

Análisis no lineal del pandeo de columnas esbeltas para cargas estáticas

Jorge Fernando Moscoso Fernández S.¹, Juan Álvarez Ruilova², Geovanny Argudo Sánchez³

¹ Departamento de Ingeniería Civil, Grupo Estructuras y Construcciones, Universidad de Cuenca, Av. 12 de Abril y Agustín Cueva Ciudadela, Cuenca, Ecuador, 01.01.168.

² Estudiante Facultad de Ingeniería, Universidad de Cuenca, Av. 12 de Abril y Agustín Cueva Ciudadela, Cuenca, Ecuador, 01.01.168.

³ Estudiante Facultad de Ingeniería, Universidad de Cuenca, Av. 12 de Abril y Agustín Cueva Ciudadela, Cuenca, Ecuador, 01.01.168.

Autor para correspondencia: jorge.moscoso@ucuenca.edu.ec

Fecha de recepción: 21 de septiembre de 2014 - Fecha de aceptación: 20 de octubre de 2014

RESUMEN

En este documento se desarrolló un método de análisis no lineal para la comprobación de columnas rectangulares esbeltas de hormigón armado y de acero rellenas de hormigón, cuyo objetivo fue calcular la directriz geométrica y mecánica de una columna para determinar, el máximo momento que puede resistir para una carga axial dada ya sea por agotamiento o inestabilidad.

Palabras clave: Columna esbelta, pandeo, inestabilidad, agotamiento, radio de curvatura, directriz geométrica, directriz mecánica.

ABSTRACT

The design of reinforced concrete structural elements has improved over the years due to better knowledge of the behavior of its comprising materials. Columns as structural elements are very important in the structure life span. This paper develops a method for testing and analyzing nonlinear slender rectangular reinforced concrete columns and concrete filled steel columns, whose aim is to calculate the geometric and mechanical guideline of a column to determine the maximum moment which can withstand an axial load due to either depletion or instability. The method comprises an iterative process in which the neutral fiber depth and the radius of curvature. Graphics solutions (Guideline geometric and mechanical) that indicate the status of the last column were obtained. The method is versatile as it can be used to analyze columns consisting of different types of materials incorporating only stress-strain diagram; also the method is optimal as to check if a certain combination of column load resists, is not necessary to construct the interaction diagram.

Keywords: Slender column, buckling, instability, depletion, radius of curvature, guideline geometric, guideline mechanical.

1. INTRODUCCIÓN

Las columnas esbeltas, son elementos que soportan, principalmente cargas a compresión, aunque también cargas excéntricas en uno o ambos ejes de su sección transversal, presentan una falla por inestabilidad (pandeo), a una carga mucho menor que la necesaria para producir el colapso de la columna por agotamiento (Nilson, 2001). El primero que intentó resolver el problema de columnas esbeltas con carga concéntrica fue Leonhard Euler (1744), quien obtuvo la ecuación de la carga crítica de pandeo, demostrando que, mientras mayor sea la longitud de la columna, menor será su capacidad axial y, por supuesto, mayor su inestabilidad lateral (Sánchez, 2004). Este estudio fue extendido por

Timoshenko quien generalizó la ecuación de Euler al incorporar la inestabilidad de columnas sometidas a una carga excéntrica (Páez, 1986).

La capacidad de una columna esbelta está gobernada por su estado límite de pandeo, debido a que su esbeltez mecánica supera un límite (kl/r). “El problema de la comprobación de las piezas esbeltas es complejo al ser, fundamentalmente, un problema no lineal” (Agüi, 1997). Se desarrolló un método aplicado a columnas rectangulares de hormigón armado y de acero rellenas de hormigón, que presenta una solución gráfica facilitando la comprobación de columnas esbeltas. El método se basa en la construcción de la directriz geométrica y mecánica de una columna previamente diseñada; se encuentra el punto de tangencia entre las directrices ubicando su falla por inestabilidad, si no existiese punto de tangencia la columna no podrá resistir la carga axial de la demanda.

El objetivo del método es ubicar el punto de tangencia entre la directriz geométrica y mecánica de una columna esbelta, para una demanda axial conocida, asumiendo un comportamiento elástico no lineal de los materiales; y así, determinar el momento máximo por inestabilidad considerando efectos de primer y segundo orden, sin la necesidad de la construcción del diagrama de interacción de la columna.

Como este no es un método de diseño de una sección sino, un método de verificación del estado límite de inestabilidad (pandeo) en una columna esbelta, se comprobarán como ejemplos ilustrativos, una columna de hormigón armado y una de acero rellena de hormigón; teniendo como datos invariables la longitud efectiva de la columna, su sección transversal de las columnas, su armado y recubrimiento (hormigón armado), espesor del perfil (acero rellena de hormigón) y las características de cada material.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Las consideraciones básicas del método son:

- Secciones transversales planas antes y después de la aplicación de cargas permanecen planas.
- Equilibrio de fuerzas internas en cualquier sección de la columna.
- Adherencia perfecta entre materiales.
- Se desprecia el aporte del hormigón a tracción.
- Se conocen las curvas esfuerzo-deformación real de los materiales.

