UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

"MÉTODOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LÍMITES Y DERIVADA"

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DE TITULO DE LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS Y FÍSICA

AUTOR: VANESSA CATHERINE GUAMÁN CUZCO

DIRECTOR: ING. FABIAN EUGENIO BRAVO GUERRERO

CUENCA-ECUADOR

2013

RESUMEN

MÉTODOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LÍMITES Y DERIVADA

La tesis trata de implementar métodos alternativos en la enseñanza de límites y derivadas que es un tema contemplado en el nuevo bachillerato general unificado (BGU) que se implementó en el Ecuador.

El proyecto consta de tres capítulos; a continuación se detalla cada uno:

El **Capítulo 1**, PRESENTACIÓN Y DIAGNÓSTICO DEL PROBLEMA, es la parte del proyecto que presenta las dificultades en la enseñanza de estos temas. Se muestran tablas y gráficos estadísticos que evidencian el problema en base a encuestas realizadas a bachilleres (2012-2013) y docentes de la materia en las diversas instituciones de nivel medio (Bachillerato) de la ciudad de Cuenca en las cuales se enseñan estos contenidos.

En el **Capítulo 2**, FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA, se describe a breves rasgos los conocimientos previos que los alumnos deben tener antes de comenzar el estudio de límites y derivadas. Además, se presenta el desarrollo teórico de la parte pedagógica que orientará el proyecto.

En el **Capítulo 3**, PROPUESTA, constan las diferentes propuestas (material didáctico, metodologías y un software como el Derive) aplicadas al tema. A su vez este capítulo se subdivide en LÍMITES, DERIVADA Y APLICACIÓN DE LA DERIVADA. Cabe destacar que la profundización de cada tema es con respecto al último año de bachillerato. Se destacan también actividades como juegos tradicionales aplicados a este tema.

Finalmente se realiza las conclusiones y recomendaciones lo cual constituye un aporte personal al presente trabajo.

PALABRAS CLAVES

- ✓ Métodos
- ✓ Función
- ✓ Limites
- ✓ Derivada
- ✓ Didácticos
- ✓ Enseñanza
- ✓ Pruebas
- ✓ Metodología

ABSTRACT

TEACHING METHODS FOR TEACHING AND DERIVED LIMITS

The thesis tries to implement alternative methods of teaching and derived limits is a topic covered in the new unified general baccalaureate (BGU) was implemented in Ecuador.

The project consists of three chapters, then detailed each:

Chapter 1, PRESENTATION AND DIAGNOSIS OF THE PROBLEM, is part of the project presented the difficulties in teaching these subjects. Displaying statistical tables and graphs that show the problem based on surveys of graduates (2012-2013) and teachers of the subject in the various mid-level institutions (high schools) in the city of Cuenca in which these contents are taught.

In Chapter 2 THEORETICAL FOUNDATIONS, brief characteristics described prior knowledge students should have before beginning the study of limits and derivatives. It also presents the theoretical development of pedagogy to guide the project.

In Chapter 3, PROPOSAL, comprise the various proposals (teaching materials, methodologies and software such as Derive) applied to it. In turn, this chapter is divided into LIMITS, DERIVATIVE AND APPLICATION OF THE DERIVATIVE. Note that the depth of each subject is compared to the last year of high school. It also highlights traditional activities such as games applied to this topic.

Finally, the conclusions and recommendations made which is a personal contribution to this work.

KEYWORDS

- Methods
- Function
- Limits
- Derivative
- Teaching
- Teaching
- Testing
- Methodology

ÍNDICE

CAPITULO III

ÍNDICE DE FIGURAS

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Fundada en 1867

Yo, Vanessa Catherine Guamán Cuzco, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de mi exclusiva responsabilidad.

Vanessa Catherine Guamán Cuzco
010600115-9

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Fundada en 1867

Yo, Vanessa Catherine Guamán Cuzco, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Licenciado en Ciencias de la Educación, Especialidad de Matemáticas y Física. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Vanessa Catherine Guamán Cuzco
010600115-9

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer al Ing. Fabián Bravo por su guía en el presente trabajo. Mi gratitud infinita al Dr. Francisco Durán por su inmensa paciencia y apoyo hasta la finalización del presente proyecto pero sobre todo por su calidez humana con la que nos enseñó que un profesor también es un amigo. De una manera especial quedo eternamente agradecida con Paúl Fárez que me ayudó significativamente en la realización de esta tesis.

DEDICATORIA

Este proyecto está dedicado especialmente a Dios que siempre ha guiado mis pasos. Con amor para mis padres Nancy y Luis, mi hermano Cristián, mis abuelos Anita y Ángel, que fueron y son lo más significativo en mi vida. Y finalmente con todo mi corazón dedico este trabajo a Paúl Esteban Fárez Vinueza y Rafaela, porque hicieron que mi vida tenga sentido, son mi todo, los amo.

INTRODUCCIÓN

Las apreciaciones sobre la calidad de la educación están sujetas a los intereses de cada persona. Desde un alumno que tiene diferentes aspiraciones y sueños, un docente que intenta impartir una clase de manera que se consiga un mayor aprendizaje, y las diferentes instituciones que buscan personas capacitadas que puedan realizar bien su labor.

Por lo anterior mencionado, los diferentes enfoques que se pudieran dar para asegurar la calidad de la educación difícilmente pueden cumplir con las expectativas de todos. Además, existe una gran diferencia entre instituciones públicas y privadas, ya que en las privadas generalmente se debe cumplir con los intereses de los alumnos, ocasionando así, que el alumno vea más fácil aprobar sus estudios.

Entre el dilema de considerar al estudiante como un ser indispensable para un desarrollo de la sociedad o como un cliente, todos los establecimientos cuentan con un objetivo en común, formar personas capaces de desarrollarse intelectualmente en distintos ámbitos. Con el bachillerato general unificado que se implementó en el Ecuador, se propone que todos los planteles (particulares o fiscales) formen a los estudiantes de tal modo que exista unanimidad en los contenidos, intentando de esta manera, que los aspirantes a las distintas universidades tengan las mismas oportunidades para una u otra especialización.

Sin duda alguna, entre las materias bases de este bachillerato se encuentran las Matemáticas, que por su esencia misma (estructura lógica, demostraciones, símbolos y herramienta de todas las ciencias) facilita al desarrollo del pensamiento y posibilita a los estudiantes a integrarse a un grupo de trabajo interdisciplinario.

La Matemática es el tronco común, ya que comprende varias ramas a la vez. Una de ellas es el Cálculo que tiene gran aplicación en las diversas carreras universitarias. Por ello, en el último año de bachillerato, es un contenido de gran importancia.

El Cálculo Infinitesimal es utilizado para resolver problemas aplicados a distintos campos de estudio como lo son la Economía, la Física, las Ciencias Sociales, la Salud, etc. En el último año del Bachillerato consta el tema de límites (definición y teoremas) y la derivada (conceptualización, reglas y problemas de maximización y minimización), que es la base del Cálculo Diferencial. Al ser esta una materia abstracta, presenta dificultad en la comprensión, aprendizaje, análisis y aplicación. Ante estos limitantes, es imprescindible que se creen nuevas alternativas de enseñanza para conseguir un mayor aprendizaje.

Por otra parte los centros educativos carecen de material didáctico, impidiendo a los profesores tener una clase creativa. Los docentes encuentran un reto al explicar los contenidos, ya que muchas de las veces no tienen material didáctico y recurren solo a la clase magistral. Las limitaciones en la enseñanza de esta materia son muchas y casi no existe información o métodos didácticos concretos para impartir una clase porque la mayoría solo se ha quedado en teoría. Frente a esto, los estudiantes sienten temor a esta materia, ya que carecen de comprensión. Por ello es necesario que el profesor cree, invente y desmenuce la materia a un punto comprensible, vivencial y de fácil aplicación.

Para mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje, además de dominar los contenidos, es indispensable que el profesor tenga varias opciones al momento de impartir una clase, sobre todo cuando se trata de una materia poco entendible.

El objetivo primordial de la tesis es crear nuevos instrumentos para una mejor compresión en el tema de límites y derivada, inventar diversas opciones para impartir las clases y de esta manera intentar erradicar el desinterés y temor que tienen los alumnos hacia la materia. Cabe recalcar que ningún método es eficaz al momento de la enseñanza, es por ello que el docente debe tener variedad en recursos didácticos para las diferentes capacidades de aprendizaje de sus alumnos.

Al ser el Cálculo muy extenso, los conceptos que se puedan impartir en el ámbito colegial son limitados, por ello, solo se consideraron los contenidos básicos.

El **Capítulo 1**, PRESENTACIÓN Y DIAGNÓSTICO DEL PROBLEMA, es la primera parte del proyecto que presenta las dificultades en la enseñanza de estos temas. Se muestran tablas y gráficos estadísticos que evidencian el problema en base a encuestas realizadas a bachilleres y docentes de la materia en las diversas instituciones de nivel medio (Bachillerato) de la ciudad de Cuenca en las cuales se enseñan estos contenidos.

En el **Capítulo 2**, FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA, se describe a breves rasgos los conocimientos previos que los alumnos deben tener antes de comenzar el estudio de límites y derivadas. Además, se presenta el desarrollo teórico de la parte pedagógica que orientará el proyecto. Para ello, se utilizará la bibliografía adecuada, además de algunas páginas web.

En el **Capítulo 3**, PROPUESTA, constan las diferentes propuestas (material didáctico, metodologías y un software como el Derive) aplicadas al tema. A su vez este capítulo se subdivide en LÍMITES, DERIVADA Y APLICACIÓN DE LA DERIVADA. Cabe destacar que la profundización de cada tema es con respecto al último año de bachillerato.

Finalmente se realiza las conclusiones y recomendaciones lo cual constituye un aporte personal al presente trabajo.

CAPITULO I

1. PRESENTACIÓN Y DIAGNÓSTICO DEL PROBLEMA

1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

Es indiscutible que a través de la Historia, se ha pensado que la Matemática es una de las materias más complicadas y confusas. En base a este prejuicio, los estudiantes son poco participativos en las clases y peor aun cuando esta tiene un grado mayor de complejidad. Es importante que el docente domine los contenidos y sepa enseñar, sin embargo, esto no garantiza que se alcance un aprendizaje significativo. Por otra parte, la mayoría de centros educativos carecen de material didáctico, impidiendo a los profesores tener una clase creativa.

La Matemática tiene diversas ramas, una de ellas es el Cálculo Infinitesimal. En el último año del Bachillerato consta el tema de límites (definición y teoremas) y la derivada (conceptualización, reglas y problemas de maximización y minimización), que es la base del Cálculo Diferencial. Al ser esta una materia abstracta, presenta dificultad en la enseñanza-aprendizaje.

Hoy en día, con las oportunidades que un docente tiene para ingresar al magisterio fiscal o simplemente por conseguir un empleo, se debe presentar una clase expositiva y acompañarla de un material didáctico que pueda despejar las dudas que existan durante la clase. Además, el material didáctico en la práctica, ayuda a entender conceptos abstractos y más aún cuando se trata de límites y derivada.

Sin embargo, los softwares o pocos materiales que se encuentran para la enseñanza de este tema, tienen un costo significativo (elevado) y se los pueden encontrar vía internet. Por ello es necesario crear una guía en la que se encuentre un grupo de alternativas didácticas de fácil construcción y que pueda estar al alcance de cualquier profesor o institución.

Para constatar que existe una carencia de métodos didácticos en el tema de límites y derivada, fue necesario realizar una encuesta a los docentes y estudiantes de las instituciones en donde se enseñan estos contenidos y se pueda confirmar que el problema sí existe en la ciudad de Cuenca.

1.2. DELIMITACIÓN DEL CAMPO DE INVESTIGACIÓN

En la actualidad, el gobierno nacional ha propuesto el bachillerato general unificado en todas las instituciones del Ecuador, sin embargo no existe aún una promoción de mencionado bachillerato. Por ello, el total de instituciones que enseñan estos contenidos son 8, así que el presente proyecto se ha centrado en los planteles de nivel medio específicamente en los terceros de bachillerato del Azuay cantón Cuenca y se ha encuestado a docentes que enseñan estos temas, y también a bachilleres de los mencionados colegios. Se ha encuestado a un total 28 docentes, lo que representa el 100% de la investigación. En cuanto a bachilleres del año 2011-2012, son un total de 994 y se ha tomado una muestra de 300 bachilleres que representan el 30.18%.

La muestra de la población está basada en la siguiente fórmula estadística:

$$n = \frac{Z^2pqN}{Ne^2 + Z^2pq}$$

Cuyos valores son:

$\boldsymbol{p} = 0.5$ Probabilidad a favor.

$\boldsymbol{q} = 0.5$ Probabilidad en contra.

$\boldsymbol{NC} = 95\%$ Que significa un $\boldsymbol{Z} = 1.96$ Valor obtenido en niveles de confianza.

$\boldsymbol{e} = 0.05$ Limite aceptable del valor muestral que puede variar del $1\%(0.01)$ al $9\%\ (0.09)$; se ha tomado el $5\%\ (0.05)$

$\boldsymbol{N} = 994$ Bachilleres. Total de la Población.

Por lo tanto, el tamaño de la muestra es:

$$n = 277{,}07$$

Se ha logrado encuestar un total de 300 bachilleres. Obteniendo un error de 4.59%

1.3. CARACTERÍSTICAS DE LAS ENCUESTAS

En la encuesta realizada a los *docentes* ***(Ver Anexo 1)***, se tomaron en cuenta algunos aspectos como:

a) El nombre es opcional.
b) Se ha presentado 3 opciones de respuesta. (SI, NO, A VECES)
c) Solo se han encuestado a profesores que enseñan esta materia en las 8 instituciones, es decir, profesores activos, que necesitan constantemente renovación en sus estrategias metodológicas y material didáctico.
d) Preguntas que puedan evidenciar la falta de material didáctico.

En la encuesta realizada a *bachilleres* ***(Ver Anexo 2)***, se tomaron en cuenta algunos aspectos como:

a) El nombre es opcional.
b) Se ha presentado 3 opciones de respuesta. (SI, NO, A VECES)
c) Se han encuestado a bachilleres de la promoción del año 2011-2012 solo de los mencionados colegios ya que son las instituciones que por el momento estudian el tema de límites, derivada y aplicación de la derivada.
d) Preguntas que puedan evidenciar un problema en el aprendizaje del tema mencionado.

1.4. RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS.

Las encuestas realizadas tanto a bachilleres como a profesores constaron de 7 preguntas; los resultados se exponen a continuación:

Encuesta a Docentes

Pregunta 1: *En su experiencia como Docente de Matemáticas, ¿Cree usted que esta materia es compleja al momento de explicar a los estudiantes?*

Objetivo: Con esta pregunta se conoce si los profesores han tenido dificultades al explicar una clase de Matemática.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de profesores	Porcentaje
SI	16	57.14%
NO	3	10.71%
A VECES	9	32.15%
Total	***28***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 1 un diagrama de barras que resume la información anterior detallada:

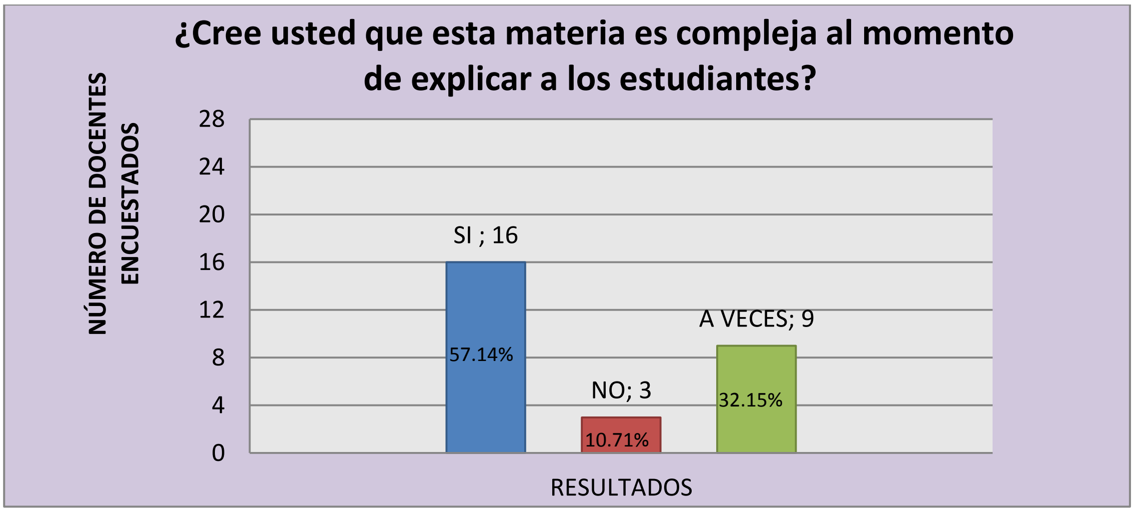


Figura 1

Análisis

Como podemos ver, el 57.14% respondió que SÍ, es decir que la mayoría de docentes considera que la matemática es compleja de explicar a los estudiantes.

Pregunta 2: *A medida que avanzan los contenidos de Matemática, ¿Usted cree que es más complicado explicar su clase?*

Objetivo: Con esta pregunta se conoce el grado de dificultad que existe en la enseñanza de temas cada vez más abstractos de la Matemática.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de profesores	Porcentaje
SI	17	60.71%
NO	2	7.15%
A VECES	9	32.14%
Total	***28***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 2 un diagrama de barras que resume la información anterior detallada:

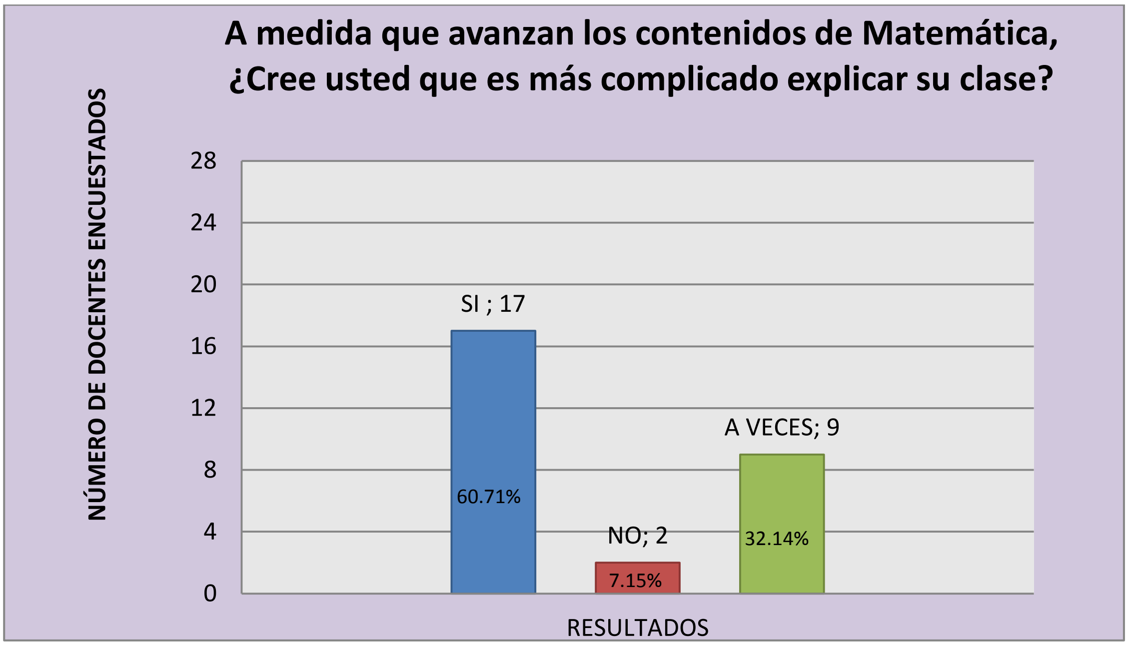


Figura 2

Análisis

Como se muestra, el 60.71% responde que SÍ es complejo explicar su clase a medida que los temas son más abstractos.

<u>Pregunta 3:</u> *A medida que transcurren los años de bachillerato ¿Considera usted apropiado usar material didáctico que pueda aclarar su clase frente a los estudiantes?*

Objetivo: Con esta pregunta se analiza la necesidad de material didáctico en los diferentes temas de todos los tres años de bachillerato.

<u>Resultados:</u>

Respuestas	Cantidad de profesores	Porcentaje
SI	21	75%
NO	2	7.14%
A VECES	5	17.86%
Total	***28***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 3 un diagrama de barras que resume la información anterior detallada:

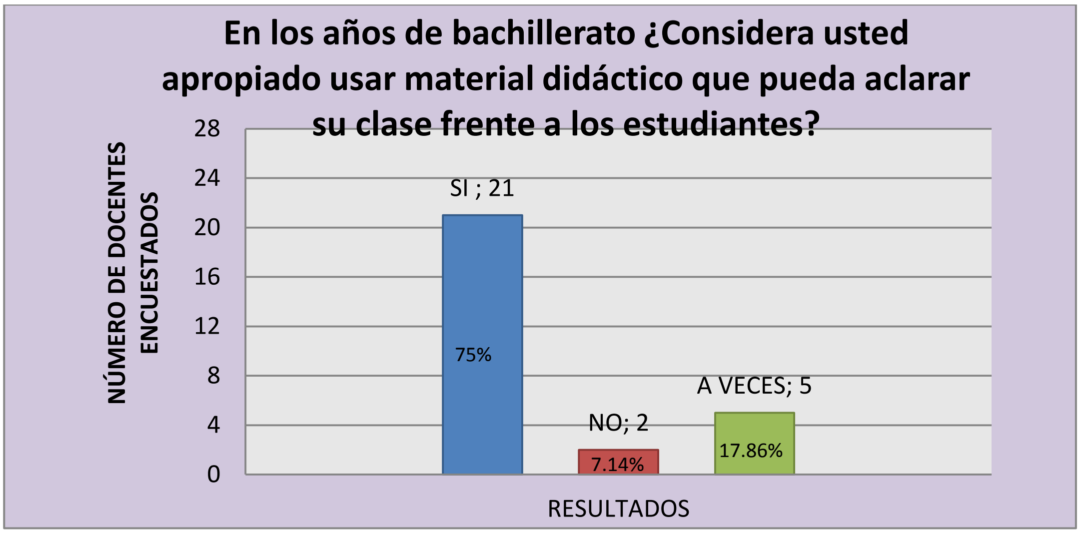


Figura 3

Análisis

El 75% de los docentes considera que en los años de bachillerato debe existir material didáctico, pues los temas son abstractos.

Pregunta 4: *En cuánto a la Matemática del último año de Bachillerato ¿Usted ha encontrado material didáctico en los diferentes temas?*

Objetivo: Con esta pregunta se analiza la falta de material didáctico en todos los temas de Matemática del último año de Bachillerato.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de profesores	Porcentaje
SI	5	17.86%
NO	12	42.85%
A VECES	11	39.29%
Total	***28***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 4 un diagrama de barras que resume la información anterior detallada:

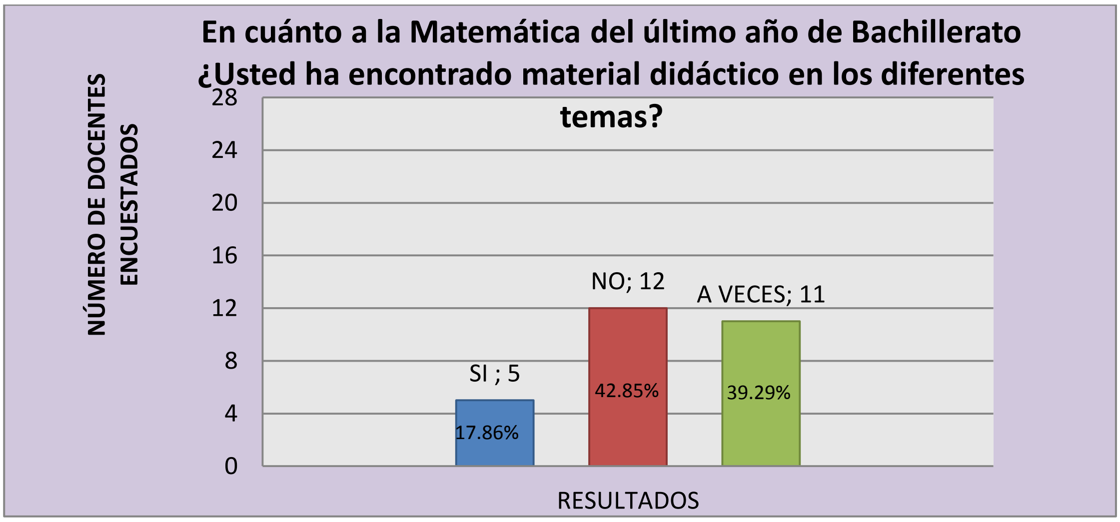


Figura 4

Análisis

En esta pregunta existen resultados equitativos entre el NO (42.85%) y el A VECES (39.29%), lo que supone una falta de material en algunos temas.

Pregunta 5: *Si su respuesta a la pregunta número 4 fue “SI” o “A VECES”, este material ¿Tuvo algún costo significativo?*

Objetivo: En esta parte de la encuesta, se analiza si el material didáctico encontrado tuvo algún costo elevado.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de profesores	Porcentaje
SI	10	62.5%
NO	6	37.5%
A VECES	0	0%
Total	***16***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 5 un diagrama de barras que resume la información anterior detallada:

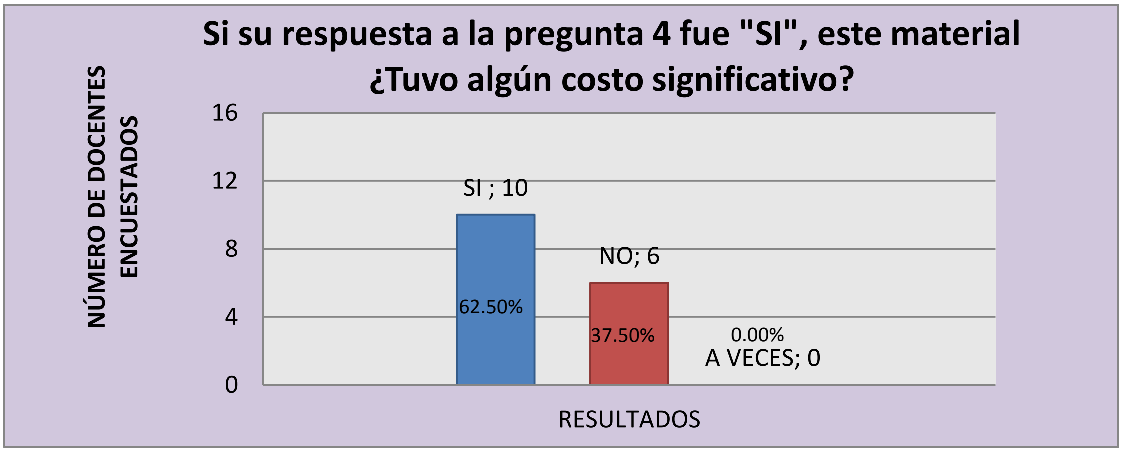


Figura 5

Análisis

Las personas que contestaron SI y A VECES fueron un total de 16, de las cuales el 62.5% menciona que el material didáctico que encontró tuvo algún costo.

Pregunta 6: *En el último año de bachillerato, consta el tema de límites y derivada. En la unidad educativa en donde trabaja, ¿Le han facilitado a usted material didáctico específico para estos temas?*

Objetivo: Con esta pregunta se evidencia la poca inversión en material didáctico por parte de las instituciones en este tema.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de profesores	Porcentaje
SI	0	0%
NO	25	89.29%
A VECES	3	10.71%
Total	***28***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 6 un diagrama de barras que resume la información anterior detallada:

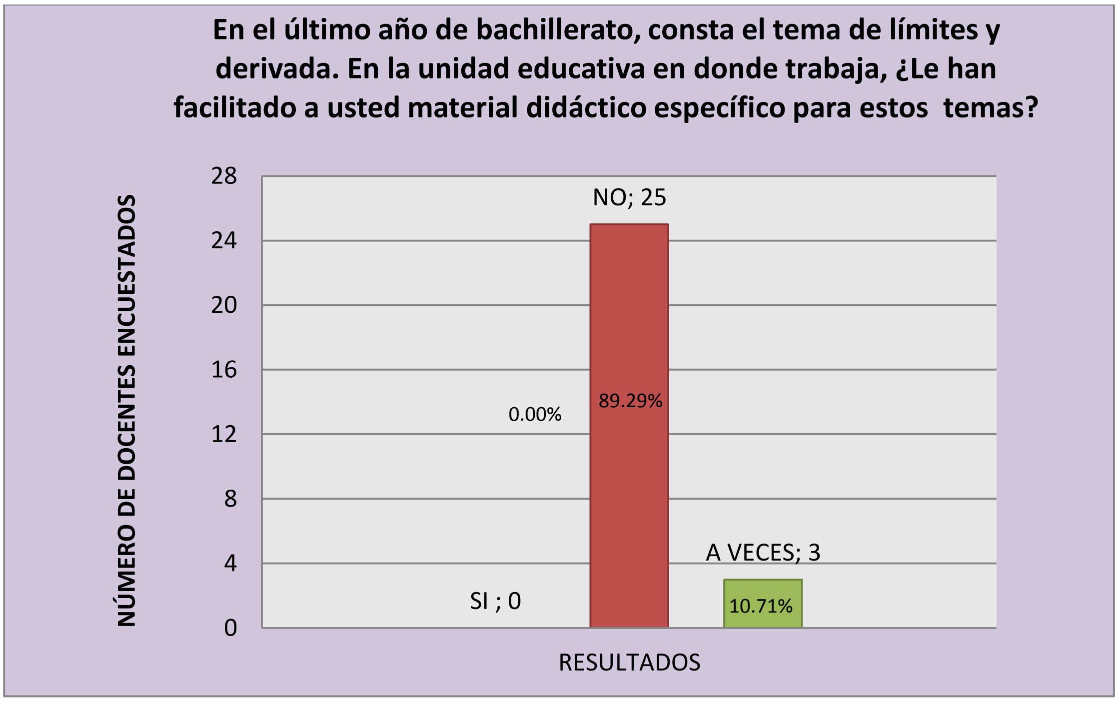


Figura 6

Análisis

En esta pregunta, la mayor respuesta es NO con el 89.29%, es decir, la mayoría de instituciones no cuenta con un material didáctico para este tema.

<u>Pregunta 7:</u> *¿Considera usted importante que en el tema de límites y derivada deba existir material didáctico?*

Objetivo: Esta es la pregunta más importante de la encuesta y con ella se analiza los criterios de los docentes frente al tema de la investigación y desde la experiencia de cada uno.

<u>Resultados:</u>

Respuestas	Cantidad de profesores	Porcentaje
SI	25	89.29%
NO	1	3.57%
A VECES	2	7.14%
Total	***28***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 7 un diagrama de barras que resume la información anterior detallada:

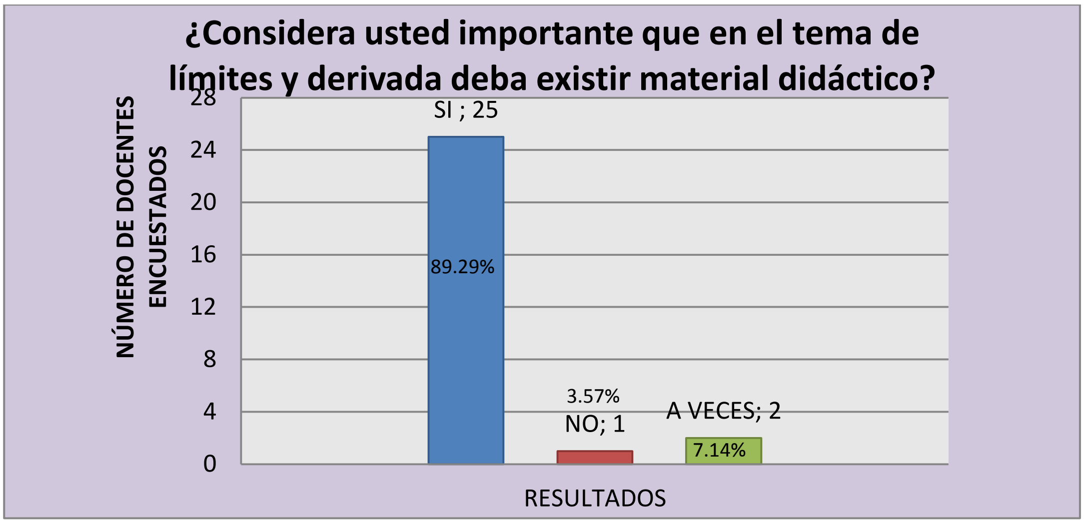


Figura 7

Análisis

En esta pregunta que es la más importante del presente proyecto, 25 docentes que representan un 89.29% contestaron que sí es necesario un material didáctico para aclarecer las dudas que podrían presentarse en el tema de límites y derivadas.

Encuesta a Bachilleres

Pregunta 1: *¿Usted cree que las Matemáticas son muy complejas de entender?*

Objetivo: Con esta pregunta se conoce si los bachilleres han tenido dificultades al comprender una clase de Matemática.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de Bachilleres	Porcentaje
SI	163	54.33%
NO	92	30.67%
A VECES	45	15%
Total	***300***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 8 un diagrama circular que resume la información anterior detallada:

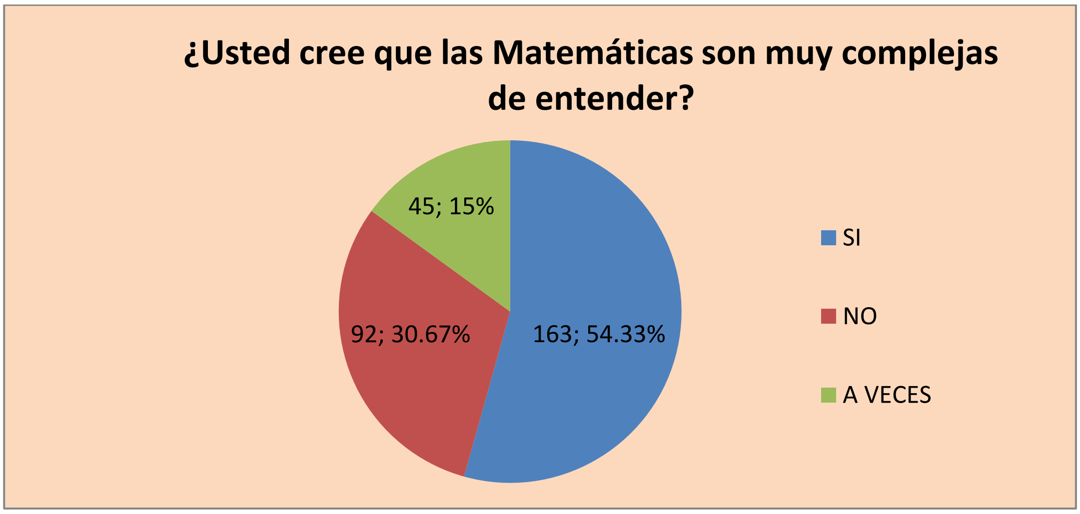


Figura 8

Análisis

Como podemos ver, el 54.33% respondió que SÍ, es decir, que la mayoría de bachilleres tuvo problemas al momento de entender esta materia.

Pregunta 2: *¿Considera que a medida que avanzan los contenidos de Matemática es más complejo de entender?*

Objetivo: Con esta pregunta se conoce si los bachilleres han tenido dificultades al comprender una clase de Matemática, a medida que avanzan los años del colegio.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de Bachilleres	Porcentaje
SI	187	62.33%
NO	38	12.67%
A VECES	75	25%
Total	***300***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 9 un diagrama circular que resume la información anterior detallada:

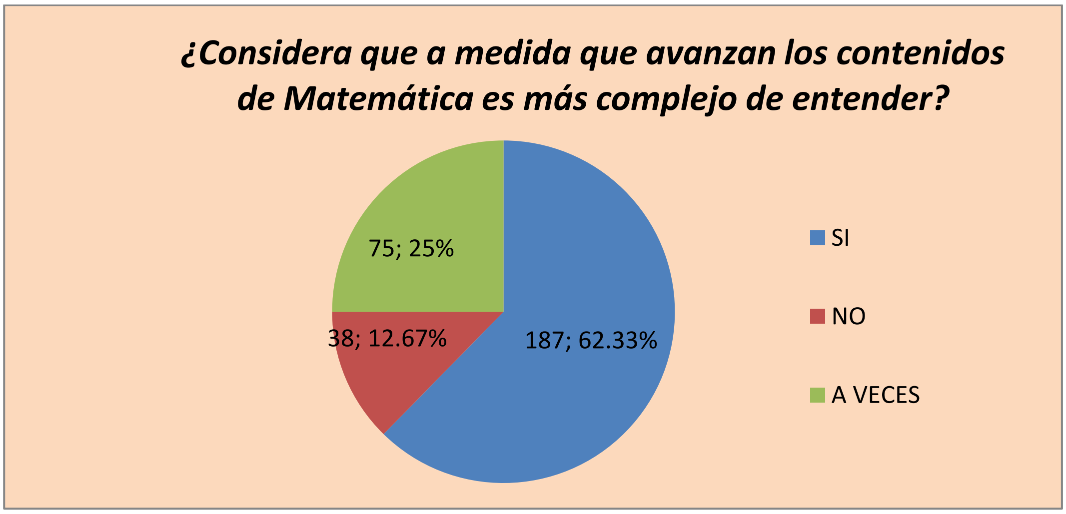


Figura 9

Análisis

Como podemos ver, el 62.33% (187 bachilleres) respondió que SÍ, es decir que la mayoría de Bachilleres considera que la Matemática es más compleja de entender a medida que pasan los años, pues se va haciendo cada vez más abstracta.

