejar al azar el desarrollo de la metacognición dentro del trabajo con problemas



matemáticos. Que es un proceso mental y emocional que requiere de tiempo y apoyo del docente para que el estudiante empiece a hacer consciencia de su propio conocimiento y regulación del mismo. Se recomienda que el principal referente, el docente, se prepare, reflexione y familiarice con los procesos metacognitivos para que pueda posteriormente guiar a los estudiantes.

- Crear un ambiente propicio en el aula para el desarrollo de la metacognición. Para eso, el docente debe fomentar el uso de preguntas que permitan al estudiante reflexionar y evaluar la actividad en la que se halla. Dejar que los estudiantes interactúen con la actividad según sus tiempos y condiciones. Además, que los problemas matemáticos, sean propuestos en diversos contextos para que haya una mejor extrapolación del conocimiento y se integren tanto aspectos cognitivos como emocionales.



REFERENCIAS

- Agudelo, G., Bedoya, V., y Restrepo, A. (2008). *Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos* (Trabajo de grado de Licenciatura). Recuperado de <http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/990/3722107A282.pdf;jsessionid=B9727A48D78E8B43ECF3192231732E69?sequence=1>
- Aguilar, M. (2014). *Desarrollo de procesos reflexivos en formación docente inicial* (Tesis de maestría). Universidad de Cuenca, Cuenca, Ecuador. Recuperado de <http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/21579/1/TESIS.pdf>
- Alastre, V., y Alastre, N. (2011). Metacognición como estrategia para la interpretación del lenguaje matemático. *Revista de Postgrado FACE-UC*, 5(9), 127-137. Recuperado de <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/arje/arj09/art07.pdf>
- Allueva, P. (2002). Conceptos básicos sobre metacognición. *Desarrollo de habilidades metacognitivas: programa de intervención. Consejería de Educación y Ciencia*, 59-85. Recuperado de <https://ice.unizar.es/sites/ice.unizar.es/files/users/leteo/materiales/concepto-de-metacognicion-pallueva.pdf>
- Alzahrani, K. (2017). Metacognition and its role in mathematics learning: an exploration of the perceptions of a teacher and students in a secondary school. *International electronic journal of mathematics education*, 12(5), 521-537. Recuperado de file:///D:/Downloads/IEJME_1891_article_5b3f9f3c0c38f.pdf
- Ayllón, M. (2012). *Invencción-resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada. Recuperado de <https://hera.ugr.es/tesisugr/2116633x.pdf>



- Ayllón, M., Castro, E., y Molina, M. (2008). Invención de problemas por alumnos de educación primaria. *Investigación en el aula de matemáticas: competencias matemáticas*, 225-234. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1576/1/MARUJATHALES2007.pdf>
- Ayllón, M, Gallego, J., y Gómez, I. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos*, XXXVIII(152), 51-67. Recuperado de <http://ucsj.redalyc.org/articulo.oa?id=13244824004>
- Ayllón, M, y Gómez, I. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela abierta: revista de Investigación Educativa*, (17), 29-40. Recuperado de [file:///D:/Downloads/Dialnet-LaInvencionDeProblemasComoTareaEscolar-4801331%20\(1\).pdf](file:///D:/Downloads/Dialnet-LaInvencionDeProblemasComoTareaEscolar-4801331%20(1).pdf)
- Ayllón, M, Castro, E., y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. *Investigación en Educación Matemática XIV. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM*, 223-233. Recuperado de <file:///D:/Downloads/Dialnet-ConocimientoAritmeticoInformalPuestoDeManifiestoPo-3629231.pdf>
- Ayllón, M, Castro, E., y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema " difícil" por alumnos de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XV. Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.*, 277-286. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1813/1/SEIEM_Maruja_2011.pdf