2.1. Directriz mecánica

La directriz mecánica (Fig. 1) es la curva que relaciona la curvatura con la excentricidad máxima admisible para una fuerza axial dada Romero (2012); se determina según las características de los materiales, dimensiones de la sección transversal y armadura longitudinal en columnas de hormigón armado.

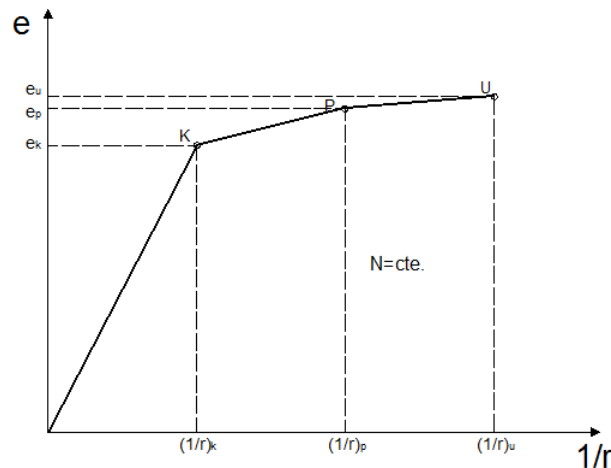


Figura 1. Directriz mecánica para N dado.

Para obtener un punto de la directriz mecánica, se impone un radio de curvatura y mediante un proceso iterativo se localiza la profundidad de fibra neutra (X_n) que produce el equilibrio entre el axial interno generado (N_i) y el axial externo de la demanda, se calcula la suma de momentos respecto al centro de la sección para determinar el momento interno (M_i) que se podrá desarrollar, se obtiene la excentricidad ($e=M_i/N_i$), obteniendo así un punto de la directriz; para obtener la directriz mecánica completa, se repite este proceso variando el radio de curvatura hasta alcanzar un radio de curvatura último, donde la sección falla por agotamiento.

Para columnas de hormigón armado debe verificarse la fuerza axial (Ec. 1) y el momento interno (Ec. 2) (Peiretti, 1980), mientras que para columnas de acero rellenas de hormigón la fuerza axial (Ec. 3) y el momento interno (Ec. 4).

$$N_{ci} = \int_0^{x_n} b\sigma_c(x)d_x + \sum_{j=1}^m A_{sj}\sigma_{sj} \quad \text{Ec. 1}$$

$$M_{ci} = \int_0^{x_n} b(x_G - x)\sigma_c(x)d_x + \sum_{j=1}^m A_{sj}\sigma_{sj}(x_G - x_j) \quad \text{Ec. 2}$$

$$N_{si} = \int_0^{x_n} b\sigma_c(x)d_x + \int_0^t 2b\sigma_s(x)d_x + \int_t^{h-t} 2t\sigma_s(x)d_x \quad \text{Ec. 3}$$

$$M_{si} = \int_0^{x_n} b(x_G - x)\sigma_c(x)d_x + \int_0^t 2b(x_G - x)\sigma_s(x)d_x + \int_t^{h-t} 2t(x_G - x)\sigma_s(x)d_x \quad \text{Ec. 4}$$

donde: m es el número de niveles de acero, y x_G el centro de gravedad de la sección.

El punto de agotamiento de la directriz mecánica, ocurre cuando cualquiera de los materiales que constituyen la columna llega a su deformación máxima (Agüi, 1997). Otro aspecto importante de la directriz mecánica son los puntos de inicio de plastificación del acero de perfil o de refuerzo, estos puntos se dan cuando el acero alcanza su deformación de fluencia (ϵ_{yd}) (Ec. 5).

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{Ec. 5}$$

2.2. Directriz geométrica

“Indica el efecto producido por las deformaciones en los esfuerzos” (Agüi, 1997). La directriz geométrica (e_{total}) (Ec. 6) parte del estudio de Timoshenko (Fig. 2) que abarca la excentricidad externa producida por los efectos de primer orden, excentricidad accidental producida por imperfecciones constructivas y la excentricidad de segundo orden debido a efectos P-delta de como se muestra en la Fig. 3 (Singer & Pytel, 1982).

$$e_{total} = (e_1 + e_a) + \frac{1}{r} \left(\frac{\lambda h}{\pi} \right)^2 \quad \text{Ec. 6}$$

- a) El efecto de primer orden (e_1) es la relación entre el momento y axial de la demanda aplicados en la columna. En caso que los momentos flectores en los extremos de la columna sean distintos en valor y/o signo, se calculó una excentricidad equivalente de primer orden (e_{1eq}) según el método de la columna modelo (Páez, 1986), mostrada en la Ec. 4.

$$e_{1eq} = 0.6e_{1a} + 0.4e_{1b} \geq 0.4e_{1a} \quad \text{Ec. 4}$$

donde: e_{1a} es la excentricidad de mayor valor absoluto, considerada con signo positivo, y e_{1b} la excentricidad de menor valor absoluto, considerada con signo positivo si los momentos en los extremos de la columna son del mismo signo y signo negativo caso contrario.

