Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

“Propuesta didáctica para el aprendizaje de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada”

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física

Autores:

Pedro Santiago Loja Chuquimarca

Jennifer Fernanda Valladarez Vaca

Director:

Tatiana Gabriela Quezada Matute

ORCID: 0000-0003-2730-9342

Cuenca, Ecuador

2024-02-21

Resumen

En el análisis del Volumen de Sólidos de Revolución (VSR), se destacan desafíos significativos relacionados con la comprensión y aplicación de teoremas fundamentales del Cálculo en el ámbito teórico, así como con la visualización espacial en dos y tres dimensiones. La falta de destreza en estos aspectos constituye un impedimento para la ejecución precisa de cálculos vinculados al VSR, y la carencia de una concepción clara al interactuar con el objeto puede resultar en obstáculos en la resolución de problemas y ejercicios asociados. Con base en los instrumentos utilizados para llevar a cabo la investigación, se realizaron entrevistas a docentes de Cálculo donde se evidencia la importancia de la formación docente en tecnologías de la información y comunicación (TIC). Por otro lado, mediante un cuestionario aplicado a estudiantes de la carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales se destaca también la capacidad autodidacta de los mismos y su adaptabilidad a entornos digitales. La implementación de Realidad Aumentada (RA) mediante software se vislumbra como un recurso que puede potenciar la percepción espacial de los estudiantes. En consecuencia, la integración de TIC, en particular la Realidad Aumentada, recibe aprecio generalizado entre los estudiantes al facilitar la comprensión de los Volúmenes de Sólidos de Revolución, abordando la identificación de sólidos y reforzando la percepción espacial, ante lo cual la propuesta didáctica responde a la problemática expuesta y al refuerzo de estas habilidades visoespaciales.

Palabras clave: visión espacial, cálculo integral, enseñanza de lamatemática

Abstract

In the analysis of the Volume of Solids of Revolution (VSOR), significant challenges related to the understanding and application of fundamental theorems of Calculus in the theoretical field are highlighted, as well as to spatial visualization in two and three dimensions. Lack of skill in these aspects is an impediment to the accurate execution of VSOR-related calculations, and the lack of a clear conception when interacting with the object can result in obstacles in solving problems and associated exercises. Based on the instruments used to carry out the research, interviews conducted with Calculus teachers where the importance of teacher training in information and communication technologies (ICT) is evident. On the other hand, through a questionnaire applied to students of the Pedagogy of Experimental Sciences career, their self-taught capacity and adaptability to digital environments are also highlighted. The implementation of Augmented Reality (AR) through education software is seen as a resource by students that can enhance spatial perception. Consequently, the integration of ICT, in particular Augmented Reality, receives widespread appreciation among students by facilitating the understanding of the Volume of Solids of Revolution, addressing the identification of solids and reinforcing spatial perception, before which the didactic proposal responds to the exposed problem and the reinforcement of these visuospatial skills.

Keywords: spatial vision, integral calculus, mathematics teaching

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Agradecimiento

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a todas las personas que contribuyeron de manera significativa al desarrollo y culminación de este trabajo de titulación. En primer lugar, agradezco a mi mamá, Ángela Loja, por su apoyo incondicional y constante durante toda mi formación académica, por su inquebrantable respaldo emocional y comprensión durante este desafío académico; de igual forma a mis tíos Edgar y Susana por sus palabras de aliento, intercambio de ideas y colaboración, que han enriquecido enormemente mi experiencia. También agradezco a mi tutora, Msc. Tatiana Quezada, por su orientación experta, dedicación y apoyo constante a lo largo de este proceso, sus comentarios constructivos y sabios consejos han sido fundamentales para dar forma a este trabajo. Este logro no habría sido posible sin el apoyo inestimable de todos ustedes, y les estoy profundamente agradecido.

Santiago

Agradezco sinceramente a todas las personas que contribuyeron de manera significativa a la realización de este trabajo de titulación. En primer lugar, agradezco a mis abuelos Luz y Víctor, quienes fueron los que me acompañaron, inspiraron y motivaron junto con sus consejos y sabias palabras para lograr mis objetivos. También agradezco a mis padres Fernando y Mercy, mi hijo Francisco y mis hermanos por su constante aliento, comprensión y motivación para lograr culminar mis estudios por ellos y a todos mis amigos y personas que estuvieron junto a mi durante esta travesía. Finalmente quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi tutora, Msc Tatiana Quezada, cuya orientación y paciencia fueron fundamentales para la culminación de este proyecto.

Cada uno de ustedes ha sido una parte fundamental de este logro y estoy profundamente agradecida por su inestimable contribución.

Jennifer

Introducción

En el presente trabajo de integración curricular se plantea una propuesta didáctica como refuerzo para el aprendizaje del tema Volumen de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada. Este busca apoyar al estudiante en la dificultad de visualizar el sólido en revolución con ayuda de la aplicación GeoGebra. El trabajo de integración se estructura en tres capítulos: fundamentación teórica, metodología y resultados y, por último, la presentación de la propuesta didáctica.

En el capítulo I del presente texto se explora en primer lugar la fundamentación teórica del Cálculo Integral aplicado al Volumen de Sólidos de Revolución, así como también el cómo la Realidad Aumentada puede ser una herramienta eficaz para mejorar la comprensión y el compromiso de los estudiantes con los conceptos de los Sólidos de Revolución. Desde la manipulación de objetos tridimensionales hasta la mejora de habilidades visoespaciales, la Realidad Aumentada ofrece un enfoque integral que se alinea con las necesidades de los estudiantes de Matemáticas.

En el capítulo II, se presenta una metodología de investigación que combina entrevistas de tipo cualitativo a docentes de la Universidad de Cuenca, y encuestas de tipo cuantitativo con estudiantes de la carrera Pedagogía de Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, de la misma institución. Este enfoque mixto busca proporcionar una comprensión profunda de las dificultades específicas que los estudiantes enfrentan al aprender el tema Volumen de Sólidos de Revolución y cómo la Realidad Aumentada puede ser una solución efectiva.

En el capítulo III: Propuesta, se diseña una guía didáctica con ayuda de GeoGebra, dirigida a los estudiantes como apoyo para el aprendizaje del tema Volumen de Sólidos de Revolución mediante el uso de la aplicación móvil mencionada para la visualización del objeto en 3D, con base en la información obtenida por las dos técnicas de investigación aplicadas anteriormente.

CAPÍTULO I: Fundamentación teórica

1.1. Problemática del Aprendizaje de los Sólidos de Revolución

De forma general, son muchos los inconvenientes que existen tanto en el aprendizaje como en la enseñanza de Matemáticas, sea en Educación General Básica o en Bachillerato. En la Matemática Universitaria, de manera específica en Geometría, Advíncula et al. (2017) observaron que es habitual encontrar en los estudiantes, dificultades en reconocer características y propiedades de figuras tridimensionales, lo cual provoca a su vez, la nula comprensión de las nociones y propiedades geométricas que se requieren para resolver problemas que abarquen objetos geométricos.

Asimismo, dentro en la investigación realizada por Andrade y Montecino (2013), dos de los conflictos que se solían presentar en el aprendizaje de los sólidos de revolución, radicaba el momento de identificar la expresión a ser integrada, para luego realizar el cálculo del volumen de ese sólido de revolución formado y, en segundo lugar, al elaborar imágenes mentales y representación del objeto en cuestión; es decir, existe una clara deficiencia en la capacidad de visualización espacial y en la interpretación de las funciones $f(x)$ de las cuales se parte.

Por otro lado, Mofolo-Mbokane et al. (2013) en su trabajo de análisis de Dificultades de aprendizaje con sólidos de revolución: observaciones en el aula, obtuvieron como resultado que las principales falencias dentro del área están relacionadas con la visualización, rotación imaginaria, uso de las sumas de Riemann, interpretación de la integral definida e identificación de las zonas gráficas de las funciones con las cuales se parte para formar el sólido, así como también los aspectos conceptuales relacionados al aprendizaje de Volumen del Sólido de Revolución (VSR).

Por consiguiente, se puede afirmar que tanto la fundamentación teórica como la interpretación visoespacial son dos de las principales dificultades que, con mayor frecuencia aparecen a la hora de estudiar el VSR; dentro de la parte teórica, la comprensión y aplicación de los teoremas fundamentales del cálculo para resolver áreas de superficies entre funciones son de vital importancia, no obstante, la inhabilidad para dominar estos aspectos incurre en un obstáculo para el cálculo de VSR. Otra de las problemáticas que sobresale es la visualización espacial, tanto del objeto en dos como, principalmente, en tres dimensiones (2D y 3D) debido a que, si no se tiene una idea clara de aquello con lo que se va a trabajar, muy posiblemente el estudiante no consiga resolver el ejercicio o problema de forma satisfactoria si no domina las componentes teóricas y prácticas.

1.2. Sólidos de Revolución

Los sólidos de revolución, en el contexto de las matemáticas, se refieren a formas tridimensionales generadas al hacer rotar una curva alrededor de un eje específico. Explorar la naturaleza y propiedades de estos sólidos no solo enriquece la comprensión conceptual de los estudiantes, sino que también ofrece una plataforma para la aplicación práctica de principios matemáticos. En esta perspectiva, esta investigación se adentrará en los sólidos de revolución, explorando su relevancia pedagógica y su impacto en la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

La integración de sólidos de revolución en el currículo matemático no solo amplía el repertorio conceptual de los estudiantes, sino que también proporciona una plataforma efectiva para fortalecer la conexión entre teoría y aplicación, promoviendo así un aprendizaje significativo en el aula de matemáticas.

1.2.1. Cálculo Integral

El Cálculo Integral (cálculo infinitesimal), es una rama de las Matemáticas en el proceso de integración o antiderivación; comúnmente utilizada en la ingeniería y la Matemática en general. Se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución (Bastidas & Gutarra, 2017).

Trata esencialmente acerca de la Integral Definida, es decir, de acuerdo con Leithold:

> Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la **integral definida** de f de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, está dada por
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta_i x$$
>
> Si el límite existe. (Leithold, 1998, p. 341)

1.2.2. Concepto de Volumen de Sólidos de Revolución

Una de las bases importantes del Cálculo Integral es la Geometría, en la cual se analizan distintos aspectos de figuras planas y del espacio y, a partir de ellas, se realizan cálculos de perímetros, áreas y volúmenes. No obstante, existen ciertos objetos geométricos tridimensionales que resultan o nacen de una figura bidimensional, es decir, de un plano con forma determinada, pero revolucionado.

Por ello, es necesario recordar la definición de los sólidos de revolución como objetos que se obtienen a partir del giro de una región plana alrededor de un eje o recta contenida dentro de ese mismo plano y sin cortar a la misma. En otras palabras y de acuerdo con definiciones similares de autores como Leithold (1998), Swokowsky (1989), Larson y Edwards (2010), entre otros, se tiene que: los sólidos de revolución son regiones dentro del espacio que se obtienen girando una región plana, limitada por curvas, alrededor de una recta llamada eje de giro.

1.2.3. Métodos de resolución de Volumen de Sólidos de Revolución

Método de Rebanadas o Discos. Generalmente, cuando se habla de rebanadas, se entiende que se hace un corte transversal a un objeto tridimensional. En el caso de los cilindros, partiendo desde lo más simple, al hacer este tipo de cortes se obtienen las llamadas rebanadas o discos, es decir, pequeños cilindros con una dimensión de altura muy pequeña. Ese cilindro a su vez, no es más que una región rectangular que se gira alrededor de uno de sus lados (Larson y Edwards, 2010). Por lo tanto, el volumen del cilindro sería la suma de las áreas de cada uno de los discos que forman el cuerpo completo. Esta definición se extiende a objetos no regulares que se forman a partir de la región encerrada por una función y uno de los ejes coordenados, donde los diferenciales dx o dy, según sea el caso, corresponden al ancho del disco o rebanada.

Método de Arandelas o Anillos. El método de arandelas para el cálculo de volúmenes resulta de un caso especial del método de rebanadas. Al hablar de rebanadas se dice que “El proceso es semejante al rebanado de una hogaza de pan en muchas porciones muy delgadas de modo que todas las porciones juntas constituyen la hogaza completa” (Leithold, 1998, p 382). Entonces, el método de arandelas consiste en hallar el volumen de un sólido de revolución “hueco” en donde, a diferencia de las Rebanadas o Discos, el cuerpo revolucionado posee dos radios de giro: un radio mayor R (más alejado del eje de giro) y un radio menor r (más cercano al eje de giro).