Pregunta 3: *En su experiencia de estudiante, ¿Sus profesores de matemática del último año de bachillerato utilizaban material didáctico para explicar mejor su clase?*

Objetivo: Con esta pregunta se puede evidenciar la falta de material didáctico en todos los temas del último año de bachillerato.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de Bachilleres	Porcentaje
SI	35	11.67%
NO	251	83.67%
A VECES	14	4.66%
Total	***300***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 10 un diagrama circular que resume la información anterior detallada:

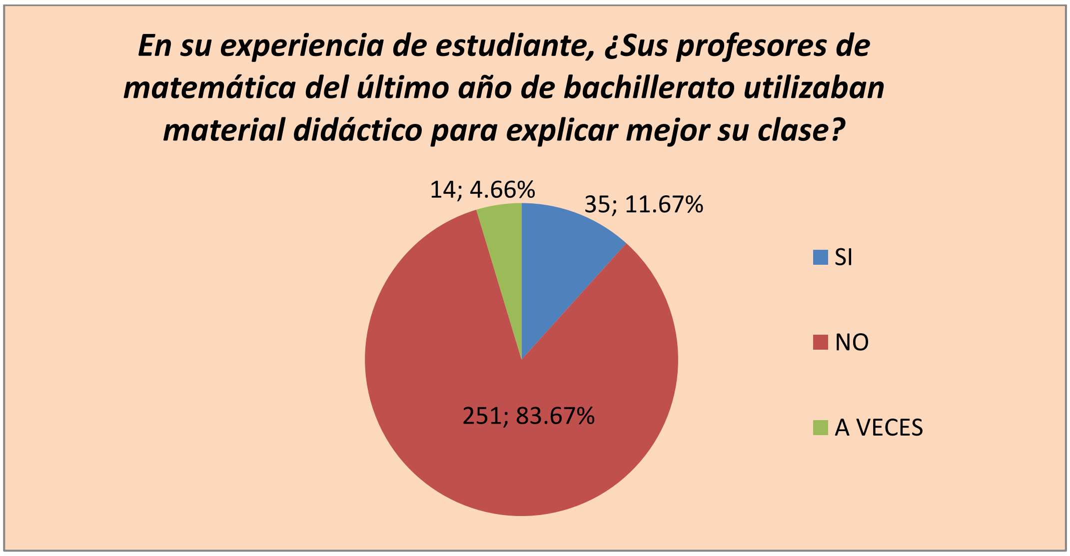


Figura 10

Análisis

La respuesta con mayor cantidad de personas es el NO y equivale al 83.67% (251 personas), es decir que la mayoría de bachilleres mencionan que sus profesores no utilizaban material didáctico al momento de impartir una clase.

Pregunta 4: *Si sus profesores le hubieran dado una guía en donde explicaba cómo construir material didáctico para ayudar a entender la clase. ¿Lo hubiera construido?*

Objetivo: En esta pregunta se evidencia el interés por los alumnos al momento de aclarecer sus dudas en una clase de Matemáticas.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de Bachilleres	Porcentaje
SI	212	70.67%
NO	78	26%
A VECES	10	3.33%
Total	***300***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 11 un diagrama circular que resume la información anterior detallada:

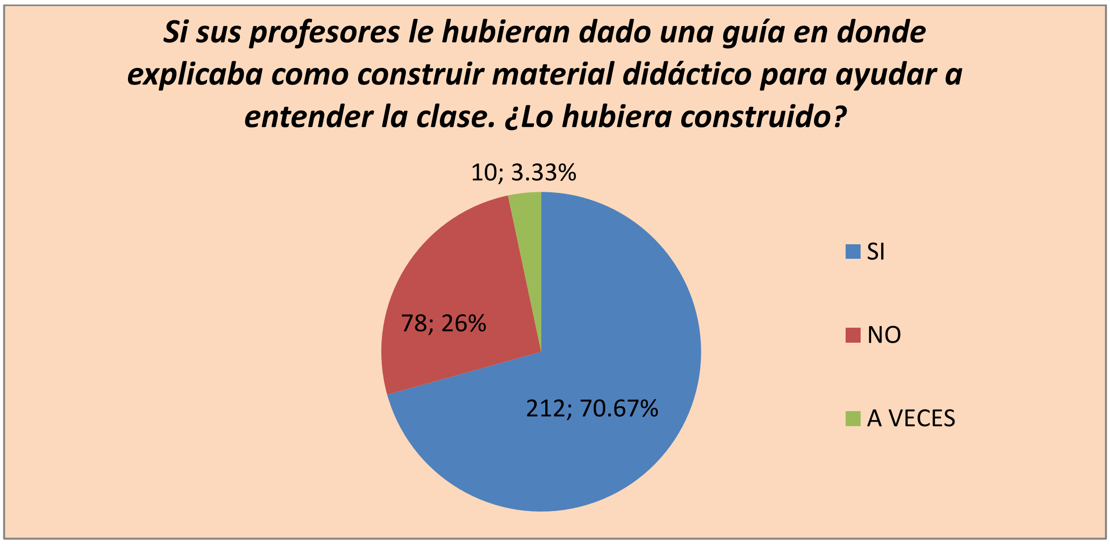


Figura 11

Análisis

Como podemos ver, el 70.67% respondió que SÍ, es decir 212 bachilleres considera que es importante aclarar las dudas que se presentaron en la clase mediante un material didáctico.

Pregunta 5: *¿Cree usted que en la matemática del último año de bachillerato deba existir material didáctico que ayude a mejorar la enseñanza-aprendizaje?*

Objetivo: En esta parte de la encuesta se analiza si los bachilleres consideran que los diversos temas del último año de bachillerato deben tener una material que ayude al aprendizaje.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de Bachilleres	Porcentaje
SI	181	60.33%
NO	36	12%
A VECES	83	27.67%
Total	***300***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 12 un diagrama circular que resume la información anterior detallada:

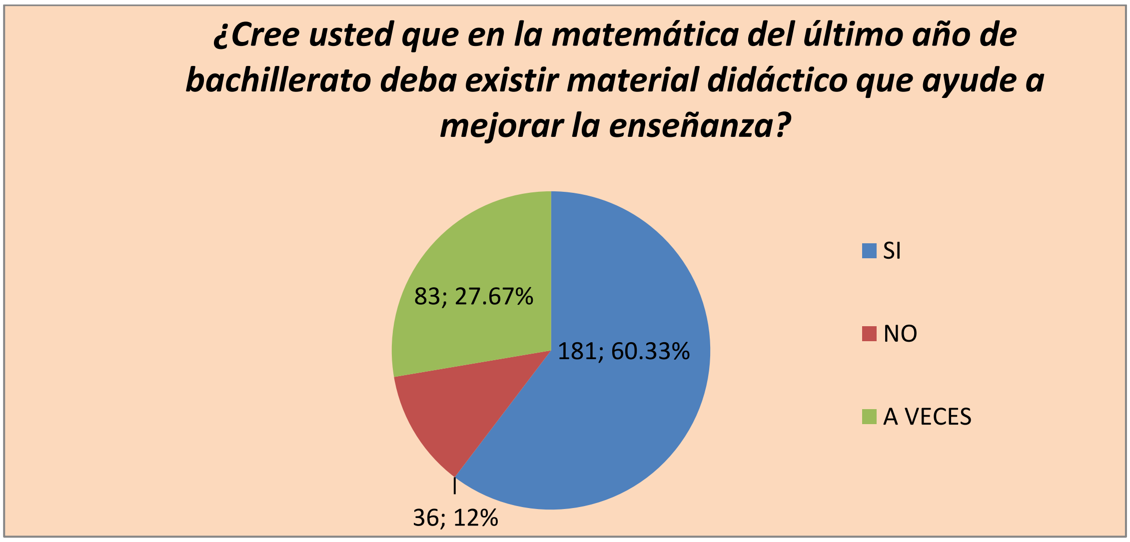


Figura 12

Análisis

En esta pregunta, el 60.33% respondió que SÍ, es decir que 163 bachilleres considera que en el último año de bachillerato debe existir material didáctico en los diferentes temas.

<u>Pregunta 6:</u> *En el tercero de bachillerato existe el tema de límites y derivada. ¿Tuvo dificultades al momento de entender estos temas?*

Objetivo: Con esta pregunta se pretende analizar si hubo un problema de aprendizaje en el tema de límites y derivada.

<u>Resultados:</u>

Respuestas	Cantidad de Bachilleres	Porcentaje
SI	169	56.33%
NO	92	30.67%
A VECES	39	13%
Total	***300***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 13 un diagrama circular que resume la información anterior detallada:

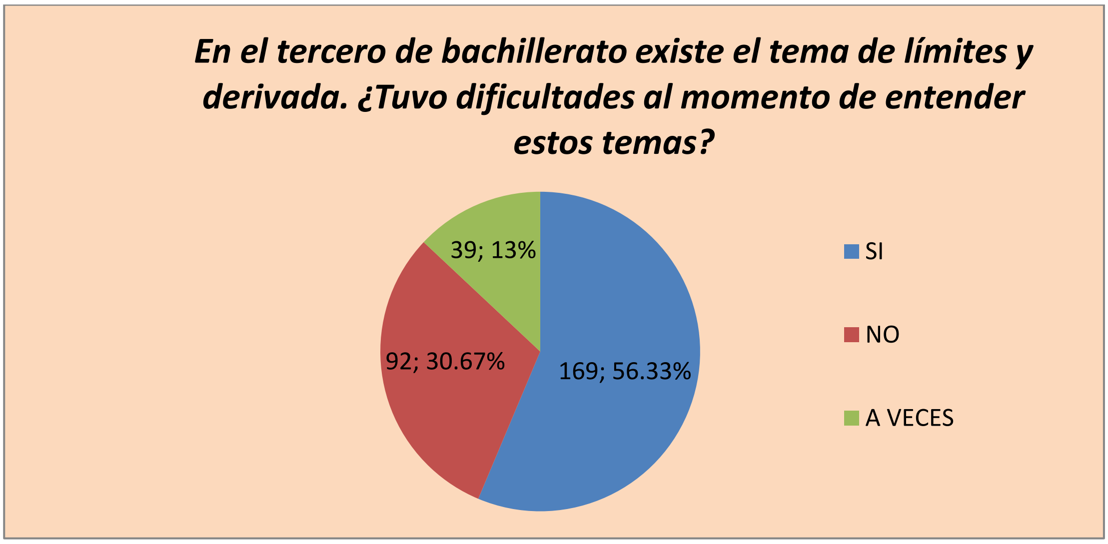


Figura 13

Análisis

Como podemos ver el 56.33% respondió que SÍ, es decir que la mayoría de bachilleres considera tuvo dificultades en el aprendizaje de estos temas.

Pregunta 7: *¿Considera usted importante que en el tema de límites y derivadas deba existir material didáctico?*

Objetivo: Esta es la pregunta más importante de la encuesta y con ella se analiza el criterio de los bachilleres frente al tema de la investigación y desde la experiencia de cada uno.

Resultados:

Respuestas	Cantidad de Bachilleres	Porcentaje
SI	196	65.34%
NO	76	25.33%
A VECES	28	9.33%
Total	***300***	***100%***

A continuación, se presenta en la figura 14 un diagrama circular que resume la información anterior detallada:

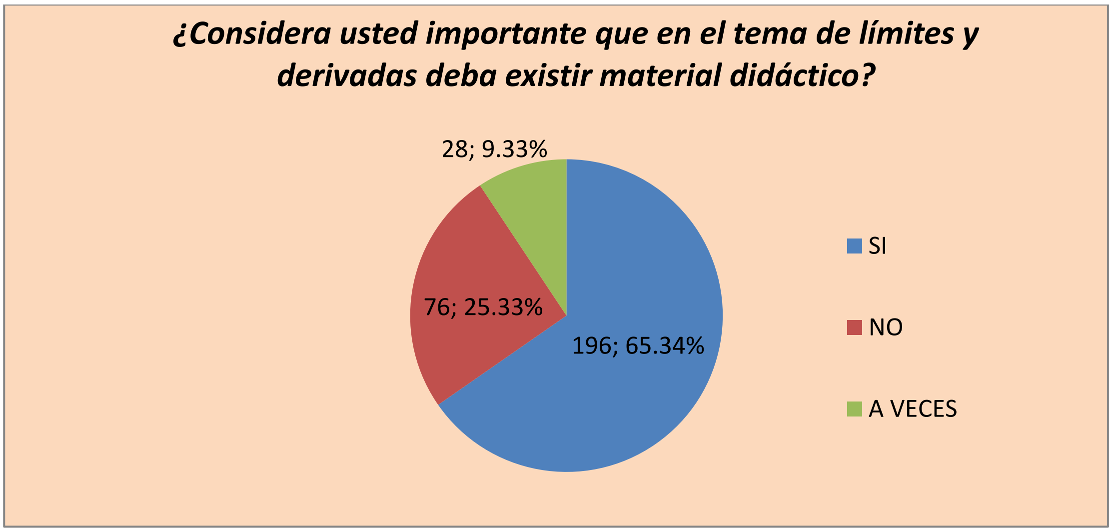


Figura 14

Análisis

El 65.34% respondió que SÍ, es decir que 196 bachilleres considera que debe existir material didáctico para este tema.

1.5. SÍNTESIS DEL DIAGNÓSTICO

Con las encuestas a docentes, efectivamente se puede evidenciar la falta de métodos y material didáctico en el tema de límites y derivada. La mayoría de profesores concuerdan en que es necesaria la implementación de diversas formas de enseñanza. Los pocos profesores que manifestaron que sí han encontrado algún material didáctico, también enfatizaron que lo encontraron vía internet y que tuvieron que pagar por un software o por alguna guía.

Por la encuesta realizada a bachilleres, es evidente que los profesores solo utilizaban la clase magistral para la enseñanza de estos contenidos. La mayoría también afirma que si los docentes les hubieran facilitado una guía para la construcción de material didáctico, lo hubieran realizado.

Por ello, el proyecto está enfocado en brindar diversas alternativas para intentar erradicar el problema que efectivamente existe en las aulas de las diversas instituciones. Cabe destacar que en el Bachillerato General Unificado constan estos temas y por ello es importante crear métodos para la enseñanza de límites y derivadas pues en el 2014 será la primera promoción de este bachillerato y el presente proyecto será de gran ayuda tanto para profesores como para estudiantes.

CAPITULO II

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En la época clásica de la antigua Grecia, se plantearon algunas inquietudes; una de ellas fue encontrar la pendiente de la recta tangente en una determinada curva. En aquel entonces, no existió un concepto geométrico que ayudara a determinarla, fue hasta el siglo XVII que la obra de Isaac Newton y Gottfried Leibniz permitieron sistematizar algunos métodos.

Se considera como padres del Cálculo a Newton y Leibniz, sin embargo no se puede descartar los aportes de Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann, Karl Weierstrass.

Con esta pequeña introducción, se exponen los temas que deberían considerarse antes de empezar el estudio del cálculo.

2.1. PRECÁLCULO

A continuación se muestran distintos símbolos que se emplearán a lo largo del presente proyecto:

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$<$	es menor que	$\cong$	es congruente con
$>$	es mayor que	$\sim$	es semejante con
$\leq$	es menor o igual a	$\perp$	es perpendicular a
$\geq$	es mayor o igual a	$\neq$	es distinto de
$\llcorner$	ángulo recto	//	es paralelo a
$\sphericalangle$	ángulo	$\in$	pertenece a
log	logaritmo en base 10	$\overline{AB}$	trazo AB
ϕ	conjunto vacío	$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
[x]	parte entera de x	x!	factorial de x
ln	logaritmo en base e		
$\mathbb{R}$:	Números Reales		

2.1. DESIGUALDADES E INTERVALOS.

En el estudio de las desigualdades es indispensable que se enuncien sus propiedades que son:

a) **Sí $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.**

Ejemplo:

$$6 > 5 \quad \text{y} \quad 5 > 2, \text{ entonces } 6 > 2$$

b) **Sí $a > b$, entonces $a + c > b + c$.**

Ejemplo:

$$8 > 6, \text{ Entonces } 8 + 3 > 6 + 3$$

c) **Sí $a > b$, entonces $a - c > b - c$.**

Ejemplo:

$$9 > 2, \text{ Entonces } 9 - 4 > 2 - 4$$

d) **Sí $a > b$, y c es positivo, entonces $ac > bc$.**

Ejemplo:

$$5 > 2 \text{ Entonces } 5(4) > 2(4)$$

e) **Si $a > b$, y c es negativo, entonces $ac < bc$.**

Ejemplo:

$$12 > 6, \text{ entonces } 12(-7) < 6(-7)$$

Para la solución de las desigualdades, se procede la siguiente manera:

- Es posible que se sume cualquier cantidad a los dos miembros de una desigualdad.
- Se puede multiplicar a los dos miembros por *cantidades positivas.*
- Si se multiplica ambos miembros por *cantidades negativas*, se debe invertir el sentido de la desigualdad.

Ejemplo:

- Resuelva la siguiente desigualdad $2x + 7 > 5x + 2$

$$2x + 7 > 5x + 2$$

Paso 1: Se suma -7, pues las "x" deben quedar en un mismo lugar:

$$2x + 7 - \mathbf{7} > 5x + 2 - \mathbf{7}$$

Paso 2: Se reducen términos semejantes:

$$2x > 5x - 5$$

Paso 3: Se suma $-5x$:

$$2x - 5x > 5x - 5x - 5$$

Paso 4: Se reducen términos semejantes:

$$2x - 5x > -5$$

$$-3x > -5$$

Paso 5: Se multiplica por $-\frac{1}{3}$, como es un número negativo, el signo de la desigualdad se invierte:

$$x < \frac{5}{3}$$

Cuando se estudia desigualdades, es conveniente utilizar la notación y la terminología de los *conjuntos*. Se puede definir a un conjunto como una reunión de objetos de algún tipo. A su vez, estos objetos son elementos de dichos conjuntos. "*Para representar elementos arbitrarios de un conjunto se usan frecuentemente letras. Por ejemplo, a veces se usa "x" para denotar un número real cuando no se desea especificar ningún número real en particular" (Purcell, 32).* Una letra que se usa para representar cualquier elemento de un conjunto dado se llama *variable*. Un símbolo que representa un elemento específico es una *constante*. En la mayoría de textos se suelen utilizar las últimas letras del alfabeto como x, y, z para representar variables. Las letras a, b, c denotan constantes.

Cada conjunto de valores a estudiarse dentro de una función, se denomina "*dominio de una variable"* que es el conjunto de los números reales que la variable representa. Por ejemplo, $\sqrt{x}$ es un número real sí y solo sí $x \geq 0$ y por lo tanto el dominio de x es el conjunto de los números reales no negativos. De la misma manera en la expresión $\frac{1}{x-2}$ se debe excluir $x = 2$ para evitar la división entre cero. Para este caso el dominio es el conjunto de todos los números de reales diferentes de dos.

Ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ denominados *intervalos* son muy importantes en el estudio del cálculo.

El **Intervalo es Abierto** sí $a < b$, es decir el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre a y b que se denota por a, b . Por lo tanto su definición es $a, b = x: a < x < b$ de donde a y b son los *extremos* del intervalo. Los intervalos abiertos se los representa en las gráficas de la siguiente manera:

Intervalo Abierto

$\boldsymbol{a, b}$

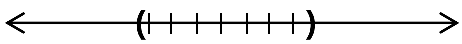


Figura 15

En el gráfico anterior, los paréntesis indican que lo extremos del intervalo no están incluidos.

En los **Intervalos cerrados y semiabiertos,** se utiliza uno o dos corchetes en los extremos del intervalo en lugar de paréntesis. Sí $a < b$, entonces el *intervalo cerrado* se representa $a, b = x: a \leq x \leq b$ y los *intervalos semiabiertos* se definen como $a, b) = x: a \leq x < b$ ó $a, b = x: a < x \leq b$. En las siguientes gráficas se representan estos intervalos:

Intervalo Cerrado

$\boldsymbol{a, b}$

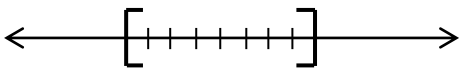


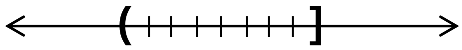
Figura 16

La presencia de dos corchetes, indica que los extremos son parte de la gráfica.

Por ejemplo cuando decimos “el alfabeto”, es un intervalo cerrado, pues las letras son $a, b, c, \ldots, x, y, z$ y se puede incluir la letra a como el principio y z como el final.

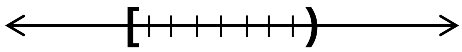
Intervalos Semiabiertos

$\boldsymbol{a, b}$



(a)

$\boldsymbol{a, b}$



(b)

Figura 17

La presencia de un corchete indica que el extremo correspondiente es parte de la gráfica.

Por ejemplo cuando los niños empiezan a contar, empiezan desde el número 0, y continúan $2,3,4,5,6,7,8$ ..., por lo general, se podría decir que los *números naturales* es un intervalo abierto pues se podría incluir al cero como un principio pero no se conoce su final.

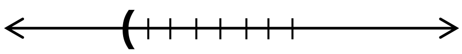
Para **Intervalos infinitos** se usa la siguiente notación:

a) $a, \infty \ = \ x: x > a$
b) $a, \infty) = \ x: x \geq a$
c) $-\infty, a \ = \ x: x < a$
d) $-\infty, a \ = \ x: x \leq a$

A continuación, se representan algunas gráficas de intervalos infinitos:

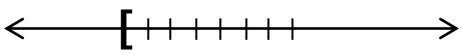
Intervalos Infinitos

$(\boldsymbol{a}, \infty)$



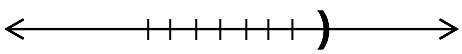
(a)

$\boldsymbol{a}, \infty$



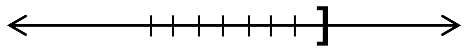
(b)

$-\infty, \boldsymbol{a}$



(c)

$-\infty, \boldsymbol{a}$



(d)

Figura 18

La ausencia de un paréntesis o corchete indica que la gráfica se extiende indefinidamente. El infinito no puede estar nunca incluido, es decir no se lo puede representar con un corchete.

Por ejemplo los números reales (es decir todos los números), es un intervalo infinito, pues no se conoce su principio ni su fin.

2.2. SISTEMA DE COORDENADAS EN DOS DIMENSIONES.

Al sistema de coordenadas rectangulares también se le suele llamar coordenadas cartesianas en honor a René Descartes que fue un filósofo que pensaba que las matemáticas darían solución a problemas del universo en base a la resolución de problemas geométricos. Este sistema de coordenadas cartesianas, está conformado con un eje horizontal llamado ***"eje de las x"*** o ***de las abscisas*** y otro eje vertical llamado ***"eje de las y"*** o ***de las ordenadas***. El punto en donde se intersectan estos ejes se los representa con "0" y se llama ***origen.*** Este plano cartesiano tiene ***cuatro cuadrantes*** y están denominados con I, II, III, IV, como en la siguiente figura:

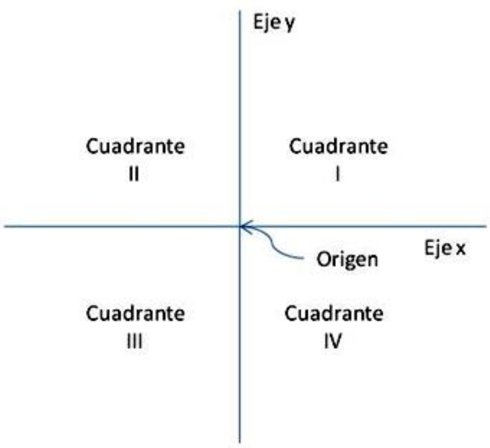


Figura 19

A cualquier punto en el plano se le puede asignar un par ordenado ***único*** (a, b), en donde a es la abscisa (valor en el eje de las "x"), y b es la ordenada (valor en el eje de las "y"). Para saber cuál es la distancia que existe entre estos dos puntos en el plano, tenemos la siguiente fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo:

- ***Encuentra el valor de la distancia que existe entre los puntos*** $\boldsymbol{A(2;2)}$, $\boldsymbol{B(9;9)}$ **.**(Purcell 40)

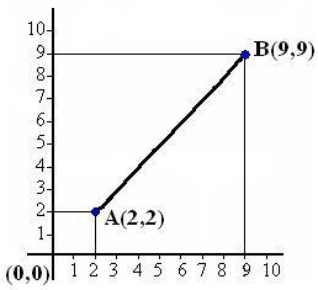


Figura 20

Se remplaza en la fórmula los valores

$$d(A, B) = \sqrt{(9-2)^2 + (9-2)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(7)^2 + (7)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{98}$$

$$\boldsymbol{d(A, B) = 9.89}$$

Es necesario también enunciar la fórmula del punto medio de un segmento, este está dado por:

$$Punto\ medio = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo:

- **Encuentra el punto medio del segmento que está formado por los puntos $B\ 5,-6\ \ A(-3,2)$**

$$x=\frac{(5)+(-3)}{2}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$y=\frac{(-6)+(2)}{2}=\frac{-6+2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

El punto medio del segmento AB es:
M(1,-2)

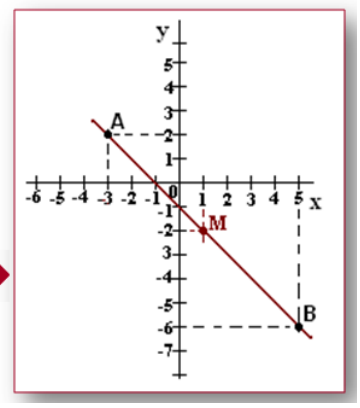


Figura 21

Ahora bien, supongamos que Q es el conjunto de determinados pares ordenados que obedecen cierto criterio en particular, a estos conjuntos de pares ordenados se los llama *gráfica de* Q. En la mayoría de los casos se construye una tabla con valores arbitrarios de “x” y valores únicos en “y” dados por la fórmula o condición que se enuncia.

Ejemplo:

- **Construir la gráfica de $f\ x\ = x^2$**

x	$y=f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

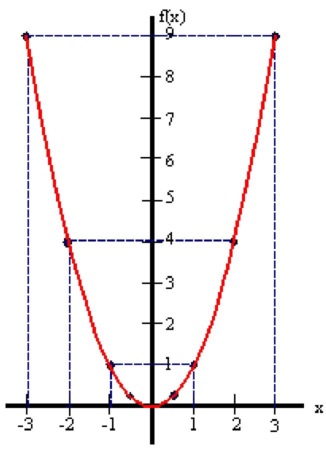


Figura 22

SIMETRÍA

Existen algunas gráficas en particular como es el caso de la gráfica anterior, que si se dobla el plano ordenado a lo largo del eje “y” la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano, coincide con la que se encuentra en la mitad derecha. Se dice entonces que la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Algunas gráficas tienen simetría con respecto al origen, esto pasa cuando x, y está en la gráfica pero $-x, -y$ también lo está. Por ejemplo:

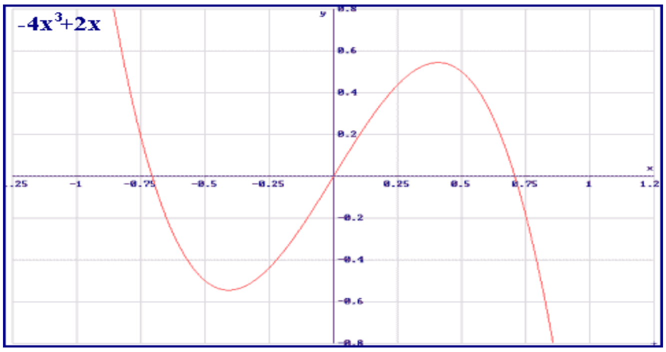


Figura 23

Existen algunos criterios que serán útiles al determinar qué tipo de simetría se tienen en cada caso, estos son:

a) La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo:

- $\boldsymbol{f\ x\ = x^2}$

Si sustituimos x por $-x$ obtenemos: $f\ x\ = (-x)^2 = x^2$, la ecuación es equivalente [1].

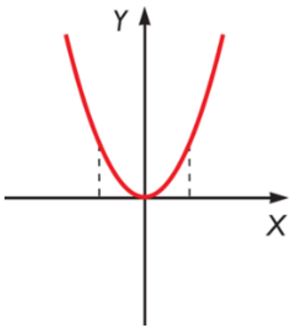


Figura 24

b) La gráfica de una ecuación es simetría con respeto al eje x si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo:

- $\boldsymbol{x = y^2}$

Si sustituimos y por $-y$ obtenemos: $x = (-y)^2 = y^2$, la ecuación es equivalente.

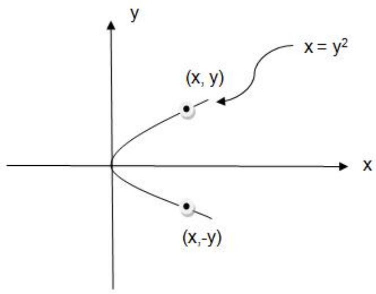


Figura 25

c) La gráfica es una ecuación es simétrica con respecto al origen si al sustituir simultáneamente x por $-x$ y y por $-y$ tenemos una ecuación equivalente.

Ejemplo:

- $\boldsymbol{y = x^5 - 3x^3}$

Sustituimos "y" por "$-y$" y "x" por "$-x$" entonces tenemos:

$$-y = (-x)^5 - 3(-x)^3 =$$

$$-y = -x^5 + 3x^3,$$

Por lo tanto sí es simétrica al origen porque se obtiene una ecuación equivalente[2].

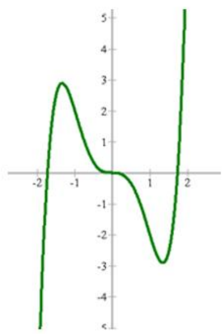


Figura 26

En los diferentes tipos de gráficas, encontramos a la *circunferencia* que es una gráfica simétrica con respecto a un centro C. Diversos puntos P están en una circunferencia si y solo sí equidistan siempre una distancia r con respecto al origen. Por ello nos valemos de la ecuación de la distancia para obtener la *ecuación de la circunferencia* que es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

De donde h y k son el centro y r es el radio de la circunferencia.

Ejemplo:

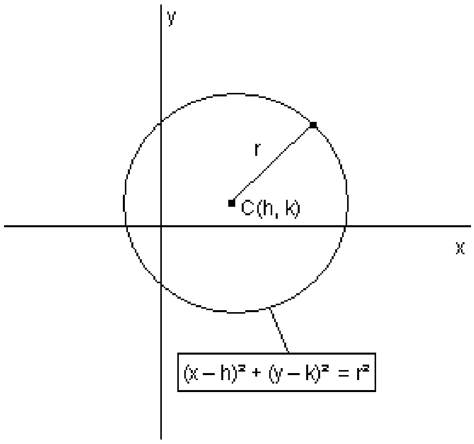
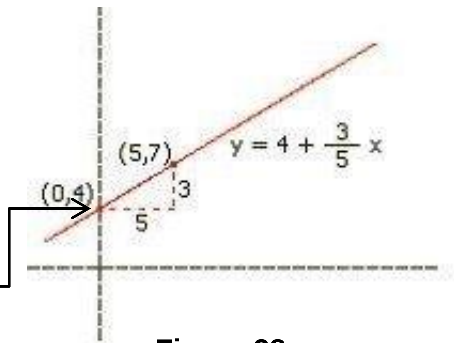


Figura 27

2.3. LA RECTA.

De todas las gráficas, la *recta* se puede decir que es la más sencilla. En el plano cartesiano, dos puntos definen una *recta* cuando esta pasa por ellos. Como está en el plano, esta recta debe tener una ecuación, por ello enunciamos la definición de *pendiente* en base a la siguiente figura.



Se parte de $(0,4)$

Figura 28

En la gráfica anterior, se puede observar que hay un cambio vertical de 3 unidades y un cambio horizontal de 5 unidades, entonces se dice que tiene una ***pendiente*** de $\frac{3}{5}$. En general la fórmula de la pendiente está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto la pendiente es la medida de la inclinación de una línea.

Ahora bien, partiendo de la ecuación anterior, se pretende encontrar la ecuación de una recta de pendiente m que pase por un punto de coordenadas $(x_1; y_1)$ y que parta de $P(x, y)$ en donde $x_1 \neq x$, *solo hay* ***una*** *recta que cumpla con todas las condiciones,* por lo tanto*:*

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando a ambos miembros por $x - x_1$ tenemos:

$$x - x_1 \ m = y - y_1$$

Que es la forma ***punto-pendiente de la recta***

Existen diversas maneras de encontrar la ecuación de una recta, se enuncian a continuación.

FORMA PUNTO-PENDIENTE en este caso solo es necesario conocer la pendiente de la recta y un punto *cualquiera* de la recta. Por ejemplo:

- Encontrar la ecuación de la recta con $m = \frac{1}{2}$ y $P(-3,2)$

Como tenemos la ecuación de la recta que es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Esta es la ecuación de la recta.

De esta manera la fórmula más general de la recta es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN es necesario saber que la ecuación de una recta se puede expresar de varias formas, una de ellas es:

$$y = mx + b$$

De donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la recta, y $\boldsymbol{b}$ es la intersección de la recta con el eje $\boldsymbol{y}$ cuando $\boldsymbol{x = 0}$**.**

Ejemplo:

- Encontrar la ecuación de la recta que tiene de pendiente $m = \frac{3}{4}$ y su corte con el eje y es -3.

Utilizamos la ecuación:

$$y = mx + b$$

$y = \frac{3}{4}x - 3$ **Es la ecuación de la recta.**

ECUACIÓN DE UNA RECTA VERTICAL Y HORIZONTAL en las rectas verticales no se cumple las condiciones anteriores pues no tienen pendiente, pero **sí** tienen una ecuación muy sencilla, esta es:

$$x = k$$

De donde $\boldsymbol{k}$ es una constante. Se debe mencionar que la ecuación de una recta horizontal sería $y = k$.

Ejemplo:

- Gráficar las rectas $y = 3$ y $x = -2$

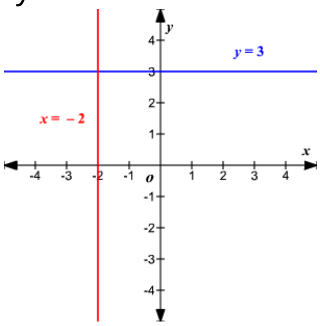


Figura 29

LA FORMA $\boldsymbol{Ax+By+C=0}$ conocida también como *forma lineal general* está definida por la forma:

$$\boldsymbol{Ax+By+C=0}$$

En donde A y B son constantes pero no son nulos, es decir cero, y C es el término independiente.

Ejemplo:

- Encontrar los coeficientes $A, B\ y\ C$ de la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1{,}6)$ y tiene de pendiente $m = 2$.

Primero debemos determinar la ecuación de la recta que es:

$$y-6=2(x-1)$$

$$y-6=2x-2$$

$$y-6-2x+2=0$$

$$-2x+y-4=0$$

Los coeficientes son $\boldsymbol{A=-2,\ B=1,\ C=-4}$

2.4. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN.

Las reglas de correspondencia en la vida cotidiana son muchas, por ejemplo a cada ser humano le pertenece una fecha de nacimiento, a un libro le corresponde un número determinado de páginas, a cada instante del día le corresponde un tiempo, etc. Los ejemplos anteriores involucran dos conjuntos, uno que expresa un objeto o situación y el otro conjunto que tiene los enteros positivos que le corresponden. Esta regla de correspondencia es una definición informal de lo que es una *función*.

Definición Formal de Función "*una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x de un conjunto llamado **dominio** un valor único de un segundo conjunto" (Purcell, 50)*. El conjunto de valores así obtenidos los denominamos **rango** de la función.

NOTACION FUNCIONAL es la manera de representar una expresión. Se usa una sola letra para denominar a una función. Por lo general se usa f , F, o g, entonces $f(x)$ se lee "f de x" que designa el valor único f dado por un valor de x.

Ejemplo:

- Si $f(x) = x^2 - x$ encontrar a) $f(2)$, b) $f(-5)$

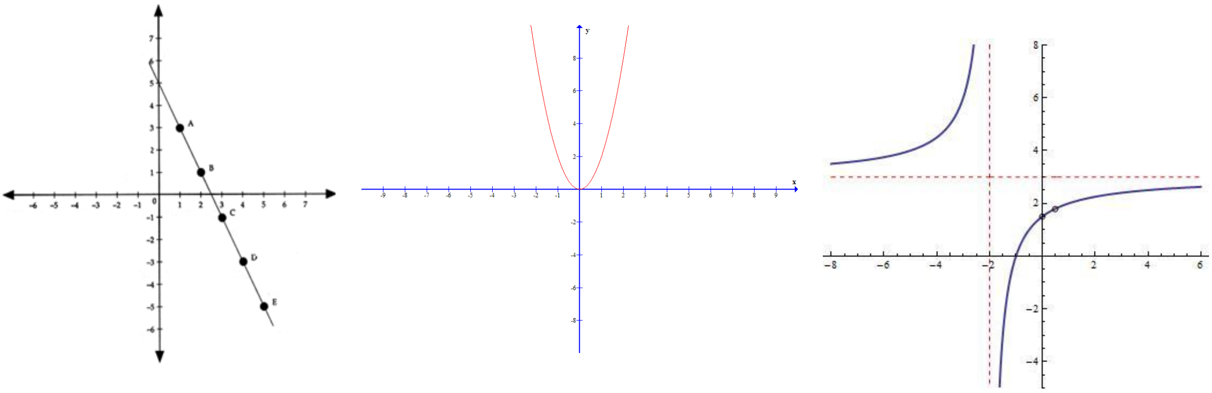
  a) $f(2) = 2^2 - 2 = 2$

  b) $f(-5) = (-5)^2 + 5 = 30$

DOMINIO Y RANGO al ser la función una regla de correspondencia, el *dominio* es el conjunto de todos los números reales a los que la función asigna valores y el *rango* es el conjunto de valores obtenidos. Por ejemplo $f(x) = x^2 + 1$ y se especifica que el dominio es $\{0,1,2\}$ entonces el rango sería $\{1,2,5\}$. Sí no se define el dominio, este se denomina *dominio natural.*

GRÁFICA DE FUNCIONES es aquella en donde se asignan valores de *números reales* para remplazarlos en $f(x)$ y se construye una tabla de valores de dominio y rango para bosquejar la gráfica.

En *algunas gráficas* se encuentran ***asíntotas*** que son un valor específico del dominio en el cual no existen valores del rango. Se lo suele representar mediante una línea punteada. Algunos ejemplos de gráficas de funciones son:



(a) (b) (c)

Gráfica con asíntota en $x = -2$ y $y = 3$

Figura 30

FUNCIONES PARES E IMPARES son aquella que con frecuencia presentan simetrías. Sí $f(-x) = f(x)$ entonces la gráfica es simétrica con respecto a y y se denomina **función par**. Sí $f(-x) = -f(x)$ la gráfica es simétrica con respecto al origen y se llama **función impar.**

Ejemplos:

- Decir si la función $f(x) = x^3 - x$ es par o impar.

Remplazamos $-x$ por x y tenemos:

$$f(x) = (-x)^3 - (-x)$$

$$f(x) = -x^3 + x$$

$$f(x) = -(x^3 - x)$$

Es una función **Impar.**

En la caso de la función $f(x) = 2/(x-1)$ no es par ni impar pues la gráfica no es simétrica con respecto al eje de las y ni al origen.