- b) La excentricidad de segundo orden (e_2) considera una distribución senoidal de la curvatura; se parte de la deducción de la flexión para vigas/columnas (Singer & Pytel, 1982) que obtiene una relación proporcional entre la curvatura de la elástica y el momento flexionante (Ec. 7).

$$\frac{Ne_2}{EI} = \frac{1}{r} \quad \text{Ec. 7}$$

Para considerar los diferentes tipos de apoyo en los extremos de la columna, se usó el método de la longitud efectiva de pandeo ($L_e = kL$) (Nilson, 2001). Se reemplazó la ecuación de la carga crítica por pandeo de Euler y la esbeltez geométrica ($\lambda = L_e/h$) (Agüi, 1997) en Ec. 7, obteniéndose la ecuación de la excentricidad de segundo orden (e_2) (Fig. 3) como se muestra en la Ec. 8.

$$e_2 = \frac{1}{\pi^2} \lambda^2 h^2 \frac{1}{r} \quad \text{Ec. 8}$$

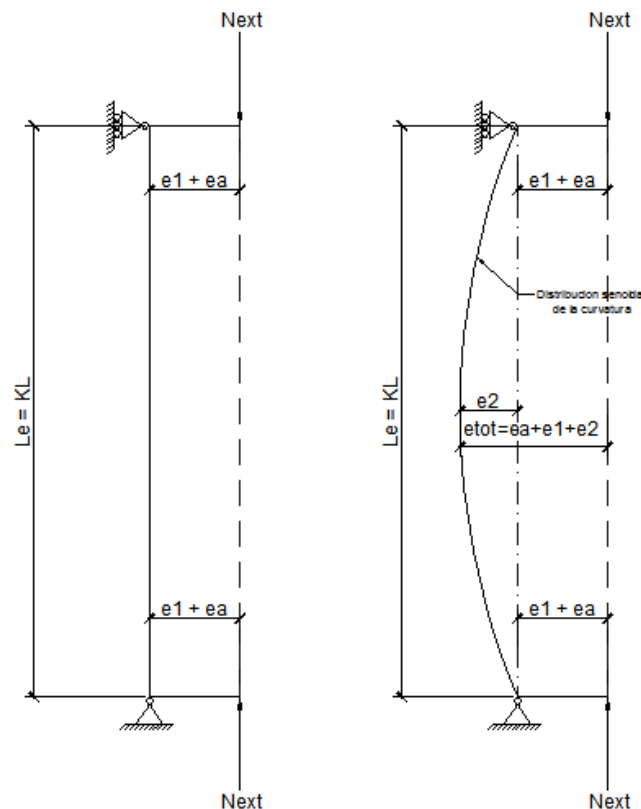


Figura 2. Excentricidad Total: Timoshenko.

- c) El efecto de primer orden (e_1) es la relación entre el momento y axial de la demanda aplicados en la columna. En caso que los momentos flectores en los extremos de la columna sean distintos en valor y/o signo, se calculó una excentricidad equivalente de primer orden (e_{1eq}) según el método de la columna modelo (P%aez, 1986), mostrada en la Ec. 4.

$$e_{1eq} = 0.6e_{1a} + 0.4e_{1b} \geq 0.4e_{1a} \quad \text{Ec. 4}$$

donde: e_{1a} es la excentricidad de mayor valor absoluto, considerada con signo positivo, y e_{1b} la excentricidad de menor valor absoluto, considerada con signo positivo si los momentos en los extremos de la columna son del mismo signo y signo negativo caso contrario.

- d) La excentricidad de segundo orden (e_2) considera una distribución senoidal de la curvatura; se parte de la deducción de la flexión para vigas/columnas (Singer & Pytel, 1982) que obtiene una relación proporcional entre la curvatura de la elástica y el momento flexionante (Ec. 7).

$$\frac{Ne_2}{EI} = \frac{1}{r} \quad \text{Ec. 7}$$

Para considerar los diferentes tipos de apoyo en los extremos de la columna, se usó el método de la longitud efectiva de pandeo ($L_e = kL$) (Nilson, 2001). Se reemplazó la ecuación de la carga crítica por pandeo de Euler y la esbeltez geométrica ($\lambda = L_e/h$) (Agüi, 1997) en Ec. 7, obteniéndose la ecuación de la excentricidad de segundo orden (e_2) (Fig. 3) como se muestra en la Ec. 8.