1.3. Tecnologías de la Información y Comunicación en la educación

El uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC), según Vargas (2015), resalta lo oportuno de su implementación en la educación, no obstante, es necesario aprender su manejo adecuado para superar las dificultades que ésta trae consigo. El empleo de dicha herramienta es favorable cuando es utilizada en estrategias para el conocimiento, como son los medios audiovisuales, los cuales son importantes de incluir si comprenden estrategias o estilos de aprendizaje que contribuyan en la forma de aprender.

Así mismo, Montecé et al. (2017) analizan acerca de los diferentes aspectos de las TIC en la educación, en las cuales se destaca la percepción, género, acceso, grupos vulnerables, aplicaciones, redes sociales, conferencias, realidad aumentada, beneficios, barreras, elementos clave y mecanismos de evaluación, desarrollando un aumento de aplicaciones educativas desde el teléfono celular (smartphone) hasta la realidad virtual.

Como no podía ser de otra forma, en el campo de las Matemáticas también se han implementado los recursos tecnológicos buscando que el aprendizaje sea más sencillo, pues el uso de estas herramientas, ha logrado que la comprensión se facilite. Conejo (2018) hace mención en que las TIC son un recurso innovador que ayuda al docente a mejorar sus estrategias de enseñanza para lograr alcanzar una mejor educación y que los estudiantes aprendan Matemáticas de manera efectiva.

1.3.1. Uso de las TIC en la Educación Superior

Las TIC en la educación superior representan nuevos entornos de aprendizaje, siendo desarrolladoras de competencias necesarias para el mismo y generadoras de habilidades para la vida. Sin embargo, para que la educación superior garantice el acceso a los avances tecnológicos, es importante considerar los retos que se deben enfrentar (García et al., 2018).

Vinueza y Simbaña (2017) hablan acerca del aspecto tecnológico e investigativo que deben tener las TIC en la educación superior, consideran que éstas deben ayudar a formar profesionales en cada rama de especialidad, con la finalidad de ampliar su visión íntegra para estar acorde con los cambios tecnológicos que produce la globalización.

De acuerdo con esta información, se considera a las TIC como una herramienta que fomenta la innovación en el ámbito educativo y es por esa misma razón que el profesorado debe estar en la capacidad de adaptarse, informarse y estar capacitado para hacer uso de dichas herramientas bajo el propósito de mejorar la enseñanza y propiciar a su alumnado las habilidades necesarias para desenvolverse en una sociedad tecnológica, a la par con el avance continuo de la misma.

1.3.2. Ventajas y desventajas del uso de las TIC en el aprendizaje

Al hablar de las TIC y analizar su uso en educación, es prudente que se consideren en primer lugar las ventajas y desventajas de su uso, analizando las mismas tanto desde el rol del docente como de los estudiantes. A continuación, se detallarán las ventajas que da a conocer Díaz (2013).

Para el caso del docente:

- La comunicación junto con los estudiantes se da con mayor fluidez, ya que se pueden aclarar dudas sobre las actividades mediante los distintos medios de comunicación como lo son el correo electrónico, redes sociales, plataformas de aulas virtuales, etc.

- El proceso de evaluación es más rápido, pues se pueden realizar evaluaciones en línea mediante aplicaciones o páginas específicas las cuales darán una calificación automática al finalizar y así dinamizar los resultados.

- Motiva a los profesores a desarrollar la creatividad y realizar innovaciones, logrando un aprendizaje mutuo, pues ellos aprenden de sus estudiantes y analizan cómo ellos adquieren los nuevos conocimientos, mediante el desarrollo de actividades individuales, de cooperación y trabajo en equipo.

Desde el punto de vista del estudiante:

- Favorece el aprendizaje cooperativo.

- Desarrolla la habilidad de búsqueda y el interés a la investigación, como también a la selección de información, de acuerdo a las necesidades y requerimientos, despertando la motivación en los temas trabajados o el estudio de otros nuevos que sean de interés para los estudiantes.

- El acceso a múltiples recursos educativos para estudiar y trabajar, permitiendo una mayor flexibilidad de estudios.

- Hace que el proceso de enseñanza y aprendizaje se desarrolle en función de las habilidades y cualidades individuales, es decir, tendrán la libertad de usar lo que mejor se les acomode para su correcto aprendizaje.

Así mismo, hay que tener en cuenta que el individuo al enfrentarse a nuevos retos estos pueden traer dificultades. Bonilla (2014) analiza varias desventajas tanto para docentes como para estudiantes que se deben tomar en cuenta al momento de utilizar las TIC:

- Pueden provocar adicción a determinados programas, chats y videojuegos, provocando así que los aprendizajes sean nulos o incompletos.

- Exige una capacitación o formación constante de los profesores, una inversión de tiempo y dinero.

- Fiabilidad de la información, se debe enseñar a los estudiantes a distinguir qué se entiende por información fiable y fuentes de información válidas, ya que no siempre la información en la Internet es lícita.

- El uso excesivo de las tecnologías disminuye el esfuerzo tradicional (tareas a mano), generando dependencia en los estudiantes hacia la tecnología (computadora, Tablet, celular, aplicaciones móviles, etc.)

El impacto que tienen las TIC en la educación es considerable y afecta no solo al proceso de enseñanza, sino también al de aprendizaje en los estudiantes, donde en lugar de apoyar a este último puede convertirse en un obstáculo. Utilizar las TIC como herramienta dentro de la enseñanza trae consigo un gran nivel de responsabilidad y preparación por parte del docente, por ello, el mismo debe tener claro cómo y cuándo utilizarlas, a su vez debe guiar al estudiante para que éste también desarrolle un criterio claro y apoye en el reconocimiento de los límites durante el uso de dichas herramientas.

1.4. TIC en el Aprendizaje del Cálculo

El constante avance tecnológico y su implementación como recurso para el proceso enseñanza aprendizaje, han permitido cambiar la perspectiva con la que se abordan las Matemáticas, pasando de una metodología clásica donde se estudia de forma abstracta y meramente lógica, a una que permite visualizar, interpretar y analizar resultados obtenidos, fomentando consecuentemente la integración con el entorno en aplicaciones reales, modelando matemáticamente, entre otros aspectos que permiten evidenciar de mejor manera la utilidad del cálculo numérico (Molina, 2016).

Sin embargo, siempre que se considere hacer uso de las TIC dentro de la enseñanza, ésta debe estar fundamentada en procesos pedagógicos, disciplinares, contextualizados y tecnológicos, debido a su impacto directo en el proceso de formación académica (Grisales, 2018). Hoy en día existe una gran cantidad de programas y aplicaciones móviles para realizar cálculos y representaciones gráficas que permiten a docentes y estudiantes utilizarlas en las distintas ramas de las Matemáticas (Rojas, 2021), lo cual facilita su empleo como recurso y quedaría en manos de los docentes orientar su uso dentro de las aulas de clase.

En este sentido, para el caso específico de Cálculo Integral, hacer uso de las herramientas tecnológicas permiten al estudiante la facilidad de comprender conceptos mediante la representación gráfica, teniendo la posibilidad de manipular el objeto, identificar de mejor manera ciertos parámetros que pueden llegar a existir, además del comportamiento según cómo se modifiquen los datos en tiempo real, entre otros aspectos que resultan difícil de interpretar si solo se hace uso de los clásicos recursos como la pizarra (Molina, 2016).

1.5. Realidad Aumentada (RA)

En la educación de hoy en día, el uso de nuevas herramientas para el aprendizaje ha tomado protagonismo, y una de ellas es la Realidad Aumentada. “El uso de esta tecnología fomenta y facilita la adquisición de conocimientos por parte del practicante, ayuda al docente en sus prácticas de educación, además de posibilitar diferentes formas de enseñar” (Cardoso et al., 2014, pp. 331-332). La aplicación de esta metodología es conveniente cuando al estudiante se le complejiza la abstracción de objetos, ya que poder visualizar a través de imágenes en movimiento es más eficiente y fácil de entender.

Lopes y Santos (2017) expresan que una de las tecnologías que puede ayudar al docente y al alumnado, es precisamente la Realidad Aumentada, debido a que es una tecnología la cual, pese a no ser tan nueva, aporta innovación e interacción entre el mundo real y virtual, es decir, entre profesor/alumnos y los objetos 3D creados en un ordenador y hacer que el aprendizaje sea más atractivo para los estudiantes.

En plena era digital en la que la gran mayoría de estudiantes disponen de un teléfono celular inteligente, los docentes pueden tomar ventaja del uso de dichos *smartphones* gracias a la comodidad de emplear las aplicaciones móviles para actividades escolares, consistiendo así en un método de innovar y conectar el mundo de la tecnología con el aprendizaje de sus estudiantes, facilitando a su vez la labor catedrática.

1.5.1. Tipos de Realidad Aumentada

Realidad Aumentada basada en la geolocalización o posición. Existen aplicaciones de navegación móvil por GPS que hacen uso de la RA mediante la cámara del dispositivo móvil, donde el usuario ubica un punto de interés el cual se puede visualizar en la pantalla del *smartphone* y obtiene en tiempo real la ruta que éste debe seguir para llegar al destino fijado en el mapa (Rigueros, 2017). Los sensores que se utilizan para llevar a cabo esta tarea, además del GPS, son brújulas o acelerómetros y giroscopio (Blázquez, 2017).

Figura 1

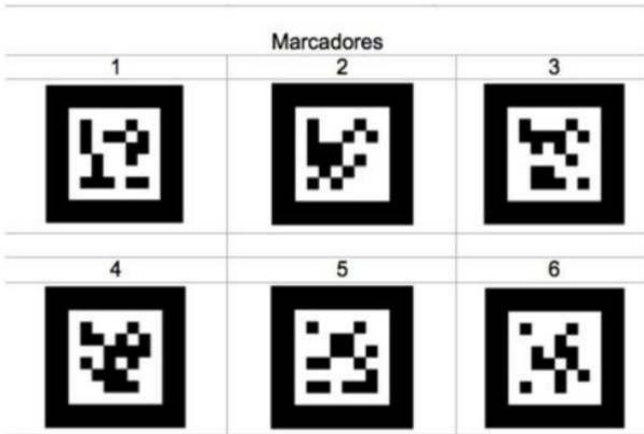
Realidad Aumentada

Nota. Adaptado de *Google Maps Live View* [Fotografía], por R. Álvarez, 2019, Xataca (https://n9.cl/f87wc). Creative Commons

Realidad Aumentada basada en el reconocimiento de patrones o marcadores. Rigueros, (2017) nos dice que son aquellos símbolos o imágenes que se sobreponen cuando un software específico los reconoce, los cuales activan la Realidad Aumentada y éstos a su vez se pueden agrupar en 3 tipos: Códigos QR, Markeles, y Marcadores (Blázquez, 2017).

Figura 2

Marcadores



Nota. Adaptado de "Realidad Aumentada en Entornos Educativos" (p. 8), por N. Arias e I. Mendoza, 2019, *Tecnología, Investigación y Academia*, 7(2).

1.5.2. Aplicaciones de la Realidad Aumentada en la Educación

Blázquez (2017) analiza que en el ámbito educativo la adaptación de la realidad aumentada en aplicaciones educativas ha aumentado de manera permanente entre sus recursos tecnológicos, no obstante, es necesario analizar y encontrar la aplicación adecuada para completar el objetivo planteado. A continuación, se detallan algunos ejemplos donde se podrían utilizar:

- Prácticas en laboratorios: este escenario posee instrumentos de aprendizaje ideales para el uso de la RA.

- Libros: actualmente los libros electrónicos son un ejemplo claro de la innovación dentro de la educación, sin embargo, en el desarrollo de una acción más amplia se crean los libros aumentados como "El libro aumentado de Eduardo Torroja".

- Aprendizajes experimentales: varias carreras y asignaturas poseen una parte experimental en las cuales se pueden utilizar la RA con la finalidad de facilitar el aprendizaje y cumplir los objetivos.