FUNCIONES VALOR ABSOLUTO Y MÁXIMO ENTERO se las denomina también funciones especiales y se las representa así:

a) $\boldsymbol{Función\ valor\ absoluto}$

Se definen como:

$$|x| = \begin{cases} x & sí\ \ x \geq 0 \\ -x & sí\ \ x < 0 \end{cases}$$

Lo aclararemos con el siguiente ejemplo:

- **Trazar la gráfica de la función f dada por $f = |x|$**

La gráfica quedaría de la siguiente manera:

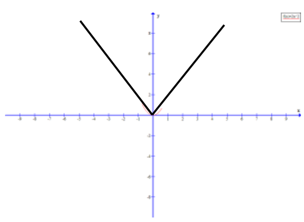


Figura 31

Según la definición anterior, sí $x \geq 0$, entonces $f\ \ x\ \ = x$ y por lo tanto, la parte de la gráfica que se encuentra a la derecha del eje “x” es idéntica a la gráfica de $y = x$, que es una recta que pasa por el origen y tiene de pendiente 1. Sí $x < 0$ entonces, por la misma definición tenemos que $f\ \ x\ \ =\ \ x\ \ = -x$, y por lo tanto la gráfica que se encuentra a la izquierda del eje “y” es igual a la gráfica de $y = -x$

b) $\boldsymbol{funcion\ m\acute{a}ximo\ entero}$

Se define como:

$$x\ \ = \text{Al mayor entero igual o menor que } x$$

Para denotar el mayor entero n tal que $n \leq x$, se utiliza el símbolo $\boldsymbol{x}$ **.** Por ejemplo, $\mathbf{1,6\ \ = 1,\quad \overline{5}\ \ = 2,\quad \pi\ \ = 3}$

La gráfica de una función máximo entero sería la siguiente:

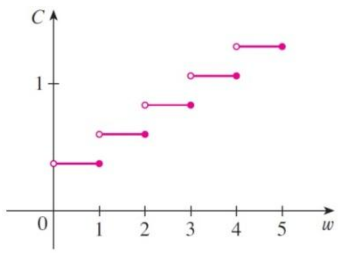


Figura 32

2.5. OPERACIONES CON FUNCIONES

Se pueden realizar operaciones con funciones tales como la suma de f y g para producir otra función nueva $f + g$. A continuación se expresan algunas de las operaciones con funciones, suponiendo que tienen dominios naturales:

SUMA DE FUNCIONES, su fórmula es:

$$f + g\ \ \ x\ \ = f\ \ x\ \ + g(x)$$

Ejemplo:

- Encontrar la suma de $f(x) = x^2 - 1$ y $g\ \ x\ \ = x^3 - 2x^2 + 3$

Entonces: $$f + g\ \ \ x\ \ = f\ \ x\ \ + g\ \ x$$

$$f + g\ \ \ x\ \ = x^2 - 1 + x^3 - 2x^2 + 3$$

$$(f+g)(x)=x^3-x^2+2$$

Su dominio sería $(-\infty;\infty)$

RESTA DE FUNCIONES, su fórmula es:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

Ejemplo:

- Encontrar la resta de $f(x)=\frac{x-2}{4}$ y $g(x)=x^2-1$

Entonces:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f-g)(x)=\frac{x-2}{4}-(x^2-1)$$

$$(f-g)(x)=\frac{x-2}{4}-x^2+1$$

Su dominio sería $(-\infty;\infty)$

PRODUCTO DE FUNCIONES, su fórmula es:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

Ejemplo:

- Encontrar la multiplicación de $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x^3$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

$$(f.g)(x)=\frac{1}{x}.x^3=x^2$$

Su dominio sería $(-\infty;\infty)$

COCIENTE DE FUNCIONES, su fórmula es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo:

- Encuentre el cociente de $f(x) = \frac{x-3}{2}$, entre $g(x) = \sqrt{x}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$$

Su dominio es: $(0, \infty)$, se excluye el cero, para evitar la división entre 0.

POTENCIA DE FUNCIONES, su fórmula es:

$$f^n(x) = [f(x)]^n$$

Ejemplo:

- Se $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$ con su dominio $[-1, \infty)$. Encuentra la formula de f^5, e indique su dominio.

$$f^n(x) = [f(x)]^n$$

$$f^5(x) = [f(x)]^5$$

$$[f(x)]^5 = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^5 = (x+1)^{5/4}$$

Su dominio es: $[-1, \infty)$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Supongamos que se tienen dos funciones f y g, sí f trabaja con x para producir $f(x)$ y después g trabaja con $f(x)$ para producir $g(f(x))$, decimos que hemos realizado una *composición* de g con f. La función que resulta se denomina composición de f con g y se expresa mediante el símbolo $f°g$ entonces:

$$(g°f)(x) = g(f(x))$$

Cabe destacar que la composición de funciones no es conmutativa.

Ejemplo:

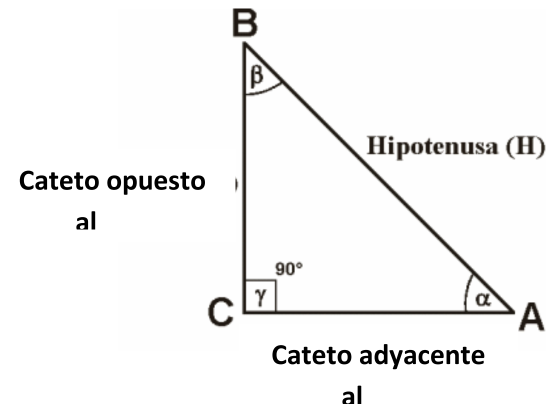
- Encuentre la composición de las siguientes funciones $f(x)=\frac{(x-3)}{2}$ y $g(x)=\sqrt{x}$

$$g°f(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x-3}{2}\right)=\sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$f°g(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

2.6. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cabe enunciar las funciones trigonométricas basadas en el triángulo rectángulo *(figura 33):*



$$Sen\ \alpha=\frac{CO}{H}$$

$$\text{Cos}\ \alpha=\frac{CA}{H}$$

$$\tan\alpha=\frac{CO}{CA}$$

Figura 33

A continuación se presentan las propiedades básicas de las funciones Seno y Coseno.

PROPIEDADES

“Es importante mencionar que las funciones seno y coseno son periódicas” (Purcell 54), es decir sí existe un numero positivo p tal que $f(t+p)=f(t)$ para todo t del dominio de f. En consecuencia se cumple lo siguiente:

$$sen(-x)=-sen\ x$$

$$\cos(-x)=\cos x$$

Decimos que la función seno es *impar* y la función coseno es *par*.

Entonces se cumple la identidad que relaciona el seno con el coseno que es:

$$sen^2t + cos^2t = 1$$

Demostración:

Remplazamos el $seno$ y el $coseno$ por sus iguales:

$$\frac{CO}{H}^2 + \frac{CA}{H}^2 = 1$$

Realizamos las operaciones:

$$\frac{CO^2}{H^2} + \frac{CA^2}{H^2} = 1$$

$$\frac{CO^2 + CA^2}{H^2} = 1$$

Por el teorema de Pitágoras, se conoce que:

$$H^2 = CO^2 + CA^2$$

Entonces remplazamos por su igual:

$$\frac{H^2}{H^2} = 1$$

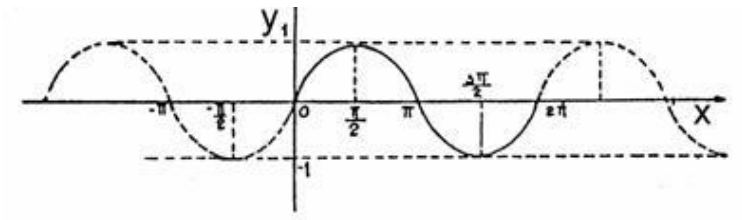
Simplificamos:

$$1 = 1$$

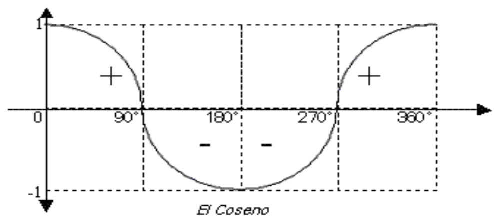
La igualdad se cumple.

Esta identidad resulta del hecho del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, puesto que el seno y el coseno tienen un rango de 1.

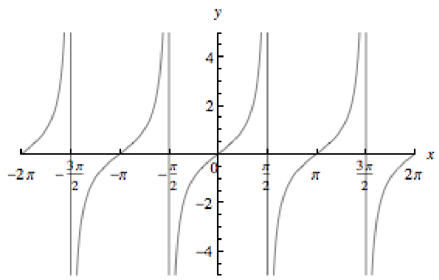
Las gráficas del seno, coseno y tangente son:



(a) Seno



(b) Coseno



(c) Tangente

Figura 34

Con las funciones básicas, se podrían establecer las funciones trigonométricas complementarias que son:

a) $\tan \alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos \alpha}$

Demostración:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{CO}{H}}{\frac{CA}{H}} = \frac{H.CO}{H.CA} = \frac{CO}{CA}$$

b) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{sen\,\alpha}$

Demostración:

$$\cot\alpha = \frac{\frac{CA}{H}}{\frac{CO}{H}} = \frac{CA.H}{CO.H} = \frac{CA}{CO}$$

c) $\boldsymbol{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$

Demostración:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\frac{CA}{H}} = \frac{H}{CA}$$

d) $\boldsymbol{\csc\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}}$

Demostración:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\frac{CO}{H}} = \frac{H}{CO}$$

La tangente es una *función impar*. En base a las funciones anteriores, se obtiene las siguientes identidades:

$\boldsymbol{1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha}$

Demostración:

$$1 + \frac{CO}{CA}^{2} = \frac{H}{CA}^{2}$$

$$1 + \frac{CO^2}{CA^2} = \frac{H^2}{CA^2}$$

$$\frac{CA^2 + CO^2}{CA^2} = \frac{H^2}{CA^2}$$

$$\frac{H^2}{CA^2} = \frac{H^2}{CA^2}$$

$$1 = 1$$

$\boldsymbol{1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha}$

Demostración:

$$1 + \frac{CA^2}{CO^2} = \frac{H^2}{CO^2}$$

$$\frac{CO^2 + CA^2}{CO^2} = \frac{H^2}{CO^2}$$

$$\frac{H^2}{CO^2} = \frac{H^2}{CO^2}$$

$$1 = 1$$

2.2. CORRIENTE PEDAGÓGICA DE REFERENCIA (MÉTODOS Y TÉCNICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE)

2.2.1. EL CONSTRUCTIVISMO

La teoría que encaminará el proyecto será el constructivismo, ya que el constructivismo postula la necesidad de entregar al alumno herramientas que le permitan crear sus conocimientos aplicados a un problema y de tal forma que sea él mismo quien modifique algo que no le ha servido para su aprendizaje.

El constructivismo, "*propone un paradigma en donde el proceso de enseñanza se percibe y se lleva a cabo como un proceso dinámico, participativo e interactivo del sujeto, de modo que el conocimiento sea una auténtica construcción operada por la persona que aprende (por el "sujeto cognoscente"). El constructivismo en pedagogía se aplica como concepto didáctico en la enseñanza orientada a la acción"(* MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA, 52*)*.

En esta corriente filosófica, el alumno posee conocimientos pero en base a estos el deberá construir nuevos saberes. El estudiante no será una copia fiel de su maestro sino más bien será un ser humano que reconstruya el conocimiento. El papel del estudiante será construir sus saberes en base a una experiencia interna.

El rol del docente es guiar al alumno para que adquiera nuevos conocimientos significativos en base a una interacción con el medio ambiente.

En un estudio llevado a cabo por los estudiantes de la Universidad de Cuba, se dedujo que las ideas del constructivismo a través de la historia están basadas en:

- *"Determinadas teorías sobre el movimiento científico como por ejemplo las de Kuhn, Feyerabend, Lakatos y otros.*
- *La epistemología genética de J. Piaget.*

- *EL enfoque histórico cultural L Vigotsky.*
- *El aprendizaje significativo de D. Ausubel" (*MAZARIO *"El Constructivismo: Paradigma de la escuela Contemporánea" 102).*

A continuación, se deducen las siguientes ideas que resumen los principios del constructivismo:

1. La comprensión que un ser humano pueda tener ante un conocimiento nuevo es un proceso interno y diferente en cada individuo.

2. El conocimiento es reconstruido a través de experiencias.

3. La experiencia permite dar conclusiones.

4. El proceso de construcción de significados está siempre influenciado por el contexto histórico-cultural y económico-social del cual el individuo forma parte.

5. El aprendizaje requiere una participación activa y reflexiva.

2.2.2. ¿CÓMO APLICAR EL CONSTRUCTIVISMO EN LA PRÁCTICA DOCENTE?

Existen lineamientos para aplicar el constructivismo en las aulas, se pueden enumerar los siguientes:

a) El conocimiento de cada alumno debe ser construido y no transmitido (esto se puede lograr mediante actividades grupales o individuales que involucren la participación de cada estudiante).
b) La experiencia debe ser lo más importante. En base a esto, el alumno podrá escoger los métodos que ayudan a su aprendizaje y desechar aquellos que le han resultado confusos. (Probar alternativas de ensayo y error por diferentes caminos, pues la Matemática se presta para ello)
c) Realizar actividades en donde el alumno investigue. El docente solo indica las pautas a seguir, recuerde que su rol es guiar.
d) Si los estudiantes están vinculados en el proceso de aprendizaje mediante la experiencia, tendrán mayor interés en la materia.
e) Realizar experiencias grupales.
f) Al final de una clase, proponer desafíos tanto grupales como individuales a manera de juegos. Esto ayudará al docente a conocer los temas que se deberán reforzar.

2.2.3. MÉTODOS Y TÉCNICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Para el desarrollo de una clase, existen diferentes alternativas que podrían ayudar a alcanzar un aprendizaje significativo. En los párrafos siguientes se mencionarán algunos métodos o técnicas motivadoras que fundamentan el presente proyecto.

Es oportuno destacar que en todos los temas, el profesor guardará el debido orden en el pizarrón. Según Irene Marín, pedagoga de España y coordinadora del programa "Usa debidamente tus instrumentos", asegura que *"El orden es muy importante en el pizarrón, además de la utilización de mapas conceptuales resulta una manera de organización del pizarrón muy útil. De modo análogo pueden utilizarse cuadros sinópticos, resúmenes, gráficos y tablas que organicen y faciliten los procesos de generalización y aplicación de los conocimientos."(* MARIN, *"Odiseo revista electrónica de pedagogía")*

En cuanto a la educación en el Ecuador, el Ministerio de Educación también enfatiza la importancia de la pizarra, se menciona que "*El pizarrón constituye uno de los medios de enseñanza más antiguos e importantes para mostrar y despertar el interés de los alumnos hacia el mensaje cultural que debe construir la escuela. Siempre se ha entendido que la utilización del pizarrón escolar es una excelente muestra de la pericia del educador; sin embargo, se ha prestado poca atención a sus posibilidades educativas" (*GRUPO SANTILLANA. *"Manual de Sugerencias Pedagógicas*". 20*)*

Por lo anterior mencionado, cada docente debe ser ordenado en la pizarra, más aún en este caso de límites y derivada. A continuación se describe en teoría las técnicas utilizadas en el proyecto:

1) **Los Esquemas u Organizadores Gráficos:** Existen diversas publicaciones del Ministerio de Educación, una de ellas aporta lo siguiente: "*Una de las técnicas más poderosas para organizar ideas y conceptos es el Esquema Gráfico,… ,todo estudiante deberá tener esta herramienta para estimular la reflexión y el repaso"(*GRUPO SANTILLANA. *"Manual de Sugerencias Pedagógicas*", 26*).* Por esto, se recomienda que los organizadores gráficos permanezcan en el aula para recordar lo aprendido. Recuerde que esto sirve muchas veces para memorizar materias teóricas.

2) **Material Concreto:** La enseñanza de las Matemáticas inicia con una parte exploratoria. Es mejor que esta parte exploratoria sea con la manipulación

de un material concreto. *"La enseñanza debe partir del uso de un material concreto porque permite que el mismo estudiante experimente el concepto desde la manipulación de sus sentidos logrando así interiorizar conceptos" (*TAPIA, "*Fundamentos Psicopedagógicos)* Es importante que el estudiante aprenda a manipular objetos de su entorno pues bien lo dice Piaget; *"se necesita aprender de experiencias concretas"*.

3) **Actividades al Aire Libre:** Las actividades al aire libre constituyen un factor muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La mayoría de las clases son presentadas en el aula; por ello, los estudiantes se sienten muy relajados y motivados al momento de salir al aire libre. *"Las actividades al aire libre nos aportan conocimientos, habilidades y destrezas que nos permiten desenvolvernos con seguridad en distintos ámbitos"(* www.ite.educacion.es*)*. Las experiencias que puedan tener los estudiantes con estas actividades, son importantes para comenzar o cimentar un conocimiento nuevo.

4) **Juegos de Mesa:** los conocidos juegos de mesa como el bingo y el dominó aplicados a ejercicios matemáticos ayudan de una manera considerable a desarrollar destrezas. En Matemáticas, cuando existen varios teoremas la mayor destreza a desarrollar en los estudiantes es reconocer cada caso en un grupo de ejercicios. Por ello, se presentan estos juegos en los que existen varios ejercicios para desarrollarlos de una manera alternativa.

5) **El Rompecabezas:** Además de desarrollar la capacidad espacial, el rompecabezas desarrolla la observación, descripción y comparación de cada pieza y sus detalles para construirlo poco a poco. También sirve para desarrollar la capacidad de tolerancia del estudiante. En Matemáticas sirve para el desarrollo de ejercicios.

6) **Maquetas:** Son un montaje a menor escala de algo real. Estas maquetas también se utilizan en exposiciones para explicar algún concepto abstracto. Como la mayoría de contenido en la Matemática es abstracto, la utilización de maquetas de una situación específica será de gran ayuda para la explicación de un tema.

7) **La Evaluación Informal:** Es una manera alternativa de evaluar a los alumnos utilizando métodos didácticos. Este tipo de evaluación no debe

tener una valoración cuantitativa sino más bien cualitativa. El objetivo principal de esta evaluación es deducir el nivel de comprensión del tema tratado.

8) **La Evaluación Formal:** Uno de los elementos más complejo para el docente es la evaluación de los aprendizajes ya que el resultado decide la promoción o no del estudiante al siguiente nivel. El Ministerio de Educación del Ecuador menciona "*los estudiantes se someterán a un examen cuyo formato es una prueba de base estructurada" (*Andrade, Comisión de Evaluación Interna, 62*).* Por ello es pertinente que el docente adopte este formato para que los estudiantes se acostumbren a evaluaciones futuras.

Todas estas sugerencias pedagógicas se pueden usar, sin embargo no hay muchas alternativas para la Matemática avanzada, ya que solo se han quedado en teoría. Por todo esto es necesario implementar material didáctico o métodos para la enseñanza de estos temas.

2.3. SÍNTESIS DE LA FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En síntesis, este capítulo trata de temas previos que los estudiantes deben dominar antes de empezar a estudiar el tema de límites y derivadas. En cuanto al Precálculo, los temas más importantes son aquellos en donde intervienen las funciones; es decir, el dominio de notación en intervalos, resolución de igualdades, operaciones, propiedades y gráfica de funciones, además de las funciones trigonométricas. Cabe mencionar que el álgebra es un elemento poderoso en Matemáticas; por eso es imprescindible recordar conceptos básicos como el factoreo, reducción de términos semejantes y ecuación de la recta. Para el estudiante será más fácil entender si el docente realiza un recordatorio previo.

En cuanto a la teoría que fundamenta el presente proyecto de investigación, se destaca el constructivismo como base. Esto implica que el docente solo será un guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Con referencia al material didáctico, métodos, y pautas que el docente dará a sus estudiantes, ellos construirán su propio conocimiento. Por ello el proceso de enseñanza aprendizaje se vuelve dinámico y participativo.

Para que exista armonía entre lo que se dice y lo que se hace, debe concordar la teoría con la práctica. Para esto, el capítulo definió la teoría que encaminará el presente proyecto de investigación. El siguiente capítulo nos mostrará cómo concretar las ideas (teoría) en el aula.

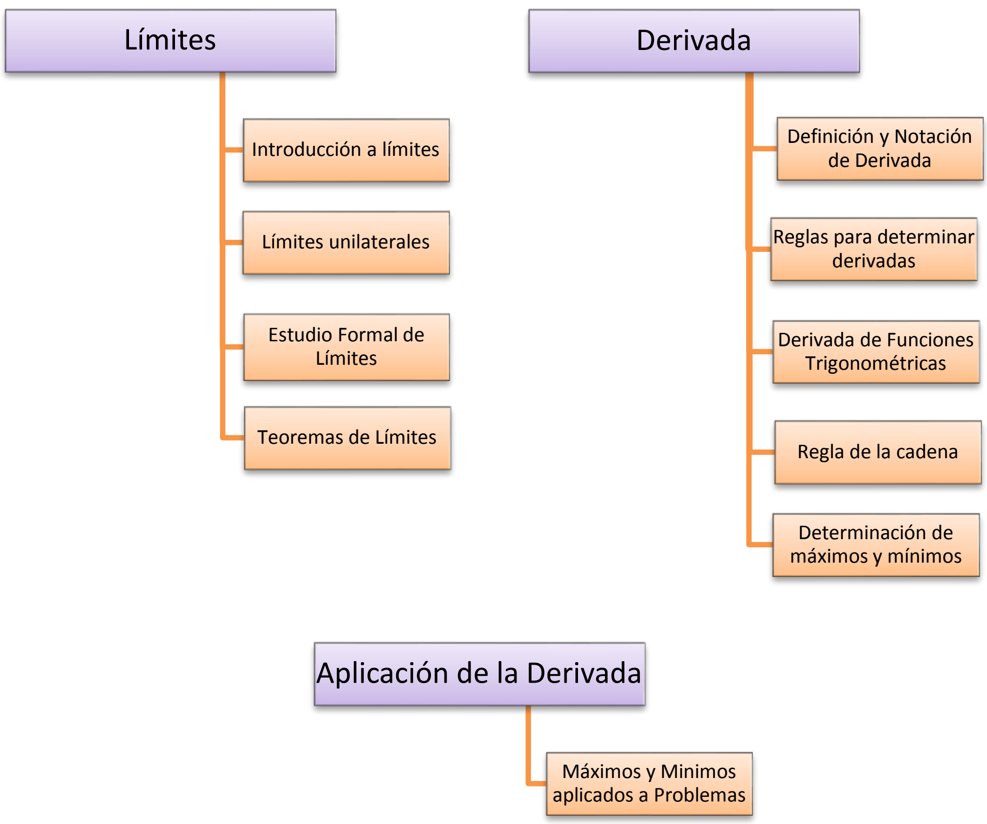
CAPITULO III

3. PROPUESTA

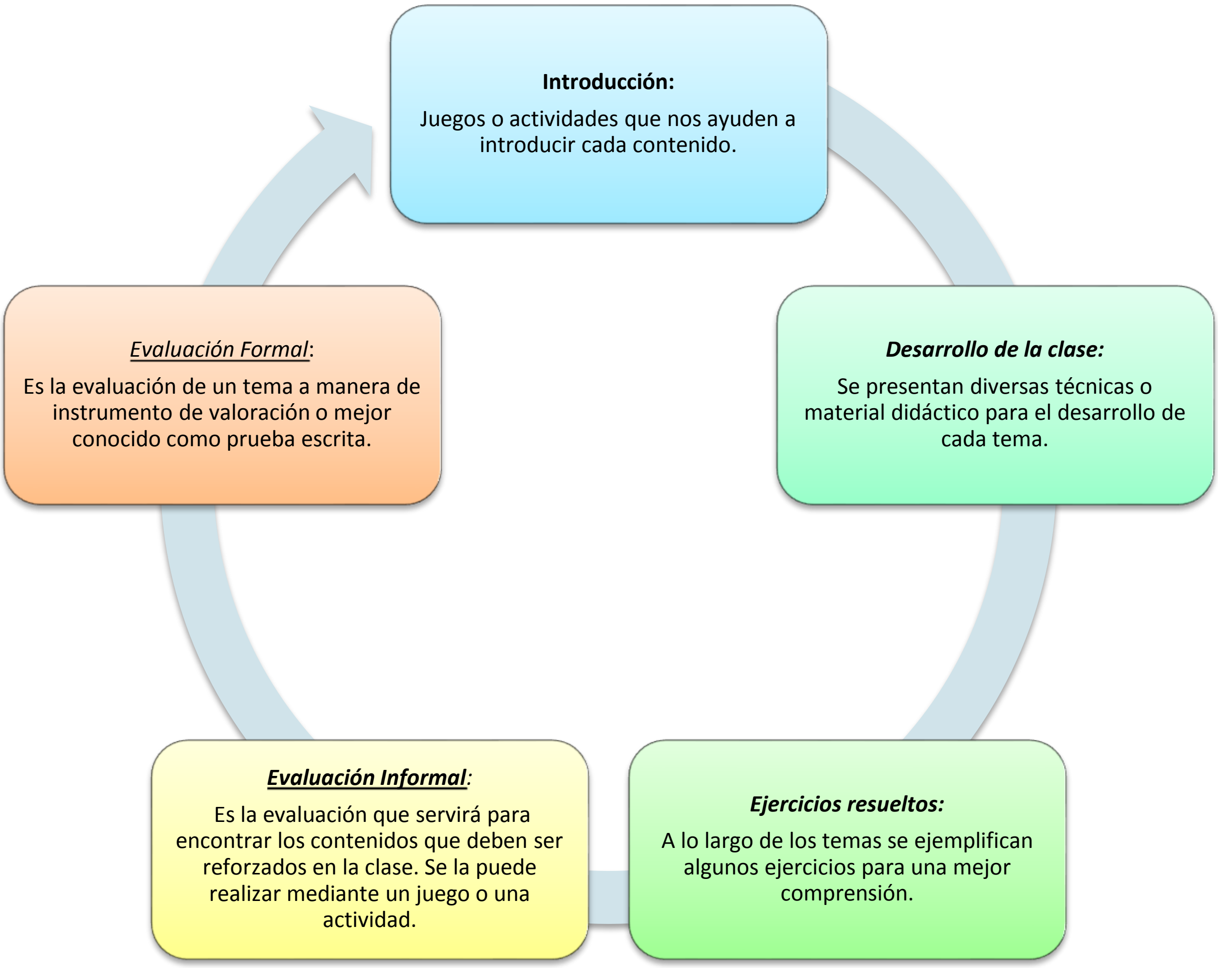
GENERALIDADES DE CADA CLASE

Ya que el cálculo es muy extenso, la profundidad de cada tema es con respecto a los contenidos que se enseñan en el tercero de bachillerato. Casi es su totalidad, los ejercicios se han obtenido de los libros guías que se utilizaron para desarrollar la presente tesis. Estos libros son "*Cálculo con Geometría Analítica*" Earl W. Swokowski, y *"Cálculo con Geometría Analítica"* de Edwin J.Purcell; Dale Varberg. Cabe destacar que la propuesta consiste en implementar nuevas formas de enseñanza basadas en técnicas y nuevos materiales didácticos.

El siguiente gráfico muestra la estructura de la propuesta en general:



Es necesario llevar una secuencia en los temas a enfocarse. Por ello cada clase propuesta constará de las siguientes partes:



3.1. LÍMITES

3.1.1. INTRODUCCIÓN A LOS LÍMITES

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema y crear en el estudiante la noción de acercamiento a un número; pues deberá emplear luego en la aproximación a límites cuando tienden a un número específico.

Se entrega a cada alumno una de las siguientes tablas (Ver más en el ***Anexo 3***):

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.2099	3.9991
15.0022	6.333
9.4599	10.001
7.6310	14.002
11.2229	1.7772
2.009	13.4447
8.333	5.0001

Tabla 1

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.1246	3.1207
12.0295	6.5789
9.0071	10.8476
7.3270	14.4580
11.2490	1.4127
2.1298	13.6985
8.2507	5.1207

Tabla 2

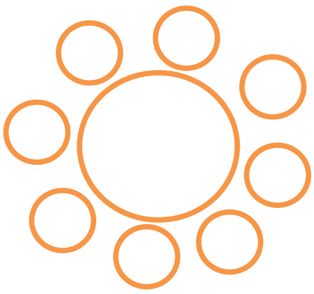
Desarrollo de la Actividad

- El profesor sortea un número del 1 al 15 (por ejemplo el 7).
- Luego, el docente pregunta a sus alumnos ¿Cuál es el número más cercano, que tienen en sus tablas al número sorteado? (en la tabla 1 "7.6310"; en la tabla 2 "7.3270").
- Después se elige al ganador, que es aquel alumno que tenga el número más cercano, acreditándose un punto (el ganador es el estudiante de la tabla 2).
- El ganador final del juego es el alumno que haya sumado 3 puntos.

<u>Desarrollo de la clase:</u>

A medida que se desarrolla la clase, se puede utilizar analogías para crear conectores que ayuden a recordar la materia a los alumnos. Por ejemplo:
El límite se puede definir como cuando uno dice "estoy harta, has llegado a mi *límite*". Esto ayudará a los estudiantes a recordar en parte el concepto de límite.

- ***<u>Técnica:</u>*** Se debe realizar una lluvia de ideas con respecto a esta frase. Se sugiere que se utilice el siguiente organizador gráfico para una mejor visualización.



¿Cómo realizar la lluvia de ideas?

En los círculos pequeños se colocan las ideas de los alumnos, mientras que en el círculo central se debe colocar una conclusión realizada en conjunto con el profesor.
Una de ellas podría ser “que existe un punto en donde ya se acaba la paciencia; sin embargo la noción de límite es algo parecido a esta frase pero con funciones”.

- ***Material Didáctico:*** Para esta clase necesitaremos el *“tablero de funciones”*. (Ver ***Anexo 4***).

Es necesario que el docente explique que en el Cálculo se analiza la forma en que varían ciertas funciones cuando tienen valores específicos. Por ello el cálculo también se define como un estudio de límites (ya que un límite es un valor específico).

Cabe recordar la proporcionalidad tanto directa como inversa, ya que en el estudio de límites existirán funciones racionales.

- ***Recuerde:*** Cada vez que se explique algo es necesario que el docente coloque ejemplos tan simples para que los alumnos puedan entender. Por lo general los ejemplos deben ser relacionados con la vida cotidiana.

Ejemplo: “Si mi padre gana $100 me regala $3; pero si gana $200 el me regala $6”. Otro ejemplo sería “Con 5 trabajadores mi casa se construirá en 2 meses; pero si contratara 10 trabajadores mi casa se construiría en 1 mes”.

- ***Técnica:*** Se pide a los alumnos que construyan en su cuaderno una tabla como la siguiente y que coloquen ejemplos de situaciones directa e inversamente proporcionales:

EJEMPLOS DE RELACIONES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES E INVERSAMENTE PROPORCIONALES	
Directamente proporcionales. Sus variables dependiente e independiente crecen simultáneamente.	**Inversamente proporcionales**. Su variable dependiente crece y su variable independiente disminuye o viceversa.
Si mis padres tienen ***más*** sueldo me darán ***más*** dinero.	A ***más*** llaves de agua, ***menor*** es el tiempo para llenar una piscina.

Se recordarán algunas funciones que serán objeto del estudio en los límites.

- Un ejemplo de función racional es la siguiente:

$$f\ \ x\ \ = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

En esta función podemos formular una pregunta:

- ***Técnica:*** Esta pregunta se puede organizar en cartulinas de la siguiente manera:

Pregunta

¿ Está definida cuando ?

Reemplace en la función para saber el valor.

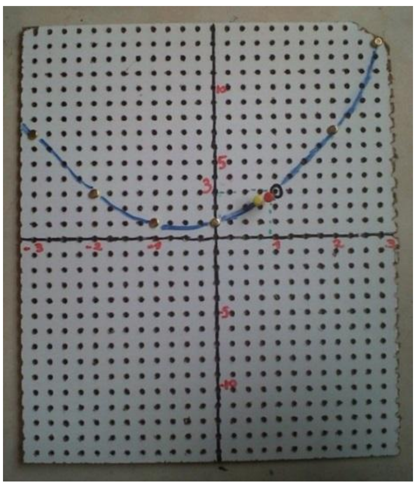
Respuesta (compruebe con su calculadora):

La respuesta obvia es que no, pues tendríamos $\frac{0}{0}$ que no se encuentra definida. Por ello se genera otra pregunta, "*¿existe algún valor cuando x se aproxima a 1?*" Para responder a esta pregunta es necesario analizar la gráfica correspondiente.

- ***Técnica:*** Se pide a los alumnos construir el grafo con valores desde -3 hasta 3(pero se puede tomar valores cercanos a 1 como 0.99 y 1.01), recordándoles que los 10 primeros alumnos pasarán a colocar sus respuestas en el *"tablero de funciones"*

El grafo o tabla de valores y la gráfica en el *tablero de funciones* será:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f\ \ x\ \ = \frac{x^3 - 1}{x - 1}}$
-2	$f\ \ -2\ \ = 3$
-1	$f\ \ -1\ \ = 1$
0	$f\ \ 0\ \ = 1$
0.5	$f\ \ 0.99\ \ = 2.97$
1	$f\ \ 1\ \ = No\ existe$
1.5	$f\ \ 1.01\ \ = 3.03$
2	$f\ \ 2\ \ = 7$
3	$f\ \ 3\ \ = 13$



Observando el *"tablero de funciones"* además del grafo, se concluye que la función $f(x)$ tiende a 3 cuando x tiende a 1.
Escribiendo en símbolos matemáticos tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

Se lee: "el límite cuando x tiende a 1 de $\frac{x^3-1}{x-1}$ es 3"

<u>Recuerde:</u> El docente debe explicar que tanto "x" como "L" no son valores propiamente dichos sino que t<u>*ienden*</u> a ser estos valores.

✘ Otro ejemplo de función es:

$$f(x)=\frac{Sen\,(x)}{x}$$

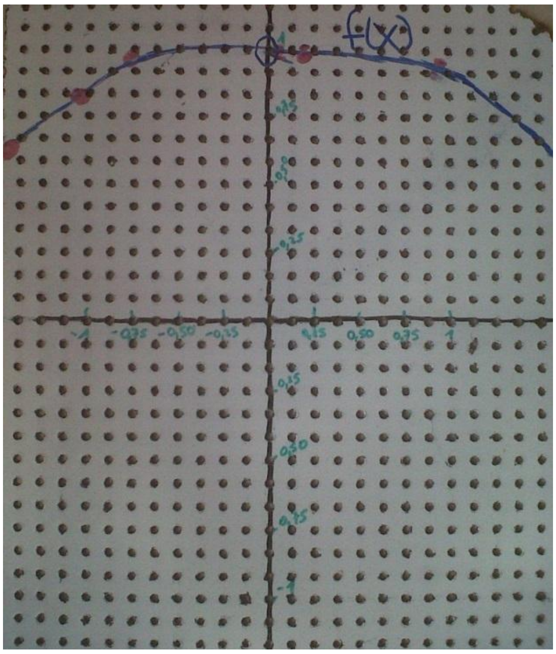
Pero si tenemos:

$$\text{Encontrar}\quad \lim_{x\to 0}\frac{Sen\,(x)}{x}$$

- ***<u>Técnica</u>:*** Se pide a los alumnos construir el grafo con su calculadora en radianes, recordándoles que los 5 primeros alumnos pasarán a colocar sus respuestas en el *"tablero de funciones"*

El grafo y la gráfica en el tablero de funciones serán (se deben sugerir los valores de "x" a los alumnos):

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)=\frac{Sen\,(x)}{x}}$
$-\frac{\pi}{4}=-0.78$	$f(-0.78)=0.90$
$-\frac{\pi}{3}=-1.05$	$f(-1.05)=0.83$
$-\frac{\pi}{2}=-1.57$	$f(-1.57)=0.63$
0	$f(0)=No\ existe$
$\frac{\pi}{20}=0.16$	$f(0.16)=0.99$
$\frac{\pi}{30}=0.10$	$f(0.10)=0.998$
$\frac{\pi}{4}=0.79$	$f(0.79)=0.90$
$\pi=3.14$	0



Observando la gráfica, concluimos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen\ (x)}{x} = 1$$

✘ Otra función es la función máximo entero, recordemos que:

$f\;\;x\;\;=\;\;x$ Al mayor entero igual o menor que x

Ejemplo: si $f\;\;3.95\;\;=\;\;3.95\;\;=3$

<u>Recuerde:</u> Ejemplificaremos la función máximo entero con algo de la vida cotidiana; cuando usted envía un paquete a otro lugar, se cobra de acuerdo al precio; por ejemplo de 0 a 1 Kg cuesta $\$25$ de 1 a 2 Kg cuesta $\$50$; esto quiere decir que no importan los valores intermedios pues si pesa 0.5 igual el costo es $\$25$.

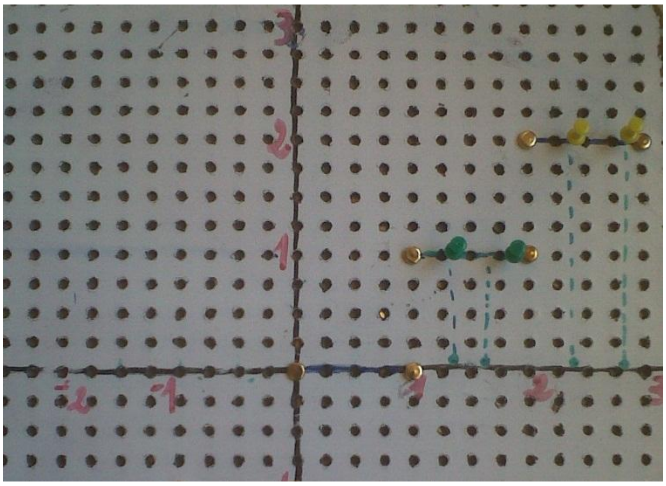
Entonces analicemos este ejemplo:

Encontrar el $\lim\limits_{x \to 2}\;\; x$

- ***<u>Técnica</u>:*** el profesor traza los puntos en el *"tablero de funciones"* y analiza conjuntamente con sus alumnos.

El grafo y la gráfica son:

x	$f\;\;x\;\;=\;\;x$
-1	$f\;\;-1\;\;=-1$
0	$f\;\;0\;\;=0$
1	$f\;\;1\;\;=1$
1.5	$f\;\;1.5\;\;=1$
2	$f\;\;2\;\;=2$
2.5	$f\;\;2.5\;\;=2$



Como podemos ver en la gráfica, si damos valores menores que 2 (lugar en donde se encuentran las tachuelas de color verde), el valor de $f\;\;x\;\;=\;\;x\;\;=1$ y cuando damos valores mayores y próximos a 2(lugar en donde se encuentran las tachuelas de color amarillo) entonces $f\ x\ =\ x\ = 2$ al acercarse de distintas maneras, no concuerdan los valores del límite; por lo tanto el límite no existe.

- ***Técnica:*** Cuando se coloca una nota para indicar algo importante, es necesario que en convenio con los alumnos se realice en el cuaderno un dibujo o logotipo que ayude a recordar lo aprendido.

NOTA: de las funciones propuestas, no necesariamente el límite debe existir.

No siempre es conveniente dar valores cercanos al número, existen otras maneras para definir límites como por ejemplo utilizar el álgebra.