- Báez, J., y Onrubia, J. (2016). Una revisión de tres modelos para enseñar las habilidades de pensamiento en el marco escolar. *Perspectiva Educativa, Formación de Profesores*, 55(1), 94-113. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333343664007>
- Berini, M., Bosch, D., Casadevall, M., Guevara, I., y Sabaté, D. (2010). La matemáticas no me han servido para nada... Pero dicen que las matemáticas son imprescindibles.... *SUMA*, 64, 15-24. Recuperado de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/64/015-024.pdf>
- Bosch, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia*, 1(1), 15-37. Recuperado de <file:///D:/Downloads/Dialnet-ApuntesTeoricosSobreElPensamientoMatematicoYMultip-4836767.pdf>
- Botero, A., Alarcón, D., Palomino, D., y Jiménez, Á. (2017). Pensamiento crítico, metacognición y aspectos motivacionales: una educación de calidad. *Poiésis*, 1(33), 85-103. <https://doi.org/10.21501/16920945.2499>
- Calero, C. (2009). *Aprendizaje sin límites. Constructivismo*. México, D. F., México: Alfaomega.
- Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática*, 1-15. Recuperado de <file:///D:/Desktop/TESIS/para%20imprimir%20y%20leer/LA-INVENCI%C3%93N-DE-PROBLEMAS-Y-SUS-%C3%81MBITOS-DE-INVESTIGACI%C3%93N.pdf>
- Castro, E., Olmo, M., y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Recuperado de <http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/123456789/4811/Desarrollo%20del%20pensamiento%20matem%C3%A1tico%20infantil.pdf?sequence=1&isAllowed=y>



- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España (pp. 1-34). Presentado en Investigación en educación matemática XII, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado de [file:///D:/Downloads/Dialnet-ResolucionDeProblemas-2748780%20\(1\).pdf](file:///D:/Downloads/Dialnet-ResolucionDeProblemas-2748780%20(1).pdf)
- Castro, R., y Castro, R. (2015). *Enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas*. Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones Ltda.
- Cázares, J., Castro, E., y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, (10), 19-39. Recuperado de <http://revistas.usal.es/index.php/0214-3402/article/viewFile/3529/3549>
- Curotto, M. (2010). La metacognición en el aprendizaje de la matemática. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 2(2), 11-28. Recuperado de <http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/VOL%202%20NUM%202/Archivos%20Digitales/DOC%201%20RIECyT%20V2%20N2%20Nov%202010.pdf>
- De Vega, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid, España: Alianza.
- Desoete, A., Roeyers, H., y Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of learning disabilities*, 34(5), 435-447. Recuperado de https://eclass.uowm.gr/modules/document/file.php/NURED362/%CE%AC%CF%81%CE%B8%CF%81%CE%B1%20%CF%80%CF%81%CE%BF%CF%82%20%CF%80%CE%B1%CF%81%CE%BF%CF%85%CF%83%CE%AF%CE%B1%CF%83%CE%B7/Desoete_etal_2001.pdf
- Ellerani, P. (2009). Cómo se aprende: entre cognición, construcción y metacognición. *Alteridad. Revista de Educación*, 4(2), 6-13. Recuperado de <file:///D:/Downloads/939-Texto%20del%20art%C3%ADculo-2396-1-10-20160211.pdf>



- Espinoza, J., Lupiáñez, J., y Segovia, I. (2013). Ámbitos de investigación en invención de problemas matemáticos. *Revista científica*, 2, 196-200. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/6624/1/Segovia2013Ambitos.pdf>
- Espinoza, J., y Segovia, I. (2013). La invención de problemas como actividad matemática. *IV Encuentro de enseñanza de la matemática UNED*, 1-12. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2260/1/Espinoza2013_UNED.pdf
- Espinoza-González, J., Lupiáñez-Gómez, J., y Segovia-Alex, I. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Uniciencia*, 29(1), 58-81. <https://doi.org/10.15359/ru.29-1.4>
- Fernández, J., y Barbarán, J. (2012). Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de educación matemática*, (32), 29-43. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/32/archivo6_volumen32.pdf
- Fernández, J., y Barbarán, J. (2017). El desarrollo de competencias matemáticas a través de modelos de situaciones problemáticas. *Educación y Futuro*, 36, 153-174. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/318113418_El_desarrollo_de_competencias_matematicas_a_traves_de_modelos_de_situaciones_problematicas
- Flavell, J. (2000). *El desarrollo cognitivo*. (M. Pozo & J. Pozo, Trads.) (Tercera edición). Madrid: Visor.
- García, E. (2014). *Edgar Morin: el pensamiento complejo y la educación*. México, D. F., México: Trillas.
- Ghasempour, A., Bakar, M., & Jahanshahloo, G. (2013). Mathematical Problem Posing and Metacognition: A Theoretical Framework. *International Journal of Pedagogical Innovations*, 1(2), 63-68. <https://doi.org/10.12785/ijpi/010201>