$$e_2 = \frac{1}{\pi^2} \lambda^2 h^2 \frac{1}{r} \quad \text{Ec. 8}$$

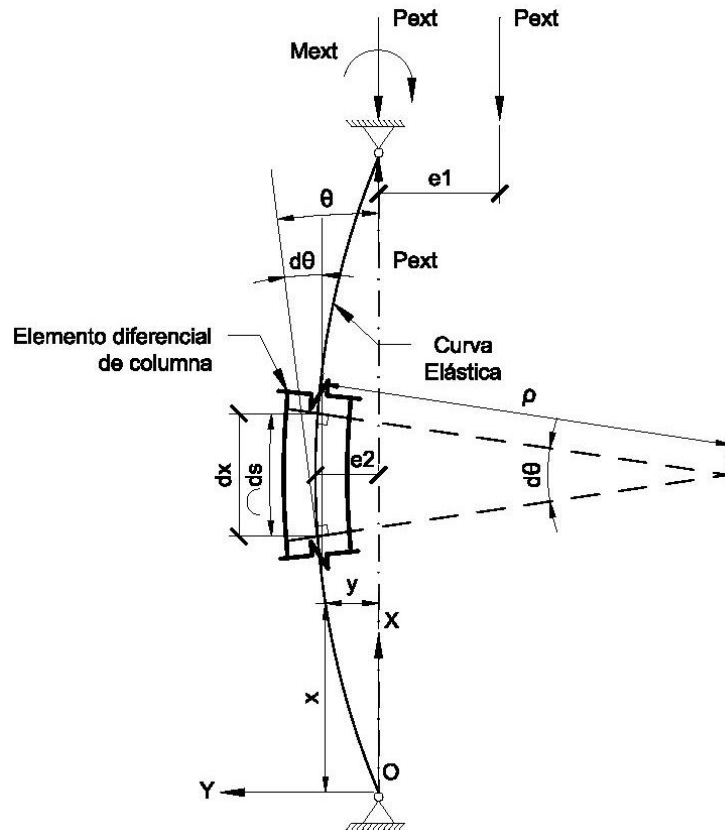


Figura 3. Deducción de excentricidades externas.

- e) La excentricidad accidental (Ec. 9) proporciona valores experimentales para incorporar al análisis imperfecciones constructivas, incertidumbre del punto de aplicación de la carga, entre otros (Bernal, 1997).

$$e_a \geq \text{Máx}(L_e/300 \quad h/20 \quad 20\text{mm}) \quad \text{Ec. 9}$$

2.3. Análisis de materiales

Hormigón

Se utilizó el diagrama esfuerzo-deformación real del hormigón parábola-rectángulo mostrado en la Figura 4, cuyo punto de transición entre parábola y rectángulo se definió en una deformación de 2‰ y el punto último de deformación (ϵ_{cu}) en 3.5‰ (T.E.C., 1992). Las ecuaciones constitutivas se muestran en la Ec. 10.

$$\begin{aligned} \sigma_1(\epsilon) &= 1000\epsilon(1-250\epsilon)\sigma_{uc} && \rightarrow 0 \leq \epsilon \leq 0.002 \\ \sigma_2(\epsilon) &= \sigma_u && \rightarrow 0.002 < \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{aligned} \quad \text{Ec. 10}$$

donde: $\sigma_{uc} = 0.85f'_c$ es la esfuerzo último del hormigón.

Para el caso del hormigón en la columna de acero rellena de hormigón se consideró el confinamiento asumiendo ϵ_{cu} será del 10% para que el acero falle antes que el hormigón.

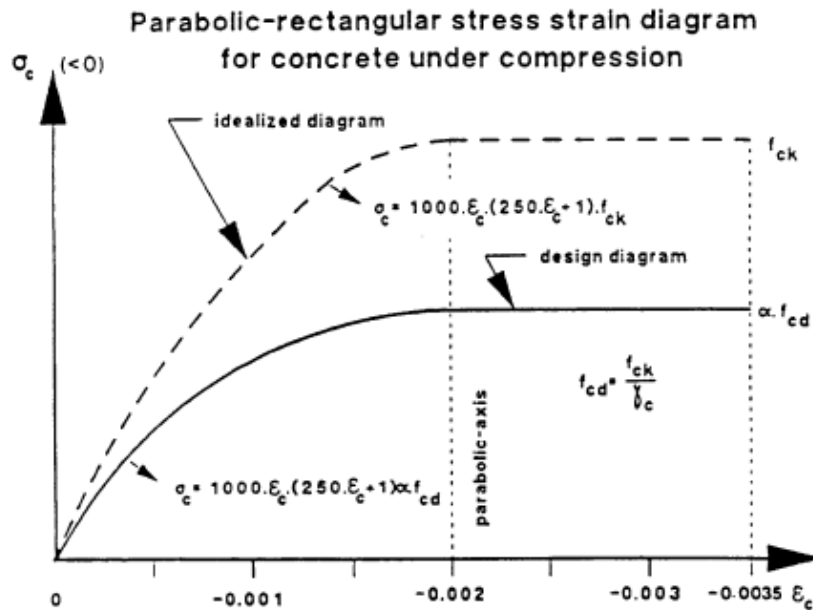


Figura 4. Curva constitutiva del hormigón parábola-rectángulo (T.E.C., 1992).

Acero

Para el acero de perfil y el acero de refuerzo se usó el diagrama esfuerzo-deformación bilineal (Park & Paulay, 1983) que se muestra en la Fig. 5, tomando en cuenta sus respectivos esfuerzos de fluencia (F_y).

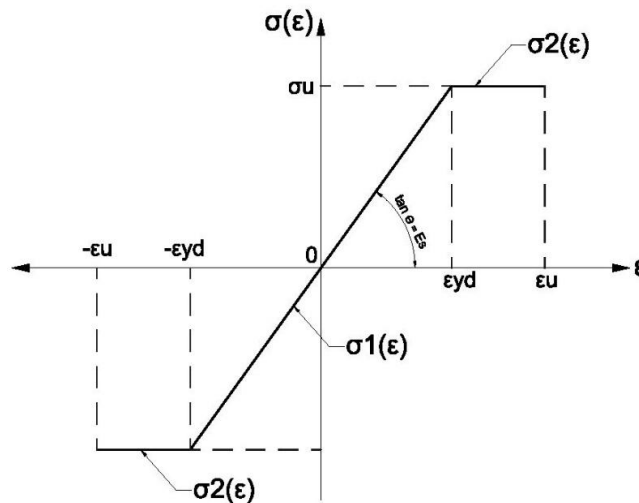


Figura 5. Curva constitutiva bilineal para el acero.