Ejemplo:

Encuentre el $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

Es importante que el docente use marcadores de otro color para denotar que existe un caso de factorización:

Realizando la factorización tenemos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3\quad x+2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\ x+2\ = 3+2 = 5$$

Recuerde: Los alumnos probablemente hayan olvidado los casos de factorización; por esto se debe enviar un trabajo grupal que resuma los 10 casos de factoreo para una mejor comprensión del tema.

ACTIVIDAD ENTRE CLASE

Actividad: "*Sopa de límites*"

Instrucciones:

- Formar grupos de 5 personas.
- Se entrega a cada grupo 5 tableros y tarjetas. (Ver ***Anexo 5***)
- Se voltean las tarjetas de manera que no se puedan ver los ejercicios y cada jugador por turno elige una tarjeta.

- Los jugadores resuelven el límite, buscan la respuesta en su tablero y lo marcan.
- Gana el jugador que consigue marcar primero 4 casilleros consecutivos.

Para el siguiente caso es necesario tener presente las gráficas de las funciones trigonométricas pues ayudarán a una mejor comprensión del ejemplo:

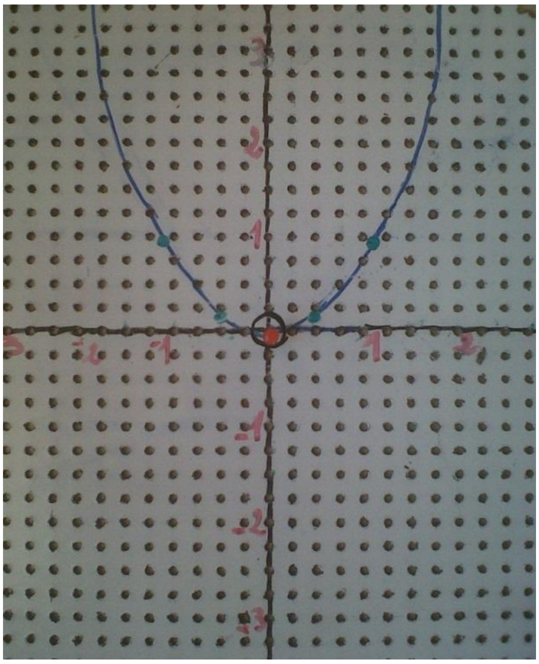
Encuentre $\lim_{x \to 0} \ x^2 - \frac{Cos\ x}{10}$

- ***<u>Técnica:</u>*** El profesor pide a sus alumnos que construyan la tabla de valores. El docente construye la gráfica de acuerdo a la función $cos\ x$. Se analiza conjuntamente los diversos valores.

El grafo y la gráfica son las siguientes:

x	$f\ \ x\ \ =\ \ x^2 - \frac{Cos\ x}{10}$
-1	0.95
-0.5	0.16
0	-0.1
0.5	0.16
1	0.95

:



Si reemplazamos directamente el valor del límite, se puede ver que sí existe un valor, en este caso es -0.1 y por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} x^2 - \frac{Cos\ x}{10} = 0^2 - \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$$

Evaluación Informal: Actividad: "Pares y límites"

Instrucciones:

- Formar grupos de 5 personas, a quienes se les entrega 10 tarjetas rojas y 10 tarjetas azules.
- Las 10 tarjetas rojas contienen ejercicios propuestos acerca de límites y las 10 tarjetas azules contienen las respuestas a estos ejercicios. Las cartas deberán estar volteadas boca abajo. (Ver ***Anexo 6***)
- Por turnos los alumnos voltean una tarjeta roja y una azul, luego realizan el ejercicio y verifican si se trata de la respuesta.
- El alumno ganador es aquel que complete 2 pares correctos.

Evaluación Formal: **(**Ver ***Anexo 7***)

3.1.2. LÍMITES UNILATERALES.

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema y crear en el estudiante la noción de un límite unilateral. Para ello solo utilizaremos la función *máximo entero*.

Actividad 1: Se dibuja en la pizarra un cuadro como el siguiente:

Jugadores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Llegada
#1													
#2													
#3													
#4													
#5													
#6													
#7													

- El profesor reparte a cada alumno un ejercicio a manera de sorteo.
- Los alumnos resuelven dicho ejercicio (solo se propondrán ejercicios con respecto a la función máximo entero y que el resultado no sobrepase a 4).
- Los alumnos avanzan en el tablero según el resultado obtenido.

- Es el ganador, quien llega primero a la meta.

Actividad 2: Analicemos una factura.

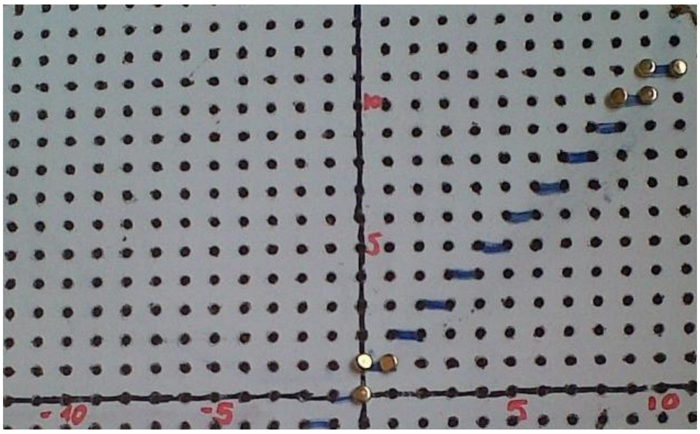
- Se construye con los estudiantes una factura de consumo de agua.
- Se analiza los intervalos de consumo de agua con sus costos respectivamente.
- Por ejemplo:
  $F = 0.20x \ en \ el \ intervalo \ de \ 0 - 30m^3$
  $F = 0.30x \ en \ el \ intervalo \ de \ 30m^3 - 100m^3$
- Se concluye haciendo diversas preguntas como:
  ¿Cuánto pago si consumí $28m^3$?
  ¿Cuánto cancelo si consumo $10m^3$?
  ¿Qué sucede si se sobrepasa de $30m^3$?

Desarrollo de la clase:

Existen funciones que tienen “saltos” es decir, sus gráficas no son continuas. Por ello, el límite no existe en los puntos donde salta la gráfica.

Tomaremos el ejemplo de $f \ x \ = \ x$ cuya gráfica es:

- ***Técnica:*** El profesor traza la gráfica en el *“tablero de funciones”* y analiza conjuntamente con sus alumnos.



Como se ve, la gráfica presenta saltos, además se había analizado que el límite no existía sin embargo es correcto escribir lo siguiente:

Cuando x se aproxima a c , en este caso a 2 por la *derecha* tenemos:

$$\lim_{x\to 2^+} x \;= 2$$

Cuando x se aproxima a c , en este caso a 2 por la _izquierda_ tenemos:

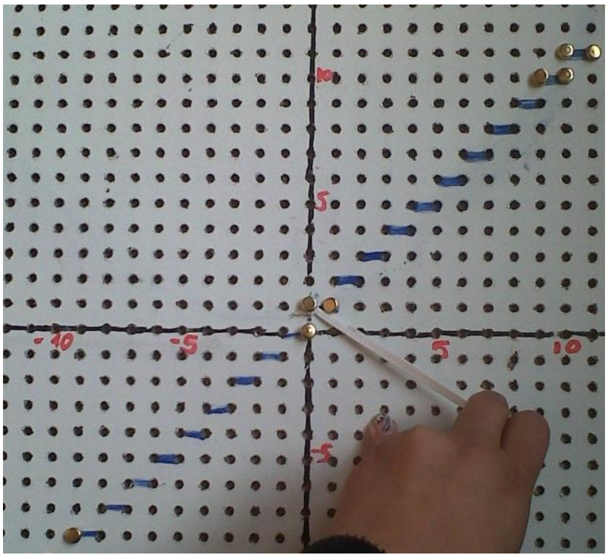
$$\lim_{x\to 2^-} x \;= 1$$

En lo anterior, se puede observar que cuando nos aproximamos por la derecha utilizamos el $signo\ +$ y cuando nos aproximamos por la izquierda utilizamos el $signo\ -$.

Por todo lo mencionado es evidente que existen *límites unilaterales.* Sin embargo es necesario escribir la relación que existe entre *los límites* y *los límites unilaterales.*

- ***Técnica:*** Una vez realizada la gráfica de la función máximo entero, es necesario que en *tablero de funciones* se coloque una liga; esto a su vez ayudará para que los alumnos entiendan la aproximación a cada número.

  Observe el gráfico:



Sea a un punto de un intervalo y f una función definida en todo el intervalo excepto posiblemente en a. Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ Sí y solo sí } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Con este teorema podemos deducir que el límite solo existe sí y solo sí el límite por la izquierda y por la derecha *existen y son iguales*.

- ***Técnica:*** Se puede resumir este teorema en una cartulina para pegarla en el aula (recuerde que es mejor realizarlo con gráficos) así:

Si el límite es igual ya sea por la derecha o por la izquierda, el límite existe

Si el límite es $=$ ya sea por la derecha $\Leftarrow$ o por la izquierda, $\Rightarrow$ el límite existe

Para una mayor comprensión de este teorema ilustraremos lo mencionado con el siguiente ejemplo:

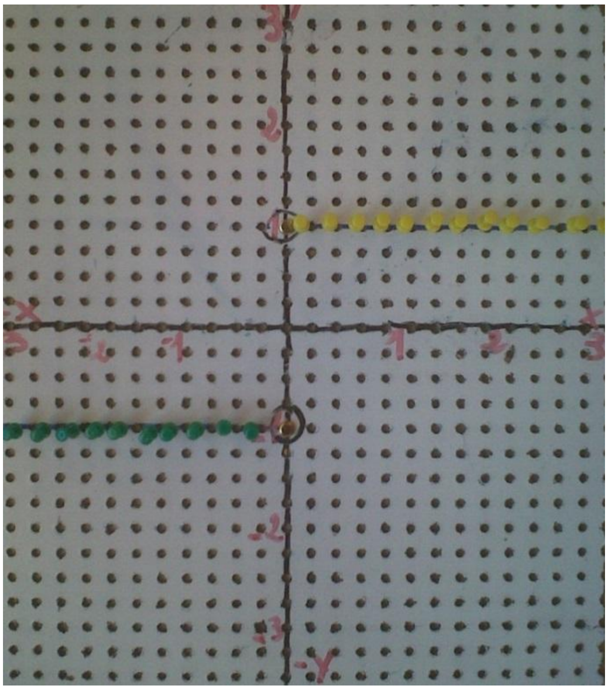
Ejemplo:

Sea $f(x) = \frac{x}{x}$ Calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

- ***Técnica:*** El profesor pide a los alumnos que tracen la gráfica en el *"tablero de funciones"* del siguiente ejercicio (es necesario que los valores de "x" los establezca el docente).

Se obtendrá la siguiente gráfica con su respectivo grafo:

x	$f(x) = \frac{x}{x}$
-0.30	$f(-0.30) = -1$
-0.15	$f(-0.15) = -1$
0	$f(0) = No\ existe$
0.15	$f(0.15) = 1$
0.30	$f(0.30) = 1$



- ***Técnica:*** Una vez concluida la gráfica en el tablero de funciones, se realiza una lluvia de ideas (se recomienda utilizar un ordenador gráfico con cartulinas para que los alumnos pasen a exponer), el profesor debe inducir a las siguientes conclusiones.

Profesor

Pregunta 1

¿ Está definida cuando ?

⇒

Alumno

Respuesta (compruebe con su calculadora):

No está definida

Profesor

Pregunta 2

¿Qué pasa si x es mayor que 0 es decir o por la derecha?

⇒

Alumno

Respuesta

Entonces y por lo tanto – entonces:

Profesor

Pregunta 3

¿Qué pasa si x es menor que 0 es decir o por la izquierda?

⇒

Alumno

Respuesta

Entonces y por lo tanto – entonces:

Profesor

Pregunta 4

¿El límite existe?

⇒

Alumno

Respuesta

El límite no existe porque los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales,

Evaluación Informal: *Actividad:* “Descubre la frase” (Ver ***Anexo 8***)

- Se forman grupos de 5 estudiantes como máximo.
- El profesor previamente prepara un ejercicio de apertura del juego y entrega a los grupos.
- Los grupos resuelven el ejercicio y a medida que terminen, se acercarán al profesor para recibir una primera pista.
- La pista consiste en un fragmento de una gran frase, acompañado de un nuevo ejercicio.
- Una vez que se haya resuelto el ejercicio accederán a una nueva pista con su respectivo ejercicio.
- El ganador es el grupo que tiene todos los fragmentos de la frase de tal forma que esta tenga sentido. (La frase a descubrir es: “El límite existe sí y solo sí los límites por la derecha y por la izquierda son iguales”)

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 9***)

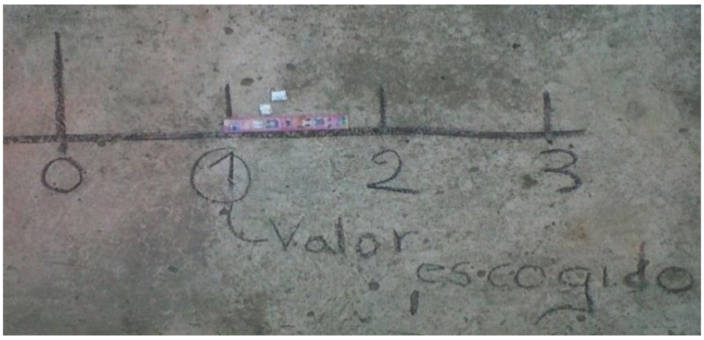
3.1.3. ESTUDIO FORMAL DE LÍMITES.

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema y conocer los valores próximos a un número.

Actividad: “La raya”

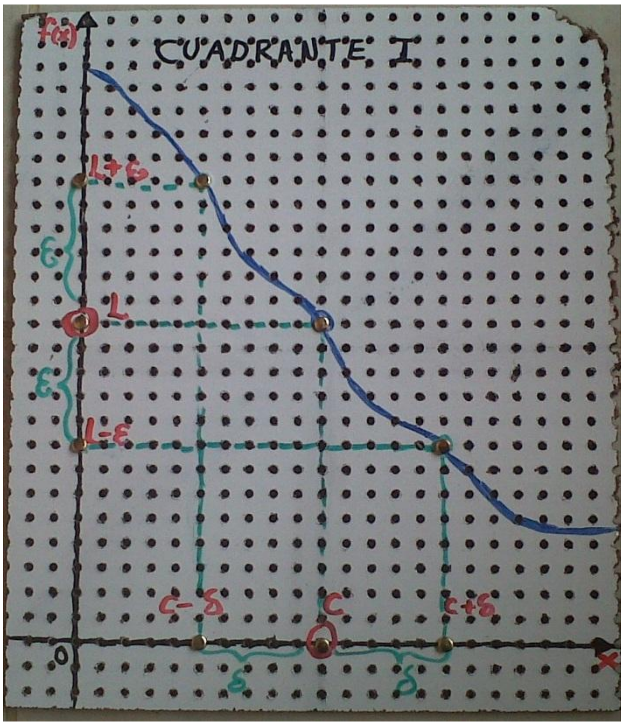
- Esta actividad es al aire libre.
- Se forman grupos de 5 personas, y trazan sobre el patio una recta numérica con tiza. (la escala es al gusto del profesor)
- Se escoge un número de referencia a elección del grupo.
- Los alumnos por turnos lanzan una ficha (fichas blancas en la fotografía) luego miden con una regla la distancia desde el valor escogido hasta la ficha.
- El alumno ganador es aquel que se acercó más a los valores asignados.



<u>Desarrollo de la clase:</u>

En los temas anteriores hemos dado una definición informal de límite que fue $\text{lím}_{x\to a} f(x) = L$ cuando x está muy próximo a a. Sin embargo cabe realizarse una pregunta ¿Qué tan cerca está x de a? Por ello, es necesario realizar una precisión en *"que tan cerca"* está el valor.

- ***<u>Técnica:</u>*** Es necesario utilizar el tablero de funciones diferenciando con diversos colores los valores de ε y δ que son los incrementos. es imprescindible que cada una de las siguientes conclusiones se analicen conjuntamente con el tablero para una mejor comprensión del tema, así:



Con respecto a esto se han de utilizar las letras del alfabeto griego para definir incrementos muy pequeños.
Cuando el incremento es con respecto al eje "x", se nombra con la letra δ y se cumple lo siguiente:

$$0 < |x - c| < \delta$$

Cuando el incremento es con respecto al eje "y", se nombra con la letra ε y se cumple lo siguiente:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Por ello el nuevo concepto de límite quedaría de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

Sí $0 < \left| x - c \right| < \delta$, entonces $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

Nota: Los valores de ε y δ deben considerarse como valores muy pequeños.

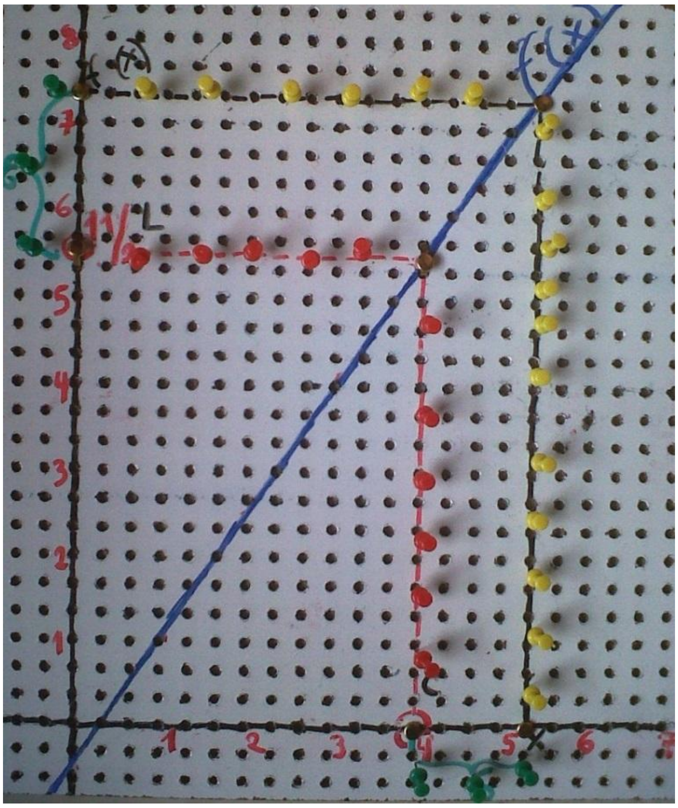
Ejemplo:

Comprobar que $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{11}{2}$ y demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$

Primero se debe identificar los valores de $a, L, f(x)$ correspondientes y son:

$\boldsymbol{c} = 4$ $\boldsymbol{L} = \frac{11}{2}$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(3x - 1)$

- ***Técnica:*** Es necesario realizar una gráfica en el tablero de funciones para una ayuda en el presente ejercicio. Se debe trabajar con los incrementos nombrándolos con las letras ε y δ para construir las siguientes igualdades.



Construimos las desigualdades en base al razonamiento y la observación de la gráfica del tablero.

Para construir la desigualdad $\boldsymbol{0 < x - c < \delta}$

Utilizamos el *tablero de funciones* con la gráfica de la fotografía; el valor de $c = 4$ ademas a $f\ x$ le corresponde un valor de x puede ser cualquier valor, entonces como lo que queremos demostrar es que para todo $0 < \delta$ existe un $0 < \varepsilon$ decimos que si a "x" le restamos el valor de c tenemos un valor que corresponde a δ y es mayor que 0 (lo podemos observar en la gráfica a pesar que esta un poco exagerado) por lo tanto: $0 < x - 4 < \delta$

Para construir la desigualdad de $\boldsymbol{f\ x - L < \varepsilon}$

Tenemos que $L = \frac{11}{2}$ y $f(x) = \frac{1}{2}\ 3x - 1$ que son los datos del ejercicio. Como podemos ver, la gráfica en el *tablero de funciones* nos muestra que el valor de ε corresponde a la resta de un punto cualquiera de la función $f(x)$ menos el valor correspondiente de $L = \frac{11}{2}$. En la fotografía es claro que el valor de ε existe y es mayor que cero. Por lo tanto: $\frac{1}{2}\ 3x - 1\ - \frac{11}{2} < \varepsilon$

Luego de armar las desigualdades con el debido razonamiento, primero resolvemos la desigualdad de ε para tener una idea de cómo elegir la δ.

$$\frac{1}{2}\ 3x - 1\ - \frac{11}{2} < \varepsilon$$
$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{11}{2} < \varepsilon$$
$$\frac{3x - 1 - 11}{2} < \varepsilon$$
$$\frac{3x - 12}{2} < \varepsilon$$
$$\frac{3(x - 4)}{2} < \varepsilon$$
$$x - 4 < \frac{2}{3}\varepsilon$$

Comparando con la primera desigualdad, se satisface la ecuación con el valor de $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$ y se cumple las condiciones por lo tanto el valor de $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}\ 3x - 1\ = \frac{11}{2}$ es correcto.

Evaluación Informal: "Párame la mano"

- El profesor propone que cada alumno arme el siguiente cuadro en su cuaderno:

Límites propuestos	$f(x)$	c	L	Desigualdad con respecto a ε	Desigualdad con respecto a δ
$\lim_{x\to 3} 5x-11 = 4$					
$\lim_{x\to 2} 2x-4 = -8$					
$\lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = 2$					
$\lim_{x\to 2} \sqrt{2x} = 2$					
$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = 10$					

- El docente escribe en la pizarra un primer ejercicio de límite, a lo que los alumnos tienen que completar el cuadro.
- El primer alumno en terminar dice ¡*Párame la Mano*!

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 10***)

3.1.4. TEOREMAS DE LÍMITES.

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema y recordar los términos utilizados en las clases anteriores.

Actividad: "Sopa de términos"

- Se tiene la siguiente sopa de letras:

M	E	N	O	S	C	F	T	Z	U	G	D	P	A
B	X	A	T	L	E	D	R	W	F	P	K	S	H
N	N	O	L	I	S	P	E	T	S	I	X	E	C
A	C	A	L	C	U	L	O	B	X	Ñ	D	T	E
I	Z	Q	U	I	E	R	D	A	S	P	W	I	R
R	L	A	B	I	C	Y	U	G	H	S	A	M	E
A	F	Ñ	R	U	G	S	E	L	A	U	G	I	D
V	E	S	P	E	C	I	F	I	C	O	S	L	C

Palabras:
- Cálculo
- Límites
- Varían
- Específicos
- Existe
- Derecha
- Izquierda
- Iguales
- Menos
- Mas
- Épsilon
- Delta

- Con ayuda de sus apuntes los alumnos recurrirán a buscar las palabras que completen los siguientes conceptos:

- En el ___________se analiza la forma en que ____________ ciertas cantidades cuando tienen valores _____________.
- El Cálculo también se define como un estudio de _____________.
- El límite __________ si y solo si el límite por la __________ y por la __________ son___________.
- El límite por la derecha se simboliza con el signo ___________ y por la izquierda con el signo ______________
- ________________ es el incremento con respecto a y
- ________________ es el incremento con respecto a x

<u>Desarrollo de la clase:</u>

Utilizando el tema anterior es complicado demostrar la existencia de límites. Por ello, en este tema se emplearán los teoremas de límites que serán de gran ayuda.

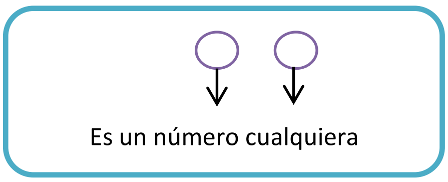
En los siguientes teoremas se definirá como **funciones** a f y g, como un **número entero** a n y una **constante** k con límites en c. Se explica con un ejemplo para una mejor comprensión de cada teorema.

- ***<u>Técnica:</u>*** Cuando se tiene un grupo de teoremas, es importante que se realicen carteles con gráficos y asociar los colores con cada teorema, luego se colocan en el aula para entender cada ejercicio desarrollado; también nos ayudará el "*tablero de funciones*"

<u>Teorema 1</u>

1) $\lim_{x \to c} k = k$

<u>Cartel</u>



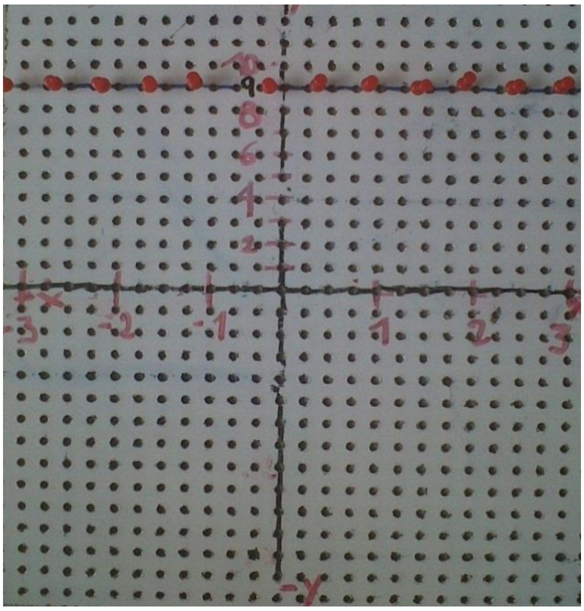
Ejemplo:

- Encontrar el límite de $\lim_{x \to 3} 9$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\lim_{x \to 3} 9 = 9 \text{ Ya que } k = 9$$

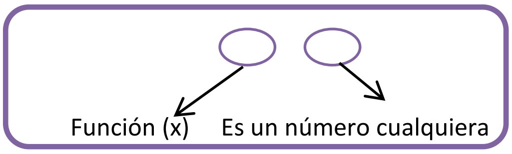
En la gráfica, se nota una línea recta en el 9 y esa es la constante (cabe decir que siempre será 9):



Teorema 2

2) $\lim_{x \to c} x = c$

Cartel

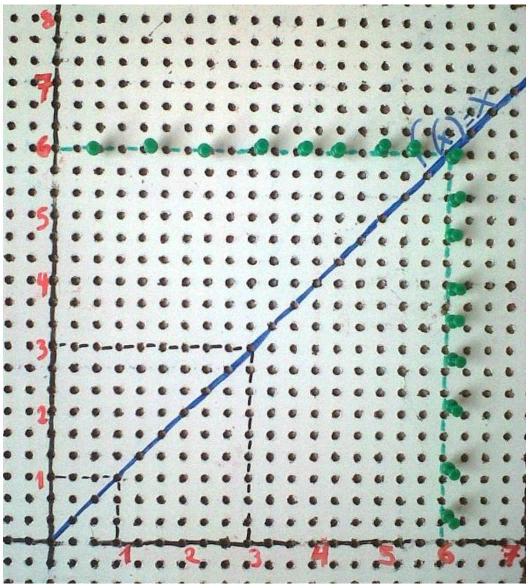


Ejemplo:

- Encontrar el límite de $\lim_{x \to 6} x$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\lim_{x \to 6} x = 6 \text{ Ya que } x = 6$$



Teorema 3

3) $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$

Cartel

Es un número cualquiera — Es una función cualquiera

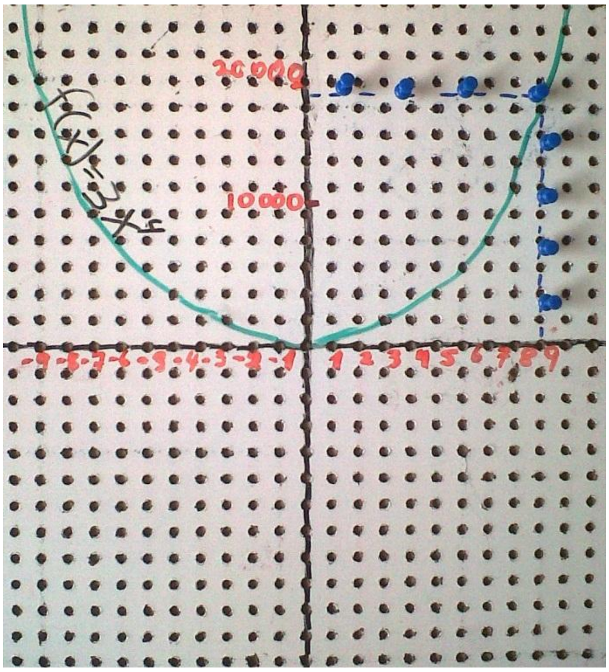
Ejemplo:

- Encontrar el límite de $\lim_{x\to 9} 3(x^4)$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\lim_{x\to 9} 3(x^4) = 3\lim_{x\to 9} x^4 = 3(9)^4 = 19\ 683$$

La gráfica en el *tablero de funciones* es:



Recuerde: Como se observa, en los ejemplos las funciones son continuas, por ello se reemplaza directamente el valor, cuando las funciones tienen una restricción como en el caso de las funciones que tienen la variable independiente en el denominador, se debe dar valores próximos a c.

<u>Teorema 4</u>

4) $\text{lím}_{x\to c}\ f\ \ x\ \ + g(x)\ \ = \underset{x\to c}{\text{lím}} f\ \ x\ \ + \underset{x\to c}{\text{lím}} g\ \ x$

Cartel

Son funciones cualquieras diferentes

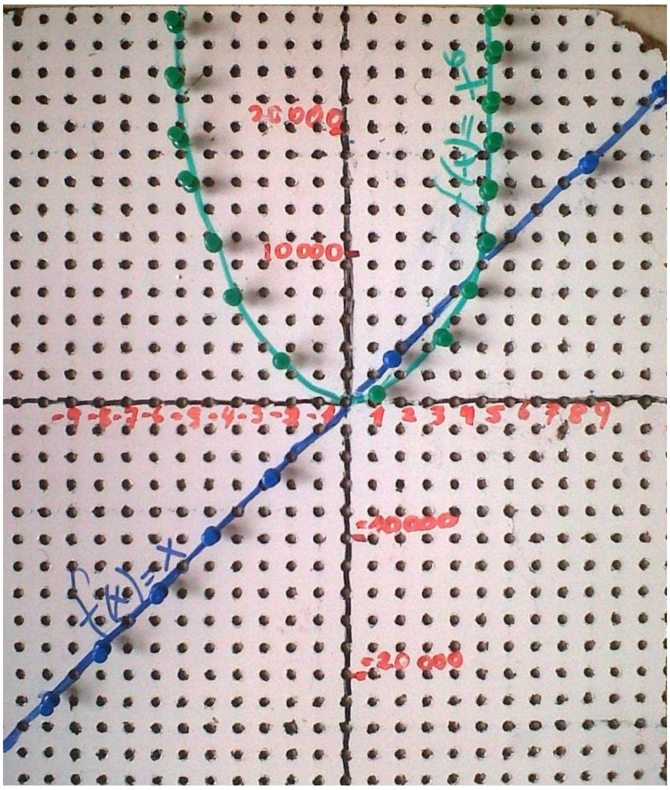
Ejemplo:

- Encontrar el $\text{lím}_{x\to 5}\ x + x^6$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\underset{x\to 5}{\text{lím}}\ x + x^6\ \ = \underset{x\to 5}{\text{lím}}\, x + \underset{x\to 5}{\text{lím}}\, x^6 = 5 + (5)^6 = 15\ 630$$

La gráfica en el *tablero de funciones* sería:



En este caso, estamos graficando las dos funciones por separado ya que se pretende explicar el límite de cada una de ellas.

Teorema 5

5) $\lim_{x\to c}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

Cartel

Son funciones cualquieras diferentes

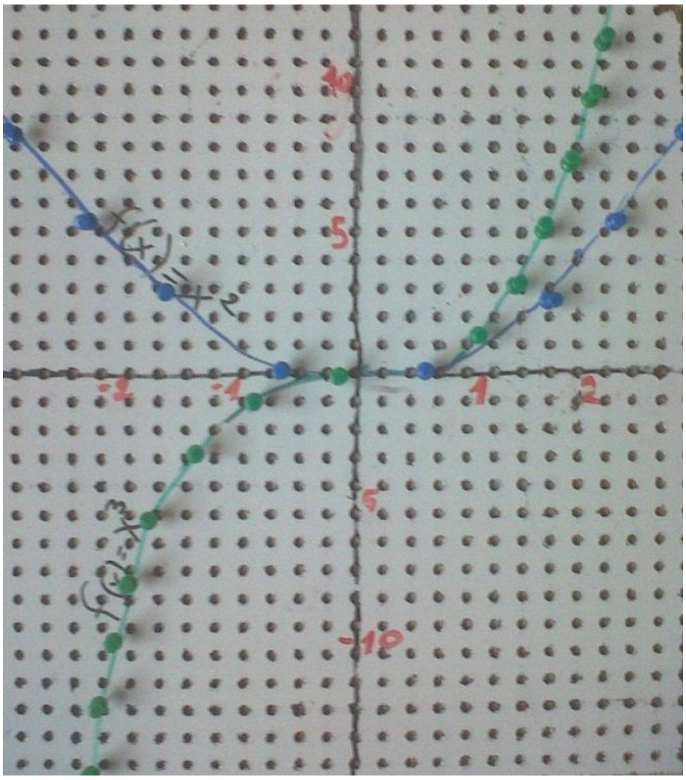
Ejemplo:

- Encontrar el $\lim_{x\to 2}\left(x^3 - x^2\right)$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3 - x^2\right) = \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} x^2 = (2)^3 - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

La gráfica en el *tablero de funciones* sería:



Teorema 6

6) $\text{lím}_{x\to c}\ f\ \ x\ \ .g(x)\ \ = \underset{x\to c}{\text{lím}} f\ \ x\ \ .\underset{x\to c}{\text{lím}} g\ \ x$

Cartel

Son funciones cualquieras diferentes

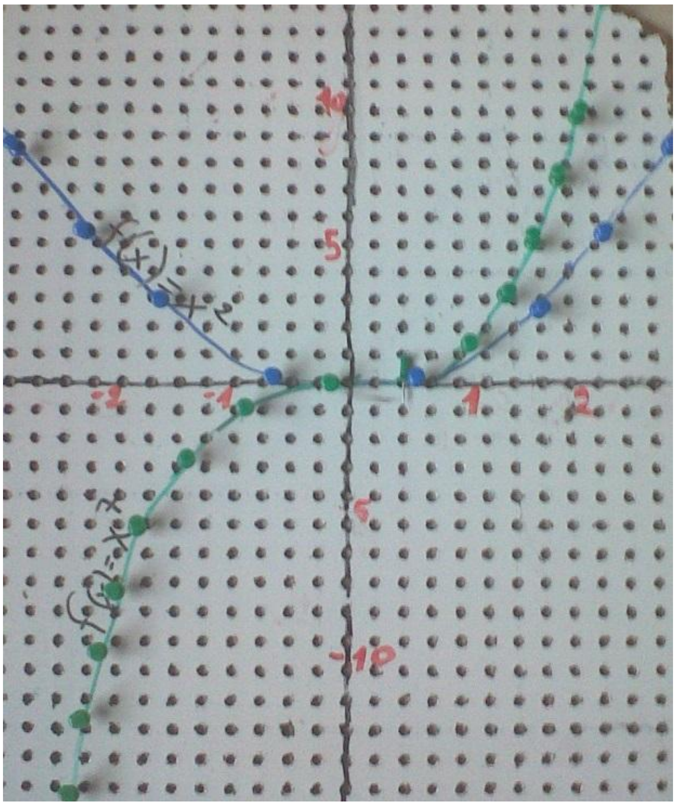
Ejemplo:

- Encontrar el $\text{lím}_{x\to 1}\ x^2.x^7$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\underset{x\to 1}{\text{lím}}\ x^2.x^7\ = \underset{x\to 1}{\text{lím}} x^2.\underset{x\to 1}{\text{lím}} x^7 = (1)^2.(1)^7 = 1$$

La gráfica sería:



Teorema 7

7) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ ya que $\lim\limits_{x \to c} g\ x\ \neq 0$

Cartel

Son funciones cualquieras diferentes

El límite de la función g(x) no puede ser cero

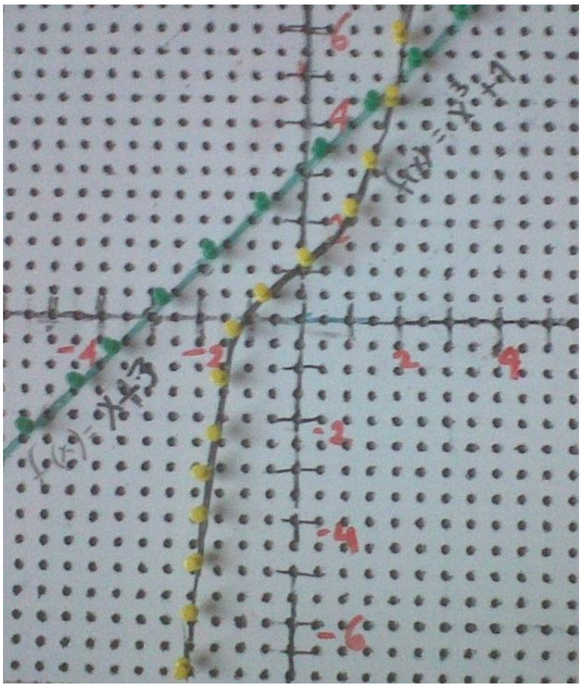
Ejemplo:

- Encontrar el $\lim_{x \to 3} \frac{x^3+1}{x+3}$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3+1}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^3+1}{\lim\limits_{x \to 3} x+3} = \frac{(3)^3+1}{3\ +3} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

La gráfica en el *tablero de funciones* sería:



Teorema 8

8) $\lim\limits_{x\to c} \; f(x) \;^{n} = \; \lim\limits_{x\to c} f(x) \;^{n}$

Cartel

Es un número cualquiera

Es una función cualquiera

Ejemplo:

- Encontrar el $\lim_{x\to 1} \; \frac{x^2-x}{x-1} \;^{2}$

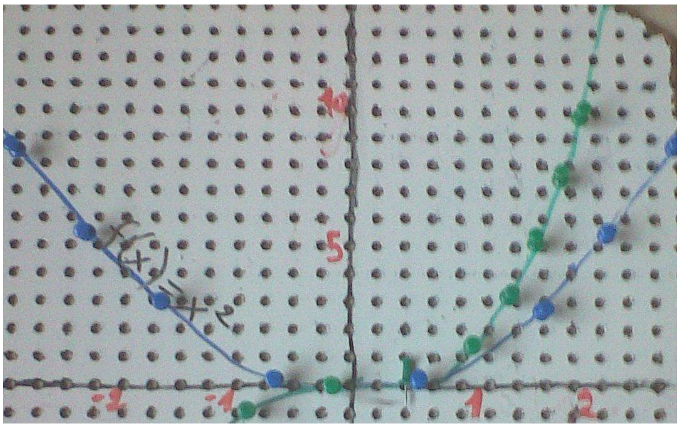
Por el teorema anterior tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} \; \frac{x^2-x}{x-1} \;^{2} = \; \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} \;^{2}$$

Si aplicamos directamente el teorema 7, tendríamos $\frac{0}{0}$; por ello realizamos un caso de factoreo contenido en el numerador:

$$\lim_{x\to 1} \; \frac{x^2-x}{x-1} \;^{2} = \; \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} \;^{2} = \; \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} \;^{2} = \; \lim_{x\to 1} x \;^{2} = (1)^2 = 1$$

Por lo tanto la gráfica en el *tablero de funciones* es:



Teorema 9

9) $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ya que $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ cuando n es par

Cartel

Es un número entero

Es una función cualquiera

El *límite* de una función es mayor que cero cuando es par.