La existencia de varios tipos de Realidad Aumentada trae consigo numerosas ventajas gracias a su implementación tanto en el ámbito educativo como fuera de ello. Si bien es una de las tecnologías complejas y un poco desconocida para ciertos grupos de personas, la implementación de esta Tics es de gran ayuda, ya que actualmente está teniendo un auge cuidadosamente, la incorporación de esta se ha venido trabajando poco a poco como lo es desde escanear un código QR hasta simulaciones de órganos que se parezcan lo más real posible.

Dentro del ámbito educativo se busca que el uso de esta herramienta tenga un mayor auge, ya que gracias a la facilidad que esta le pueda brincar al estudiante con respecto a su aprendizaje, y en el tema se Solidos de revolución es de gran importancia para la visualización del solido a formarse.

1.5.3. Niveles de Realidad Aumentada

Prendes (2014) en su trabajo de “Realidad aumentada y educación: análisis de experiencias prácticas” clasifica a la RA en los siguientes 4 niveles según su desarrollo:

- Nivel 0: Son aplicaciones enlazadas con el mundo físico, sirven como hiperenlaces (HTML) hacia otros contenidos mediante el uso de códigos de barras, lectores 2D o reconocimiento de imágenes aleatorias.
- Nivel 1: RA basada en marcadores, se reconoce patrones de 2D, en este nivel lo más avanzado es el reconocimiento de objetos 3D.
- Nivel 2: Es aquella RA sin marcadores, dentro de este nivel se ubica el tipo de RA basada en geolocalización como: el GPS, la brújula y los acelerómetros.
- Nivel 3: Visión Aumentada, actualmente no se encuentra disponible, pero se habla de dispositivos como *Google Glass*, *Smart Contact Lenses* u otros, los cuales permiten manipular los objetos.

1.6. Aprendizaje

En el ámbito del aprendizaje matemático, se presenta un vasto y fascinante universo de conceptos y métodos que desafían la percepción tradicional de las matemáticas como una disciplina abstracta y distante. Este proceso de adquisición de conocimiento no se limita a la memorización de fórmulas y procedimientos, sino que se convierte en una exploración activa, donde los estudiantes se sumergen en la resolución de problemas, la visualización de patrones y la comprensión profunda de las relaciones matemáticas. El aprendizaje matemático se convierte así en un viaje dinámico, donde la conexión entre teoría y aplicación se vuelve evidente, nutriendo no solo la destreza técnica, sino también la capacidad de abordar desafíos complejos con confianza y comprensión

1.6.1. Conectivismo y TPACK

Las teorías como el conductismo, constructivismo y cognitivismo no son suficientes para explicar las actuales transformaciones que aparecen en los procesos de enseñanza aprendizaje. Estas teorías se basan en que el aprendizaje nace desde el individuo y surgieron cuando el aprendizaje no había sido influenciado por la tecnología (Siemens, 2004); mientras que, el conectivismo, afirma que éste se da a través de la interacción del sujeto con el entorno de la mano con sus principios y actitudes.

Esta teoría surge a raíz del aprendizaje como un proceso que sucede dentro de un ambiente de elementos cambiantes que no están bajo el control del aprendiz. El aprendizaje y el conocimiento se encuentran en la diversidad de opiniones a través de varias fuentes de información enlazadas en una red de datos y mediante las cuales el docente actúa como mediador en el proceso en donde el estudiante es activo y aprende a su propio ritmo en colaboración con sus pares haciendo uso de herramientas tecnológicas (Colaborativismo, 2015).

La educación formal como la conocemos ya no comprende gran parte del aprendizaje, sino que ésta ocurre dirigida hacia diferentes rutas; las herramientas tecnológicas que hoy en día utilizamos, moldean y modifican nuestro pensamiento. Según Siemens (2004), el conectivismo comienza por adaptar las teorías de aprendizaje hacia una era digital, donde la experiencia propia ya no es suficiente, sino que se necesita aprender también de las experiencias de los demás. (Stephenson, s. f., citado en Siemens, 2004, p. 3)

La propuesta es alentar al docente a buscar nuevas formas de innovar en la enseñanza haciendo uso de herramientas digitales que motiven a su vez a los estudiantes a aprender mediante experimentación en donde cada uno tiene el control, elaborando así un entorno personal de aprendizaje (Colaborativismo, 2015). El reto del aprendiz en cambio, consiste en saber reconocer distintos patrones de información para posteriormente formar conexiones mediante actividades y comunidades especializadas.

Lo primero que se necesita para cumplir con ese objetivo es que el docente esté debidamente informado y capacitado acerca de cómo se desarrolla el aprendizaje en la actual era digital. En segundo lugar, el estudiante debe estar en la capacidad de poder responder e interpretar todo tipo de preguntas y respuestas acerca de su entorno, con base en la formación escolar digitalizada. Su aprendizaje debe estar basado en la colaboración y conexión con sus pares durante las actividades en las que se desenvuelven y bajo la premisa de que cada quien tiene necesidades educativas diferentes y manejan distintos niveles de conocimiento (Colaborativismo, 2015).

Modificar el proceso de enseñanza no significa cambiar el currículo ni su contenido, sino implementar nuevas estrategias para el proceso enseñanza aprendizaje, de manera que se aproveche al máximo las nuevas tecnologías y conseguir que los alumnos adquieran experiencias multidimensionales de conocimiento además de la participación activa y colaborativa en las actividades en las que se desenvuelven. Es mediante la digitalización de la enseñanza que se busca responder a las necesidades de cada estudiante de manera individual y personalizada.

Es por esto que, es preciso siempre estar preparados en cuanto a diferentes estrategias, ideas y conceptos que se aplican en otras partes del mundo y validar su utilización en el entorno educativo propio teniendo en cuenta no perder la identidad local y cultural. Para lograr este propósito y mientras se consigue un cambio en el sistema educativo hacia un nuevo enfoque, el docente debe conseguir mejores resultados mediante la experimentación y aplicación de nuevas tecnologías lo más que pueda, evitando la radicalidad en el proceso.

Por otro lado, el modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) está enfocado a la formación y adaptación docente, en donde éste mantiene un avance continuo en sus conocimientos de forma evolutiva llevando los mismos a la práctica mediante la aplicación de la parte pedagógica y la tecnología. Este modelo (conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido) trata de explicar esta adaptación y está enfocado no solo a docentes en formación sino también a quienes ya ejercen.

Lo que se pretende es que el profesorado esté en la capacidad de saber cómo se utilizan las tecnologías de la información y comunicación no solo dentro de la educación sino de forma general, así como también cómo y cuándo hacer uso de ellas (Cabero et al., 2015), considerando siempre la parte pedagógica en el proceso llevado de la mano con los conocimientos que se requieren para llevar a cabo su área de enseñanza, en donde todos estos aspectos deben estar interrelacionados todo el tiempo.

Durante la formación académica de docentes, éstos deben desarrollar habilidades que les permitan, además de ser polivalentes, estar en la capacidad de adaptarse constantemente a los cambios que surgen en la sociedad y la evolución continua de las TIC, para luego utilizarlas de la mejor forma posible procurando conseguir la calidad docente (Barajas & Cuevas, 2017). En este sentido, el TPACK sirve como un modelo con el cual se pretende medir el conocimiento de los docentes y su formación y, consecuentemente, buscar y proponer nuevas estrategias para mejorar la misma y aplicado a todas las áreas de conocimiento en donde se puede integrar las tecnologías en la enseñanza.

La finalidad de aplicar la teoría del Conectivismo a través del modelo TPACK es lograr entrelazar diferentes estrategias de enseñanza aplicando las actuales tecnologías de la información y comunicación, en donde el docente pueda conseguir los mejores resultados en sus estudiantes sin necesidad de cambiar los contenidos del currículo educativo, sino más bien adaptarlos para el uso de tecnología de todo tipo, trabajando a la par con la innovación y con técnicas adecuadas de enseñanza y contenidos de calidad, promoviendo paralelamente el trabajo colaborativo y el desarrollo de habilidades de acuerdo a las necesidades de cada individuo para su posterior desenvolvimiento en la sociedad tecnológica.

1.6.2. La Realidad Aumentada como estrategia de aprendizaje en Cálculo

Son varios los beneficios que aporta el uso de la Realidad Aumentada (RA) a la educación, entre los cuales destaca la mejora en el proceso de comprensión de un concepto o ejemplo relacionado con Cálculo Diferencial o Integral, siendo una herramienta facilitadora para la enseñanza y, de igual forma, se valida la aplicación de la misma en otras áreas de las Matemáticas.

De acuerdo con Gómez-Vargas et al. (2018) la mejor forma de aprender es a través de la creación de un modelo tridimensional propio a partir de una figura geométrica simple, de esta forma se puede manipular el objeto y comprender mejor tanto su creación como su naturaleza y a su vez también implementar esta estrategia en cursos superiores de cálculo y/u otras ramas afines.

Berumen et al. (2021) concluyen en su investigación acerca de la RA en Cálculo Diferencial e Integral que, los estudiantes que hicieron uso de la misma en su aprendizaje consideraron que ésta les ayudó a mantener el interés y atención en la asignatura además de presentar mayor seguridad de poder aprender. Ratificando el gran beneficio que dicha tecnología aporta en el entorno educativo.

Es entonces que, hacer uso de la RA como recurso para la enseñanza y/o aprendizaje de VSR, facilita no solo el aprendizaje del tema y el refuerzo de los conocimientos de la parte conceptual, sino también de la parte analítico-procedimental de los problemas o ejercicios que involucran el cálculo, a través de la manipulación del objeto tridimensional y su comportamiento a medida que se modifican los datos en tiempo real, proporcionando al estudiante el control del cuerpo revolucionado al mismo tiempo que fortalece su capacidad visoespacial.

1.7. Programas y aplicaciones móviles de Realidad Aumentada

Hoy en día existe una gran cantidad de aplicaciones móviles que hacen uso de la Realidad Aumentada, tanto con fines educativos como con fines de entretenimiento. Entre las apps más destacables y las que tienen un gran aporte dentro de la educación, se encuentran las siguientes:

Figura 3

Aplicaciones con realidad aumentada

Autoría Propia

CAPÍTULO II: Metodología y resultados

1.3. Metodología

En esta propuesta didáctica se planteó una metodología mixta a fin de cumplir con los objetivos planteados, se utilizaron diversas fuentes de información cuya finalidad consistió en tener un análisis más detallado y significativo acerca de la problemática expuesta.

Para la parte cualitativa, se ejecutaron tres entrevistas de forma independiente y de carácter semiestructurado a dos docentes y un exdocente de la carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, quienes dominan el tema de Cálculo, tanto Diferencial como Integral, además, cuentan con la experiencia necesaria impartiendo las asignaturas antes nombradas. La finalidad era obtener una percepción acerca del aprendizaje de sus estudiantes y las falencias que presentaron al momento de poner en práctica el tema.

Por otro lado, se realizó una prueba de conocimientos dirigida a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, pertenecientes al sexto ciclo tanto matutino como vespertino, mediante un cuestionario con preguntas abiertas y cerradas como instrumento, a fin de cumplir la parte cuantitativa con el objetivo de identificar cómo aprendieron el tema de sólidos de revolución y las dificultades presentadas en el aprendizaje del tema.

Con los resultados obtenidos tanto en la prueba de conocimientos, como en las entrevistas, se verificó la problemática planteada y posterior a ello se elaboró la propuesta didáctica para el aprendizaje de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada, teniendo como base el aprendizaje autónomo, para solventar el problema que experimentan los educandos de nivel superior, en el tema VSR con el método de arandelas.

1.4. Entrevista

Las entrevistas a los docentes se realizaron de manera presencial mediante una reunión previamente acordada, éstas fueron grabadas mediante dispositivos electrónicos con una duración aproximadamente de treinta minutos, a su vez los docentes dieron su consentimiento informado para participar en la investigación; finalmente, las entrevistas fueron transcritas y analizadas con ayuda del *software* Dedoose, mediante el cual se desarrollaron categorías.

1.4.1. Muestra

Se seleccionaron tres docentes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, quienes impartieron la asignatura de Cálculo Integral, de manera específica el tema Volumen de Sólidos de Revolución, sin embargo, sólo uno de ellos continúa impartiendo la asignatura.