El límite de proporcionalidad elástica (ϵ_{yd}) se calcula mediante la Ec. 5, la deformación última (ϵ_u) se definió con un valor de 10% (Park & Paulay, 1983). El diagrama bilineal está constituido por dos funciones: $\sigma_1(\epsilon)$ que proporciona deformaciones en el rango elástico y $\sigma_2(\epsilon)$ que calcula deformaciones en el rango plástico, sus ecuaciones se muestran en la Ec. 11.

$$\begin{aligned} \sigma_1(\varepsilon) &= E_s \cdot \varepsilon \quad \rightarrow -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_2(\varepsilon) &= \pm \sigma_u \quad \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{yd} < \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ -\varepsilon_u \leq \varepsilon < -\varepsilon_{yd} \end{cases} \end{aligned} \quad \text{Ec. 11}$$

Para el proceso de análisis del método se dedujo una función $\varepsilon(x)$ (Figs. 6 & 7) para calcular la deformación en cualquier punto de la sección crítica de la columna, dependiendo del valor del radio de curvatura en un instante dado, la altura (x), y la profundidad de fibra neutra (x_n), las dos últimas medidas desde el extremo superior de la sección; esta función se muestra en la Ec. 12.

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{r}(x_n - x) \quad \text{Ec. 12}$$

Para una columna de hormigón armado (Fig. 6), se debe calcular las deformaciones en los puntos donde existan capas de acero de refuerzo y en el extremo superior de la sección (hormigón) para controlar que las deformaciones no excedan las deformaciones admisibles.

Para una columna de acero rellena de hormigón (Fig. 7) se deben obtener las deformaciones en los extremos del perfil (acero) y en la altura t (hormigón) para controlar que las deformaciones no excedan las deformaciones admisibles.

Las deformaciones calculadas en Ec. 12, ingresan en las curvas esfuerzo-deformación de cada material, obteniéndose así los esfuerzos $\sigma_{(e)}$ en las deformaciones $\varepsilon_{(x)}$ (Figs. 6 & 7)

Para el cálculo de la fuerza axial se determina el área bajo la curva esfuerzo-deformación y se multiplica por el ancho de la sección correspondiente (Ec. 1 & 3). Para el cálculo del momento se multiplica la fuerza axial por su brazo de palanca respecto al centro de la sección (Ec. 2 & 4).

Luego de calcular el axial y el momento que puede desarrollar la sección se obtiene la excentricidad, y por lo tanto, un punto de la directriz mecánica ($1/r, e$). Se varía el radio de curvatura y se repite el proceso para calcular toda la gráfica de la directriz mecánica. Luego de construida esta directriz se construye la directriz geométrica (Peiretti, 1980).

Una vez que se han obtenido y graficado tanto la directriz mecánica como la directriz geométrica, se encuentra el punto de tangencia entre ellas ($1/r_u, e_u$), es decir, el punto ultimo de inestabilidad (pandeo), se reemplaza este punto en la Ec. 6, conociendo que $e_u = e_{total}$ y se despeja la excentricidad de primer orden (e_1) (Ec. 13), luego se obtiene el momento máximo de la demanda que puede soportar la columna limitada por inestabilidad para la carga axial dada.

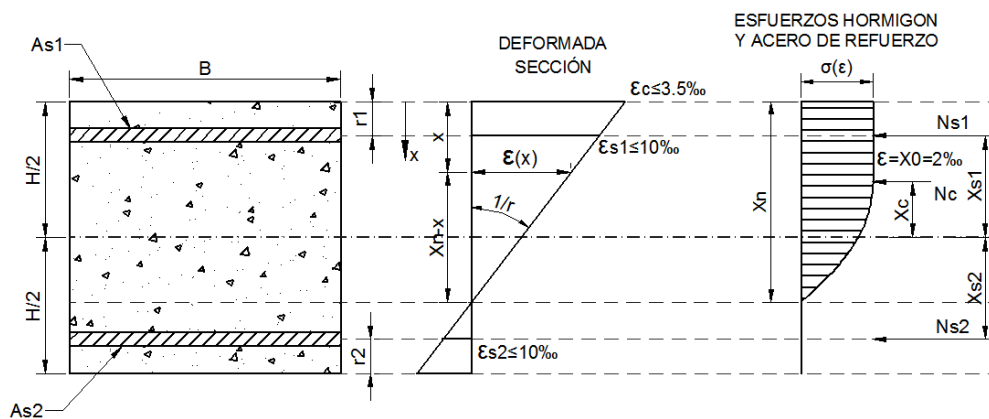


Figura 6. Diagrama esfuerzo deformación para sección de hormigón.