- Ghasempour, Z., Bakar, M., & Jahanshahloo, G. (2012). Innovation in Teaching and Learning through Problem Posing Tasks and Metacognitive Strategies. *International Journal of Pedagogical Innovations*, 1(1), 57-66. <https://doi.org/10.12785/ijpi/010108>
- González de Requena, J. (2010). Para una reconstrucción genealógica y epistemológica del concepto de metacognición. *Revista de Psicología*, 19(1), 129-153. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=26415221007>
- González, F. (2014). Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matematicos. *Revista de Postgrado FACE-UC*, 8(14), 51-68. Recuperado de http://www.academia.edu/10384313/Procesos_cognitivos_y_metacognitivos_que_activan_los_estudiantes_universitarios_venezolanos_cuando_resuelven_problemas_maticos
- Gurat, M., & Medula, C. (2016). Metacognitive strategy knowledge use through mathematical problem solving amongst pre-service teachers. *American Journal of Educational Research*, 4(2), 170-189. Recuperado de <https://pdfs.semanticscholar.org/187c/0aa8def97f7615788e103751c8a6c60abc45.pdf>
- Gusmão, T. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica* (Tesis Doctoral). Universidad de Santiago de Compostela, España. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf
- Iriarte, A. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona Próxima*, (15), 2-21. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=85322574002>
- Iriarte, P., y Sierra, P. (2011). *Estrategias Metacognitivas en la Resolución de Problemas Matemáticos*. Montería, Colombia: Fondo editorial Universidad de Córdoba.



- Irvine, J. (2017). Problem posing in consumer mathematics classes: Not just for future mathematicians. *The Mathematics Enthusiast*, 14(1-3), 387-412. Recuperado de <https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1404&context=tme>
- Isoda, M., y Katagiri, S. (2016). *Pensamiento matemático: cómo desarrollarlo en la sala de clases*. (A. Jéldrez, Trad.) (Segunda edición). Chile.
- Kazemi, F., Reza, M., & Bayat, S. (2010). A subtle view to metacognitive aspect of mathematical problems solving. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 420-426. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.058>
- Klimenko, O. (2009). La enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas como una vía de apoyo para el aprendizaje autónomo en los niños con déficit de atención sostenida. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (27), 1-19. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/1942/194215432005.pdf>
- Klimenko, O., y Alvares, J. (2009). Aprender cómo aprendo: la enseñanza de estrategias metacognitivas. *Educación y educadores*, 12(2), 11-28. Recuperado de <file:///D:/Downloads/1483-6021-1-PB.pdf>
- Ley, M. (2014). El Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas y su efectividad en el Desarrollo de la Metacognición. *Educatio Siglo XXI*, 32(3), 211-229. <https://doi.org/10.6018/j/211051>
- Luna, R. (2003). La metacognición en una estrategia de cambio hacia una didáctica comprensiva, 1-14. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/4620/3/LunaMetacognici%C3%B3nCiaem2003.pdf>
- Marroquín, M. (2012). Los procesos metacognitivos en la enseñanza: relación conceptual y realidad en el aula. *Revista UNIMAR*, 30(59), 55-65. Recuperado de <http://www.umariana.edu.co/ojs-editorial/index.php/unimar/article/view/228>



Martí, E. (1995). Metacognición, desarrollo y aprendizaje. Dossier documental. *Infancia y Aprendizaje*, 18(72), 115-126. <https://doi.org/10.1174/02103709560561186>

Mayer, R. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science*, 26(1,2), 49-63. Recuperado de http://andrewvs.blogs.com/usu/files/cognitive_metacognitive_and_motivational_aspects.pdf

Ministerio de Educación. (2016a). *ACUERDO Nro. MINEDUC-ME-2016-00020-A* (No. MINEDUC-ME-2016-00020-A). Recuperado de <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2017/02/Acuerdo-Ministerial-Nro.-MINEDUC-ME-2016-00020-A.pdf>

Ministerio de Educación. (2016b). *Currículo de los niveles de educación obligatoria*. Ecuador. Recuperado de <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/Curriculov2.pdf>

Ministerio de Educación. (2016c). *Texto de matemática correspondiente al cuarto grado de Educación General Básica*. Ecuador. Recuperado de <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2018/04/curriculo/4TO-EGB-TEXTO-Matematica.pdf>