1.4.2. Análisis e interpretación de datos.

Con base en cada una de las respuestas brindadas por los docentes entrevistados y agrupando las preguntas por categoría, se obtuvo de forma condensada la siguiente información:

Tabla 1

Categoría de análisis desde la vista del docente

Tema	Categoría	Subcategoría
Problemática y propuesta del aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución desde el punto de vista del docente	Problemáticas en el aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución	• Dificultades en los estudiantes
	Aspecto pedagógico	• Recursos • TIC y TPACK
	Propuesta para el aprendizaje autónomo mediante Realidad Aumentada	• Referente al contenido de las clases. • Referente al uso de la Realidad Aumentada

Uno de los principales problemas que suelen experimentar los estudiantes de Cálculo en general, y que ha sido evidenciado no solo por los tres docentes entrevistados sino por varias investigaciones citadas en este trabajo, es la visualización espacial, es decir, muchos estudiantes no logran identificar un sólido de revolución a partir de una gráfica bidimensional o las funciones que lo delimitan. De acuerdo con las palabras de uno de los entrevistados:

> […] los estudiantes no se hacían a la idea exacta de la figura que estaban obteniendo, la visualización espacial era dificultosa para ellos. Podían incluso hallar la respuesta

correcta, pero a pesar de que estaba bien el procedimiento y la respuesta, no tenían una idea clara de a qué sólido pertenecía ese volumen […] (Entrevistado 2)

De la mano con la dificultad visoespacial, otro de los principales problemas que suelen experimentar los estudiantes es identificar los límites de integración y elaborar las gráficas de las funciones que delimitan el contorno del sólido revolucionado:

> […] donde se quedan los estudiantes: ¿cuáles son los límites de integración? De tal punto a tal punto, entonces, esa parte, el estudiante con una inteligencia espacial medianamente, no tiene que ser muy alta, […] pues no va a tener dificultades. Pero hay personas que no tienen ese sentido espacial y éste se va desarrollado, lo cual les cuesta, […] y se requieren ya otras técnicas para aquellos que no tienen muy desarrollado dicha visualización espacial. (Entrevistado 1)

> […] de parte de los estudiantes la dificultad siempre suele estar en la graficación, porque ellos tienen mucha complicación en imaginarse cómo funciona tridimensionalmente un sólido. Entonces el reto está en que la graficación les pueda ayudar a entender cómo es que a partir de una cierta sección que se rota, sea entendida como un volumen y como un sólido. Esa parte es la compleja, pero una vez que ellos entienden eso, se facilitan las cosas. (Entrevistado 3)

Otro de los problemas que se solían presentar, aunque no en gran medida, era el nivel de bases previas con las que contaban los estudiantes, haciendo referencia al Álgebra y el Cálculo Diferencial, para posteriormente continuar con el Cálculo Integral:

> […] generalmente, en lo que más he tenido dificultad es que los chicos no llegan con bases sólidas de matemáticas, esa es la dificultad más grande; esa es una constante que siempre hay para el docente que va a impartir Cálculo a estudiantes que toman la asignatura por primera vez […] Generalmente, los conceptos algebraicos, los conceptos de Geometría Analítica, de Álgebra, incluso un poco del Álgebra Lineal, es una falencia en ciertos estudiantes. (Entrevistado 1)

En este sentido, las estrategias o técnicas utilizadas por cada uno de los docentes fueron cambiando y evolucionando con el fin de conseguir mejores resultados en sus estudiantes. El uso de distintos recursos ya sea para complementar o ayudar a aquellos con dificultades en la visualización espacial, sirvió en gran medida para cumplir el objetivo del docente y tratar de dinamizar las clases, concretamente en Volumen de Sólidos de Revolución. Desde el uso de material concreto para manipular el objeto formado hasta el uso de software matemático para visualizar el cuerpo, fueron las principales estrategias utilizadas por los docentes durante sus clases:

> […] les hacía trabajar con plastilina, yo sabía que la parte de motricidad lo tendrían bien, de hecho, eso seguramente, pero es que esa es la única forma de que ellos puedan ver, de que ellos puedan darse cuenta cómo se mueve. […] O si no, yo también usaba el software 3D, entonces ya con el software 3D les mostraba cómo era la curva, y cómo giraba el sólido en el programa SolidWorks. (Entrevistado 1)

Por su parte, durante las clases virtuales en pandemia, uno de los entrevistados se vio en la necesidad de utilizar la cámara de su celular, hojas blancas (de cuaderno u hojas de papel bond) y un esfero para simular el uso de la pizarra, en donde graficaba a mano las funciones y resaltaba el área encerrada entre las mismas la cual serviría para formar el cuerpo revolucionado:

> […] se podía dibujar la forma de la figura que se conseguía cuando los sólidos giraban. Entonces, de esa forma creo que sí se consiguió que los estudiantes puedan darse una idea de cómo se formaban los sólidos al ser revolucionados y ser analizados con las técnicas del Cálculo Integral para poder hallar volúmenes de sólidos de revolución. Ya para la época en la que veíamos esto, […] ya nos estábamos acostumbrando a la pandemia y tuvimos la oportunidad de trabajar este contenido. (Entrevistado 2)

Del mismo modo, no siempre se cuenta con los recursos necesarios para tratar ciertos temas del Cálculo, por lo cual un docente se ve en la obligación de utilizar únicamente aquello a lo que tiene alcance, es decir la pizarra física y marcadores partiendo de los conceptos teóricos para realizar las aplicaciones de los mismos:

> […] ahí se desarrolla muy práctico el tema porque son aplicaciones y lo que se busca es hacer cálculos de sólidos, tratando de que los estudiantes comprendan bien, mediante una graficación correcta de los ejemplos, de los ejercicios que se desarrollan. Claro que en ese período todavía no se hacía uso mayor de las tecnologías, sin embargo, se hacía un uso en la pizarra todo el tiempo de gráficas, acompañado obviamente del desarrollo teórico. (Entrevistado 3)

Con ello, las estrategias didácticas más adecuadas que consideran los encuestados para que un estudiante aprenda de mejor forma y recalcando las técnicas que solían o suelen utilizar en sus clases, están en el material concreto y el uso de software matemático, resaltando siempre no depender de este último, sino utilizarlo cuando sea necesario:

> Yo pienso que las tecnologías son siempre un aporte muy bueno. ¿Por qué? Porque cuando uno trabaja con una gráfica en la pizarra, esa gráfica es básicamente estática. […] uno requiere muchas veces la parte dinámica, es decir, generar una simulación que me ayude a entender y esa simulación puede ser en varios pasos y la simulación llega a ser dinámica y eso facilita mucho la comprensión de parte del estudiante. (Entrevistado 3)

> […] ya depende del docente qué tipo de alumnos tengan, si es que son receptivos a la plastilina, o sino al software, depende, en realidad del tiempo de aprendizaje que manejen y sobre todo de las herramientas que disponen […] (Entrevistado 1)

Por otra parte, otro aspecto esencial en el desarrollo de las clases y algo que por lo general muchos docentes utilizan es la activación de conocimientos previos y el enlace de los mismos con nueva información:

> Yo creo que los conocimientos previos son fundamentales, es decir, si un profesor quiere que un estudiante aproveche una clase nueva, no puede empezar directamente con lo nuevo, tiene que empezar o enlazar lo nuevo a lo que ya sabe el estudiante, […] los estudiantes tienen mucho más sentido aquello que van aprendiendo. Siempre va a haber alguien que no logra, pero la mayoría logra comprender de mejor forma cuando parte de algo que ya sabe y lo enlaza a lo que está aprendiendo. (Entrevistado 2)

En concordancia con lo afirmado por los entrevistados respecto al uso de TIC, cabe resaltar la importancia de la formación docente en las mismas. Si bien es cierto, las tecnologías de la información y comunicación están en constante avance, durante la formación académica del educador, éste debe contar con la instrucción necesaria para procurar ir de la mano con el progreso tecnológico y saber utilizarlo durante sus clases como un recurso valioso e innovador.

En este sentido, los entrevistados, como ya se evidenció en preguntas anteriores, cuentan con los conocimientos necesarios para hacer uso de las TIC, sin embargo, esa capacidad ha sido adquirida de forma individual fuera de su formación académica dentro de la carrera, en donde sobresale la formación autodidacta de uno de ellos:

> […] Yo he tenido que hacerlo por cuenta propia y, en ese sentido, me preocupé a tiempo, creo, a tal punto que yo mismo empecé a ser capacitador de mis compañeros profesores de la universidad en el uso de tecnologías para la educación. […] Antes de la pandemia no había mucha conciencia de la utilidad que podían tener. En la pandemia ya no quedó de otra, o me capacito o me quedo fuera, porque no había otra forma de comunicarse con los estudiantes. (Entrevistado 2)

> […] en las asignaturas con las que estoy actualmente trabajando, mayoritariamente se aplican las tecnologías. Entonces, muchas de mis asignaturas yo las desarrollo directamente en los laboratorios de informática, en Estadística hacemos uso de software específico, en Dibujo Técnico estamos haciendo uso de software específico […] (Entrevistado 3)

> En Ingeniería y también en la carrera, [..] lo usé en sólidos de revolución, […] pero más lo di en Dibujo Técnico, porque en Dibujo Técnico teníamos que dibujar pirámides, y otros sólidos […] (Entrevistado 1)

Análogamente, en el aspecto pedagógico, el Conectivismo es un modelo estrechamente relacionado con el uso de las tecnologías dentro de la educación tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. No obstante, no puede utilizarse como una única metodología y depender solo de ella, sino que, a criterio de los entrevistados, debe existir una correlación con otros modelos:

> Yo pienso que en Matemática especialmente sí que se tiene que utilizar como paradigma educativo. De hecho, en las Matemáticas yo pienso que es cuando más se utiliza una metodología que tiene que ver con procedimientos y no podemos obviar. Es decir, si no aprendemos procedimientos, en Matemática es muy difícil de avanzar. […] Yo busco variar, pero sí uso el Conectivismo. (Entrevistado 2)

Otro de los principales aspectos a tener en cuenta es el acceso a esos recursos tecnológicos por parte del docente y/o sus estudiantes, es decir, si no se dispone de las facilidades para llevar a cabo una clase que involucre las TIC es evidente que se debe buscar otra forma para desarrollar la misma:

> […] el uso de las tecnologías no debe considerarse como prioritario, como el eje de la formación, sino más bien como un complemento, como un respaldo, como un recurso adicional al que nosotros como docentes tenemos. […] Y siempre como docentes debemos tener un plan B, un plan C, un plan D, de cómo desarrollar nuestras clases si no tenemos acceso a la parte tecnológica. (Entrevistado 3)

Desde una perspectiva más general, el Conectivismo destaca por su utilidad a día de hoy debido al aporte que brinda tanto a docentes como estudiantes dentro del proceso enseñanza-aprendizaje; aunque es cierto que su uso debe ser tratado con cuidado para no incidir en dependencia de ninguna de las dos partes, entre otros aspectos negativos que conlleva esta metodología.

Por su parte, el modelo TPACK resulta en una herramienta útil para la formación docente en donde se enlazan el conocimiento, la tecnología y la pedagogía para dar lugar a un desarrollo técnico pedagógico que sirva para mejorar las capacidades del docente y éste a su vez aplique estrategias innovadoras en sus aulas de clase.