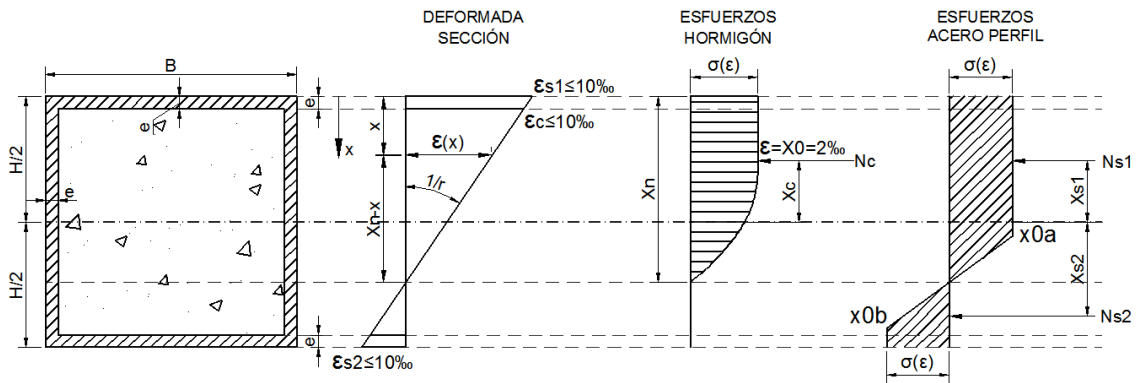


Figura 7. Diagrama esfuerzo deformación para sección de acero rellena de hormigón.

$$M_1 = N_{dato} e_1 \quad \text{Ec. 13}$$

En caso que se desee obtener un diagrama de interacción por agotamiento de la sección, se toman los puntos últimos de las directrices mecánicas generadas para distintas fuerzas axiales, y cada ordenada de estos puntos se multiplica por su fuerza axial respectiva y así se obtienen un punto del diagrama de interacción, este proceso se muestra esquemáticamente en la Fig. 8.

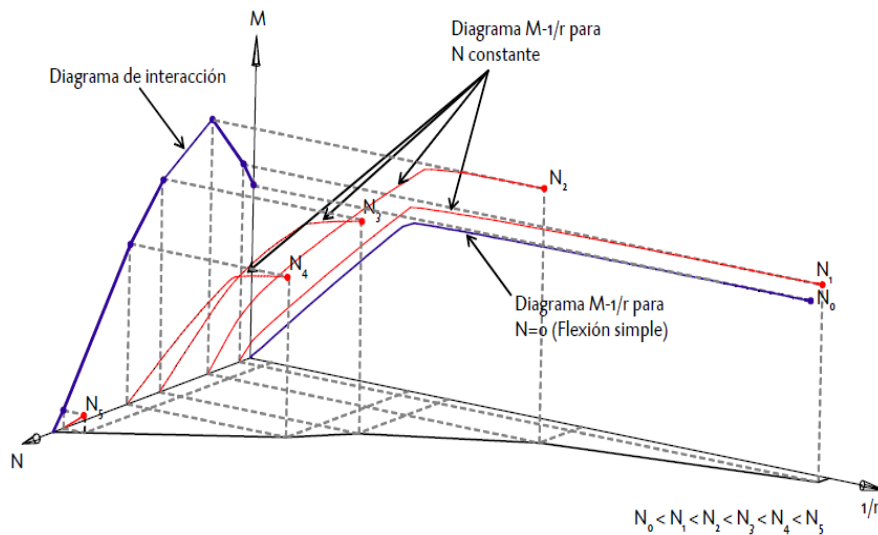


Figura 8. Diagrama de interacción esquemático por agotamiento (Park & Paulay, 1983).

Para obtener un diagrama de interacción por inestabilidad, se deben obtener los puntos de tangencia entre la directriz geométrica y mecánica para cada fuerza axial analizada, con el que se determina el momento de la demanda para cada una de las fuerzas axiales (Ec. 13) y se sigue el mismo procedimiento que en el caso del diagrama de interacción por agotamiento.

Como ejemplos, se calculara el máximo momento flector que puede ser aplicado a una columna de hormigón armado o de acero rellena de hormigón, bajo una determinada carga axial. Los datos usados para la columna de hormigón armado como para la columna de acero rellena de hormigón se muestran en la Tabla 1 y 2 respectivamente.

Tabla 1. Datos usados para la columna de hormigón armado.

DESCRIPCIÓN	SIMBOLOGÍA	VALOR
Ancho de la sección [cm]	b	40
Peralte de la sección [cm]	h	40
Recubrimiento [cm]	re	4
Longitud real de la columna [m]	L	5
Factor de longitud efectiva	k	1
Varillas de acero cara superior	-	5
Diámetro de las varillas de acero [mm]	∅	20
Varillas de acero cara inferior	-	5
Diámetro de las varillas de acero [mm]	∅	20
Resistencia característica del hormigón a los 28 días [kg/cm ²]	f'c	240
Esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo [kg/cm ²]	fy	4200
Módulo de elasticidad del hormigón [kg/cm ²]	Ec	200000
Módulo de elasticidad del acero de refuerzo [kg/cm ²]	Es	2000000
Fuerza axial de la demanda [kg]	Next	172230

Tabla 2. Datos usados para la columna de acero rellena de hormigón.