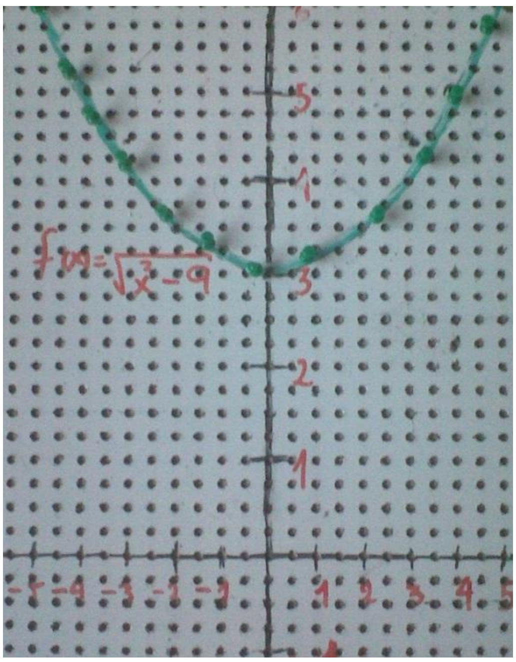
Ejemplo:

- Encontrar el $\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2+9}$

Por el teorema anterior tenemos que:

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2+9} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+9)} = \sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9} = \sqrt{(4)^2+9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Por lo tanto la gráfica en el *tablero de funciones* es:



Evaluación Informal: "Bingo de límites"

- La actividad consiste en el tradicional juego del bingo aplicado a ejercicios de teoremas de límites.(Ver ***Anexo 11***)
- El docente conjuntamente con sus estudiantes deciden si van a jugar tabla llena o solo 5 en línea ya sea horizontal, vertical o diagonal.
- El profesor entrega a los estudiantes las tablas de bingo. Estas tablas contienen las respuestas tanto de teoría como de algunos ejercicios propuestos.
- Se sortea un número (cada número tiene un ejercicio asignado).
- Se coloca un ejercicio o una pregunta en la pizarra y los alumnos resuelven mencionado ejercicio o responden la pregunta en conjunto con el profesor.
- Luego los estudiantes revisan en sus tablas si tienen la respuesta. En el caso de tenerla, colocan una ficha.
- El estudiante que tiene 5 aciertos o tabla llena (depende el acuerdo primero) gana el juego.

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 12***)

3.2. DERIVADA

3.2.1. DEFINICIÓN Y NOTACIÓN DE DERIVADA

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema e inducir a que el estudiante conozca que la derivada es un límite cuando x tiende a cero.

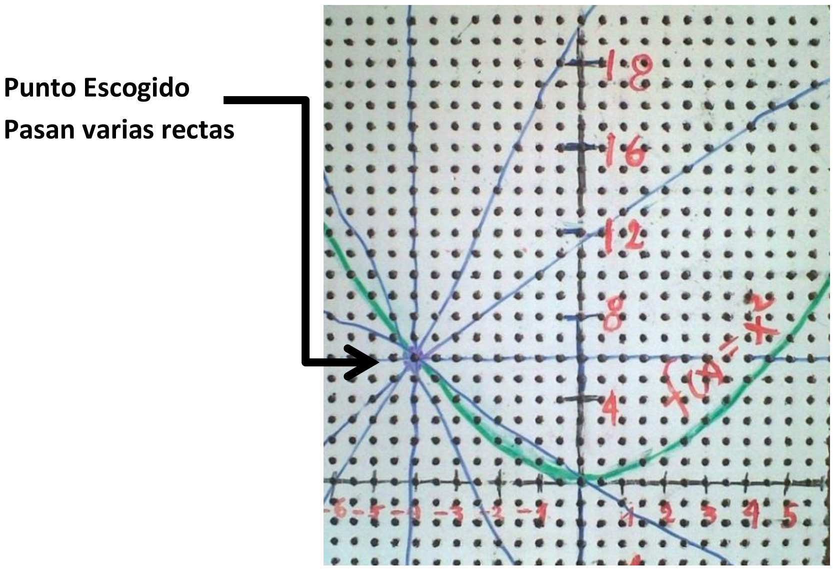
Actividad: Juego de Aproximaciones

- Se debe formar grupos de tres estudiantes, cada grupo tendrá el tablero para el juego (Ver ***Anexo 13***).
- Una vez establecido el tablero, se debe contar con dos tetraedros de color rojo y negro, (debidamente numerados del 1 al 4) y un dado de color azul con los números del 1al 6 (Ver ***Anexo 13***).
- Se establece un convenio con los estudiantes:
  El tetraedro de color *negro* será el *denominador.*
  El tetraedro de color *rojo* será el *numerador.*
  El dado de color *azul* será el que *avance* en el tablero.

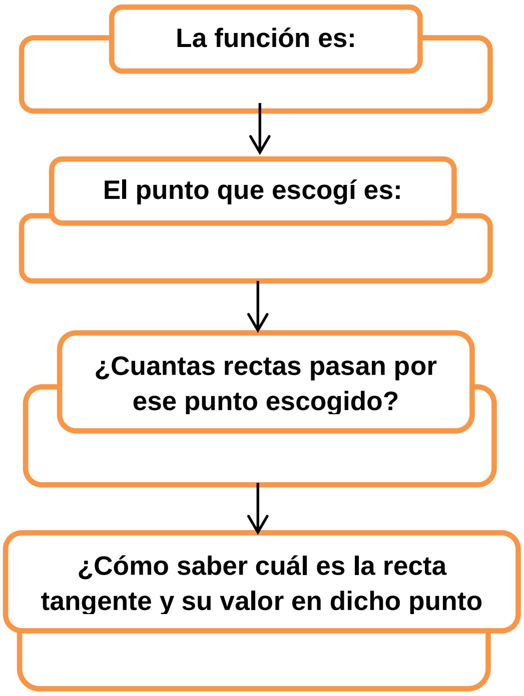
- Para el juego se procederá de la siguiente manera:
  - ✓ Cada alumno es un jugador y lanza los tetraedros que formarán una fracción. Por ejemplo $\frac{1}{2}$ (No existirán valores mayores a 4)
  - ✓ Luego, deberá resolver el límite que se encuentra al principio del tablero, de tal forma que el valor de $x \to$ será la fracción que se obtuvo (en el ejemplo es $x \to \frac{1}{2}$).
  - ✓ Si el estudiante lo realiza bien (podría preguntar al profesor), toma el dado y avanza los espacios que muestre el dado.
  - ✓ Se realiza esto por turnos hasta que el ganador será la persona que llegue primero a la meta.

<u>Desarrollo de la clase:</u>

Es muy importante enfatizar que la derivada es un límite cuando su incremento tiende a cero.
Además de ser un límite, la derivada nos sirve en la aplicación a diferentes asignaturas que se verá en el tema de *<u>APLICACIÓN DE LA DERIVADA.</u>* Sin embargo, un concepto inicial de la derivada es que es la *pendiente de la recta tangente en un punto*, así como también la *velocidad instantánea*.
Para una mejor comprensión del concepto, vamos a ilustrar en el "*<u>tablero de funciones"</u>*, una función cualquiera (por ejemplo: $f(x) = x^2$), de inmediato se les pide que dentro de la función escojan un punto cualquiera y marquen con una señal.
Luego, se debe dibujar varias rectas que pasen por el punto que escogieron. Se encontrarán que existen varias rectas que pasan en ese punto. Por ello, nace la pregunta ¿Cuál es la recta tangente a dicho punto?



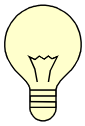
Se puede utilizar un organizador gráfico para deducir la información:



Para responder a la última pregunta, se introduce una definición como la siguiente:

La derivada de una función, es otra función que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Nota: *La expresión $f'(x)$ lee: "f prima de x"*

Cabe recalcar que el límite debe existir. El símbolo Δx es el incremento de la función.

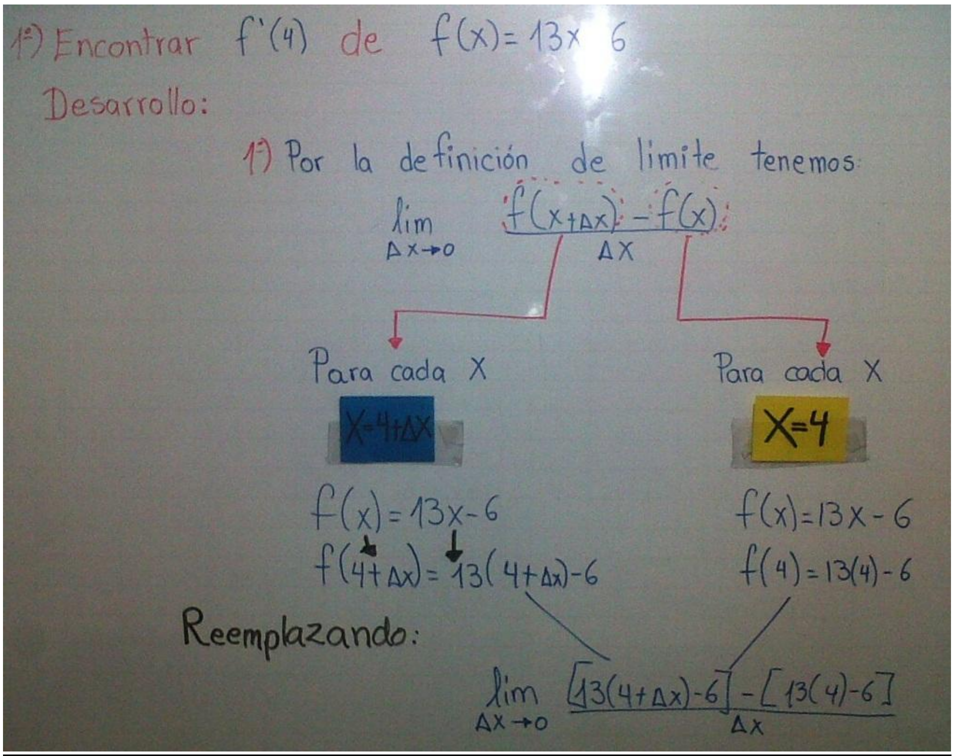
Ilustraremos esta definición con un ejemplo para una mejor comprensión:

Ejemplo 1:

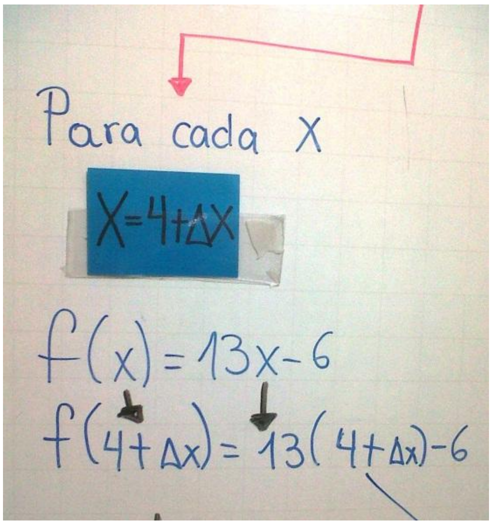
- Sea $f(x) = 13x - 6$. Encuentre $f'(4)$

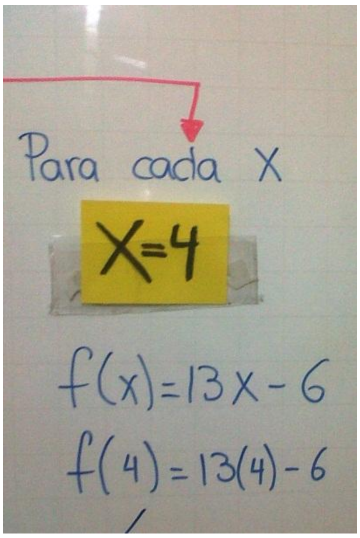
Por lo anterior, sabemos que $x = 4$.Por cada $f(4) = 13(4) - 6$ y por cada $f(4+\Delta x) = 13(4+\Delta x) - 6$.

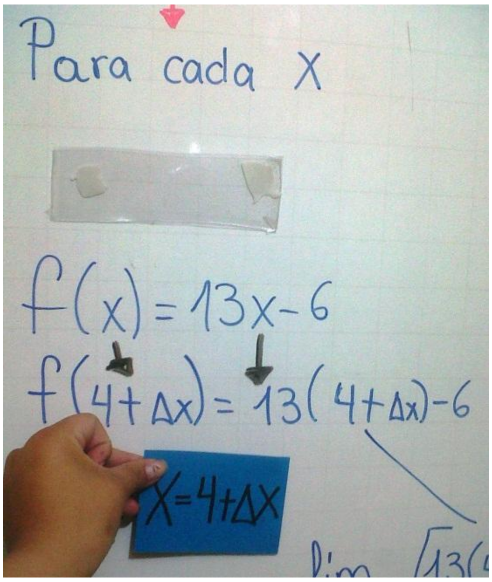
- **<u>Técnica:</u>** Esto se lo puede colocar en una tarjeta en la pizarra con forro de mica para cada ejercicio, ya que siempre se va a realizar el mismo reemplazo en “x”. Así:

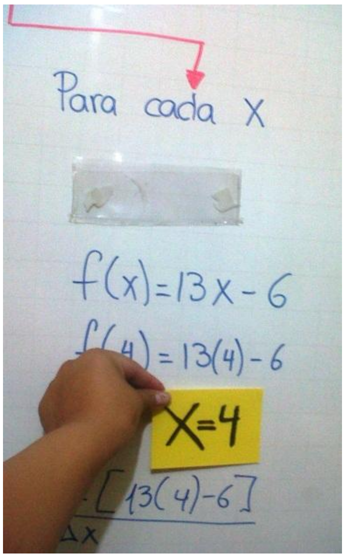


Mientras se desarrolla el ejercicio, se mueve la tarjeta para una mejor comprensión del reemplazo de x









Por lo tanto tenemos:

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[13(4+\Delta x) - 6] - (13(4) - 6)}{\Delta x}$$

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{52 + 13\Delta x - 6 - 52 + 6}{\Delta x}$$

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{13\Delta x}{\Delta x}$$

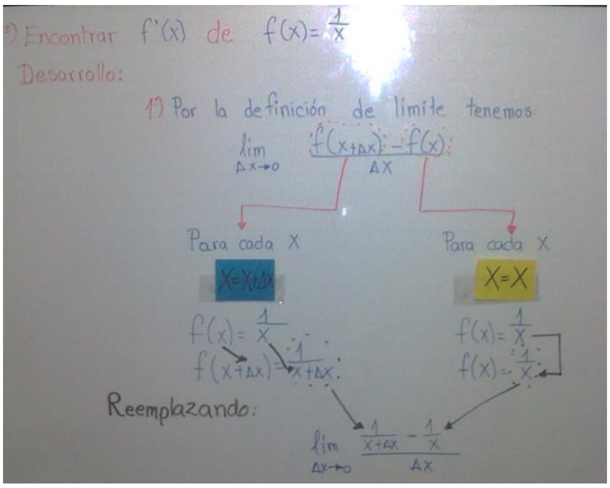
$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} 13$$

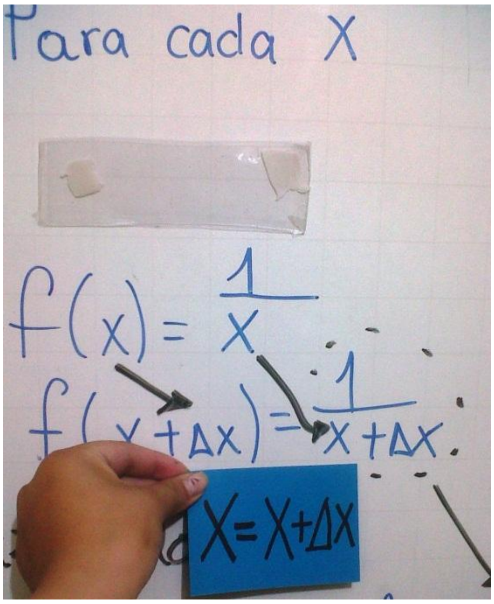
$$f'(4) = 13$$

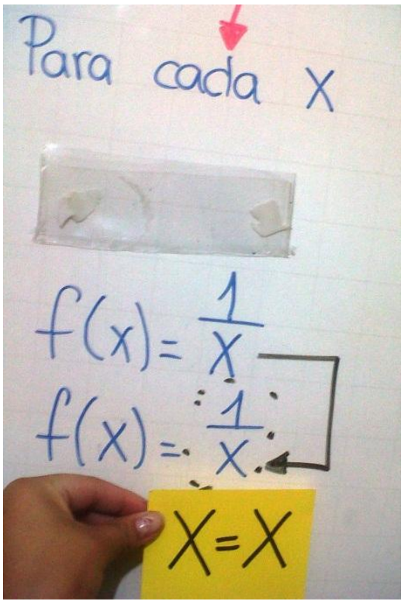
Nota: De este ejercicio podemos deducir que si $f'(c)$, siendo $c = constante$ existe, entonces f es continua en c

Ejemplo 2:

- Si $f(x) = \frac{1}{x}$ encuentre $f'(x)$.







Por lo anterior, sabemos que $f(x)=\frac{1}{x}$ y Por lo tanto $f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}$ reemplazando en el concepto de la derivada tenemos:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-x-\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x.x(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

Se puede hacer los llaveros de la derivada por ejemplo:

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
<u>Recuerde:</u> Debemos sumar el incremento (Δx)

Nota: Es importante que se tenga claro cada proceso algebraico.

En la siguiente clase se propone los teoremas para derivar. Estos teoremas acortarán procesos y nos permitirán calcular derivadas de una manera fácil y sencilla.

Cabe resumir las formas para la notación de la derivada, estas son:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = D(x)$$

Evaluación Informal: Dominó de la Derivada

El juego del dominó, nos ayudará a evaluar de una manera alternativa los contenidos de la clase. Su preparación requiere de los siguientes pasos:

- El maestro debe crear las fichas de dominó, que deben contener 7 ejercicios propuestos sin solución. Recuerde que solo deben ser 7 ejercicios, ya que sus respuestas son correspondientes a los 7 números que tienen las fichas de dominó incluido el cero (Ver ***Anexo 14***)
- Se debe formar grupos de 4 estudiantes y entregar equitativamente las fichas (se sugieren que sean 25), con una que debe restar.
- Una vez que los alumnos tengan las fichas se debe dar tiempo para que los alumnos resuelvan los ejercicios que tienen marcados en sus fichas. Se debe indicar que el éxito del juego está en que cada uno debe resolver los ejercicios sin mostrar al resto del grupo las respuestas. Por ello se debe conseguir una concentración total dentro de estos minutos.
- Cuando haya concluido el tiempo, se da inicio al juego.
- Se coloca la única ficha que restó de la repartición y en orden, los alumnos de cada grupo colocan las fichas como corresponden, siendo el ganador el jugador que ya no tenga fichas.

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 15***)

3.2.2. REGLAS PARA DETERMINAR DERIVADAS.

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema y lograr que el estudiante domine la definición de la derivada en base al incremento Δx.

Caminos

- Para esta actividad se necesitará la "*Hoja de Laberintos*" (Ver ***Anexo 16***).
- Se pide que los estudiantes formen grupos de 4.
- Se entrega a cada uno la "*Hoja de Laberintos*".
- Primero los estudiantes deben escoger un camino para la llegada (no se puede pasar por un mismo camino 2 veces).
- Los estudiantes deben resolver las derivadas (con el incremento (Δx)) del camino que escogieron y evaluar para un número cualquiera (Ejemplo: $f'(2)$, esto lo designará el profesor)
- Gana la persona que encuentre el camino que sume más puntos hasta llegar al final.

Desarrollo de la clase:

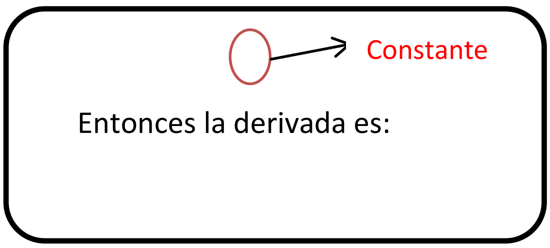
Al igual que en el estudio de límites, la derivada tiene algunos teoremas que serán de gran ayuda.
En los siguientes teoremas se definirá como **funciones** a f y g, como un **número entero** a n y una **constante** k. Se explica con un ejemplo para una mejor comprensión de cada teorema.

- ***Técnica:*** Cuando se tiene un grupo de teoremas, es importante realizar carteles con gráficos y asociar los colores con cada teorema, luego se colocan en el aula para entender cada ejercicio desarrollado.

Recuerde: En una clase en donde intervienen teoremas, es mejor utilizar diversos colores de marcadores en la pizarra para diferenciar cada uno.

Teorema 1:* *Teorema de la función constante (k): si $f\ x\ = k$ para cualquier x es $f'\ x\ = 0$

Cartel:



Ejemplo:

- Encontrar $\frac{dy}{dx}$ de la función $f\ x\ = \frac{1}{2}$

Por el teorema anterior tenemos que $\frac{1}{2}$ es una constante y por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

<u>Teorema 2:</u> Teorema de la función identidad: si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$ es decir $\frac{dy}{dx} = 1$

<u>Cartel:</u>

Función Lineal

Entonces la derivada es:

Ejemplo:

- Encontrar $\frac{dy}{dx}$ de la función $f(x) = x$

Como tenemos una función identidad que es $f(x) = x$ entonces por lo tanto tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

<u>Teorema 3:</u> Regla de potencias: si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, tenemos $f'(x) = nx^{n-1}$

<u>Cartel:</u>

Número entero

Variable independiente

Entonces la derivada es:

Ejemplo:

- Encontrar $\frac{dy}{dx}$ de la función $f(x) = x^8$

Como se observa que es una potencia, sabiendo que $n = 8$, utilizamos la regla anterior y por lo tanto:

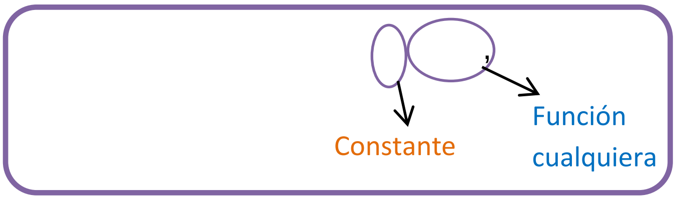
$$\frac{dy}{dx} = 8x^{8-1} = 8x^7$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^7$$

<u>Teorema 4.</u> Regla del múltiplo constante: si k es una constante y f es una función que puede diferenciarse, entonces $(kf)'(x) = k.f'(x)$, es decir:

$$\frac{dy}{dx}\, k.f(x) = k\, \frac{dy}{dx}\, f(x)$$

<u>Cartel:</u>



Ejemplo:

- Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = 12x^5$

Observando esta función, se puede deducir que es un múltiplo constante por ello:

$$f'(x) = 12\, f'(x^5)$$

En $f'(x^5)$ tenemos una regla de potencia; aplicando el teorema 3 para $n = 5$ tenemos:

$$f'(x) = 12\,.\,5\,x^{5-1} = 60x^4$$

$$f'(x) = 60x^4$$

<u>Teorema 5.</u> Regla de la suma: si f y g son funciones diferenciables entonces:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Cartel:

Derivadas de Funciones cualquiera

Ejemplo:

- Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = 2x^6 + 5x^3$

En la función anterior es claro que existe una suma y también una regla de potencias con múltiplo constante, aplicando los teoremas anteriores tenemos:

$$f(x) = 2x^6 + 5x^3$$
$$f'(x) = f'(2x^6) + g'(5x^3) \longrightarrow \text{Teorema 5}$$
$$f'(x) = 2f'(x^6) + 5f'(x^3) \longrightarrow \text{Teorema 4}$$
$$f'(x) = 2.(6)x^{6-1} + 5.(3)x^{3-1} \longrightarrow \text{Teorema 3}$$
$$f'(x) = 12x^5 + 15x^2$$

Teorema 6. Regla de la diferencia: si f y g son funciones diferenciables entonces

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Cartel:

Derivadas de Funciones cualquiera

Ejemplo:

- Encontrar y' de la función $y = 9x^{12} - 7x^9$

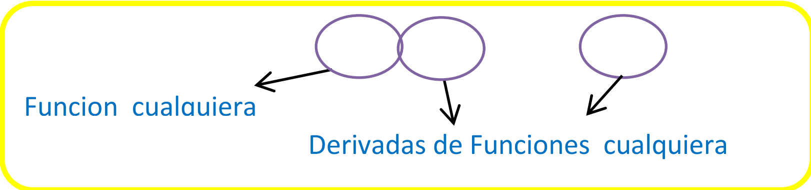
En la función anterior es claro que existe una diferencia y también una regla de potencias con múltiplo constante, aplicando los teoremas anteriores tenemos:

$$y = 9x^{12} - 7x^9$$
$$y' = f'(9x^{12}) - g'(7x^9) \longrightarrow \text{Teorema 6}$$
$$y' = 9f'(x^{12}) + 7f'(x^9) \longrightarrow \text{Teorema 4}$$
$$y' = 9.(12)x^{12-1} + 7.(9)x^{9-1} \longrightarrow \text{Teorema 3}$$
$$y' = 108x^{11} + 63x^8$$

Teorema 7.Regla del producto: si f y g son funciones diferenciables entonces:

$$f.g\ '\ x\ = f\ x\ .g'\ x\ + g\ x\ .f'(x)$$

Cartel:



Ejemplo:

- Encontrar y' de la función $y = (3x^2 - 5)(2x^4 - x)$

$$y = (3x^2 - 5)(2x^4 - x)$$

$y' = (3x^2 - 5).g'\ 2x^4 - x\ + (2x^4 - x).f'(3x^2 - 5)$ ⟶ Teorema 7

$y' = (3x^2 - 5).\ g'\ 2x^4) - g'(x)\ + (2x^4 - x).\ f'(3x^2) - f'(5)$ ⟶ Teorema 6

$y' =\ 3x^2 - 5\ .\ 8x^3 - 1\ +\ 2x^4 - x\ .(6x - 0)$ ⟶ Teoremas 1, 2, 3, 4.

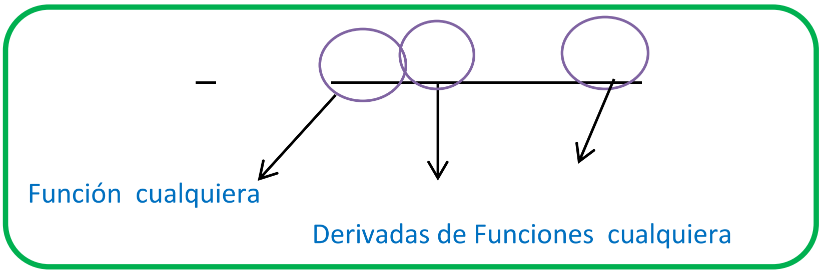
Realizando las operaciones pertinentes tenemos:

$$y' = 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2$$
$$y' = 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Teorema 8.Regla del cociente: si f y g son funciones diferenciables y $g \neq 0$ entonces:

$$\frac{f}{g}\ '\ x\ = \frac{g\ x\ f'\ x\ - f\ x\ g'(x)}{g^2(x)}$$

Cartel:



Ejemplo:

- Encontrar la derivada de la función $y = \frac{3x-5}{x^2+7}$

Como es un cociente, tenemos que aplicar el teorema 8. Sin embargo es necesario que se apliquen los teoremas antes vistos, por lo tanto tenemos:

$$y = \frac{3x - 5}{x^2 + 7}$$

Entonces: $f(x) = (3x - 5)$ y $g\ x\ = x^2 + 7$

$$y' = \frac{(x^2+7)f'\ 3x-5\ -\ 3x-5\ g'(x^2+7)}{(x^2+7)^2} \longrightarrow \text{Teorema 8}$$

$$y' = \frac{x^2+7\ .3-\ 3x-5\ .2x}{(x^2+7)^2} \longrightarrow \text{Teoremas 1, 2, 3, 4.}$$

$$y' = \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2}$$

También existen teoremas para determinar las derivadas de las funciones trigonométricas que las veremos en la siguiente clase.

Evaluación Informal: *"Rompecabezas de la Derivada"*

- Para esta actividad, es importante definir si se trabajará en grupos o individualmente.
- Se trata de armar el rompecabezas de la forma tradicional (Ver ***Anexo 17***)
- Cada una de las piezas del rompecabezas contiene ejercicios con los colores de los carteles y para poder armarlo se debe resolver en base a los teoremas vistos, de tal manera que las piezas coincidan con las respuestas.
- Es mejor que las piezas sean de forma cuadrada para que coincidan en todos los espacios y de esta forma los estudiantes deban resolver todos los ejercicios propuestos.

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 18***)

3.2.3. DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

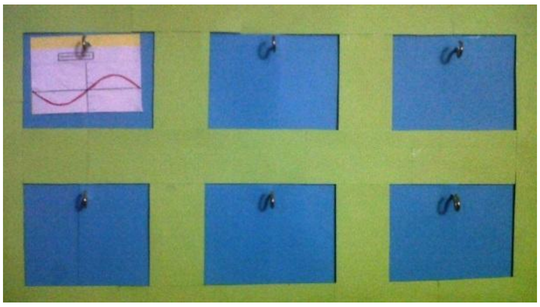
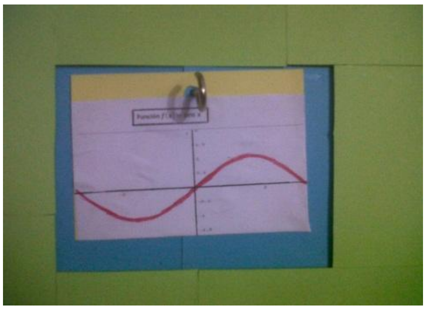
Introducción de la clase:

Objetivo: Introducir el tema y recordar al estudiante las gráficas de funciones trigonométricas así como sus diversas características.

Desarrollo de la actividad:

- Se necesitará el "*Tablero de uso múltiple 1"* (Ver ***Anexo 19***).

- El profesor completará el primer espacio con la gráfica de la función $seno$ incluyendo sus características; luego pedirá a sus alumnos que completen el resto de espacios con las seis funciones trigonométricas. Para esto pueden ayudarse de la bibliografía adecuada.

<u>Desarrollo de la clase:</u>

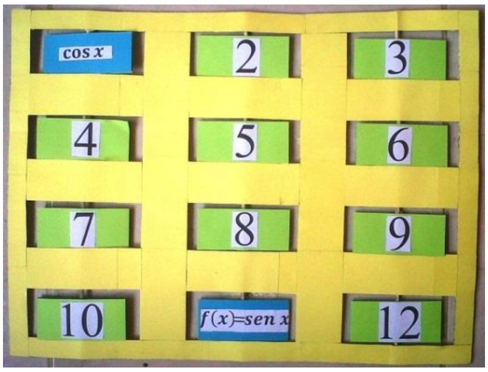
Se exponen a continuación los teoremas para determinar la derivada de las funciones.

Trigonométricas, se explica con un ejemplo para una mejor compresión de cada teorema:

<u>Teorema 1.</u>Derivadas de Seno y Coseno: Las funciones $f(x) = sen\,x$ y $g(x) = \cos x$ son diferenciables y por tanto:

$$D(sen\,x) = \cos x \qquad\qquad D(\cos x) = -sen\,x$$

- ***<u>Técnica:</u>*** Con la ayuda del "*Tablero de uso múltiple 2"* se puede hacer un juego de pares con las derivadas de cada función esto puede ser a lo largo de la clase:



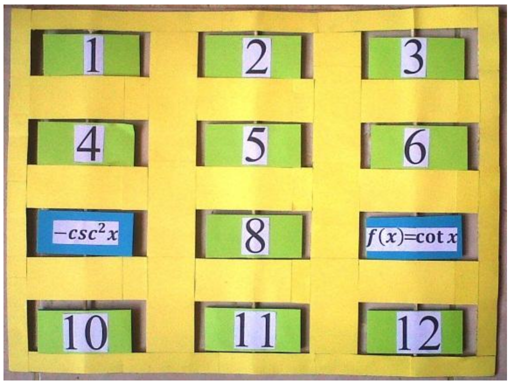
Ejemplo:

- Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = 3sen\,x - 2\cos x$

$$f'(x) = 3f'(sen\,x) - 2f'(\cos x)$$
$$f'(x) = 3(\cos x) - 2(-sen\,x)$$
$$f'(x) = 3\cos x + 2\,sen\,x$$

<u>Teorema 2.</u>Derivadas de Tangente y Cotangente: Las funciones $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \cot x$ son diferenciables por tanto:

$$D(tan\,x) = \sec^2 x \qquad\qquad D(\cot x) = -csc^2 x$$



Ejemplo:

- Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = tan\,x$

Se podría aplicar directamente el teorema, sin embargo lo comprobaremos sustituyendo la identidad trigonométrica $tan(x) = \frac{sen\,x}{cos\,x}$, entonces:

$$f(x) = \frac{sen\,x}{cos\,x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x . f'(sen\,x) - sen\,x . g'(\cos x)}{(cos\,x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x . \cos x - sen\, x . (-sen\, x)}{(cos\, x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x}$$

Sabiendo que $cos^2 x + sen^2 x = 1$ tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2\, x$$

__Teorema 3.__Derivadas de Secante y Cosecante: Las funciones $f(x) = \sec x$ y $g(x) = \csc x$ son diferenciables por tanto:

$D(\sec x) = \sec x . \tan x$ $\qquad$ $D(\csc x) = -\csc x . \cot x$

Ejemplo:

- Encontrar $f'(x)$ de la función $f(x) = sec\, x$

Se podría aplicar directamente el teorema, sin embargo lo comprobaremos sustituyendo la identidad trigonométrica $sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$, entonces:

$$sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \,. f'(1) - 1. g'(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 1.(-sen\, x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{sen\, x}{(\cos x)^2}$$

Descomponemos el denominador en una multiplicación y tenemos:

$$f'(x) = \frac{sen\, x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x}$$

Sabiendo que $\tan(x) = \frac{sen\, x}{\cos x}$ y $sec = \frac{1}{\cos x}$ sustituimos y tenemos:

$$f'(x) = \tan x \,. \sec x$$

Queda comprobado.

__Evaluación Informal:__ *"¡Crece árbol crece!"*

Desarrollo de la Actividad:

- Se debe formar parejas de alumnos.
- Es necesario entregar las hojas y tallos para el árbol. (Ver ***__Anexo 20__***)
- Todas las parejas deberán tener una moneda y en base a esta se hacen los siguientes acuerdos:
  - ✓ La cara indica que el árbol crece y el jugador puede escoger entre una hoja o un tallo para agrandar su árbol.
  - ✓ En cada hoja o tallo hay 1 ejercicio que deberá resolver, si lo hace correctamente accede a lanzar la moneda, caso contario no podrá lanzar la moneda.

- ✓ El sello indica que no podrá tomar ninguna parte del árbol y perderá un turno.
- El árbol ganador es aquel que tenga tres ramas y en cada rama tres hojas (en total 9 hojas y 3 ramas).

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 21***)

3.2.4. REGLA DE LA CADENA

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema y crear interés en el estudiante por el tema de la regla de la cadena.

Actividad: *"Arma la Cadena"*

- Esta actividad debe realizarse de forma individual.
- Para ello se necesitará los eslabones de esta actividad. (Ver ***Anexo 22***)
- Los alumnos resuelven las derivadas de los eslabones y van formando la cadena.
- Gana el estudiante que forme primero la cadena.

Desarrollo de la clase:

Supongamos que se desearía encontrar la derivada de $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, probablemente deberíamos colocar 60 factores y aplicar varios teoremas para encontrarla.