Ministerio de Educación. (2016d). *Texto de matemática correspondiente al sexto grado de Educación General Básica*. Ecuador. Recuperado de <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2018/04/curriculo/6TO-EGB-TEXTO-Matematica.pdf>

Ministerio de Educación. (2016e). *Texto de matemática correspondiente al tercer grado de Educación General Básica*. Ecuador. Recuperado de <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2018/04/curriculo/3ERO-EGB-TEXTO-Matematica.pdf>

Mulero, J., Segura, L., y Sepulcre, J. (2013). Percepción de nuestros estudiantes acerca de las matemáticas en la vida diaria. *XI Jornadas de redes de investigación en docencia*



- universitaria*, 1144-1157. Recuperado de <https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/44212/1/2013-XI-Jornadas-Redes-163.pdf>
- Ngan, L., Chang, A., & Peng, L. (2001). The role of metacognition in the learning of mathematics among low-achieving students. *Teaching and Learning*, 22(2), 18-30. Recuperado de <https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/279/1/TL-22-2-18.pdf>
- Olsen, M. (2016). Problemario: Resolución de problemas matemáticos. *Universidad autónoma metropolitana. Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas*, 1-32. Recuperado de http://www.cua.uam.mx/pdfs/conoce/libroselec/20Problemario_Mika_Olsen.pdf
- Organista, P. (2005). Conciencia y Metacognición. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 23, 77-89. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/799/79902307.pdf>
- Osses, S., y Jaramillo, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios pedagógicos*, 34(1), 187-197. Recuperado de <https://scielo.conicyt.cl/pdf/estped/v34n1/art11.pdf>
- Peñalva, L. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. *Política y Cultura*, (33), 135-151. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=26712504008>
- Pérez, Y., y Beltrán, C. (2011). ¿Qué es un problema en Matemática y cómo resolverlo? Algunas consideraciones preliminares. *EduSol*, 11(34), 74-89. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475748673009>
- Pifarré, M., y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 19(2), 297-308. Recuperado de <file:///D:/Downloads/21745-21669-1-PB.pdf>
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.



- Rodríguez, L., García, L., y Lozano, M. (2015). El método de proyecto para la formulación de problemas matemáticos. *Atenas*, 4(32), 100-112. Recuperado de <http://www.redalyc.org/resumen.oa?id=478047208008>
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1-102. Recuperado de http://hplengr.engr.wisc.edu/Math_Schoenfeld.pdf
- Serrano, J., y Pons, R. (2011). El Constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 13(1), 1-27. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/redie/v13n1/v13n1a1.pdf>
- Silva, C. (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. *Revista del Centro de Investigación*, 7(26), 81-91. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=34202606>
- Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 14(1), 19-28. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Edward_Silver2/publication/284047623_On_mathematical_problem_posing/links/575988b308ae9a9c954f06f1/On-mathematical-problem-posing.pdf
- Soto, C. (2003). *Metacognición: cambio conceptual y enseñanza de las ciencias*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Suriyon, A., Inprasitha, M., & Sangaroon, K. (2013). Students' metacognitive strategies in the mathematics classroom using open approach. *Psychology*, 4(7), 585-591. <https://doi.org/10.4236/psych.2013.47084>



- Tamayo, O., Zona, J., y Loaiza, Y. (2017). La metacognición como constituyente del pensamiento crítico en el aula de ciencias. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis*, 1031-1036. Recuperado de <file:///D:/Downloads/4849-13227-1-SM.pdf>
- Tesouro, M. (2006). Enseñar a aprender a pensar en los centros educativos, incluso en las actividades de evaluación. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 9(1), 1-14. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=217017165005>
- Tovar-Gálvez, J. (2008). Modelo metacognitivo como integrador de estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje de las ciencias, y su relación con las competencias. *Revista iberoamericana de educación*, 46(7), 1-9. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Julio_Tovar-Galvez/publication/28230589_Modelo_metacognitivo_como_integrador_de_estrategias_de_ensenanza_y_estrategias_de_aprendizaje_de_las_ciencias_y_su_relacion_con_las_competencias/links/0a85e5324e9dd9f0d7000000.pdf
- Vila, A., y Callejo, M. (2014). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Bogotá, Colombia: Ediciones de la U.
- Villarini, Á. (2003). Teoría y pedagogía del pensamiento crítico. *Perspectivas Psicológicas*, 3-4(4), 35-42. Recuperado de <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/pp/v3-4/v3-4a04.pdf?>