DESCRIPCIÓN	SIMBOLOGÍA	VALOR
Ancho de la sección [cm]	b	20
Peralte de la sección [cm]	h	30
Longitud real de la columna [m]	L	8.5
Factor de longitud efectiva	k	1.5
Espesor del perfil [mm]	esp	12
Resistencia característica del hormigón a los 28 días [kg/cm ²]	f'c	280
Esfuerzo de fluencia del acero GR50 [kg/cm ²]	fy	3500
Módulo de elasticidad del hormigón [kg/cm ²]	Ec	200000
Módulo de elasticidad del acero [kg/cm ²]	Es	2000000
Fuerza axial de la demanda [kg]	Next	202630

3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Aplicando el método descrito en este documento, a la columna de hormigón armado Tabla 1 y de acero rellena de hormigón Tabla 2; se obtuvieron los siguientes resultados.

3.1. Columna de hormigón armado

En la Fig. 9 se muestra el punto de tangencia entre la directriz mecánica y la directriz geométrica, el cual representa el punto de máxima excentricidad que puede soportar la columna incluida los efectos de segundo orden. En la Tabla 3 se muestran los valores máximos tanto del momento de la demanda, como del momento que puede soportar la columna incluyendo los efectos de segundo orden.

Tabla 3. Resultados columna de hormigón armado.

Carga axial (kg)	Excentricidad máxima (punto de tangencia) m	Radio de curvatura (m)	Momento máximo (kg*m)	Excentricidad 1er orden (m)	Momento máximo de la demanda (kg.m)
104040	0.3286	0.013	34187.5	0.2957	30761.6

3.2. Columna de acero rellena de hormigón

En la Fig. 10 se muestra el punto de tangencia entre la directriz mecánica y la directriz geométrica, el cual representa el punto de máxima excentricidad que puede soportar la columna incluida los efectos de segundo orden. En la Tabla 4 se muestran los valores máximos tanto del momento de la demanda, como del momento que puede soportar la columna incluyendo los efectos de segundo orden.

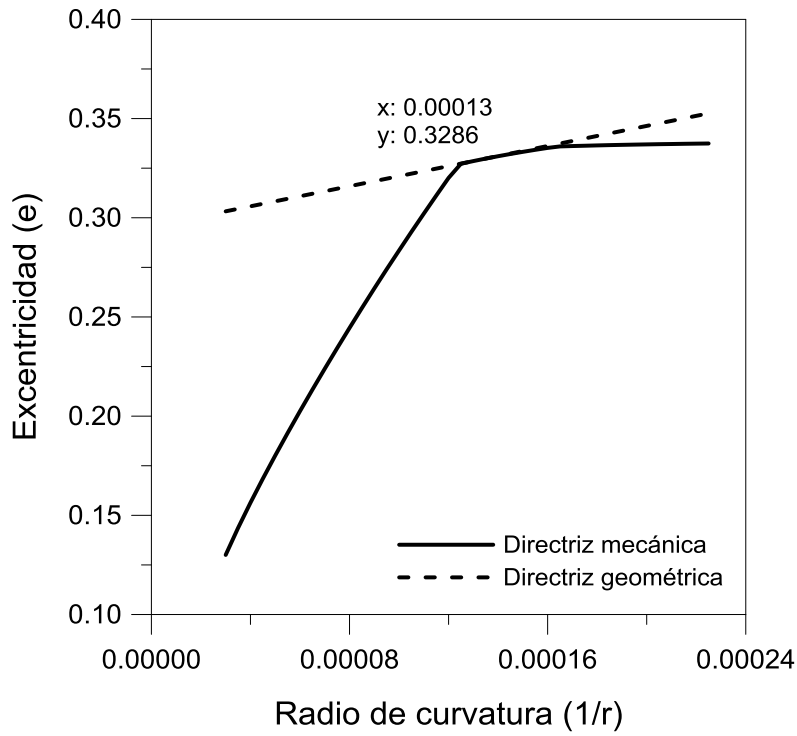


Figura 9. Directriz mecánica versus directriz geométrica con el punto de tangencia entre la directriz mecánica y directriz geométrica (columna de hormigón).