Por lo antes expuesto es importante conocer la *Regla de la Cadena* para facilitar los ejercicios. Su definición sería:

$$(f \circ g)(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

En otra notación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

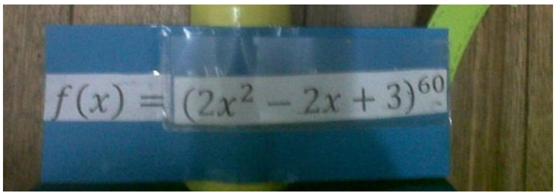
Para entender mejor en lo que consiste la *regla de la cadena*, desarrollaremos el ejemplo propuesto:

Ejemplo 1

- Encontrar la derivada de $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$

Técnica: Para ilustrar cada ejercicio, utilizaremos la "*Máquina de la Derivada"* que nos ayudará a conocer el orden para resolver los diversos ejercicios en la aplicación de la regla de la cadena (Ver ***Anexo 23***):

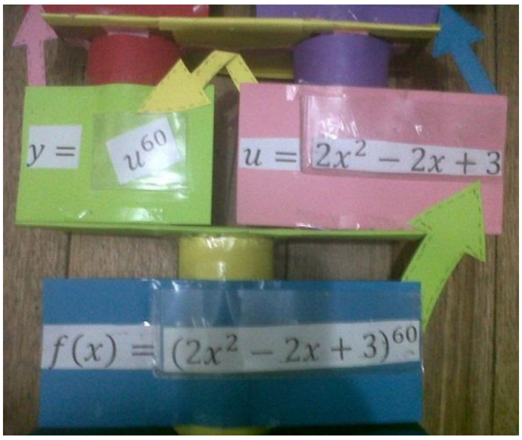
Para utilizar la "*Máquina de la Derivada"*, tenemos que empezar desde abajo.
En la primera planta colocamos la función (se deberá escribir en una tarjeta):



Utilizaremos la letra u para llamar a la función, $u = 2x^2 - 4x + 1$ entonces:

$$y = u^{60} \quad \text{y} \quad u = 2x^2 - 4x + 1$$

En la siguiente planta colocamos la función que vamos a intercambiar por u así:



Se utiliza los mismos teoremas de las derivadas por lo tanto:

$$\frac{dy}{du} = 60u^{59} \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 4x - 4$$

En la tercera planta de la máquina de la derivada, se coloca las derivadas de cada una:

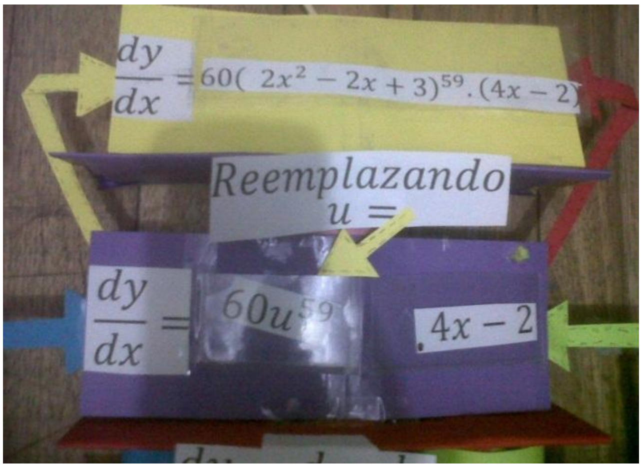
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 60u^{59} .\ 4x - 4$$

En el 4 piso se unifican las derivadas en la regla de la cadena:

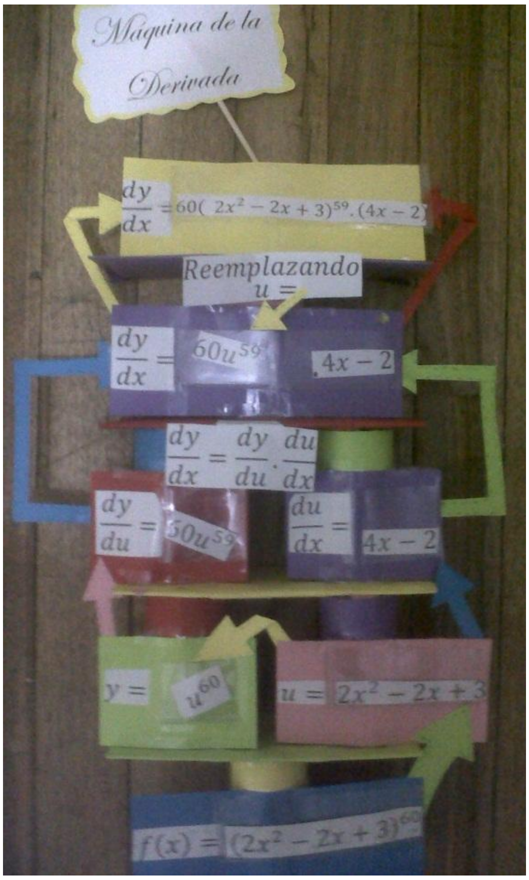
Sustituyendo $u = 2x^2 - 4x + 1$ tenemos:

Al final sustituimos u, entonces tenemos:



$$y' = \frac{dy}{dx} = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}.(4x - 4)$$

Al final la *Máquina de la Derivada* queda de la siguiente manera:



Esta regla también es aplicable a las funciones trigonométricas. Por ejemplo en la función $y = cos\ (3x^2)$

__Recuerde :__ Se puede usar la *<u>Máquina de la Derivada</u>* para todos los ejercicios, ya que tiene forros de mica para el uso de tarjetas que se aplican a varios ejemplos.

__Evaluación Informal:__ "*Quiero salir de aquí*"

Desarrollo de la actividad:

- El profesor pide a sus alumnos formar parejas
- Se necesitará un tablero, fichas y un dado (en las caras del dado debe estar 1i, 2i, 3i, 1d, 2d, 3d). (Ver ***__Anexo 24__***)
- Para comenzar, se sitúan las dos fichas en la casilla SALIDA.
- Se lanza el dado y se mueven los espacios que indique ya sea derecha o izquierda.

- Para acceder a su próximo turno, el alumno deberá resolver el ejercicio que le tocó en cada casilla.
- Gana la persona que salga primero del tablero.

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 25***)

3.2.5. DETERMINACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

***Introducción de la clase*:**

Objetivo: Introducir el tema y lograr que el estudiante identifique la presencia y características de los máximos y mínimos.

Actividad: *"La Caja Preguntona"*

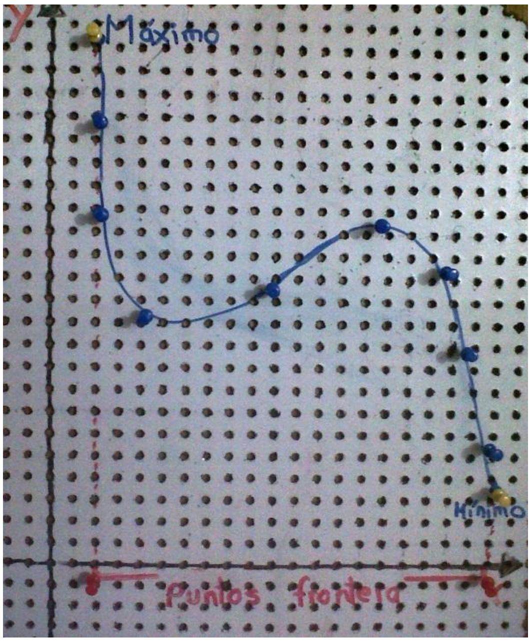
- Se puede formar grupos de 3 estudiantes.
- Con la ayuda del *"Tablero de Funciones"* los grupos grafican la función $f(x) = 6x^3 - 2x$
- En base a esto, se realizan preguntas que ayuden a identificar los máximos y mínimos existentes. Las preguntas pueden ser:
  ¿En qué punto de la gráfica esta función cambia de dirección?
  ¿Tiene esta función un valor máximo? Señálelo en su gráfica.
  ¿Tiene esta función un valor mínimo? Señálelo en su gráfica.
  Si f tiene un valor máximo ¿Cómo cree que podría encontrarlo?
  ¿Cuándo se deriva, que es lo que representa la nueva función encontrada?
- Cada pregunta está en una tarjeta y estas se encuentran en una caja denominada *"La Caja Preguntona"*.
- El docente toma al azar una tarjeta de esta caja y propone la pregunta. (Ver ***Anexo 26***)
- Por cada pregunta contestada, los grupos se acreditan puntos, depende de que tan cerca estén de la respuesta; recuerde que los alumnos no conocen aún el tema.
- Gana el grupo que tiene más puntos.

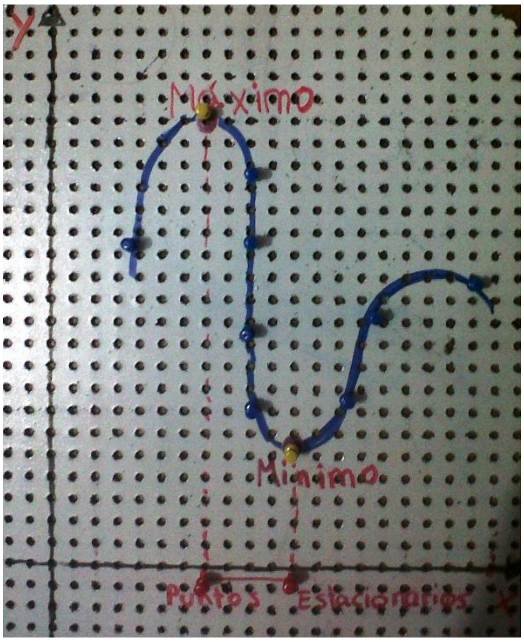
Desarrollo de la clase:

- ✓ ***Técnica:*** En base a las respuestas se puede realizar una lluvia de ideas y ver que opiniones se presentaron para luego ir conjuntamente construyendo lo que verdaderamente es un máximo o un mínimo.

Se dice que cuando f es continua en un intervalo cerrado a,b, entonces f puede tener un valor máximo ó un mínimo allí.
Introducimos el concepto del *punto crítico*.
Cualquier punto del dominio de una función f ya sea puntos frontera o estacionarios se denomina ***puntos críticos.***

- ✓ ***Técnica:*** Se pide que los alumnos realicen las siguientes gráficas en el *tablero de funciones* para entender mejor el tema:





Por ello, si f esta definida en un intervalo que contiene un punto c, $f(c)$ es un valor extremo y por lo tanto c es un punto crítico.

_ Sea un punto frontera.
_Sea un punto estacionario de $f(f'\ c\ = 0)$

Ejemplo 1:

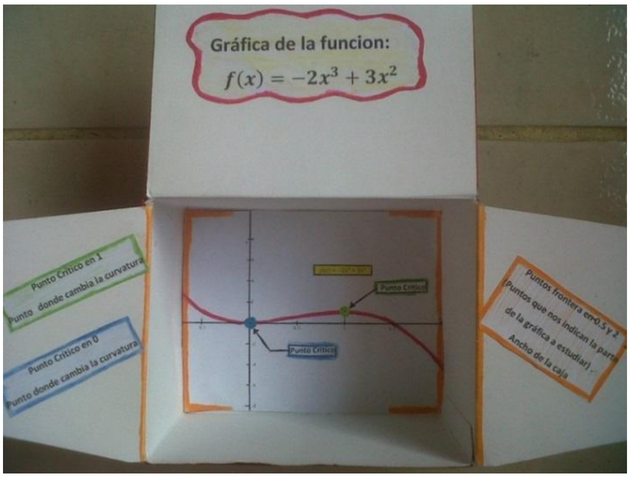
- Encuentre los puntos críticos de $f\ x\ = -2x^3 + 3x^2$ en el intervalo $-\frac{1}{2}, 2$

Observando el intervalo podemos deducir que los puntos frontera son $-\frac{1}{2}$ y 2

Técnica: Para ilustrar que son los puntos frontera; utilizaremos un cartón, es preferible que sea pequeño pues será fácil de guardar para los estudiantes.

Se debe realizar un bosquejo de la función y colocar los puntos frontera para que coincidan con el ancho de la caja; esto ayudará para demostrar que los puntos frontera definen la parte de la gráfica a evaluar.

La siguiente foto muestra el desarrollo de lo anterior mencionado.



Para encontrar otros puntos críticos nos basamos en $f(f'\ c\ = 0)$

Y por lo tanto:

$$f\ x\ = -2x^3 + 3x^2$$
$$f'\ x\ = -6x^2 + 6x$$

Igualamos a 0 y tenemos:

$$-6x^2 + 6x = 0$$
$$-6x\ x - 1\ = 0$$
$$x = 0$$
$$x = 1$$

Por lo tanto los puntos críticos son: $-\frac{1}{2}, 2, 0, 1$

Como ya conocemos lo que significa un punto crítico, ahora es tiempo de saber cuáles son los máximos y mínimos de una función.

Valor máximo y Valor mínimo

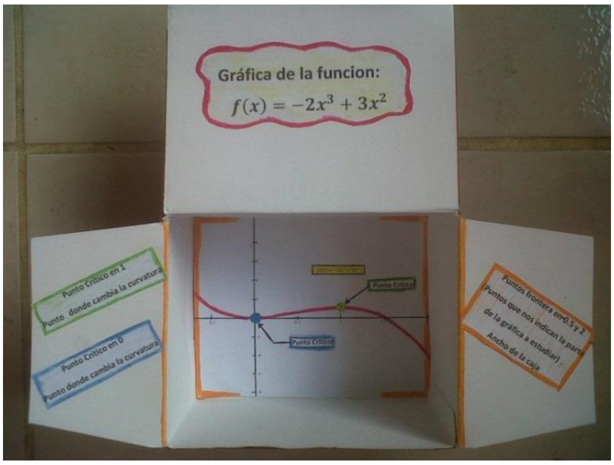
Para encontrar los valores máximos y mínimos en un intervalo cerrado de una función continua se procede de la siguiente manera:

1. Encuentre los puntos críticos de f en el intervalo cerrado.

2. Reemplace cada uno de estos puntos en la función f. El mayor valor será el máximo, y el menor valor será el mínimo.

Ejemplo 2:

- Encuentre los valores del máximo y mínimo de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$



En base a la misma *caja de puntos,* podemos ilustrar los máximos y mínimos que son los puntos donde cambian las curvaturas.

Paso 1: “Encontrar los puntos críticos”
Como ya habíamos visto en el ejercicio anterior, los puntos críticos eran $-\frac{1}{2}, 2,0,1$.

Recuerde: Se debe explicar a los alumnos lo siguiente:
_Se deriva porque así encontramos la recta tangente.
_ Se iguala a cero, porque en un máximo o mínimo la recta tangente es horizontal y por lo tanto su pendiente es cero.

Paso 2: “Evaluar f para cada uno de estos puntos”
Encontramos $f(-\frac{1}{2})$ y tenemos:

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Encontramos $f(2)$ y tenemos:

$$f\ \ x\ \ = -2x^3 + 3x^2$$
$$f\ \ 2\ \ = -2\ \ 2\ \ ^3 + 3\ \ 2\ \ ^2$$
$$f\ \ x\ \ = -4$$

Encontramos $f(0)$ y tenemos:

$$f\ \ x\ \ = -2x^3 + 3x^2$$
$$f\ \ 0\ \ = -2\ \ 0\ \ ^3 + 3\ \ 0\ \ ^2$$
$$f\ \ 0\ \ = 0$$

Encontramos $f(1)$ y tenemos:

$$f\ \ x\ \ = -2x^3 + 3x^2$$
$$f\ \ 1\ \ = -2\ \ 1\ \ ^3 + 3\ \ 1\ \ ^2$$
$$f\ \ 1\ \ = 1$$

Como podemos observar el valor máximo es 1 obtenidos tanto con $-\frac{1}{2}$ como con 1; el valor mínimo es -4 obtenido con 2

Evaluación Informal: "*Compro lo que puedo*"

- Esta actividad se puede realizar en parejas o individualmente.
- Se necesitarán los billetes del juego. (Ver ***Anexo 27***)
- Se coloca una "Tienda" y el profesor será el que vende. En cada billete existe un ejercicio.
- El docente dará una orden por ejemplo "use un billete y con su máximo valor compre un objeto que le alcance" ó "use un billete y con su valor mínimo compre un objeto que le alcance".
- Los alumnos resuelven el ejercicio y van a la tienda a comprar, el docente debe revisar si la respuesta es correcta.

Evaluación Formal: (Ver ***Anexo 28***)

3.3. APLICACIÓN DE LA DERIVADA.

3.3.1. MÁXIMOS Y MÍNIMOS APLICADOS A PROBLEMAS.

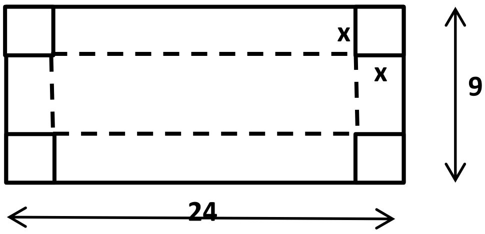
Antes se había mencionado que la aplicación de la derivada también se extendía a problemas prácticos de volúmenes, economía, etc. Al ser la aplicación muy extensa, se presenta una pequeña guía para resolver mencionados ejercicios con la ayuda del programa "Derive". Se exponen dos ejemplos desarrollados que se extienden para todos los ejercicios prácticos con la ayuda de este software.

Desarrollo de la clase:

Ejemplo 1:

1) Se desea construir una caja rectangular con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, cortando cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y doblando los lados como se muestra en la figura. Encuentre las dimensiones de la caja de máximo volumen. ¿Cuál es ese volumen?

Figura



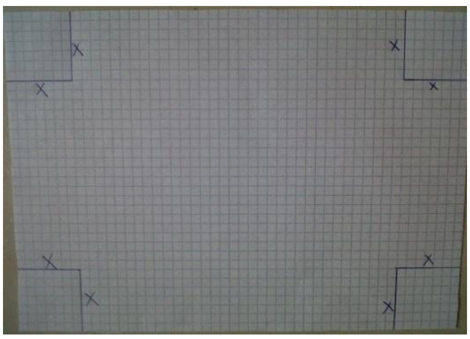
Paso 1: Identificar las variables:

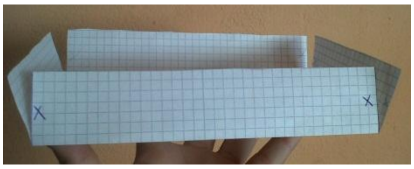
- En este ejercicio las variables son el ancho, el largo y la altura.

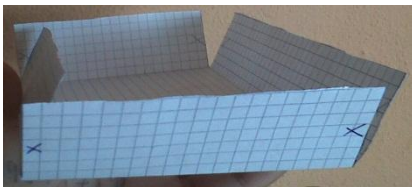
Paso 2: Expresar una ecuación de manera que solo dependa de una variable:

- El ancho se puede escribir como $a = 24 - 2x$ (ya que son 2 partes de "x" que se cortarán para obtener la caja).
- El largo se puede escribir como $b = 9 - 2x$ (ya que son 2 partes con valor x que se cortarán)
- Y la altura que es x, pues será el alto de la caja. Vea la fotografía.
- Formando la ecuación del volumen con la fórmula $V = a \times b \times h$ tenemos: $V = (24 - 2x)(9 - 2x)x$
- Simplificando la expresión mediante proceso algebraico obtenemos $V = 216x - 66x^2 + 4x^3$

Recuerde: Podemos hacer que los alumnos tomen una hoja de su cuaderno y construyan la mencionada caja.







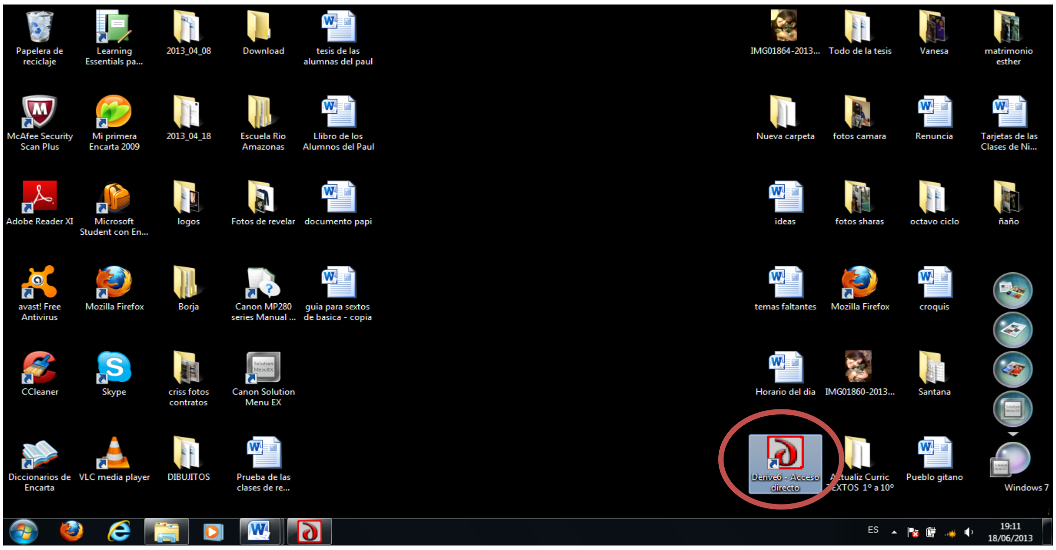
Paso 3: Determinar el conjunto de valores posibles de la variable en forma de intervalo:

- Es obvio que el tamaño de la variable "x" no puede ser menor que 0 ni mayor que 4.5 (el 4.5 corresponde a la mitad de 9 y si fuera mayor no tendríamos cómo cortar el cartón). Por lo tanto el intervalo es: $x = \ 0{,}4.5$

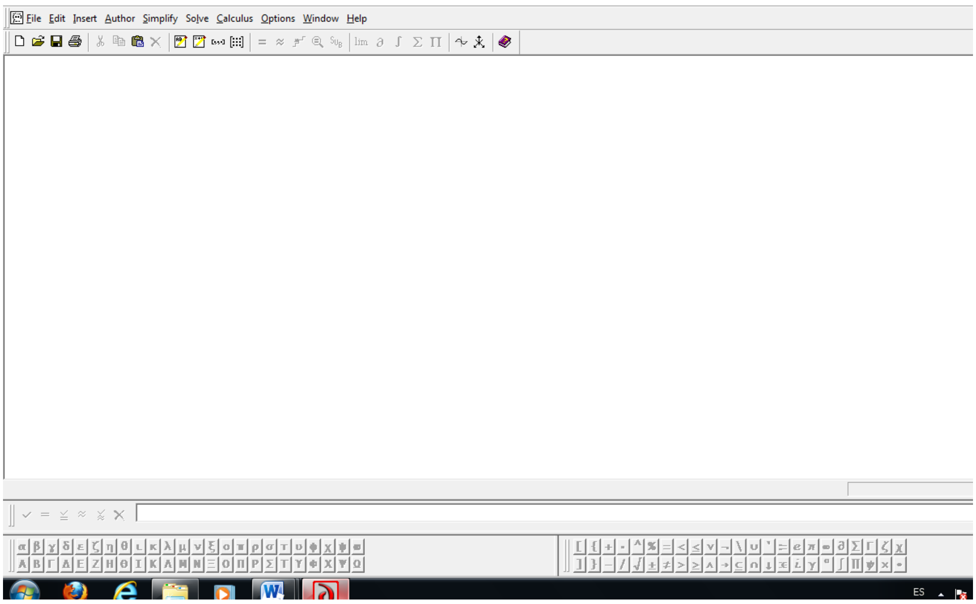
Paso 4: Encontrar los puntos críticos:

- Para este caso nos ayuda el software "Derive":

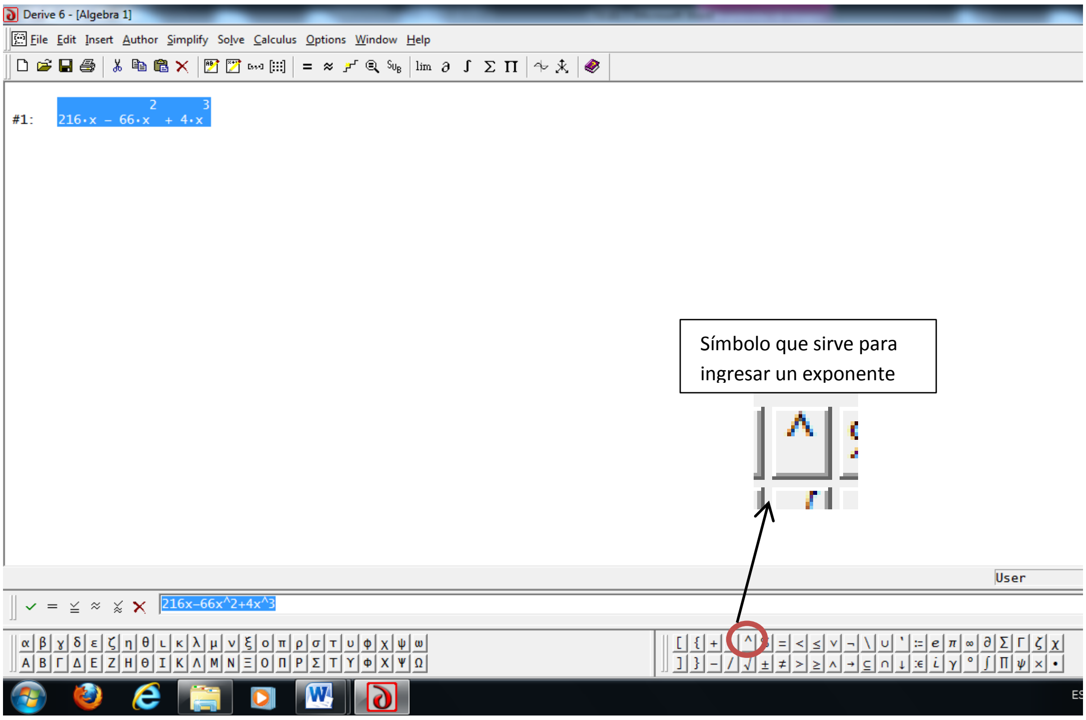
Una vez instalado el software, damos click en el ícono del programa:



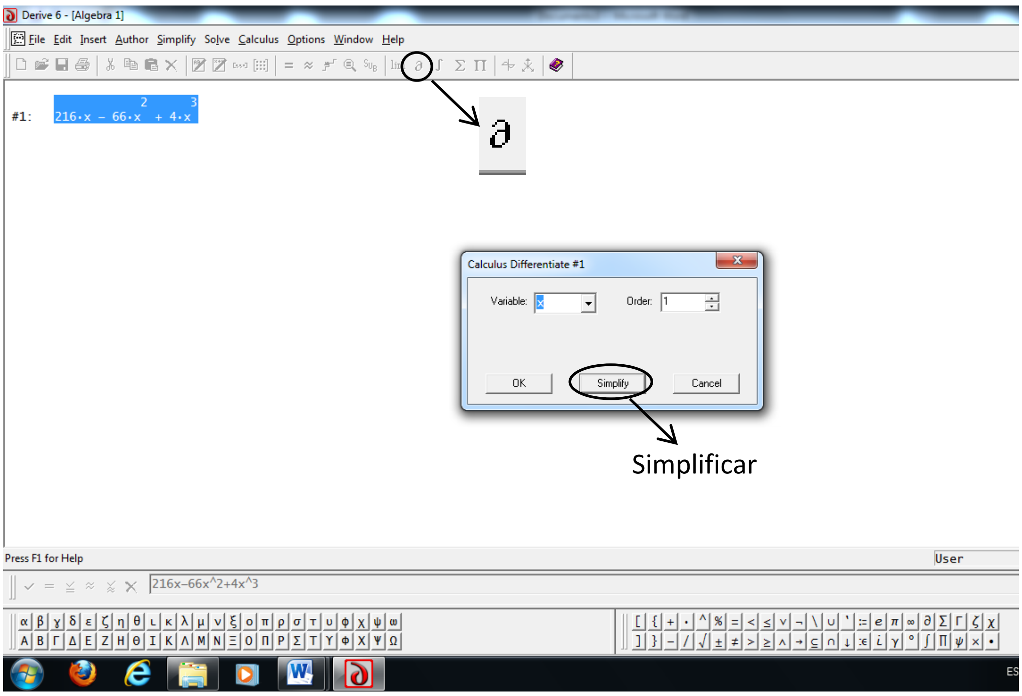
Luego se abrirá la ventana del programa que se llamará "Álgebra":



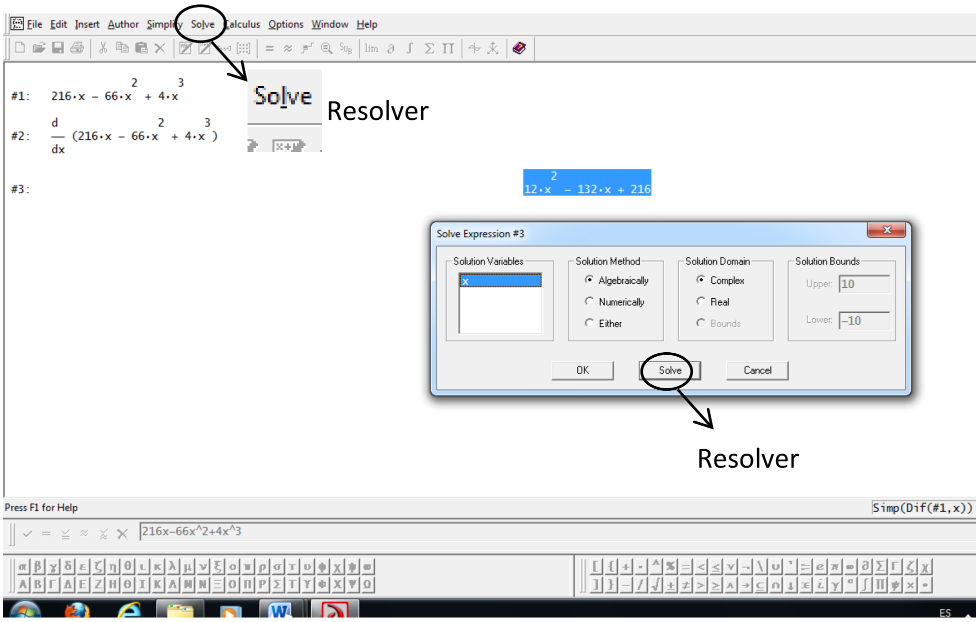
En la parte inferior colocamos la función que vamos a derivar, luego damos "*enter*" y obtenemos:



Luego se da click en el ícono de la derivada y se abrirá un cuadro de diálogo que pedirá identificar cuál es la *variable*, entonces escribimos "x" (para este caso) y hacemos click en "*Simplificar*"



Y obtenemos la derivada; luego se hace click en *"resolver",* se nos abrirá un cuadro de dialogo y debemos dar click en *"resolver"* para obtener los valores de "x".



Y obtenemos los valores de $x = 9$ y $x = 2$

Habíamos determinado que el intervalo es $0,4.5$ y por lo tanto el valor $x = 9$ lo descartamos.

Paso 5: "Evaluar la función con los puntos críticos"

- En este paso se reemplaza en la función los puntos encontrados, en este ejercicio son los puntos $0, 2, 4.5$

$$V = 216x - 66x^2 + 4x^3$$
$$V(0) = 216(0) - 66(0)^2 + 4(0)^3 = 0$$
$$V(2) = 216(2) - 66(2)^2 + 4(2)^3 = 200$$
$$V(0) = 216(4.5) - 66(4.5)^2 + 4(4.5)^3 = 0$$

Respuesta: Como se puede observar, el volumen máximo se tienen cuando $x = 2$ y por lo tanto cuando se reemplaza en las expresiones de las dimensiones se obtiene que el largo es 20, el ancho es 5 y la profundidad es 2.
Reemplazando:

Largo

$$a = 24 - 2x$$
$$\boldsymbol{a} = 24 - 2(2) = 24 - 4 = \mathbf{20}$$

Ancho

$$b = 9 - 2x$$

$$\boldsymbol{b} = 9 - 2\ \ 2\ \ = 9 - 4 = \mathbf{5}$$

Profundidad

$$x = 2$$

<u>Ejemplo 2:</u>

2) La compañía XYZ fabrica sillas de mimbre. Con sus máquinas actuales tienen una producción anual máxima de 500 unidades. Si fabrica x sillas, puede venderlas a un precio de $p\ \ x\ \ = 200 - 0.15x$ dólares cada una y tener un costo anual total de $C\ \ x\ \ = 4000 + 6x - 0.001x^2$ dólares. ¿Qué nivel de producción maximiza la utilidad total al año?

Paso 1: Identificar las variables:

- En este ejercicio la variable es el precio, sin embargo tenemos ya las ecuaciones de costo anual y precio por silla.

Paso 2: Expresar una ecuación de manera que solo dependa de una variable:

- Es lógico que para obtener el precio total de las sillas que se producen en un año, se debe multiplicar las sillas "x" por el precio $p\ \ x\ \ = 200 - 0.15x$ de cada una. Entonces: $R\ \ x\ \ = x\,(200 - 0.15x)$

- Para la utilidad, debemos restar el total expresado por la ecuación $R\ \ x\ \ = x\,(200 - 0.15x)$ menos el costo anual total. Entonces:

$$P\ \ x\ \ = 200x - 0.15x^2 - \ \ 400 + 6x - 0.001x^2\ \ = -4000 + 194x - 0.149x^2$$

$$P\ \ x\ \ = -4000 + 194x - 0.149x^2$$

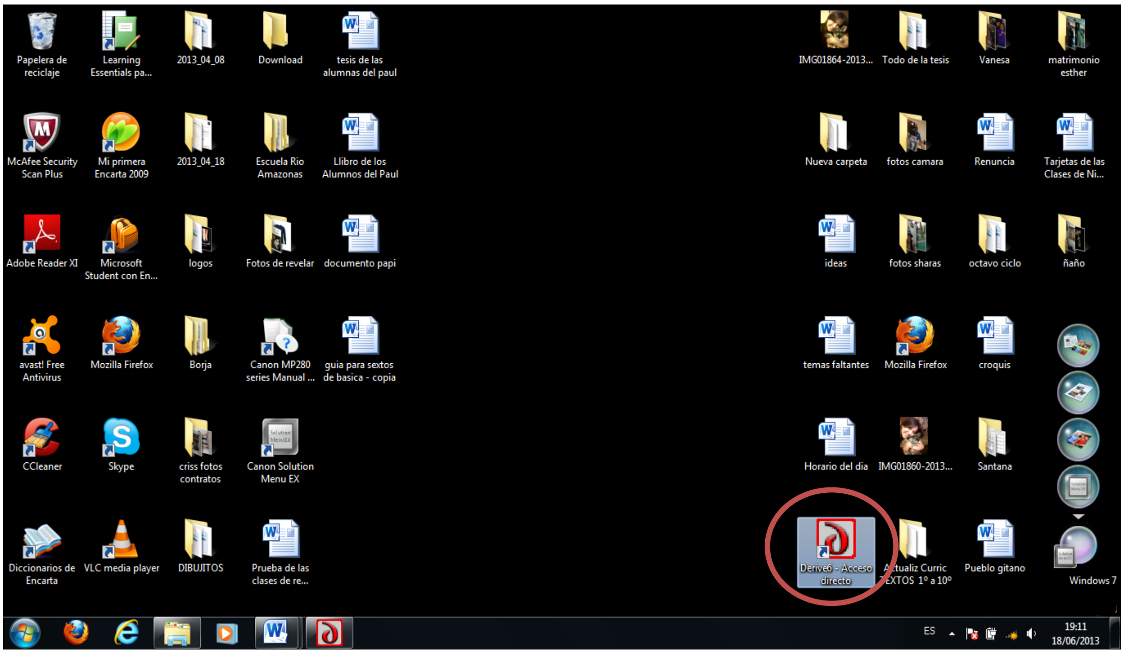
Paso 3: Determinar el conjunto de valores posibles de la variable en forma de intervalo:

- Es obvio que el mínimo de sillas es 0 y el máximo es 500 (dato del problema). Por lo tanto el intervalo es: $x = \ 0{,}500$

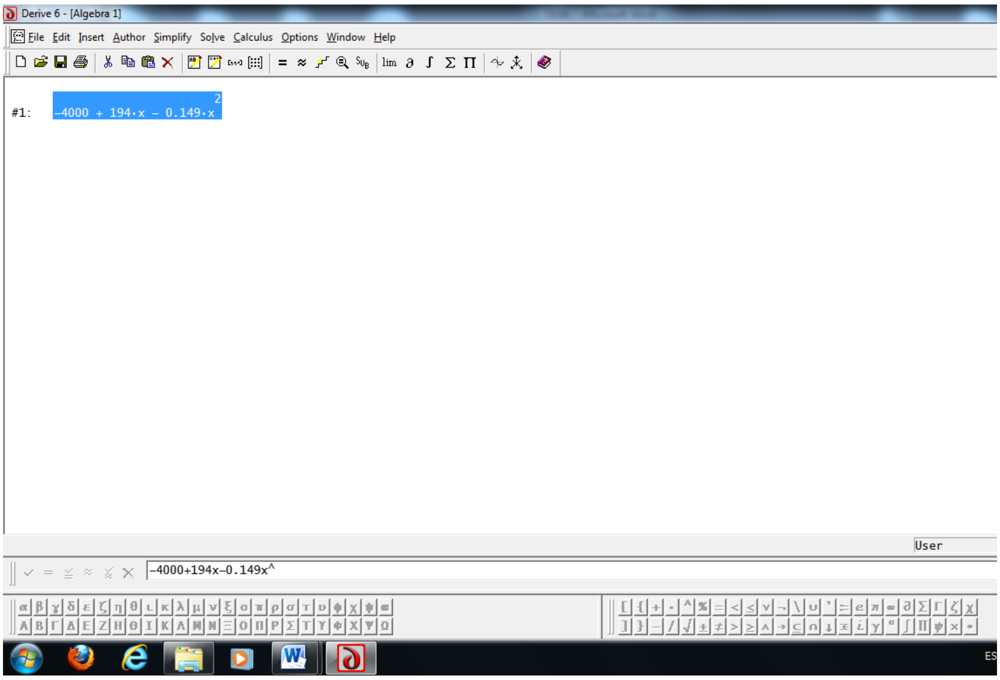
Paso 4: Encontrar los puntos críticos:

- Para este caso nos ayuda el software “Derive”:

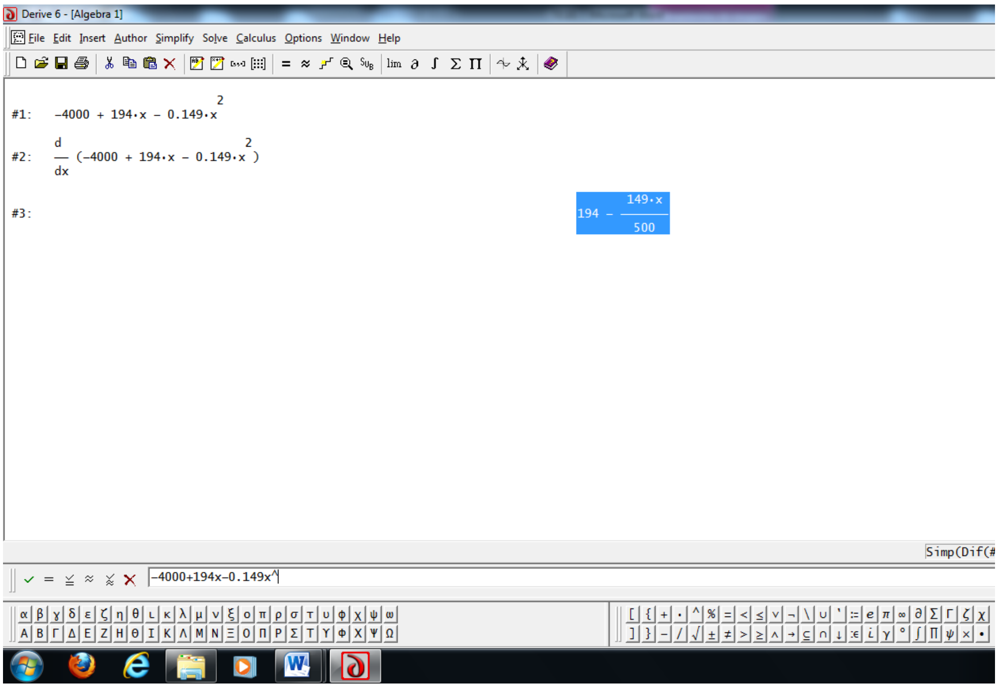
Una vez instalado el software, damos click en el ícono del programa:



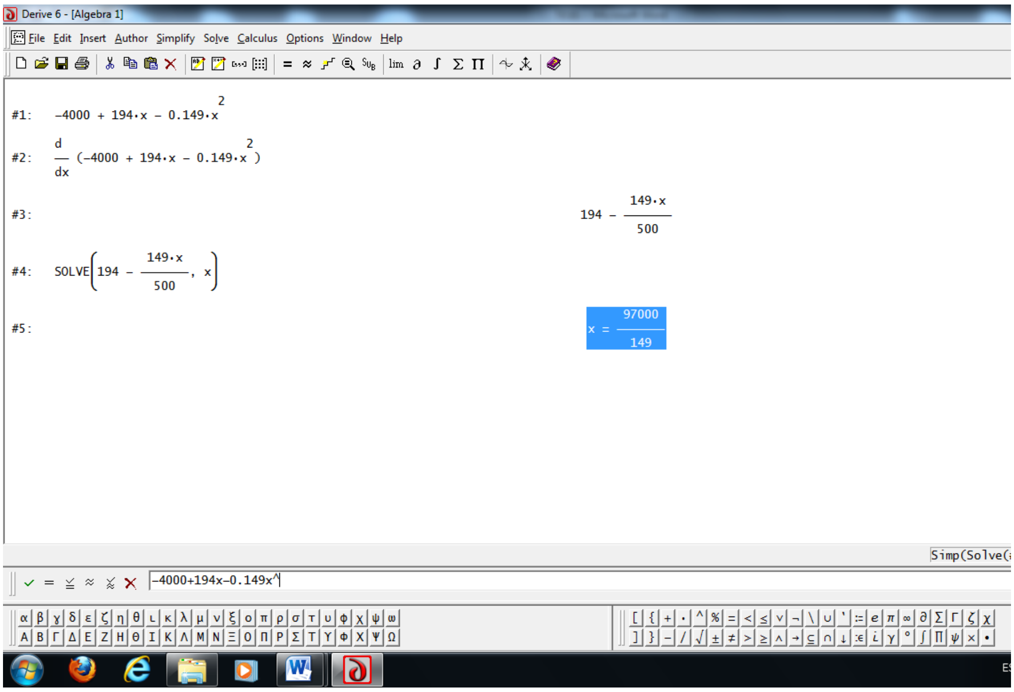
Luego se abrirá la ventana del programa que se llamará "Álgebra":
En la parte inferior colocamos la función que vamos a derivar, luego damos "*enter*" y obtenemos:



Luego se da click en el ícono de la derivada y se abrirá un cuadro de diálogo que pedirá identificar cuál es la *variable*, entonces escribimos "*x*" (para este caso) y hacemos click en "*Simplificar*"



Y obtenemos la derivada; luego se hace click en *"resolver",* se nos abrirá un cuadro de dialogo y debemos dar click en *"resolver"* para obtener los valores de "*x*".