> Creo que es absolutamente necesario que los profesores, como digo, adoptemos paradigmas diversos y en los cuales nosotros mismos estemos capacitados en el uso de la tecnología para la enseñanza. Creo que eso es necesario hacerlo. No creo que se pueda omitir ya en estas épocas la tecnología para la enseñanza. […] La salida es que todos los profesores tienen que manejar tecnología en su asignatura y buscar la forma de que los estudiantes puedan también hacerlo y ver eso como una posibilidad de formación. (Entrevistado 1)

No obstante, destaca nuevamente la accesibilidad a estas herramientas que muchas veces es limitada, especialmente en instituciones de acceso público, háblese de escuelas o colegios, en donde no se cuenta con los recursos necesarios para llevar a cabo una clase haciendo uso de las TIC. De igual forma, un estudiante no puede depender únicamente de esas herramientas digitales para su formación escolar, la labor docente siempre va a ser indispensable en ese proceso:

> Siempre es válido, pero insistiendo en que la tecnología no es todo. Entonces, es un recurso más. Claro que ahora se le está dando mucha importancia porque los muchachos están siempre muy relacionados con la tecnología, pero hay que considerar

que no todas las realidades tienen esa conexión fuerte con las tecnologías. (Entrevistado 2)

> […] por más que yo tenga los mejores softwares […] el docente tiene que estar ahí y la pizarra, por lo que, si bien se puede aprender de manera autónomo, pero no conseguirá un aprendizaje significativo, ya que necesita una guía. (Entrevistado 3)

Con todo lo dicho anteriormente, no se debe dejar de lado la obligación a la que se enfrenta un docente, ya sea experimentado o en formación, de estar en la capacidad de dominar una gran cantidad de recursos que le sirvan de apoyo en el desarrollo de las clases. Ante esto, el uso de la Realidad Aumentada para la enseñanza o aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución se observa como una alternativa innovadora al tradicional uso de la pizarra o software de modelado tridimensional convencional, respondiendo a la problemática principal respecto de la capacidad visoespacial de los estudiantes:

> […] la Realidad Aumentada va a ayudar mucho, ellos van a poder visualizar los ejercicios que se les plantea de una mejor manera y eso facilita la comprensión de los temas. De hecho, si uno comprende mejor las cosas, tiene un mejor nivel de asimilación, de aprendizaje, y en consecuencia podría tener un mejor rendimiento académico. […] es algo que el profesor debe poder preparar, exige de parte del docente también una capacitación para esto. […] Cualquier recurso que facilite esa comprensión, que pueden ser incluso recursos manipulables, que pueden ser videos, que pueden ser Realidad Aumentada, todo lo que le ayuda a entender al estudiante nos va a ser de provecho. (Entrevistado 2)

La ventaja que tiene la Realidad Aumentada sobre el software matemático tradicional se centra en la capacidad de poder manipular en tiempo y en entorno real, un sólido construido a partir de dos o más funciones, además de facilitar la comprensión analítico-procedimental del cálculo del sólido revolucionado, incentivando de cierta manera el aprendizaje del tema:

> […] específicamente lo que es realidad aumentada me da la posibilidad de poder observar, digamos, virtualmente los objetos que se están manipulando. Creo que eso tiene una ventaja adicional. Y yo pienso que a los estudiantes sí les motiva. Les motiva el hecho de no trabajar sólo con una representación visual en dos dimensiones, sino

ampliarlo en tres dimensiones y además de eso de poderlo manipular o tocar o cambiar la forma en la que quiera usando el computador o el teléfono. (Entrevistado 1)

Por otro lado, tal como se mencionaba en un principio, la educación de hoy en día debe ir de la mano con el avance tecnológico, lo cual no supone mayor problema para el estudiantado quien está familiarizado con las TIC, sea en mayor o menor medida. En este sentido y de acuerdo con los docentes entrevistados, sus alumnos estarían en la plena capacidad de trabajar con Realidad Aumentada, partiendo de aspectos que les ayude a enlazar habilidades nuevas con las ya existentes:

> Bueno, son temas novedosos y más bien eso puede impactar positivamente a los estudiantes. El uso de la Realidad Aumentada va a facilitar la comprensión de los temas, les va a impactar favorablemente a ellos y yo sí pienso que puede tener una consecuencia positiva, que es mejor calidad de comprensión. […] Habrá alguien que prepare esas aplicaciones, dar las facilidades, dar las indicaciones para que lo utilice. (Entrevistado 2)

Sin embargo, claro está que hay personas a quienes sí se les dificulta más que a otras trabajar con herramientas tecnológicas, aunque a la larga terminan por adaptarse a las mismas y es ahí donde se requiere del compromiso por mantenerse a la vanguardia en educación:

> Yo veo que los chicos, de forma, unos más rápidos que otros, pero prácticamente todos se terminan adaptando a la posibilidad de una nueva herramienta y de una nueva metodología. Tal vez no estén capacitados, pero no le veo difícil que lo puedan lograr en poco tiempo. (Entrevistado 1)

En particular, uno de los softwares matemáticos más conocidos hoy en día y de los pocos que hacen uso de la Realidad Aumentada como característica integrada en su aplicación móvil es GeoGebra, el cual cuenta con una gran cantidad de opiniones positivas respecto a su uso en distintos artículos de investigación, algunos de ellos citados en este trabajo. Dos de sus puntos fuertes son la facilidad de uso y la disponibilidad del mismo como software libre:

> […] el GeoGebra al menos es un software que me gusta bastante, primero, porque es gratuito, es muy fácil y es muy intuitivo de usar, porque al menos yo vengo de Ingeniería y los softwares que se usan en Ingeniería no son intuitivos, no son fáciles, ya se

> introducen contextos de programación y ustedes saben que la programación ya es compleja […] (Entrevistado 3)

Si bien es cierto, aunque existen otras opciones para trabajar temas de Matemáticas y Cálculo en general, el aporte que brinda GeoGebra tanto a la enseñanza como al aprendizaje es destacable. Pese a ello, su utilización, al igual que la de otros softwares matemáticos, debe darse después de que el estudiante posea un dominio necesario de los contenidos del tema que está trabajando para no generar dependencia en su uso:

> […] todas estas herramientas que uno puede utilizar son buenas, pero tienen el limitante de que solamente sirven cuando los estudiantes ya saben, porque cuando los estudiantes todavía no saben y aprenden a manipular antes del software que las bases, las demostraciones y los conocimientos, más bien puede ser hasta contraproducente, porque luego ya esos desarrollos no lo ven como importante, sino como el hecho de que el software puede hacer lo que ellos están pidiendo. (Entrevistado 1)

No obstante, el uso de cualquier software que sirva de complemento para la comprensión de determinados temas de estudio siempre va a ser importante en el proceso educativo y si a ello se agrega la característica de la Realidad Aumentada, específicamente para Volumen de Sólidos de Revolución, con mayor razón debe resaltarse el aporte que brinda tanto al estudiante como al docente:

> Siempre va a aportar, siempre va a ser una ayuda el que el estudiante tenga un recurso a la mano para facilitar la comprensión del tema. […] sí, como conclusión yo sí pienso que puede ser un aporte (la Realidad Aumentada). Va a ser un recurso más, pero un recurso de buena calidad porque eso va a facilitar mucho la comprensión espacial de parte de los estudiantes. (Entrevistado 2)

A todo esto, pese a que la Realidad Aumentada que ha implementado GeoGebra no es muy conocida, su utilización para el tema de Sólidos de Revolución sirve para reforzar o desarrollar la habilidad visoespacial en aquellos estudiantes a quienes se les dificulta resolver o comprender problemas de aplicación en donde, en ciertos casos y como ha sido evidenciado por los entrevistados, todo se resuelve de forma mecánica.

Con la finalidad siempre de conseguir más y mejores resultados en el aprendizaje de los estudiantes de la carrera, su formación académica está encaminada a reforzar sus conocimientos además de brindarle las primeras pautas previo a su inserción laboral como docente en el área de Matemáticas y Física. Con base en esto y para finalizar, las recomendaciones que plantean los entrevistados coincide en dos aspectos: la práctica y tener conocimientos sólidos:

> ¿Cómo usted se gana la empatía de los estudiantes? Es que usted sepa. […] Van a encontrarse con millones de casos, […] este estudiante va a hacer preguntas ya digamos, sí, complicadas […]. Entonces yo creo que la gran pesadilla del docente es no responder la pregunta de un estudiante. (Entrevistado 3)

> Bueno, en realidad ese es justamente el objetivo que uno persigue en la carrera, de que los estudiantes puedan tener suficientes conocimientos, suficiente práctica, para que en su labor docente les vaya lo mejor posible. Ahora, eso yo creo que enlaza directamente con la práctica. La práctica es fundamental para poder ganar las primeras experiencias en la labor docente. (Entrevistado 1)

De igual forma, obedeciendo a los avances tecnológicos constantes, la formación docente debe estar encaminada también hacia el uso de las TIC y en caso de no contar con el acceso a los mismos, sea por el motivo que sea, estar preparados para utilizar otros recursos:

> Practicar, aprender las cosas buenas, corregir los errores. Este rato es importante el embarcarse también en las tecnologías, pero no pensar que las tecnologías son todo, sino que son un recurso más. Y pensar en que las tecnologías no siempre están disponibles y siempre el docente debe tener la habilidad o la preparación como para batirse con un plan B o un plan C. (Entrevistado 2)

Entonces, de la mano con la práctica y el dominio de los conocimientos, tanto pedagógicos como de contenidos, para el aprendizaje del tema Volumen de Sólidos de Revolución, la recomendación de los entrevistados para un estudiante de la carrera que desee reforzar sus conocimientos o en su defecto aprender de forma autónoma, principalmente para mejorar la comprensión tridimensional, primero debe comprender aquellos cuerpos geométricos básicos:

> ¿Qué volúmenes básicos hay? Ahí tenemos el cubito, tenemos la esferita, tenemos la pirámide, el cono, esas hay que entenderles bien, porque si yo a esos volúmenes les

> entiendo, voy a entender cualquier volumen de revolución que yo quiera, por más irregular que sea, yo esa irregularidad le puedo dividir en conos, esferas, cubitos y pirámides. (Entrevistado 3)

En segundo lugar, para la comprensión visoespacial, realizar un gráfico que ayude a interpretar el hacer rotar una región para formar el cuerpo revolucionado servirá de complemento y se convertirá en algo necesario, no solo para que el mismo estudiante comprenda sino también le brinda las pautas necesarias para que aplique estas estrategias en un futuro como docente:

> Muchas veces tenemos dificultad justo en la comprensión tridimensional y eso puede traer dificultades de entender cómo funciona esta lógica de hacer rotar una cierta área que está dada en 2D. Si es que ellos a través de un buen sistema de graficación, ya sea manual o ayudado por algún programa, les facilita la comprensión, eso va a ayudar muchísimo a poder plantearnos ejercicios. (Entrevistado 2)

Así mismo, a raíz de la pandemia el proceso enseñanza-aprendizaje se complicó debido a diversos factores, lo cual obligó no solo a los docentes a buscar nuevas formas de impartir sus clases, sino también los estudiantes se vieron en la necesidad de recurrir a otras formas de aprender y tratar de mantener su rendimiento académico, poniendo en evidencia su capacidad para no depender estrictamente de la labor docente, destacando a su vez, sobre todo a raíz de la pandemia, y de manera implícita el Conectivismo:

> […] la pandemia no solamente trajo cosas negativas, sino muchas positivas. Una de ellas, principalmente, es el hecho de que muchos estudiantes se dieron cuenta de que son capaces de aprender por sí solos. Es decir, ellos pueden adquirir conocimientos y ser autodidactas, porque ya los profesores no tenemos o no somos los dueños de la información. La información está en el internet, la información está a disposición prácticamente de todos. […] Entonces, yo pienso que un estudiante que quiere formarse en el Cálculo, y específicamente en el Cálculo Integral y en el contenido específico, lo puede hacer perfectamente utilizando las herramientas que tenemos ahora. (Entrevistado 1)

En resumen, las entrevistas resaltan la importancia de la formación docente en TIC, la adaptación de las estrategias de enseñanza para abordar las dificultades de los estudiantes y la utilidad de la Realidad Aumentada como una herramienta innovadora en la enseñanza de conceptos complejos como el Volumen de Sólidos de Revolución. También se destaca la capacidad de los estudiantes para aprender de forma autónoma y adaptarse a entornos digitales, especialmente en tiempos de pandemia.

1.5. Prueba de Conocimientos

La prueba se conformó de dos partes, la primera sección correspondiente a la parte práctica con la cual se identificó su grado de aprendizaje, y una segunda parte con respecto a las dificultades y los recursos que utilizó el estudiante para el aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución.

1.5.1. Muestra

Las pruebas de conocimiento se aplicaron a un grupo de 31 estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y Física, que se encontraban cursando la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, en el horario matutino (16), como vespertino (20). La distribución de la muestra fue de once en la sección matutina, ya que el día en el cual se aplicó la prueba no se contó con la totalidad del grupo, y veinte en la sección vespertina, cabe recalcar que esta se realizó de manera voluntaria por parte de los estudiantes seleccionados y a su vez, de manera anónima donde se respetó sus datos. El análisis de las pruebas de conocimiento se sintetizó en una tabla de categorías.