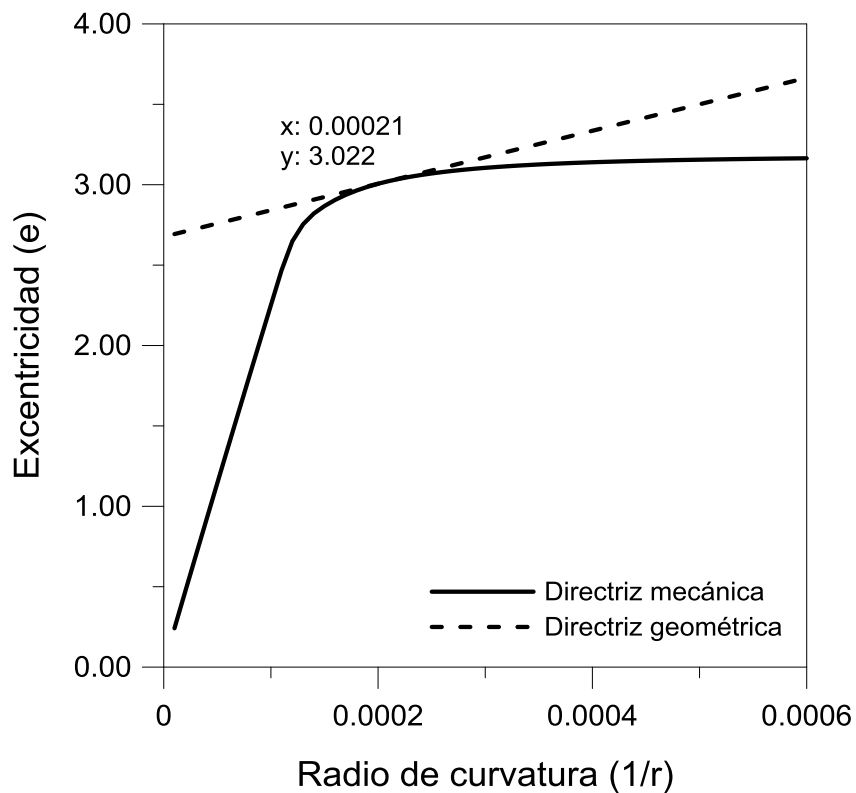


Figura 10. Directriz mecánica versus directriz geométrica con el punto de tangencia entre la directriz mecánica y directriz geométrica (columna de acero).

Tabla 4. Resultados columna de acero rellena de hormigón.

Carga axial (kg)	Excentricidad máxima (punto de tangencia) m	Radio de curvatura (m)	Momento máximo (kg*m)	Excentricidad 1er orden (m)	Momento máximo de la demanda (kg.m)
13729	3.0220	0.021	41489.0	2.7001	37069.6

Como se observa la Tabla 3 (columna de hormigón armado) y en la Tabla 4 (columna de acero rellena de hormigón), la reducción de la capacidad del momento debido a la inestabilidad, depende de:

- Radio de curvatura en el que se produce el punto de tangencia, entre la directriz geométrica y la directriz mecánica.
- Carga axial de la demanda.
- Longitud de la columna.
- Distribución de curvaturas asumida (Este documento distribución senoidal).

Los efectos de segundo orden en las columnas dependerán de la pendiente de la directriz geométrica, la que a su vez depende directamente de la esbeltez geométrica de la columna (l/h). En caso que se desee realizar un análisis más riguroso de la reducción por inestabilidad, se recomienda: disminuir la variación del radio de curvatura en cada iteración, tomar en cuenta el endurecimiento del acero en su curva-esfuerzo deformación, usar una curva esfuerzo-deformación del hormigón que incorpore los efectos del confinamiento debido al refuerzo transversal (columnas de hormigón armado) o el del perfil que lo confina (columnas de acero rellenas de hormigón).

4. CONCLUSIONES

En conclusión, el método es muy versátil, ya que, se podrían analizar columnas de distintos materiales, solamente ingresando sus curvas constitutivas (esfuerzo-deformación). El método permite observar el estado tensional de cada material en cualquier punto de la sección crítica para así poder restringir las deformaciones. El análisis de columnas esbeltas se simplifica de sobremanera por la utilización de este método, ya que, para comprobar si una columna resiste cierta combinación de carga, no es necesario construir el diagrama de interacción.

REFERENCIAS

- Nilson, A., 2001. Diseño de estructuras de concreto. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill. Disponible en <http://ingeniepedia.blogspot.com/2013/06/disen-de-estructuras-de-concreto.html>.
- Sánchez, M., 2004. *Análisis del pandeo de pilares en régimen no lineal mediante splines generalizados*. Tesis (Doctoral), E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos (UPM).
- Páez, A., 1986. *Hormigón armado*. Barcelona: Editorial Reverté S.A., 1332 pp.
- Agüi, J., 1997. *Estabilidad de pilares esbeltos de hormigón. Estado límite último de inestabilidad*. Madrid: LOEMCO, 559 pp.
- Romero, H., 2012. Efecto de las deformaciones por cortante en los diagramas momento-curvatura M-psi de secciones de concreto reforzado y sus implicaciones en la evaluación y diseño sísmico de estructuras. México D.F., Universidad Autónoma de México. Disponible en <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/455?show=full>.
- Peiretti, H., 1980. *Dimensionamiento de soportes esbeltos de sección constante de hormigón armado en estado limite ultimo de agotamiento o inestabilidad. Método de las curvaturas de referencia*. Tesis doctoral, Departamento: Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Escuela: E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos (UPM). Disponible en <http://oa.upm.es/881/>.
- Singer, F., A. Pytel, 1982. *Resistencia de materiales*. México D.F., México: Harla S.A., de C.V.

Bernal, J., 1997. *Columns*. Madrid: Nobuko.

T.E.C. f. S. (CEN), 1992. Eurocode 2: Design of concrete structures. UK: BSI. Disponible en http://eurocodes.jrc.ec.europa.eu/doc/WS_334_1/2010_Bridges_EN1992_GMancini_EBouchon.pdf.

Park, R., T. Paulay, 1986. *Estructuras de concreto reforzado*. Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Canterbury, Christchurch, Nueva Zelandia. Editorial Limusa, S.A. de C.V. México, D.F.