Y obtenemos el valor de $x = 651$

Habíamos determinado que el intervalo es $0{,}500$ y por lo tanto el valor $x = 651$ lo descartamos, pues no pertenece al intervalo. Por lo tanto, solo nos quedan los puntos frontera $0{,}500$

Paso 5: “Evaluar la función con los puntos críticos”

- En este paso se reemplaza en la función los puntos encontrados, en este ejercicio son los puntos $0, 500$

$$P\ x\ = -4000 + 194x - 0.149x^2$$

Con $x = 0$

$$P\ x\ = -4000 + 194\ 0\ - 0.149\ 0\ ^2 = -4000$$

Con $x = 500$

$$P\ x\ = -4000 + 194\ 500\ - 0.149\ 500\ ^2 = 55\,750$$

Respuesta: El máximo ocurre en 500 y la utilidad máxima es $55 750

<u>Evaluación Formal:</u> (Ver ***<u>Anexo 29</u>***)

4. <u>CONCLUSIONES</u>

Al iniciar el proyecto se plantearon los siguientes objetivos:

- Crear material didáctico de fácil construcción y de un bajo costo para alumnos, de esta manera, ellos son los autores de su propio aprendizaje.
- Proveer a los maestros y estudiantes una guía de un software educativo como Derive aplicado a los diversos temas.
- Proponer técnicas de motivación como juegos tradicionales aplicados a los límites y derivada, para despertar el interés en los alumnos por el estudio del Cálculo, además de conocer y analizar ejercicios modelos de problemas que ocurren en nuestra vida y dar explicación lógica basada en el Cálculo.

Respondiendo a estos objetivos podemos hacer las siguientes conclusiones:

Con respecto al *<u>primer objetivo</u>*, concluyo que cualquier material que esté a nuestro alcance sirve para crear algo siempre que haya voluntad e imaginación por parte del docente. El costo total de los materiales fue de $13.08 lo cual es un precio cómodo. Cuando se tiene un número considerable de estudiantes, es mejor que el docente enseñe como construir cada material didáctico.

Considerando el *segundo objetivo,* casi al finalizar el proyecto, se detalla cómo utilizar el software Derive a problemas de la vida cotidiana. Sin duda alguna, los softwares son importantes y más aún en este mundo de avance tecnológico considerable. Con el uso de este programa, los estudiantes estarán capacitados para resolver diversos ejercicios de aplicación en menor tiempo.

De acuerdo con el *último objetivo,* las diversas actividades que se propusieron son a manera de juego. Algunas actividades también enfocan juegos tradicionales que no pasan de moda como el de la rayuela y el rompecabezas. En todas las propuestas el alumno resuelve ejercicios de manera didáctica. Con esto, despertamos el interés en los alumnos.

5. RECOMENDACIONES

Todas las actividades propuestas tuvieron un solo objetivo en común, que fue demostrar que se puede aprender Matemáticas mientras se juega. Por esto, recomiendo que si se elabora un material didáctico en cualquier rama de las Matemáticas debe continuar persiguiendo este mismo objetivo.

Sugiero que el docente planifique correctamente las actividades ya que nuestro mayor enemigo será el tiempo; sin embargo, las ganas y el amor a la docencia vencerán cualquier obstáculo siempre que el docente entregue lo mejor de sí y escoja lo mejor para su grupo de estudiantes.

Una de las sugerencias más relevantes que puedo aportar, es que luego de toda actividad debe existir una reflexión. De esta forma, los juegos no son una parte aislada, sino más bien, un puente de nuevo aprendizaje.

Finalmente, recomiendo que la mayoría de actividades sean compensadas con puntos extras o algún estimulo, más no como una nota significativa; ya que de esta forma los estudiantes serán más participativos y tendrán una mejor disposición frente a las actividades.

ANEXOS

ANEXO 1: *"Encuesta a Docentes"*

Señores Profesores, la siguiente encuesta servirá para la implementación de nuevas alternativas didácticas para la enseñanza de la Matemática. Se pide que sea contestada con toda sinceridad.

Nombre (es opcional): ________________________ Fecha: _____/_____/_______

Sírvase marcar con una **X** lo que crea conveniente.

1) En su experiencia como Docente de Matemáticas, ¿Cree usted que esta materia es compleja al momento de explicar a los estudiantes?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

2) A medida que avanzan los contenidos de Matemática, ¿Usted cree que es más complicado explicar su clase?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

3) A medida que transcurren los años de educación general básica o bachillerato ¿Considera usted apropiado usar material didáctico que pueda aclarar su clase frente a los estudiantes?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

4) En cuanto a la Matemática del último año de Bachillerato ¿Usted ha encontrado material didáctico en los diferentes temas?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

5) Si su respuesta a la pregunta número 4 fue "SI" o "A VECES", este material ¿Tuvo algún costo significativo?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

6) En el último año de bachillerato, consta el tema de límites y derivada. En la unidad educativa en donde trabaja, ¿Le han facilitado a usted material didáctico específico para estos temas?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

7) ¿Considera usted importante que en el tema de límites y derivadas deba existir material didáctico?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

ANEXO 2: ***"Encuesta a Bachilleres"***

Señor o Señorita Bachiller, la siguiente encuesta servirá para la implementación de nuevas alternativas didácticas para la enseñanza de la Matemática. Se pide que sea contestada con toda sinceridad.

Nombre (es opcional): ____________________ Fecha: ______/_______/________

Sírvase marcar con una **X** lo que crea conveniente.

1) ¿Usted cree que las Matemáticas son muy complejas de entender?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

2) ¿Considera que a medida que avanzan los contenidos de Matemática es más complejo de entender?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

3) En su experiencia de estudiante, ¿Sus profesores de Matemática utilizaban material didáctico para explicar mejor su clase?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

4) Si sus profesores le hubieran dado una guía en donde explicaba cómo construir un material de fácil construcción para ayudar a entender la clase. ¿Lo hubiera construido?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

5) ¿Cree usted que en la matemática del último año de bachillerato deba existir material didáctico que ayude a mejorar la enseñanza?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

6) En el tercero de bachillerato existe el tema de límites y derivada. ¿Tuvo dificultades al momento de entender estos temas?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

7) ¿Considera usted importante que en el tema de límites y derivadas deba existir material didáctico?

   ☐ Si ☐ No ☐ A veces

ANEXO 3: ***"Tablero para Juego de Aproximaciones"***

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.2099	3.0001
12.0022	6.0233
9.4599	10.0059
7.6310	14.2301
11.2229	1.9921
2.0091	13.7912
8.3338	5.0712

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.2579	3.1200
12.2008	6.0023
9.1975	10.7451
7.3197	14.4598
11.3019	1.3159
2.1796	13.4986
8.7149	5.1002

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.1246	3.1207
12.0295	6.5789
9.0071	10.8476
7.3270	14.4580
11.2490	1.4127
2.1298	13.6985
8.2507	5.1207

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.4173	3.4219
12.1273	6.8471
9.9502	10.1384
7.4189	14.1009
11.5834	1.4299
2.4681	13.4589
8.4209	5.1496

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.5689	3.9515
12.4507	6.7535
9.8427	10.7436
7.6970	14.9614
11.4565	1.2585
2.4937	13.1595
8.1027	5.7535

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.9007	3.1209
12.3501	6.2041
9.4201	10.0740
7.0009	14.2509
11.2409	1.0001
2.2500	13.0961
8.0035	5.0009

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.9901	3.1285
12.4572	6.0001
9.0569	10.0007
7.3232	14.2307
11.8525	1.0091
2.7401	13.7403
8.0329	5.7219

BUSCA TÚ NÚMERO	
4.9508	3.0015
12.4532	6.1509
9.8956	10.4507
7.3221	14.0058
11.9865	1.0074
2.7845	13.1502
8.0002	5.0002

ANEXO 4: “*Tablero de Funciones*”

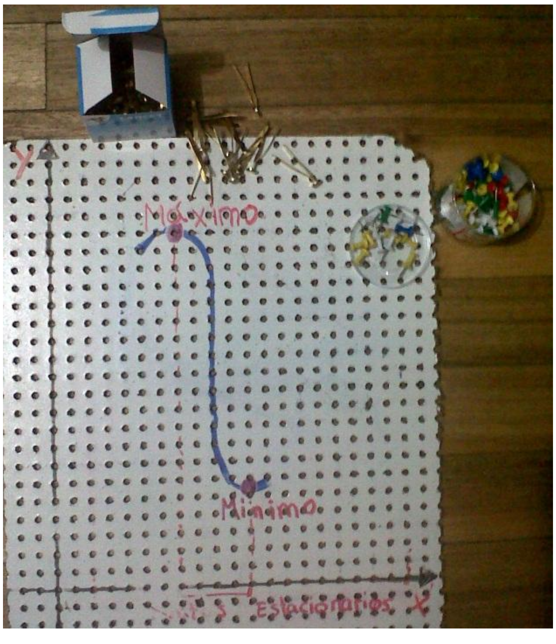
Materiales:

- ☑ Tabla
- ☑ Tachuelas de pata doble
- ☑ Tachuelas de colores
- ☑ Marcadores borrables de colores. (azul, rojo, verde y negro)

Elaboración:

1. Con el marcador borrable, trazamos un eje “x” y un eje “y” en el centro del tablero (un color asignado del marcador).
2. Para toda gráfica se realiza un grafo de la función.
3. Las tachuelas de doble pata se colocan en los agujeros del tablero para definir un par ordenado esto depende de cada grafo. También se utilizan otro color de marcador.
4. Para el caso de valores intermedios, se colocan las tachuelas de colores o también para definir la gráfica.
5. Este tablero sirve para diferentes gráficas de funciones.
6. Para diferencias algunos enunciados en las gráficas; se deben utilizar los marcadores de colores.

Ejemplo de Gráfico:



ANEXO 5: “Sopa de Límites”

Materiales:

☑ Tablas de la Sopa de límites ☑ Tarjetas

Elaboración:

1. Las tablas de la sopa de límites para cada grupo deben ser de la siguiente manera (estas tablas contienen las respuestas de algunos ejercicios):

0	20	$No\ existe$	$\frac{1}{8}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	4
$No\ existe$	-1	2	17
25	$\frac{37}{19}$	10	$-\frac{5}{6}$

0	20	$No\ existe$	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
25	-1	4	10
$No\ existe$	$\frac{37}{19}$	17	$-\frac{5}{6}$

0	$-\frac{5}{6}$	$No\ existe$	25
20	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	10
$No\ existe$	-1	4	2
$\frac{1}{8}$	$\frac{37}{19}$	17	$\frac{4}{5}$

4	20	10	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
$No\ existe$	-1	25	17
2	$\frac{37}{19}$	$No\ existe$	$-\frac{5}{6}$

$No\ existe$	$\frac{37}{19}$	$No\ existe$	$\frac{1}{8}$
$\frac{4}{5}$	25	$\frac{3}{2}$	4
0	2	-1	17
$\frac{1}{2}$	20	10	$-\frac{5}{6}$

2. Las tarjetas contienen los ejercicios:

3. Los alumnos deben tener 4 aciertos en línea para ganar:

0	4	17	1
6	12	No existe	34
3	7	2	8
~~9~~	~~18~~	~~5~~	~~11~~

ANEXO 6: *“Pares y límites”*

Materiales:

- ☑ 10 tarjetas de cartulina rojas.
- ☑ 10 Tarjetas de cartulina azules

Elaboración:

1) Las tarjetas rojas contienen los ejercicios:

$\lim_{x \to 3} (2x - 8)$

$\lim_{x \to 3} \left(\frac{2}{x} + 8\right)$

$\lim_{x \to -2} (x^2 - 3x + 1)$

$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x - 3}$

$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{\sqrt{12 - x^2}}{x^4}$

$\lim_{x \to 1} \frac{5x - x^2}{x^2 + 2x - 4}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}$

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$

2) Las tarjetas azules contienen las respuestas de los ejercicios:

—

ANEXO 7: *"Evaluación de Introducción a Límites"*

1. **DATOS INFORMATIVOS:**

ASIGNATURA: Matemáticas **TEMA**: Introducción a límites **FECHA:** ______
CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: _________**NOMBRE DEL DOCENTE:** _________

2. **CUESTIONARIO**

2.1. **Encuentre el límite indicado y luego escoge la respuesta correcta:**

Encuentra $\lim_{x\to -2} x^2 - 3x + 1$

La repuesta correcta es:

- 5
- 7
- 11
- 19

2.2. **Completa los espacios en blanco correctamente:**

La expresión $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ se lee:

El ___________ cuándo ______ tiende a _________ de ___________ es ______

2.3. **Responde (F) si es Falso o (V) si es Verdadero:**

- Todos los límites propuestos en los ejercicios son existentes _________
- En la función máximo entero el límite siempre es un numero entero ___________
- Siempre se debe utilizar la calculadora para aproximar valores al límite ___________
- Al Cálculo también se lo define como un estudio de límites _____________

2.4. **Usa tu calculadora para calcular valores de la función dada y organízalos en una tabla para determinar si las igualdades son correctas:**

$$\lim_{t\to 0} \frac{Sen\ t}{t^2} = 6$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x} = \frac{1}{2}$$

ANEXO 8: *"Forma la Frase"*

Materiales:

- ☑ 7 hojas de papel cuadriculado tamaño A5.
- ☑ 7 tarjetas de cartulina

Elaboración:

1) En las 7 tarjetas de cartulina se escriben los ejercicios, solo la primera tarjeta no tendrá la pista, así:

Tarjeta 1

_____

Tarjeta 2
Pista: El límite
Nuevo ejercicio:

___

Tarjeta 3
Pista: Existe si
Nuevo ejercicio:

_

Tarjeta 4
Pista: y solo si
Nuevo ejercicio:

_____

Tarjeta 5
Pista: los límites
Nuevo ejercicio:

____

Tarjeta 6
Pista: por la derecha y
Nuevo ejercicio:

_____

Tarjeta 7
Pista: Por la izquierda
Nuevo ejercicio:

_

Tarjeta 8
Pista: son iguales

2) Las 7 hojas de papel cuadriculado es para que los alumnos resuelvan los ejercicios.

3) Es necesario que las tarjetas se entreguen en forma desordenada para que los estudiantes ordenen la frase.

ANEXO 9: *"Evaluación de Límites Unilaterales"*

1. DATOS INFORMATIVOS:

ÁREA: Matemáticas **TEMA**: Límites Unilaterales **FECHA:** ________________

CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________

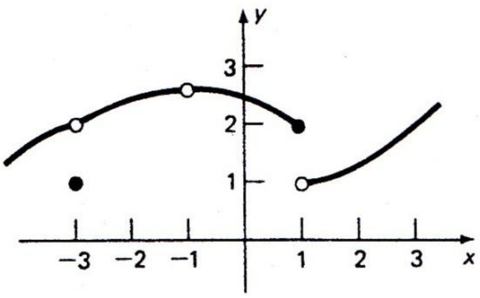
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ___________________ **NOMBRE DEL DOCENTE:** _________________

2. CUESTIONARIO

2.1. Encuentra el límite en cada caso y luego responde si es verdadero o falso:

- $\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -9$ Esta afirmación es _______
- $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\bar{x}-3} = 6$ Esta afirmación es _______

2.2. La siguiente es una gráfica de una función, encuentre el límite indicando el valor o establezca que no existe:



a) $f \quad -1$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

2.3. Bosqueje una gráfica que satisfaga las condiciones siguientes:

- Su dominio está en el intervalo $0,4$
- $f \ 0 \ = f \ 1 \ = f \ 2 \ = f \ 3 \ = f \ 4 \ = 1$
- $\lim_{x\to 1} f \ x \ = 2$
- $\lim_{x\to 2} f \ x \ = 1$

ANEXO 10: *"Evaluación de Estudio Formal de Límites"*

1. DATOS INFORMATIVOS:

ÁREA: Matemáticas **TEMA**: Estudio Formal de Límites **FECHA:** ________________

CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ___________________ **NOMBRE DEL DOCENTE:** _________________

2. CUESTIONARIO

2.1. Dé una prueba formal de límite, utilice gráficos para formar las desigualdades:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = 10$$

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{2x} = 2$$

2.2. Completa los espacios en blanco:

Límites propuestos	$f(x)$	a	L	Desigualdad con respecto a ε	Desigualdad con respecto a δ
$\lim_{x\to 3} 5x-11 = 4$					
$\lim_{x\to 2} 2x-4 = -8$					

2.3. Escoge la *<u>única</u>* respuesta correcta:

¿Qué representa la letra ε?

- Es el incremento con respecto a x
- Es la función
- Es el incremento con respecto a y
- Es un teorema

¿Qué representa la letra δ?

- Es el incremento con respecto a x
- Es una función
- Es el incremento con respecto a y
- Es una gráfica

ANEXO 11: *"Materiales para el Bingo de Límites"*

Materiales:

- ☑ Tablas del Bingo de límites(Cartulinas, esferos o marcadores)
- ☑ Juego tradicional del bingo (Bolillas y tablero para registrar los números)
- ☑ Tablero de ejercicios y preguntas numeradas
- ☑ Maíz o papeles para marcar

Elaboración:

1. Para la construcción de las tablas (cartulinas, esferos o marcadores), se puede guiar en las tablas del juego tradicional del bingo, con la diferencia que estas tablas contienen las respuestas de diversos ejercicios. El número de tablas depende del número de los estudiantes
2. La tabla para el sorteo de los ejercicios numerados se presenta a continuación. Está aplicado a los diversos teoremas sobre límites. Solo se debe colocar el ejercicio en la pizarra.

Material didáctico:

Tablas de bingo; depende del número de estudiantes:

B	I	N	G	O
3	39	-1	0	27
4	3	-4	5	26
$\frac{6}{22}$	-87	0	1	25
-2	13	4	30	-24
No hay limite	2	27	-1	-14

B	I	N	G	O
$\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	180	-1	0
-2	20000	147	0	5
No hay limite	-15	$\frac{8}{3}$	5	7
$\frac{6}{22}$	$\frac{7}{5}$	625	30	-14
-2	3	-1	1	27

B	I	N	G	O
78	-2	-1	0.1	27
-2	2x	-4	1.5	25
$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{3}$	5	0
0	-10	49	1	7
No hay limite	13	0	0	-24

B	I	N	G	O
0	-2	8	30	-14
-45	2	4	1	26
No hay limite	$\frac{1}{2}$	-447	-1	0
-9	2x	27	-0.25	7
78	$\frac{7}{5}$	625	0.1	0.75

B	I	N	G	O
-9	13	6	1	0
15	-2	147	0.5	25
-45	39	49	1.5	27
78	$\frac{7}{5}$	180	5	-14
0	2	0	0	-24

B	I	N	G	O
0	-2	8	30	-14
78	$\frac{7}{5}$	180	5	-14
-45	39	49	1.5	27
78	$\frac{7}{5}$	180	5	-14
-9	2x	27	-0.25	7

Tablero de bingo con ejercicios numerados:

B	I	N	G	O
1) $\text{lím}_{x\to 2} 3$ Respuesta: 3	**19)** $\text{lím}_{x\to 2} x$ Respuesta: 2	**37)** $\text{lím}_{x\to 2} 3x$ Respuesta: 6	**55)** $\text{lím}_{x\to 2} 3x+2$ Respuesta: 8	**73)** $\text{lím}_{x\to 3} x^3$ Respuesta: 27
2) $\text{lím}_{x\to -1} x^3 - 3x+2$ Respuesta: 4	**20)** $\text{lím}_{x\to -2}(6x+1)(2x-3)$ Respuesta: 13	**38)** $\text{lím}_{x\to 3}\ 4x-5\ ^2$ Respuesta: 49	**56)** $\text{lím}_{x\to 3}\ \overline{x-13}$ Respuesta: 4	**74)** $\text{lím}_{x\to 7} \frac{\overline{x+2}}{2x-10}$ Respuesta: $\frac{3}{4}$
3) $\text{lím}_{x\to 4} \frac{\overline{x^2+9}}{x}$ Respuesta: $\frac{5}{4}$	**21)** $\text{lím}_{x\to 5}(2x^2-3x+4)$ Respuesta: 39	**39)** $\text{lím}_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x+1}$ Respuesta: 0	**57)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{4x-5}{x^2+3x+6}$ Respuesta: $\frac{3}{16}$	**75)** $\text{lím}_{x\to 1}\ ^5\ \overline{x^2-x}\ (x^2+4)^2$ Respuesta: 25
4) $\text{lím}_{x\to -8} \frac{x-{}^3\ \overline{x}}{4x+10}$ Respuesta: $\frac{6}{22}$	**22)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{7x^5-10x^4-13x+6}{3x^2-6x-8}$ Respuesta: $-\frac{11}{2}$	**40)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ Respuesta: 4	**58)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ Respuesta: $\frac{1}{4}$	**76)** $\text{lím}_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$ Respuesta: $\frac{1}{3}$
5) $\text{lím}_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6}$ Respuesta: $\frac{6}{5}$	**23)** $\text{lím}_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ Respuesta: -2	**41)** $\text{lím}_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ Respuesta: 3	**59)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ Respuesta: $\frac{3}{2}$	**77)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-3}{x^2-5x+}$ Respuesta:5
6) $\text{lím}_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+5x+6}{x^3-1}$ Respuesta: -2	**24)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$ Respuesta: $\frac{7}{5}$	**42)** $\text{lím}_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$ Respuesta: 27	**60)** $\text{lím}_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ Respuesta: $\frac{1}{2}$	**78)** $\text{lím}_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$ Respuesta: 0
7) $\text{lím}_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$ Respuesta: *No hay límite*	**25)** $\text{lím}_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ Respuesta: $\frac{1}{2}$	**43)** $\text{lím}_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ Respuesta: -1	**61)** $\text{lím}_{x\to 4} \frac{\overline{x}-2}{4-x}$ Respuesta: $-\frac{1}{4}$	**79)** $\text{lím}_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$ Respuesta: $\frac{1}{7}$
8) $\text{lím}_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ Respuesta: $\frac{9}{2}$	**26)** $\text{lím}_{h\to 0} \frac{x+h\ ^2-x^2}{h}$ Respuesta: $2x$	**44)** $\text{lím}_{x\to 2} x^2-4x$ Respuesta: -4	**62)** $\text{lím}_{x\to -1} x^3+2x^2-3x-4$ Respuesta: 0	**80)** $\text{lím}_{x\to 7} \frac{2-\ \overline{x-3}}{x^2-49}$ Respuesta: $-\frac{1}{56}$
9) $\text{lím}_{x\to 0} \frac{x}{\overline{x+1}-1}$ Respuesta: 2	**27)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{5x}{x-3}$ Respuesta: -10	**45)** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8}$ Respuesta: $\frac{8}{3}$	**63)** $\text{lím}_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$ Respuesta: $\frac{1}{10}$	**81)** $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\overline{x+2}-\ \overline{2}}{x}$ Respuesta: $\frac{\overline{2}}{4}$
10) $\text{lím}_{h\to 0} \frac{x+h\ ^3-x^3}{h}$	**28)** $\text{lím}_{x\to 64} \frac{\overline{x}-8}{^3\ \overline{x}-4}$ Respuesta: 3	**46)** $\text{lím}_{x\to 5}\ x^4$ Respuesta: 625	**64)** $\text{lím}_{x\to -2}\ x^2+1$	**82)** $\text{lím}_{x\to 10}\ x-3$

Respuesta: $3x^2$			Respuesta: 5	Respuesta: 7
11) $\lim_{x\to -1} x - 8$ Respuesta: -9	**29)** $\lim_{x\to 1} x^3 + x^2 - 17$ Respuesta: -15	**47)** $\lim_{x\to -8} x^3 + 65$ Respuesta: -447	**65)** $\lim_{x\to -1} x^4$ Respuesta: 1	**83)** $\lim_{x\to 9} x^2 - x$ Respuesta: 72
12) $\lim_{x\to -5} x^2 - 10$ Respuesta: 15	**30)** $\lim_{x\to -3} 5x^4$ Respuesta: 405	**48)** $\lim_{x\to 1} 8x^4$ Respuesta: 8	**66)** $\lim_{x\to 15} 2x$ Respuesta: 30	**84)** $\lim_{x\to -2} 3x^3$ Respuesta: -24
13) $\lim_{x\to -5} 9x$ Respuesta: -45	**31)** $\lim_{x\to -10} 2x^4$ Respuesta: 20000	**49)** $\lim_{x\to 6} 5x^2$ Respuesta: 180	**67)** $\lim_{x\to 0} x^2$ Respuesta: 0	**85)** $\lim_{x\to -14} x$ Respuesta: -14
14) $\lim_{x\to -3} x^4 + x$ Respuesta: 78	**32)** $\lim_{x\to 8} x^2 + x$ Respuesta: 72	**50)** $\lim_{x\to 12} x^2 + 3$ Respuesta: 147	**68)** $\lim_{x\to -3} \frac{x}{3}$ Respuesta: -1	**86)** $\lim_{x\to 5} \frac{x}{3}$ Respuesta: $\frac{25}{3}$
15) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{7}$ Respuesta: $\frac{4}{7}$	**33)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{8}$ Respuesta: $\frac{9}{8}$	**51)** $\lim_{x\to 7} \frac{x^2}{19}$ Respuesta: $\frac{49}{19}$	**69)** $\lim_{x\to -9} \frac{x}{74}$ Respuesta: $-\frac{9}{74}$	**87)** $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{9}$ Respuesta: $-\frac{1}{9}$
16) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{7}$ Respuesta: 0	**34)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} - 87$ Respuesta: -87	**52)** $\lim_{x\to -4} \frac{x^3}{27}$ Respuesta: $-\frac{64}{27}$	**70)** $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{9}$ Respuesta: $\frac{1}{9}$	**88)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{7} - 3$ Respuesta: $-\frac{18}{7}$
17) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{45}$ Respuesta: $\frac{2}{45}$	**35)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{57}$ Respuesta: $\frac{4}{57}$	**53)** $\lim_{x\to 2} \frac{x}{7}$ Respuesta: $\frac{2}{7}$	**71)** $\lim_{x\to 12} \frac{x^2}{3}$ Respuesta: $\frac{144}{3}$	**89)** $\lim_{x\to 7} \frac{x^2}{7}$ Respuesta: 7
18) $\lim_{x\to 42} x - 98$ Respuesta: -56	**36)** $\lim_{x\to 9} \frac{x^2}{7}$ Respuesta: $\frac{81}{7}$	**54)** $\lim_{x\to 1} \frac{x}{2}$ Respuesta: $\frac{1}{7}$	**72)** $\lim_{x\to 0} \frac{9}{27}$ Respuesta: $\frac{9}{27}$	**90)** $\lim_{x\to 52} \frac{x}{2}$ Respuesta: 26

ANEXO 12: *"Evaluación de Teoremas sobre Límites"*

1. **DATOS INFORMATIVOS:**

ÁREA: Matemáticas **TEMA**: Teoremas sobre Límites **FECHA:** __________
CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ________ **NOMBRE DEL DOCENTE:** _________

2. **CUESTIONARIO**

2.1. Aplica las propiedades de los límites y luego une el ejercicio con la respuesta correcta:

$\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$	162
$\lim\limits_{x \to 3} 2x^4$	$\frac{5}{4}$
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$	$-\frac{11}{2}$

2.2. Escoge la *<u>única</u>* respuesta correcta :

<u>¿Qué se realiza para hallar el límite de una suma de funciones?</u>

- Se extrae solo el límite de la primera función y obtenemos el resultado.
- Se multiplican las funciones y luego se extrae el límite.
- Se extrae el límite de cada función y luego se suma.

<u>¿Qué se realiza para encontrar el límite de un cociente de funciones?</u>

- Se extrae el límite solo de la función como numerador.
- Se extrae el límite de las funciones tanto del numerador como del denominador cuyo límite no puede ser cero.
- Se multiplican las funciones.

2.3. Responde si es Falso o Verdadero:

_ El límite de un producto de funciones es igual a la suma de los límites de cada una de esas funciones_______

_Todo teorema de límite se resuelve multiplicando las funciones y luego realizando el límite cuando tiende a algún valor específico __________

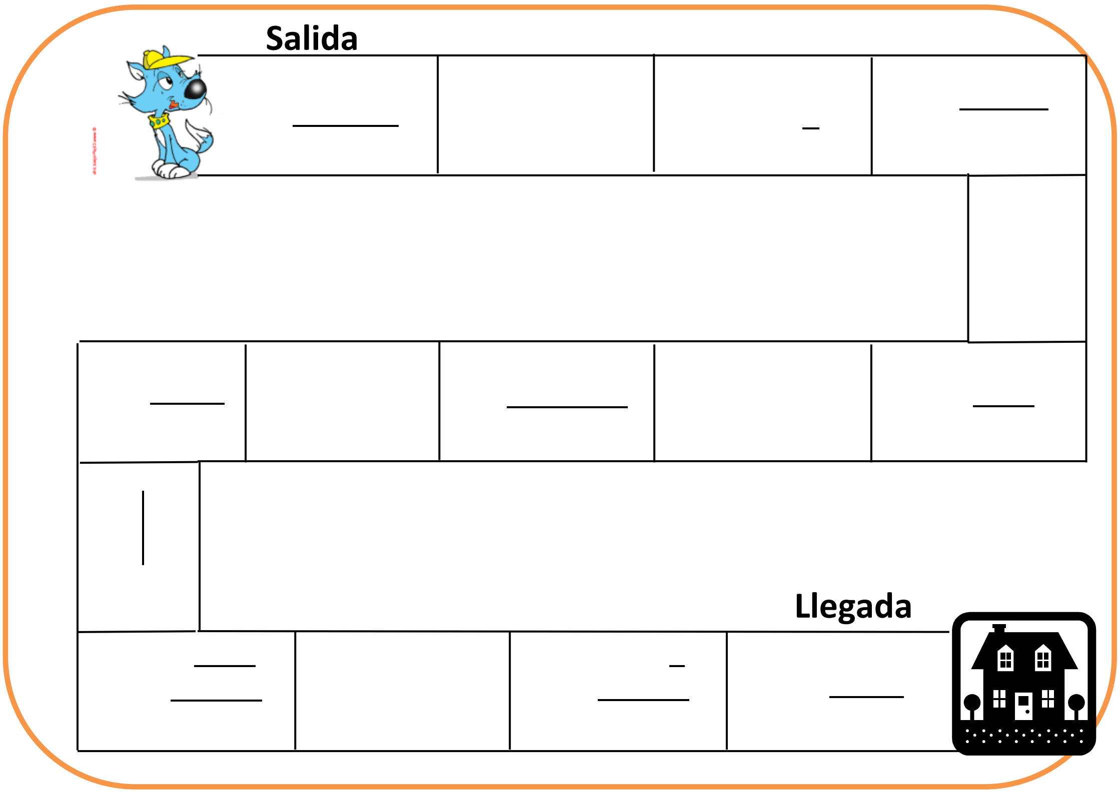
ANEXO 13: *"Materiales para Juego de Aproximaciones"*

Materiales:

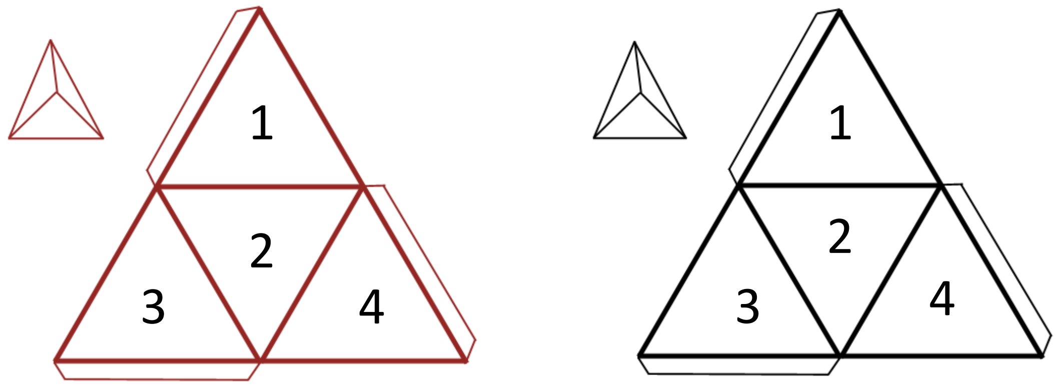
- ☑ Tablero de aproximaciones (Cartulinas, esferos o marcadores)
- ☑ 2 tetraedros (Cartulinas)
- ☑ 1 dado (cartulina)
- ☑ Fichas o papeles para marcar

Material didáctico:

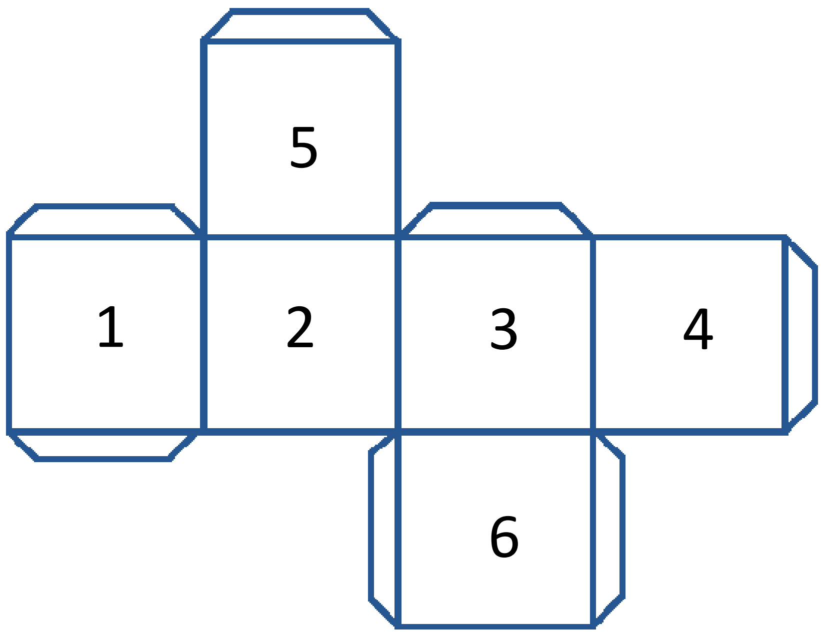
Tablero de las Aproximaciones



Tetraedros



Cubo



Fichas

ANEXO 14: “*Dominó de la Derivada”*

Materiales:

- ☑ Fichas de Dominó (Cartulinas, esferos o marcadores)
- ☑ Lápiz
- ☑ Hoja de cuadros perforada

Material didáctico:

Fichas de Dominó

Los ejercicios serán:

1) $f'\ 1 \quad si \quad f\ x\ = 4x^3 - 12x \quad Respuesta: 0$

2) $f'\ 0 \quad si\ f\ x\ = \frac{x^4+2x}{2} \quad Respuesta: 1$

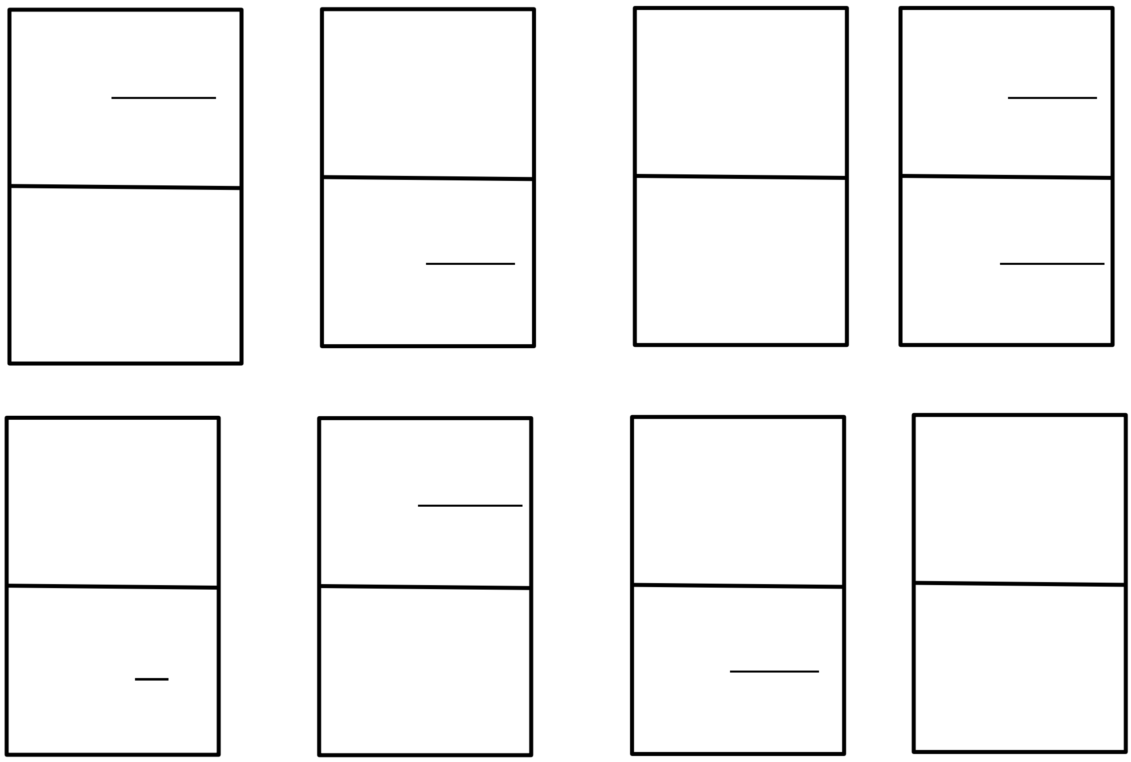
3) $f'\ 1 \quad si\ f\ x\ = \frac{x^6+18x}{6} \quad Respuesta: 2$

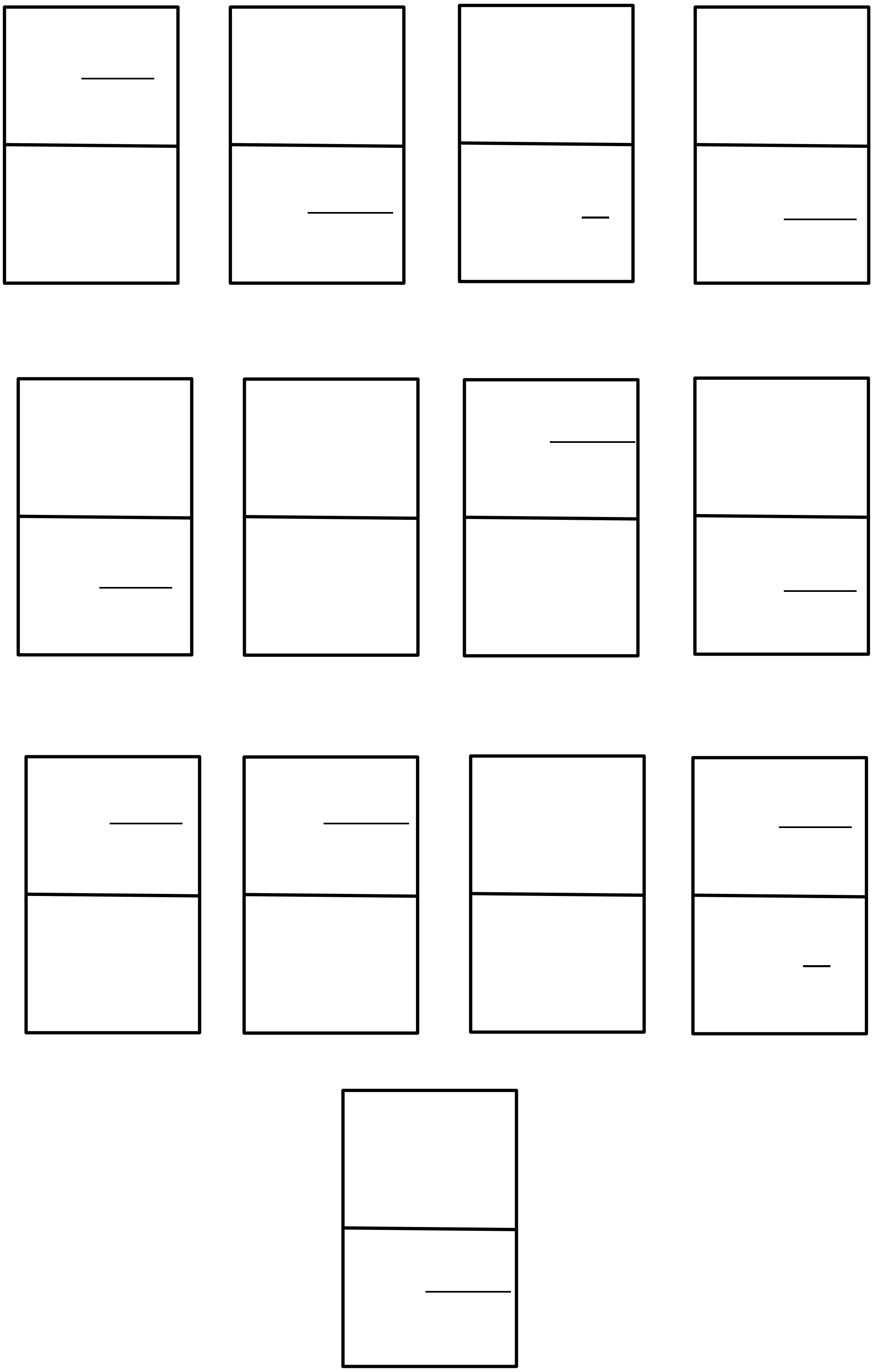
4) $f'\ 1 \quad si\ f\ x\ = 8x^2 - 13x \quad Respuesta: 3$

5) $f'\ 2 \quad si\ f\ x\ = x^2 + b \quad Respuesta: 4$

6) $f'\ 3 \quad si\ f\ x\ = x^2 - x \quad Respuesta: 5$

7) $f'\ 2 \quad si\ f\ x\ = \frac{x^3}{2} \quad Respuesta: 6$





ANEXO 15: “*Evaluación de Definición y notación de Derivada”*

1. DATOS INFORMATIVOS:

ÁREA: Matemáticas **TEMA**: Definición y notación de derivada **FECHA:** _______
CURSO: Terceros de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ___________**NOMBRE DEL DOCENTE:** _______

2. CUESTIONARIO

2.1. Responde las siguientes preguntas:

_ ¿De cuantas maneras se puede representar la derivada? ¿Cuáles son?