La prueba se realizó de manera anónima, por lo cual esta fue expuesta ante los estudiantes al inicio y junto con su consentimiento se procedió a la toma de pruebas para posteriormente su respectivo análisis.

1.5.2. Análisis e Interpretación de Resultados

Con base en cada una de las respuestas brindadas por los estudiantes y agrupando las preguntas por categoría, se obtuvo de forma condensada la siguiente información:

Tabla 2

Categoría de análisis desde la vista del estudiante

Tema	Categoría	Subcategoría
Problemática y propuesta del	Problemáticas en el aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución	- Dificultades en los estudiantes

aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución desde el punto de vista del estudiante	Aspecto pedagógico	- Recursos - Estrategias
	Propuesta para el aprendizaje de Volumen de sólidos de revolución	- TIC

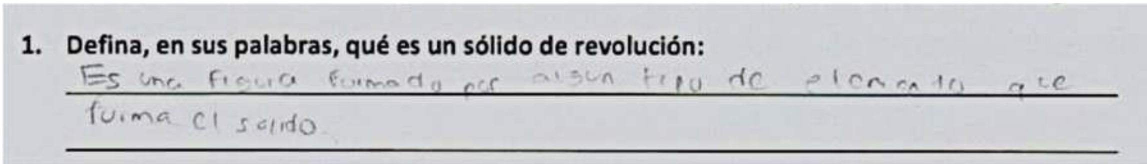
A continuación, se detalla el siguiente cuestionario el cual se encuentra estructurado mediante 4 preguntas teóricas y 4 preguntas de resolución práctica, siendo claves para identificar las dificultades que los estudiantes presentan al aprender el tema Volumen de Sólidos de Revolución, las cuales serán de apoyo para la elaboración de la propuesta.

1. Defina, en sus palabras, qué es un sólido de revolución.

Figura 4

Porcentajes de respuestas de la pregunta 1 del cuestionario

El conocimiento de lo que es un sólido de revolución es uno de los conceptos que los estudiantes reconocen, esto es favorable, ya que tienen una idea de cómo se forma este a pesar de no tener desarrollada la visión espacial del sólido a formarse. A su vez, se evidencio que existen respuestas en las cuales un grupo de estudiantes tienen una noción de lo que es el sólido, pero no logran expresar de una manera correcta la definición de este, como se puede observar a continuación:


1. Defina, en sus palabras, qué es un sólido de revolución:

Es una figura formado por algun tipo de elemento que forma el solido

Figura 5: Respuesta de la pregunta 1 del cuestionario

Fuente: Autoría propia

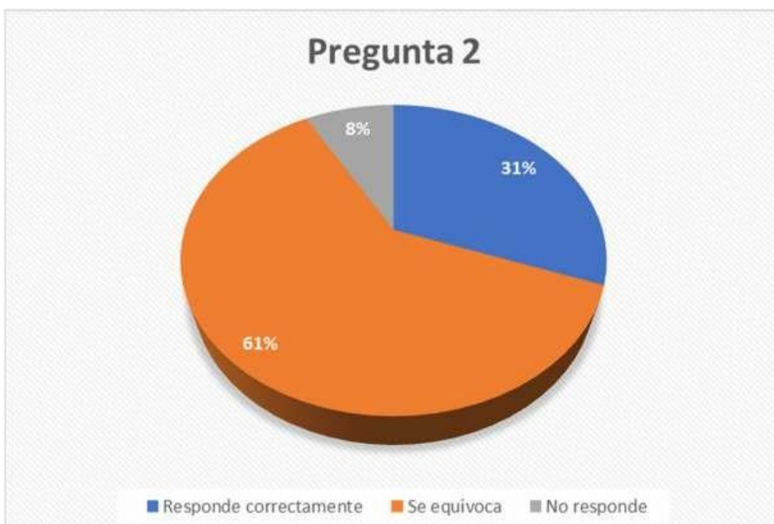
2. Complete**:**

El método de anillos o arandelas es una extensión del método de discos o rebanadas, en donde el sólido de revolución formado es hueco. En este sentido, la fórmula de integración para el método de rebanadas o discos es $V = \pi \cdot \int_a^b R(x)]^2 \, [dx$, siendo $R(x)$ el radio de giro del sólido.

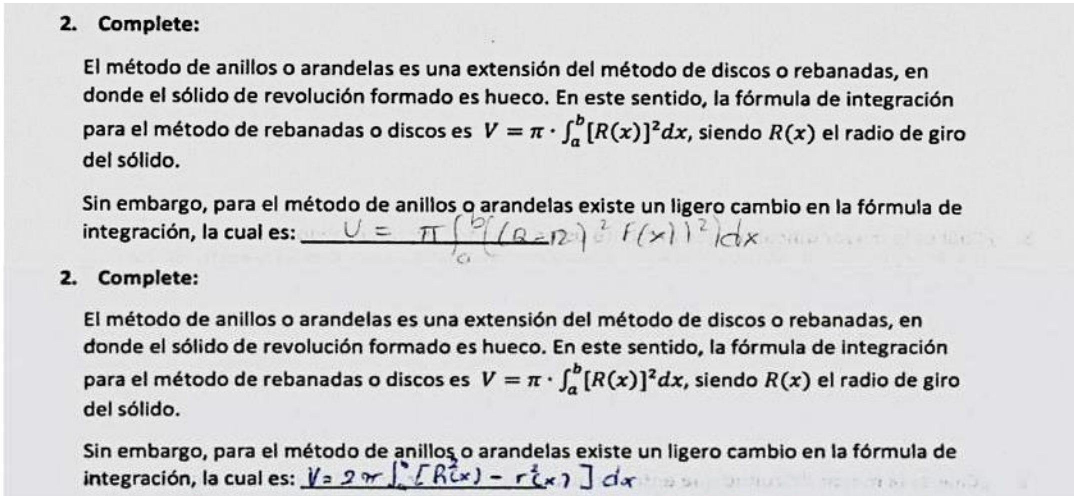
Sin embargo, para el método de anillos o arandelas existe un ligero cambio en la fórmula de integración, la cual es: ______________________

Figura 6

Porcentajes de respuestas de la pregunta 2 del cuestionario



Un gran porcentaje de los estudiantes no recuerdan la manera correcta de la fórmula de integración por el método de anillos o arandelas, esto se debe a que los estudiantes resolvían los ejercicios de manera mecánica, a su vez la falta de análisis e interpretación aun teniendo una formula guía es preocupante. A continuación, se puede observar el error más común a cometer por los estudiantes, es el confundir entre diferencia de cuadrados y la diferencia de un binomio al cuadrado.



2. Complete:

El método de anillos o arandelas es una extensión del método de discos o rebanadas, en donde el sólido de revolución formado es hueco. En este sentido, la fórmula de integración para el método de rebanadas o discos es $V = \pi \cdot \int_a^b [R(x)]^2 dx$, siendo $R(x)$ el radio de giro del sólido.

Sin embargo, para el método de anillos o arandelas existe un ligero cambio en la fórmula de integración, la cual es: $U = \pi \int_a^b ((R-r))^2 f(x))^2 dx$

2. Complete:

El método de anillos o arandelas es una extensión del método de discos o rebanadas, en donde el sólido de revolución formado es hueco. En este sentido, la fórmula de integración para el método de rebanadas o discos es $V = \pi \cdot \int_a^b [R(x)]^2 dx$, siendo $R(x)$ el radio de giro del sólido.

Sin embargo, para el método de anillos o arandelas existe un ligero cambio en la fórmula de integración, la cual es: $V = 2\pi \int [R^2(x) - r^2(x)]\, dx$

Figura 7: Respuestas de la pregunta 2 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia.

Ejemplo 1: Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{Sen(x)}$ y el eje x $(0 \leq x \leq \pi)$ alrededor del eje x, utilizando el método de discos o rebanadas.

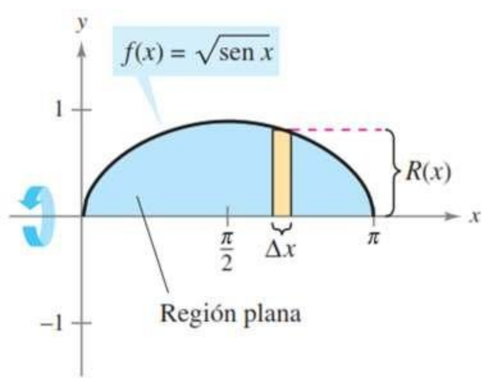
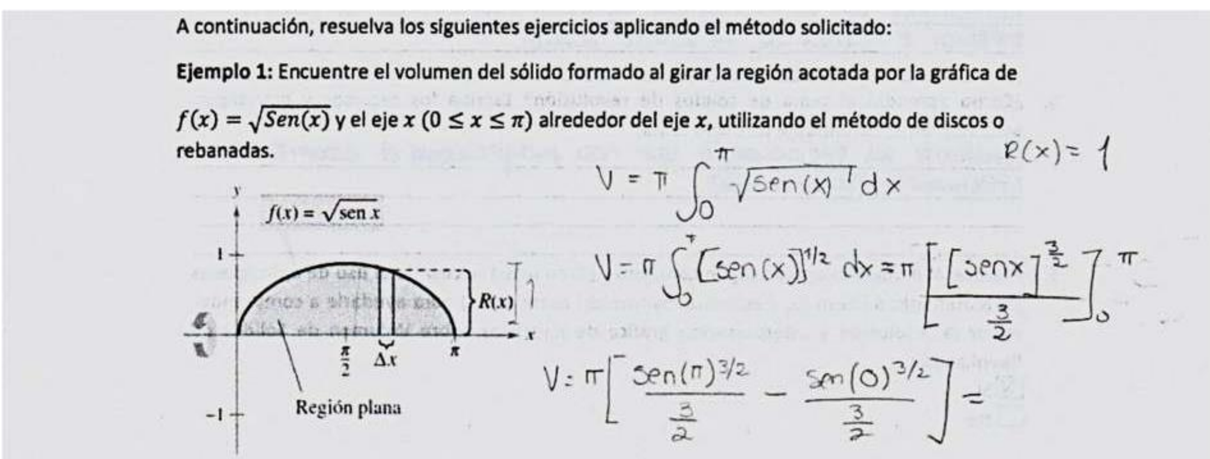


Figura 8

Porcentajes de respuestas de la pregunta 2, ejemplo 1 del cuestionario.

Una de las dificultades comunes que presentaron aquellos estudiantes que no completaron el ejercicio fue el signo al momento de integrar la función f(x)=sen(x), se considera que la causa de este error, se debe a la confusión con respecto a la derivada de la misma, al ser similar, pero con el signo contrario es comprensible que se cometa este error, a su vez, se puede observar que otra de las dificultades fue el recordar las integrales básicas de ciertas funciones, como se muestra a continuación:



A continuación, resuelva los siguientes ejercicios aplicando el método solicitado:

Ejemplo 1: Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{Sen(x)}$ y el eje x $(0 \leq x \leq \pi)$ alrededor del eje x, utilizando el método de discos o rebanadas.

Figura 9: Respuesta de la pregunta 2, ejemplo 1 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia.

Ejemplo 2: Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura.

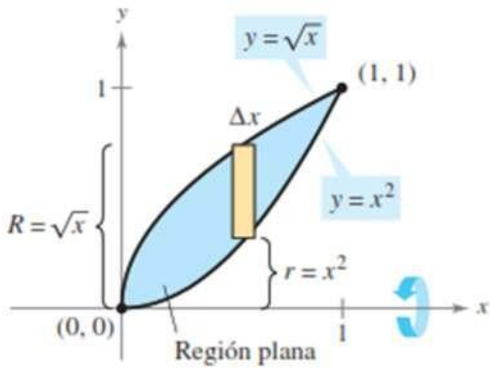
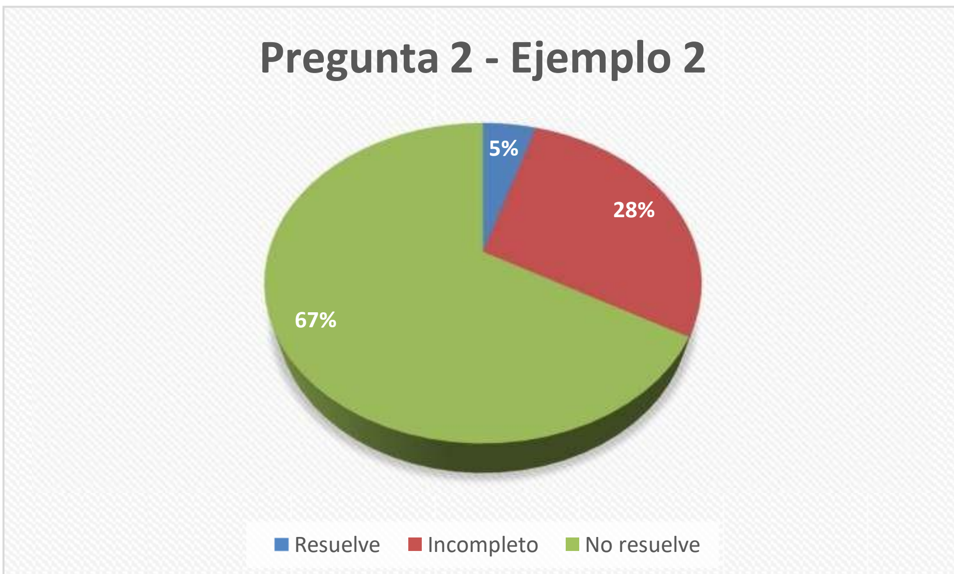


Figura 10

Porcentajes de respuestas de la pregunta 2, ejemplo 2 del cuestionario.



La falta de la resolución de este ejercicio se debe a que los estudiantes no recordaron la fórmula para desarrollar el ejercicio con el método adecuado (anillos o arandelas), es por esta razón que, al resolver lo hicieron con la fórmula del método de discos y dando como resultado las respuestas erróneas, los estudiantes cuando resolvían estos tipos de ejercicios lo hicieron de manera mecánica y teniendo siempre a la par un formulario. Sin embargo, otra de las dificultades sigue siendo el conocimiento acerca de las integrales básicas, este se puede analizar en la siguiente figura:

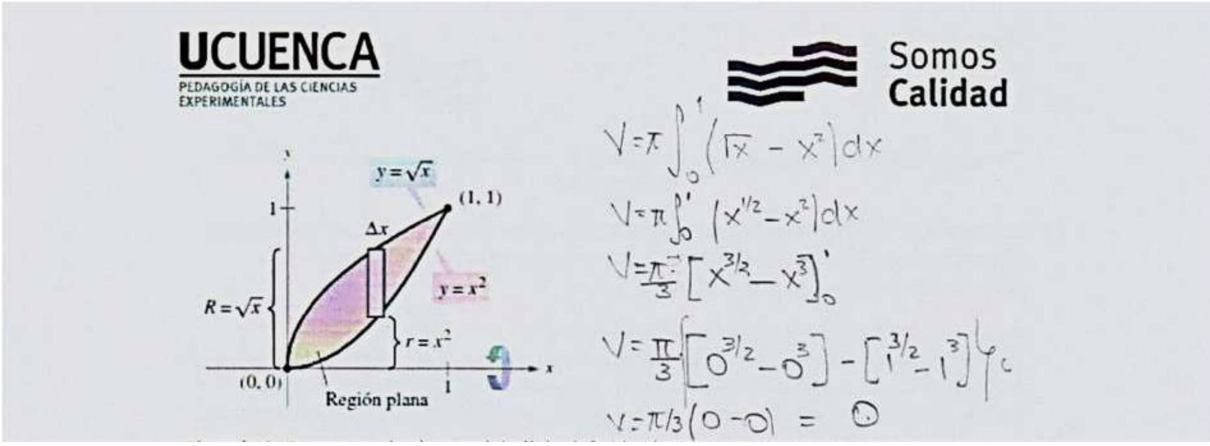
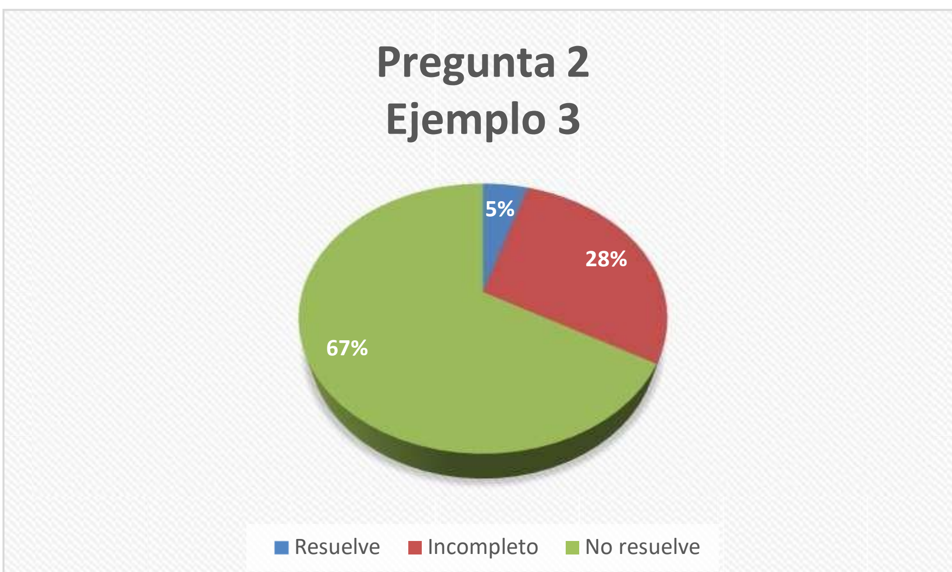


Figura 11: Respuesta de la pregunta 2, ejemplo 2 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia.

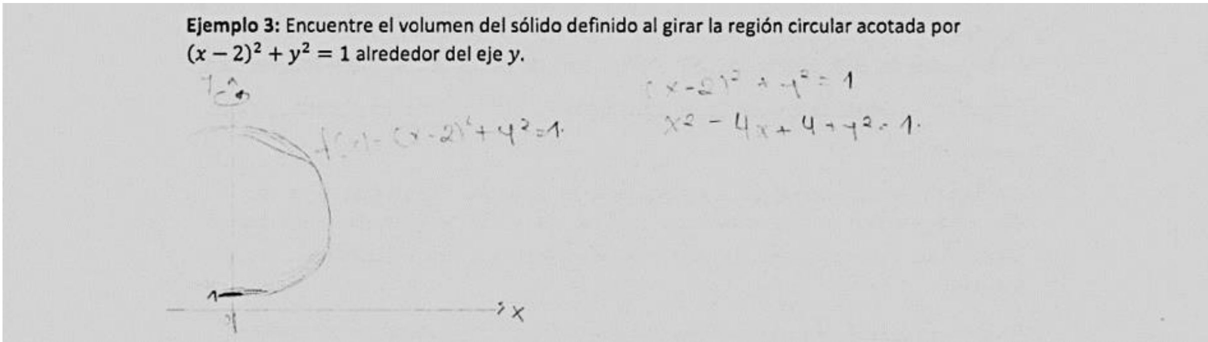
Ejemplo 3: Encuentre el volumen del sólido definido al girar la región circular acotada por $(x-2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y.

Figura 12

Porcentajes de respuestas de la pregunta 2, ejemplo 3 del cuestionario



La dificultad que se presentó en el desarrollo de este ejercicio fue la determinación de los límites, se les dio a conocer el tipo de región a formarse junto con su función, aun así con ese apoyo no logran tener una idea clara desde donde se forma, seguido por el reemplazo en su fórmula o la elección de utilizar el método adecuado es complicado para los estudiantes, ya sea por el olvido de las fórmulas o la confusión entre ellas, dando como resultado que un gran porcentaje de estudiantes no resuelvan el ejercicio o no se completado como se muestra en la figura 13.


Ejemplo 3: Encuentre el volumen del sólido definido al girar la región circular acotada por $(x-2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y.

$(x-2)^2 + y^2 = 1$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 1$

Figura 13: Respuesta de la pregunta 2, ejemplo 3 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia

3. **¿Cuál es la mayor dificultad que enfrentó usted cuando aprendió sólidos de revolución?**

Dentro de las respuestas obtenidas se puede analizar que la mayor dificultad para los estudiantes fue el planteamiento del ejercicio conjuntamente con la decisión del método adecuado a aplicar y posteriormente la integración de los mismos, ya que existían integrales complejas y el olvido constante de las fórmulas no ayudaba para el desarrollo correcto. A continuación, se puede observar una de las respuestas:

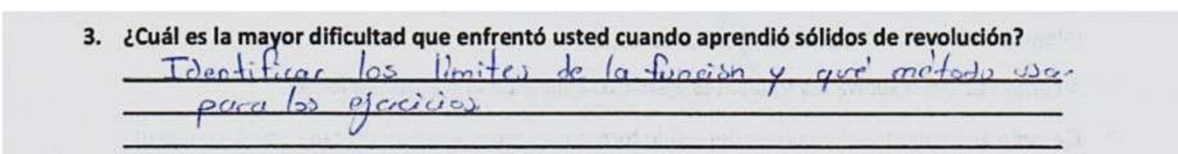

3. **¿Cuál es la mayor dificultad que enfrentó usted cuando aprendió sólidos de revolución?**
Identificar los límites de la función y qué método usar para los ejercicios

Figura 14: Respuesta de la pregunta 3 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia.

Otra de las dificultades notorias como se puede distinguir en la figura 15, es la visualización del sólido al formarse luego de hacerlo girar en uno de los ejes, dando como consecuencia la identificación incorrecta de los límites y los radios que conjuntamente formaban ese sólido hueco.

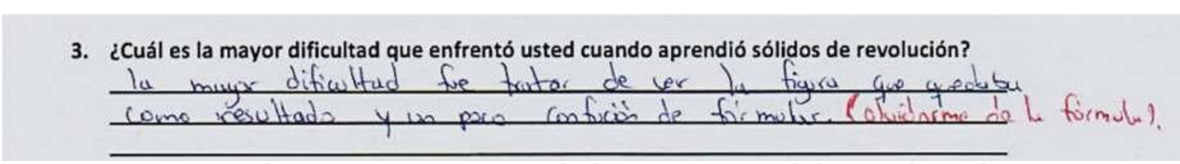
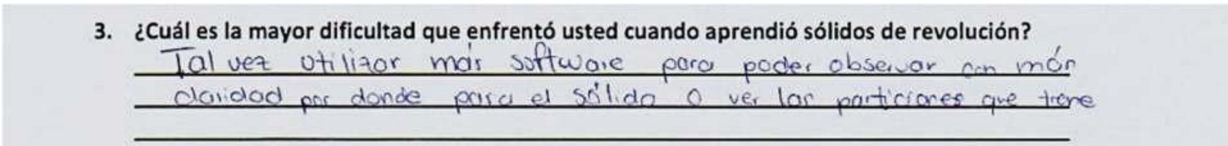

3. **¿Cuál es la mayor dificultad que enfrentó usted cuando aprendió sólidos de revolución?**
la mayor dificultad fue tratar de ver la figura que quedaba como resultado y un poco confusión de fórmulas. (Olvidarme de la fórmula).

Figura 15: Respuesta de la pregunta 3 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia.

Finalmente, algunos estudiantes dieron a conocer que el uso nulo de Tics o material fue una de las dificultades, a su vez en la figura 16 se puede observar una de las respuestas acerca del uso de material didáctico o softwares que ayudan a la visualización del sólido a formarse, siendo un beneficio para las futuras generaciones.