____

_ ¿Que encontramos si derivamos una función?, es decir ¿Qué es la derivada?

____

2.2. Resuelve los siguientes ejercicios, luego une con una línea lo correcto (recuerda aplicar correctamente tus procesos algebraicos):

$f'(3)$ sí $f(x) = x^2 - x$	5
$f'(2)$ sí $f(x) = x^3$	-1
$f'(-1)$ sí $f(x) = x^3 + 2x^2$	12
$f'(4)$ sí $f(x) = \frac{3}{x+1}$	$-\frac{3}{25}$

2.3. Los siguientes límites dados son una derivada. Encontrar la función principal y el punto, luego decir si es falsa o verdadera la siguiente igualdad:

$\lim_{h\to 0}\frac{2(5+h)^3-2(5)^3}{h}$ la función es $f(x) = 2x^3$ y el punto es 5. Esto es: _____________

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ la función es $f(x) = 8x^2$ y su punto es 4. Esto es: _________________

$\lim_{t\to x}\frac{t^2-x^2}{t-x}$ la función es $f(x) = t^2$ y su punto es 9. Esto es: _______________

$\lim_{x\to t}\frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{t}}{x-t}$ la función es $f(x) = \frac{2}{x}$ y su punto es t. Esto es: ____________________

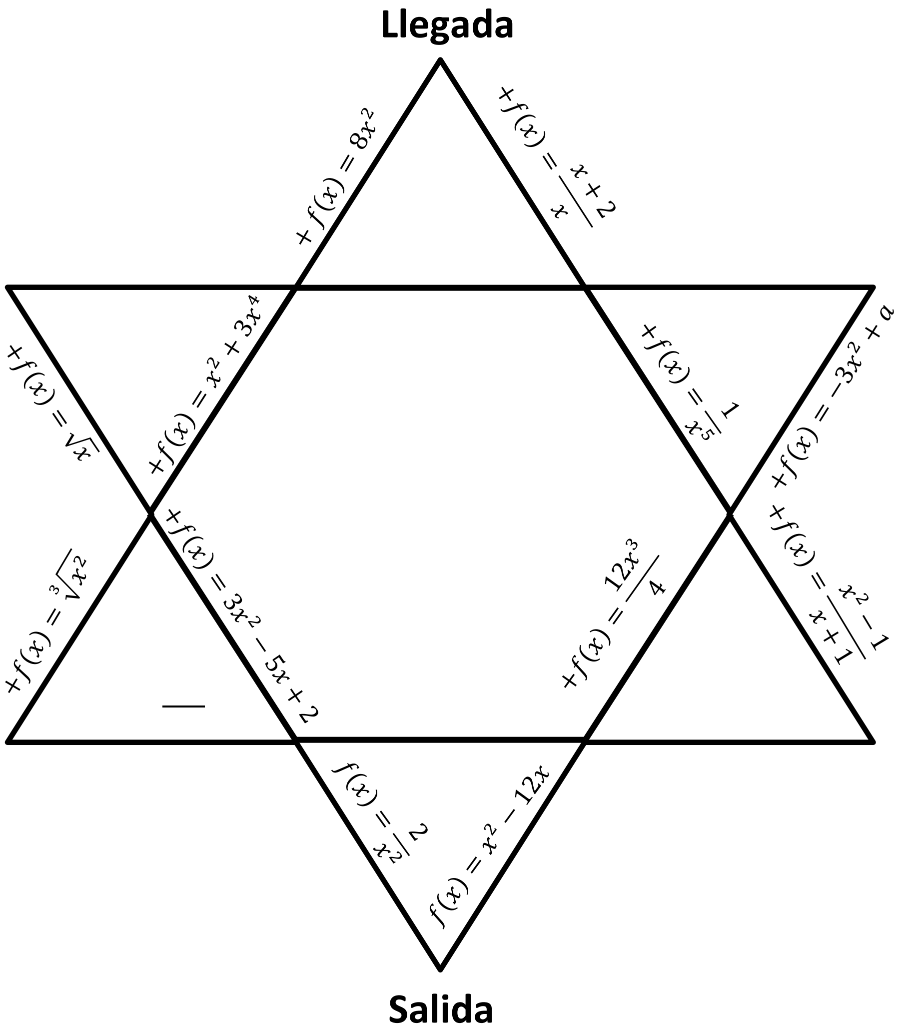
ANEXO 16: "*Material para la actividad Caminos*"

Materiales:

- ☑ Hoja de Laberintos (Cartulinas, esferos o marcadores)
- ☑ Lápiz
- ☑ Hoja de cuadros perforada

Material didáctico:

Hoja de Laberintos



ANEXO 17: "Rompecabezas de la Derivada"

Materiales:

- ☑ Cartulinas, esferos o marcadores.
- ☑ Cartón $(32cm \times 20cm)$
- ☑ Hoja de cuadros perforada

Desarrollo:

- ✓ Se cortan 2 pedazos de cartón de las medidas sugeridas.
- ✓ Se recorta el cartón como formando un marco.
- ✓ Luego se toma el segundo cartón y se pega para formar la base.
- ✓ Se recortan piezas de 3.5 cm para formar cuadrados.
- ✓ Se imprimen los ejercicios para que puedan resolver y se les coloca en las piezas.

Material didáctico:

ANEXO 18: ***"Evaluación de Reglas para determinar Derivadas"***

1. DATOS INFORMATIVOS:

ASIGNATURA: Matemáticas **TEMA**:Reglas para determinar derivadas **FECHA:** _
CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ___________**NOMBRE DEL DOCENTE:** _______

2. CUESTIONARIO

2.1. Completa los siguientes conceptos con las palabras del

Regla de la función constante

Regla del múltiplo constante

Regla de la potencia

Regla de la diferencia

_ Cuando se aplica la ______________________________ se deriva la primera función, se coloca el signo menos y luego se deriva la segunda función.

_ El resultado de su derivada es cero. Por lo tanto se aplicó la _______________.

_Cuando se aplica la ________________________________ se multiplica el exponente por la función y se resta una unidad al exponente de la función primera.

_ Se extrae la cantidad constante y luego se multiplica por la derivada de la función. Por lo tanto se aplicó la ______________________________________.

2.2. El siguiente ejercicio está mal realizado. Corrígelo y luego menciona si la respuesta del final es verdadera o falsa:

$$y = -x^3 + 2x$$

$$y' = -5x^2 + 2x^2 + 2$$

$$y' = -3x^2 + 2$$

La respuesta es: __________________________________

2.3. Encuentre las derivadas respectivas y una con una línea las respuestas correctas:

$y = -x^4 + 3x^2 - 6x + 1$	$-12x^{-7} - x^{-2}$
$2x^{-6} + x^{-1}$	$-4x^3 + 6x - 6$
$y = \frac{2}{3x^6}$	$\frac{4x^2+4x-5}{2x+1\ ^2}$

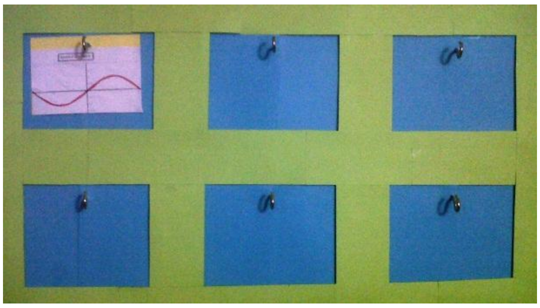
ANEXO 19: ***"Tableros de Uso múltiple"***

Materiales:

- ☑ Cartón
- ☑ Goma
- ☑ Cartulina de colores
- ☑ 6 cáncamos abiertos
- ☑ Pinchos

Tablero 1

- ✓ Se debe cortar el tablero de manera que se dejen 6 espacios.
- ✓ Se forra con cartulina de colores (goma)
- ✓ Se colocan los 6 cáncamos abiertos



Tablero 2

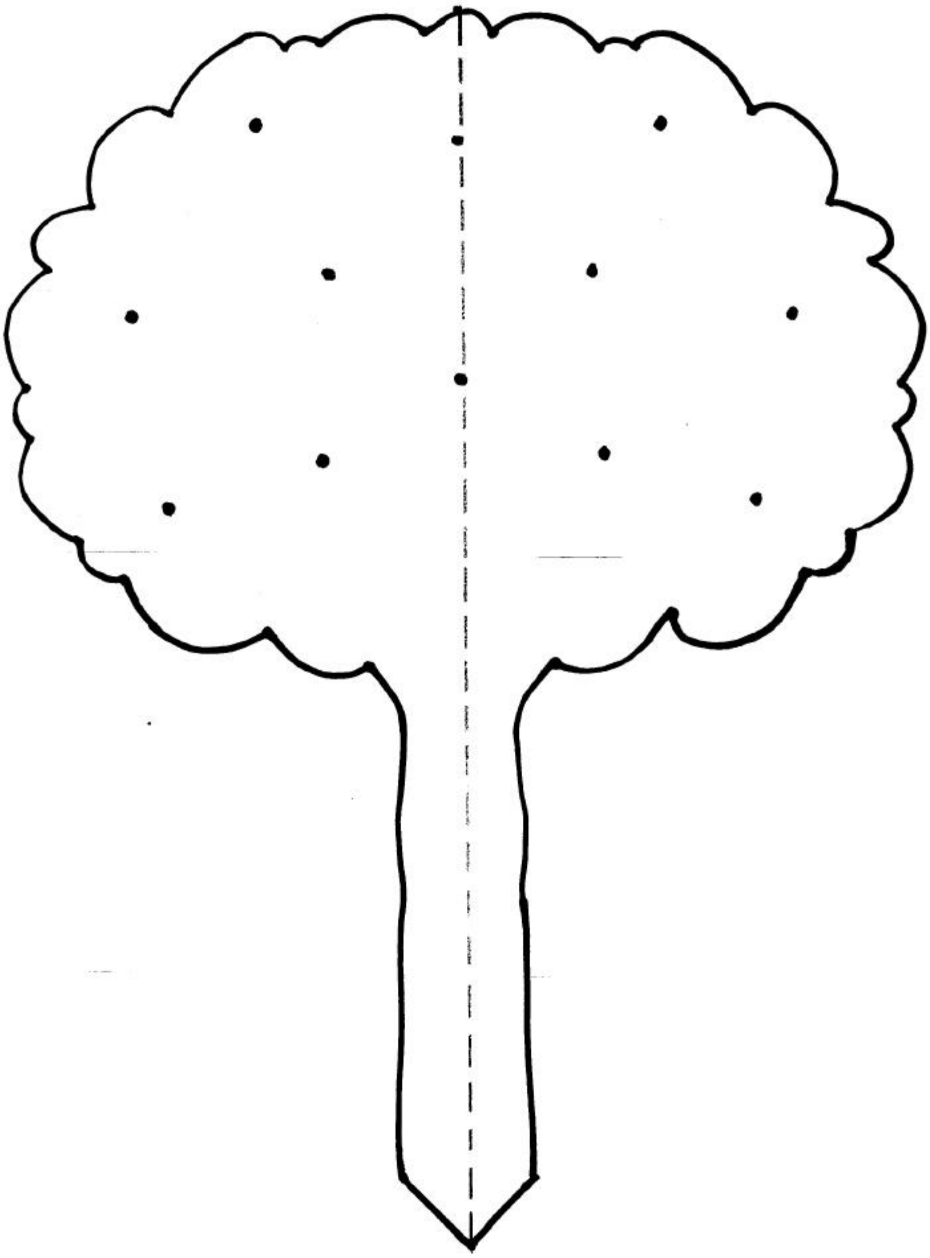
- ✓ Se debe cortar el cartón de forma que queden 9 espacios.
- ✓ Se colocan los pinchos de palo entre el grosor del cartón de modo que se puedan voltear los pedazos cortados.
- ✓ Se deben colocar los pares de las funciones trigonométricas y sus derivadas.

ANEXO 20: "*Materiales para la actividad ¡Crece árbol crece!*"

Materiales:

- ☑ Hojas o cartulinas
- ☑ Lápiz, esferos, marcadores
- ☑ Hoja de cuadros perforadas

Material didáctico:

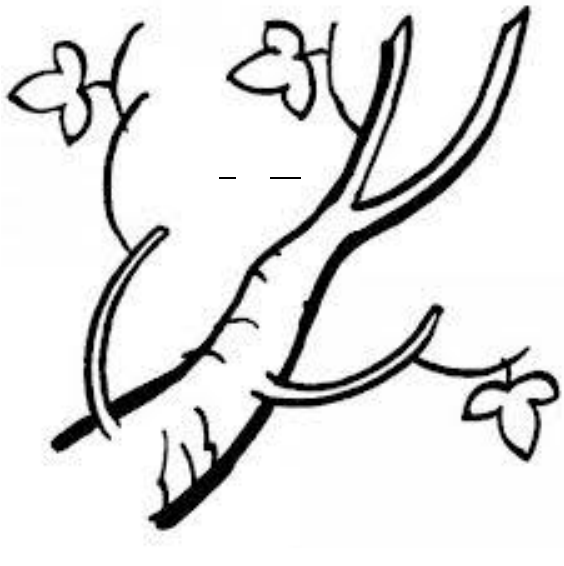



© Carson-Dellosa


© Carson-Dellosa


© Carson-Dellosa


© Carson-Dellosa



ANEXO 21: ***"Evaluación de la Derivada de funciones trigonométricas"***

1. DATOS INFORMATIVOS:

ASIGNATURA: Matemáticas. **TEMA**: Derivada de funciones trigonométricas
FECHA: __________
CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: __________**NOMBRE DEL DOCENTE:** __________

2. CUESTIONARIO

2.1. Escoja la ***única*** respuesta correcta:

Si deseamos encontrar la derivada de $f(x) = 3\cos\theta$; esta es:

- $3cos^1\theta$
- $5cos^1\theta$
- $3sen^1\theta$
- $-3sen\theta$

Si deseamos encontrar la derivada de $f(x) = 80\sec x$; esta es:

- $80sec^2x$
- $8sec^3x$
- $80\sec x\tan x$
- $8\tan x\sec x$

2.2. Complete los espacios en blanco para que el siguiente ejercicio se encuentre bien realizado:

Derivar $y = sen^2x + cos^2x$

2.3. Resuelva el siguiente ejercicio y luego decir si la respuesta es verdadera o falsa:

Derivar $y = \frac{sen\,x}{sen\,x + \cos x}$

La respuesta de esta derivada es $y' = (sen\,x + \cos x)^{-2}$

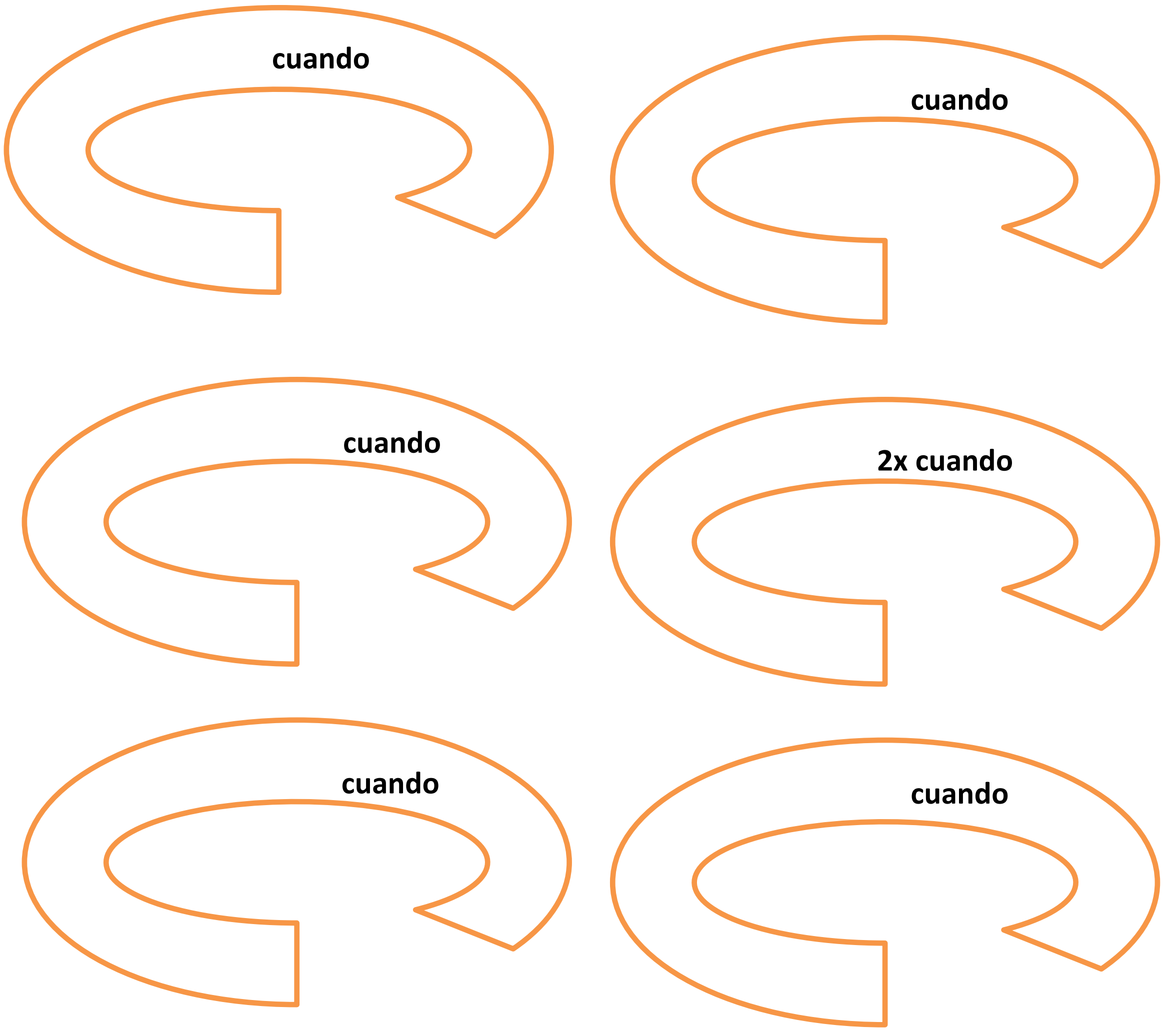
Esta respuesta es: ________________________________

ANEXO 22: ***"Materiales para la actividad Arma la cadena"***

Materiales:

- ☑ Eslabones (Cartulinas, esferos o marcadores)
- ☑ Lápiz
- ☑ Hoja de cuadros perforada
- ☑ Borrador

Material didáctico:



ANEXO 23*: “Materiales para construir la Máquina de la Derivada”*

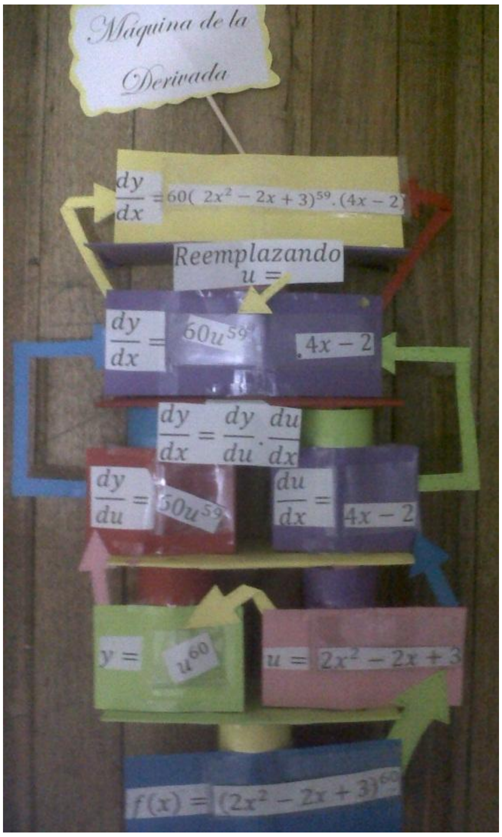
Materiales:

- ☑ 6 Tubos de papel higiénico.
- ☑ Cartulinas y esferos o marcadores de colores
- ☑ Cartón
- ☑ Cinta
- ☑ Goma
- ☑ Forro de mica

Desarrollo:

- ✓ Se forran los tubos con cartulina.
- ✓ Se aseguran los tubos con pedazos de cartón como formando una torre. Se puede pegar o colocar cinta para adherirlos.
- ✓ Se colocan los forros de mica en cada uno de los tubos.
- ✓ Se escribe en las tarjetas.

Material didáctico:



ANEXO 24: ***"Materiales para la actividad Quiero salir de aquí"***

Materiales:

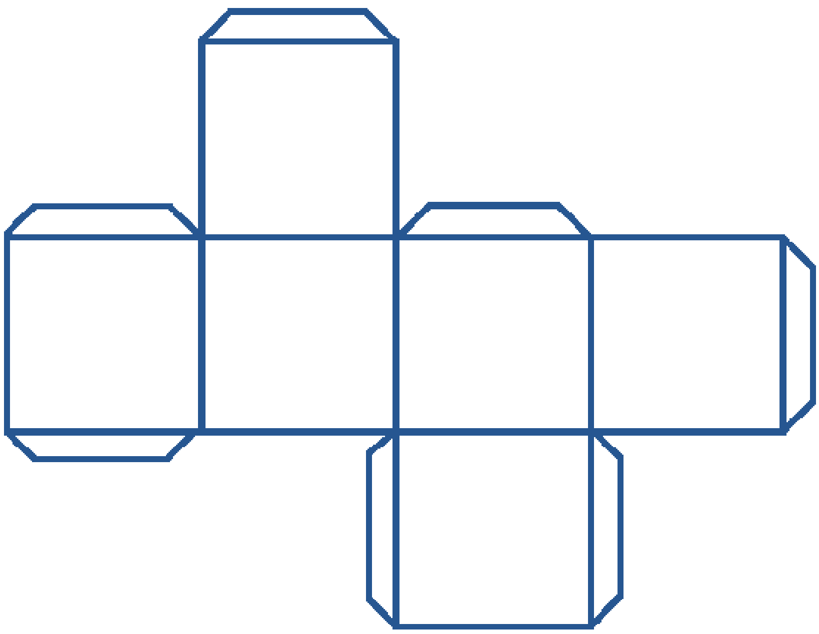
- ☑ Tablero del juego (cartulinas y esferos de colores)
- ☑ Dado del juego. Cartulina
- ☑ Lápiz
- ☑ Borrador
- ☑ Hoja de cuadros perforada

Material didáctico:

Tablero:

$f\ x = x\ x^2 + 1$	$f\ x = \frac{1}{3x^2+1}$	$f\ x = x^{-5}$	$f(x) = (3x^2 - 5)(2x^4 - x)$	$f\ x = \frac{x-1}{x+1}$ **Salida**	$f\ x = 12x^7 + x$	$f\ x = x^{35}$	$f\ x = \frac{2x^2-1}{3x+5}$	$f\ x = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

Dado:



ANEXO 25: ***"Evaluación de la Regla de la Cadena"***

1. DATOS INFORMATIVOS:

ASIGNATURA: Matemáticas **TEMA**: Regla de la Cadena **FECHA:** __________
CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: __________ **NOMBRE DEL DOCENTE:** ______

2. CUESTIONARIO

2.1. Desarrolla el siguiente ejercicio y luego encierra la respuesta correcta:

Encontrar y' de la función $y = \frac{1}{8-5x+7x^2 \;\; {}^{10}}$

La respuesta es:

a) $y' = -10(-5x+19x)$ b) $y' = -10(-5+14)$ c)$Ninguna$

2.2. Decir si la siguientes afirmaciones con falsas o verdaderas:

_ La regla de la cadena se utiliza para las ecuaciones de la forma $y = x^n$ siendo n un número entero. Esto es: ______________________________________

_La regla de la cadena se aplica a funciones compuestas como $f(g\;\;x\;\;)$. Esto es:___

_Si tenemos la expresión $y = \;\; x^4 + 9x^2 - x + 8 \;\; {}^9$ es necesario aplicar la regla de la cadena. Esto es: ____________________

2.3. Realiza los ejercicios y luego une con una línea las respuestas correctas:

$f\;\;x\;\; = \;\; x^2 - 3x + 8 \;\; {}^3$	$f'\;\;x\;\; = -40\;\; 8x - 7 \;\; {}^{-4}$
$f\;\;x\;\; = \;\; 8x - 7 \;\; {}^{-5}$	$f'\;\;x\;\; = \;\; x^2 - 3x + 8 \;\; {}^2(6x - 9)$
$f\;\;x\;\; = \frac{x}{x^2-1 \;\; {}^4}$	$f'\;\;x\;\; = -\frac{1}{2\;\;\; 3x+8 \;\;\; 2x+5^3}$
$f\;\;x\;\; = \frac{x^2+1 \;\; {}^3}{4x-5 \;\; {}^3}$	$f'\;\;x\;\; = -5x^4\;\; x^5 - 32 \;\; {}^{-6/5}$

ANEXO 26: *“La Caja Preguntona”*

Materiales:

- ☑ Tarjetas con preguntas (Cartulinas, esferos o marcadores)
- ☑ Caja pequeña

Desarrollo:

- Se utiliza una caja pequeña de tal forma que pueda contener un cierto número de tarjetas.
- Se colocan las preguntas en las tarjetas dentro de la caja

Material didáctico:

ANEXO 27: ***"Materiales para la actividad Compro lo que puedo"***

Materiales:

- ☑ Billetes (Cartulinas, esferos o marcadores)
- ☑ Lápiz
- ☑ Hoja de cuadros perforada
- ☑ Cosas para poner precios (tienda)

Material didáctico:

ANEXO 28: ***"Evaluación de, Determinación de Máximos y Mínimos"***

1. DATOS INFORMATIVOS:

ASIGNATURA: Matemática **TEMA**: Determinación de Máximos y Mínimos
FECHA: _____________ **CURSO:** Tercero de Bachillerato
PARALELO: __________ **NOMBRE DEL ESTUDIANTE:** ___________

2. CUESTIONARIO

2.1. Encuentra los puntos críticos, el máximo y mínimo, luego responde si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas:

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 1 \; En\; el\; intervalo\; [0,3]$; Sus puntos críticos son 0, 2,3; su máximo es 3 y su mínimo es -1. Esta afirmación es: _________________.

b) $f(t) = sen\, t - \cos t \quad en\; el\; intervalo\; [0, \pi]$; Sus puntos críticos son $\frac{\pi}{2}, 2, \frac{\pi}{3}$; su máximo es π y su mínimo es $-\pi$. Esta afirmación es: ________________.

2.2. Resuelve el siguiente ejercicio y luego escoge la respuesta correcta:

Identifica los puntos críticos y su valor máximo y mínimo para:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \quad en\; el\; intervalo\; [-\frac{3}{2}, 3]$$

Su respuesta es:

a) Sus puntos críticos son 2,3 y su máximo es 6 y su mínimo es 3
b) Sus puntos críticos son -1,1 no hay máximo y su mínimo es -1
c) Sus puntos críticos son -2,5 no hay máximo y no hay mínimo.

2.3. En el siguiente ejercicio existen errores, enciérralos en un círculo y corrígelos:

$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad en\; el\; intervalo\; [-2,1]$$

Primero derivamos: $g'(x) = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$

Igualando a cero: $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \qquad x = -1$

Evaluando para los puntos críticos tenemos:

$$g(-2) = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5} \qquad g(1) = \frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{2} \qquad g(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

ANEXO 29: ***"Evaluación de la Aplicación de Máximos y Mínimos"***

1. DATOS INFORMATIVOS:

ASIGNATURA: Matemáticas **TEMA**: Aplicación de Máximos y Mínimos
FECHA: _________________
CURSO: Tercero de Bachillerato **PARALELO:** __________
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ___________ **NOMBRE DEL DOCENTE:** ______

2. CUESTIONARIO

2.1. Usando el programa Derive, decir si la respuesta siguiente es la correcta al ejercicio planteado:

a) Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea máximo.

La respuesta es: 7 y 3. Esta respuesta es: _________________________

b) Se desea construir una caja rectangular con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho cortando cuadrados idénticos en las custro esquinas y doblando los dos. Encuentre las dimensiones de la caja de máximo volumen ¿Cuál es ese volumen?

La respuesta es: volumen máximo de 200 cm^3. Esta respuesta es: ___________.

2.2. Escoge la única respuesta correcta:

La granja victoria tiene 80 pies de tela de alambre con la que se planea cercar un corral rectangular al lado de un granero de 100 pies de larg

o como se muestra en la figura (el lado que está junto al granero no necesita cerca) ¿Cuáles son las dimensiones del corral de máxima área? Recuerde que debe justificar su respuesta:

Opciones:

Figura 1

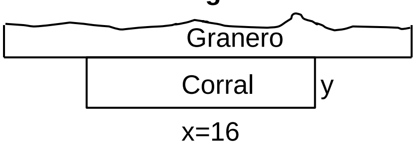


Figura 2

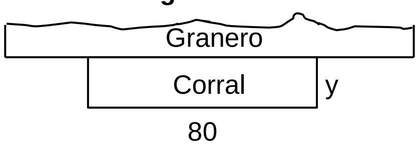


Figura 3

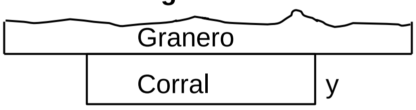
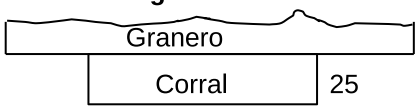


Figura 4



40 x

Bibliografía

ALBERTI, Rafael. *"Notación funcional"*. http://aportemath.blogspot.com. Acceso: 03/12/12

ANDRADE, Xavier. *"Comisión de Evaluación Interna"* Quito-Ecuador. Santillana. S.A., 2013.

AULA FÁCIL. ***"**Coordenadas y el Plano**".*** http://www.aulafacil.com. Acceso: 03/12/12

CÁLCULO MATEMÁTICO. *"Distancia entre dos puntos".* http://educacioncalculomatematico.blogspot.com. Acceso: 03/12/12

DUARTE, Rigoberta. *"Definición de función y algunas gráficas".* http://www.profesorenlinea.cl. Acceso: 03/12/12

GARCIA, Carlos. *"Ecuación de la recta, pendiente e intersección con el eje".* http://weblessoncarlos-garcia.blogspot.com. Acceso: 03/12/12

GRUPO SANTILLANA. *"Manual de Sugerencias Pedagógicas*". Quito-Ecuador. Santillana S.A., 2011

INSITU *"La Circunferencia"*. http://www.vitutor.com/fun/2/a_10.html. Acceso: 03/12/12

INTEF "Actividades al aire libre". www.ite.educacion.es. Acceso: 16/07/13

LABARCA, Eduardo. *"Notación de intervalos*". http://diccio-mates.blogspot.com. Acceso: 03/12/12

LOPEZ NIEVES, Luis. *"Teorema de Pitágoras"*. http://teoremadepitgorasmiri.blogspot.com. Acceso: 03/12/12.

MARIN, Irene Margarita**.** *"Odiseo revista electrónica de pedagogía". www.odiseo.com.mx***.** Acceso: 03/12/12

MARTIN GARZO, Gustavo. "*Ecuación de la Recta*". http://huitoto.udea.edu.co. Acceso: 03/12/12

MAZARIO, Israel. MAZARIO, Ana. *"El Constructivismo: Paradigma de la escuela Contemporánea".* Cuba, Cienfuegos, 2011.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA, "*Fundamentos Psicopedagógicos del Proceso de Enseñanza-Aprendizaje*". Quito, Los Andes, 1998.

MOLESTINO, Sifrido. *"Ecuación de una recta vertical y horizontal (valor constante)"*. http://www.pps.k12.or.us. Acceso: 03/12/12

PURCELL, Edwin J. VARBERG, Dale. *"Cálculo con Geometría Analítica cuarta edición".* Quito-Ecuador, Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 1998.

RUIZ, Gil. *"Simetría con Respecto al Origen descartes 3d"* http://recursostic.educacion.es. Acceso: 03/12/12

SWOKOWSKI, Earl W. "*Cálculo con Geometría Analítica tercera edición*". Buenos Aires, Grupo Iberoamericano, 2000

SARDINA, María. *"Simetrías".* http://mariasardina.blogspot.com. Acceso: 03/12/12

GRUPO SANTILLANA. *"Manual de Sugerencias Pedagógicas*". Quito-Ecuador. Santillana S.A., 2011

SANTANA, Alfonso. *"El Constructivismo en el proceso de enseñanza-aprendizaje".* México**,** Instituto politécnico nacional, 2011.

TAPIA, Alexandra. "*Fundamentos Psicopedagógicos*". http://docentes.inf. Acceso: 03/12/12

TEXTOS GUIAS PARA EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

1) BARROS, Patricio. BRAVO, Antonio *"Conjunto de libros que marcaron la historia"*. www.librosmaravillosos.com. Acceso: 15/05/13

2) GRANVILLE, William. ANTHONY Smith. PERCEY, Flongley. WILLIAM Raymond*. "Cálculo diferencial e integral".* México, Limusa, S.A., 1982.

3) PURCELL, Edwin J. VARBERG, Dale. *"Cálculo con Geometría Analítica cuarta edición".* Quito-Ecuador, Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 1998.

4) SWOKOWSKI, Earl W. "*Cálculo con Geometría Analítica tercera edición*". Buenos Aires, Grupo Iberoamericano, 2000.

5) S, N. *"Ecuación de la recta, punto y pendiente".* www.montereyinstitute.org. Acceso: 03/12/12.