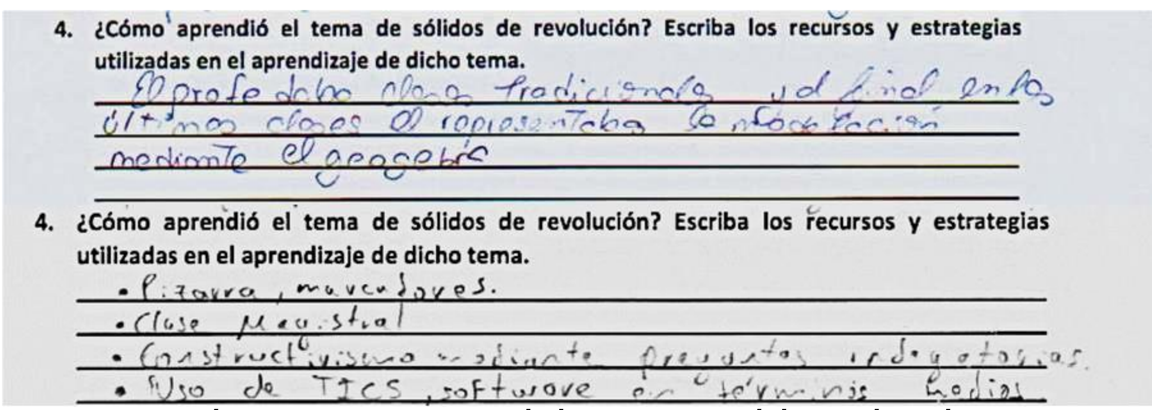
3. ¿Cuál es la mayor dificultad que enfrentó usted cuando aprendió sólidos de revolución?

Tal vez utilizar más software para poder observar con más claridad por donde pasa el sólido o ver las particiones que tiene

Figura 16: Respuesta de la pregunta 3 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia.

4. **¿Cómo aprendió el tema los sólidos de revolución? Escriba los recursos y estrategias utilizadas en el aprendizaje de dicho tema.**

Un gran porcentaje de los estudiantes da a conocer que al momento de aprender el tema VSR fue mediante el uso de pizarra, marcadores, hojas y cuaderno para la demostración de fórmulas y el desarrollo de ejercicios, como se puede observar en la figura 17. El uso de un software como ayuda para la visualización del sólido que se formaba fue muy escaso, pero les ayudó para la comprensión. A su vez un pequeño grupo expresa que aprendió de manera autónoma con apoyo de softwares o videos educativos.



4. ¿Cómo aprendió el tema de sólidos de revolución? Escriba los recursos y estrategias utilizadas en el aprendizaje de dicho tema.

El profe daba clases tradicionales y al final en las últimas clases él representaba la rotación mediante el geogebra

4. ¿Cómo aprendió el tema de sólidos de revolución? Escriba los recursos y estrategias utilizadas en el aprendizaje de dicho tema.

- Pizarra, marcadores.
- Clase magistral
- Constructivismo mediante preguntas indagatorias.
- Uso de TICS, software en términos medios

Figura 17: Respuestas de la pregunta 4 del cuestionario.
Fuente: Autoría propia.

5. **Marque con una X la opción según considere. ¿Cree usted necesario el uso de aplicaciones de Matemáticas (Desmos, GeoGebra, Symbolab, entre otros) para ayudarle a comprender mejor la resolución e interpretación gráfica de ejercicios sobre Volumen de Sólidos de Revolución?**

Tabla 3

Porcentajes de respuestas de la pregunta 5 del cuestionario

Pregunta 5	Si	No
Uso de aplicaciones para la interpretación gráfica de VSR.	100%	0%

La totalidad de los estudiantes se encuentran de acuerdo en que la utilización de las Tics para el aprendizaje de los volumen de sólidos de revolución es de gran ayuda. Como se mencionó anteriormente, identificar el sólido que se va a formar es una de las dificultades que se presentan. Por lo tanto, gracias al apoyo que la tecnología moderna proporciona, se puede simplificar esta tarea. Implementar la Realidad Aumentada (AR) a través de un software contribuirá a mejorar la percepción espacial del estudiante.

Con los porcentajes obtenidos en esta prueba, se evidencia el olvido en temas importantes como las integrales básicas, determinar los puntos de cortes y límites, siendo este una problemática significativa, por lo tanto, el estudiante con estos vacíos no obtendrá un buen avance en su aprendizaje. A su vez, un grupo significativo de estudiantes no logra visualizar el sólido que debe formarse ni identificar los límites, siendo estos los primeros pasos esenciales para abordar de manera adecuada los ejercicios planteados. Sin lograr estos pasos iniciales, es improbable obtener resultados positivos.

Otro aspecto a analizar es la falta de uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en el proceso de aprendizaje del tema VSR. Muchos sostienen que la incorporación de estas herramientas sería altamente beneficiosa, ya que contribuiría a una mejor comprensión y a una visualización más efectiva del sólido a construir, facilitando así la elección del método adecuado para su desarrollo correspondiente.

CAPÍTULO III: Propuesta

3.1. Estructura de la propuesta

A continuación, se presenta el diseño de una guía didáctica la cual lleva por nombre "Volumen de Solidos de Revolución con Realidad Aumentada: Método de Arandelas o Anillos" y está dirigida a los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física que deseen reforzar el tema de sólidos de revolución con la ayuda de la aplicación de GeoGebra. El material cuenta con actividades orientadas a solventar ciertas dificultades evidenciadas en las pruebas de conocimientos aplicadas a los estudiantes y entrevistas ejecutadas a los docentes.

Tabla 4

Esquema de diseño para la propuesta didáctica.

N° de clases	Tema	Metodología
Clase 0	Identificar los límites de integración	Ciclo de indagación
Clase 1	Método de Arandelas o Anillos	ERCA
Clase 2	Sólidos de Revolución con Realidad Aumentada	Aprendizaje activo

CÁLCULO INTEGRAL

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN CON REALIDAD AUMENTADA

Método de Arandelas o Anillos

Elaborado por: Santiago Loja
Jennifer Valladarez

UCUENCA

Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física

“Propuesta didáctica para el aprendizaje de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada”

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física.

Autor:

Pedro Santiago Loja Chuquimarca

Jennifer Fernanda Valladarez Vaca

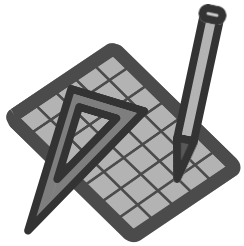
Director:

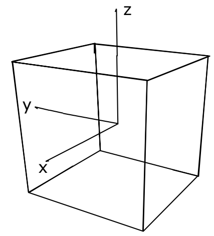
Tatiana Gabriela Quezada Matute

ORCID: 0000-0003-2730-9342

2023-12-04

Cuenca, Ecuador



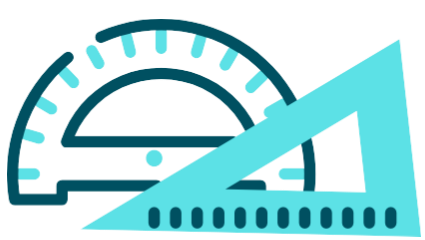


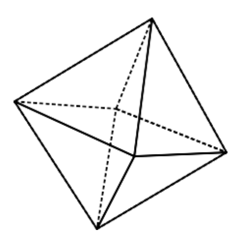
Presentación

Esta guía para el aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución (VSR) está dirigida a los estudiantes de la asignatura Cálculo Integral perteneciente a la carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física.

El propósito de la misma es proporcionar al estudiante las herramientas necesarias (a fin de aprender o reforzar los conocimientos) para calcular el volumen de un sólido de revolución mediante el método de Arandelas o Anillos, haciendo uso de la aplicación móvil GeoGebra Calculadora 3D para la visualización en dos y tres dimensiones, así como también utilizando la característica de realidad aumentada (AR) integrada en la aplicación, a fin de que el discente pueda "manipular" el sólido formado, ver sus curvas o funciones por separado y la generación del cuerpo tridimensional.

Esta guía a su vez, pretende servir al estudiante de la carrera para aplicarlo en sus clases a futuro, de ser necesario.





CLASE 0

Identificar los límites de integración

Introducción:

Uno de los aspectos importantes antes de resolver un ejercicio de VSR, después de identificar el eje de rotación, consiste en reconocer los límites de integración, es decir, los valores mínimos y máximos de la variable de integración que definen la región en la que se encuentra el sólido a ser revolucionado.

¿Cómo reconocer los límites de una integral definida?

Identificar los límites de integración para calcular, sea el área de una región o volumen de un sólido de revolución, implica comprender o tener una idea de cómo es la geometría de la figura y establecer las restricciones adecuadas en la integral.

Si partimos de una función básica como la graficada en la imagen, observamos que de por sí no es una curva cerrada, sin embargo, al ser una semicircunferencia con su centro en el origen vemos que la misma se cierra gracias al eje X.

Aplicando la fórmula para hallar el área de una región mediante integral definida:

$$A = \int_a^b (Curva\ Superior - Curva\ Inferior)dx$$

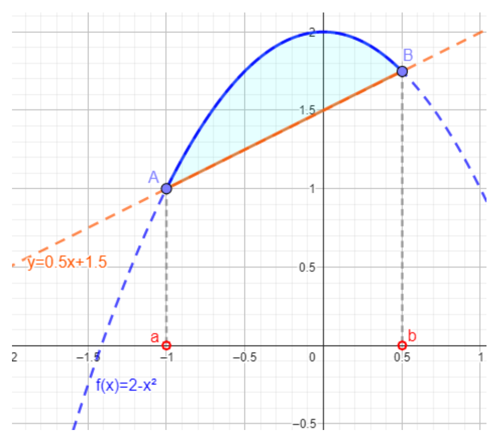
En donde a correspondiente al límite inferior, está determinado por la abscisa del primer punto de corte de $f(x)$ con el eje X, $A(-1;0)$.

Mientras que el valor b, es decir el límite superior, lo define de igual forma la abscisa del segundo punto de corte de $f(x)$ con el eje X, $B(1;0)$.

Nota

¿Por qué en esta función no se toman los límites con respecto al eje Y? Porque $f(x)$ ya no sería función y también porque la curva empieza y termina a lo largo del eje X.

Para casos más generales como regiones entre funciones, es igualmente necesario tener una idea de la gráfica, o en su defecto graficar sea a mano o mediante software, para luego identificar los límites de integración a través de la intersección de las funciones involucradas.



Si se pide calcular el área de la región encerrada entre las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, hallamos los puntos de corte entre las mismas utilizando cualquiera de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

$$f(x) = 2 - x^2 \qquad g(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$f(x) = g(x)$$
$$y = y$$
$$2 - x^2 = \frac{x+3}{2}$$
$$2(2 - x^2) = x + 3$$
$$4 - 2x^2 = x + 3$$
$$2x^2 + x - 1 = 0$$

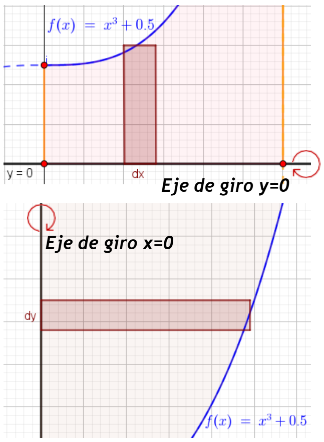
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}\ \ (b) \qquad x_2 = -1\ \ (a)}$$

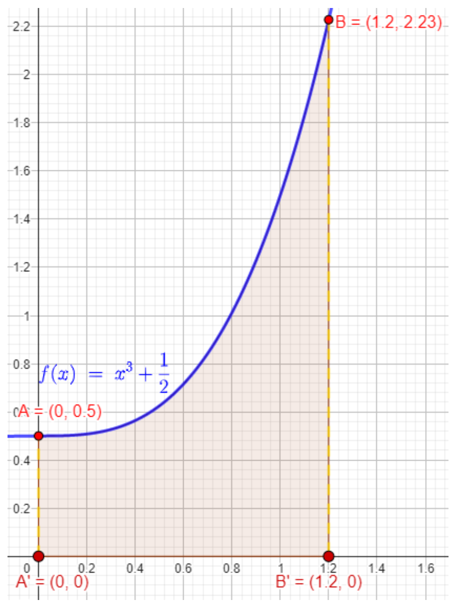
Límites superior e inferior de la integral

Para el caso en el que se tiene una sola función y se pide calcular su volumen generado al revolucionar un intervalo de la misma alrededor de un eje, los límites de la integral a ser calculada vienen definidas por las coordenadas en ***X*** o ***Y*** (según el eje de rotación y el diferencial ***dx*** o ***dy***), de la parte de la función especificada.

RECORDATORIO

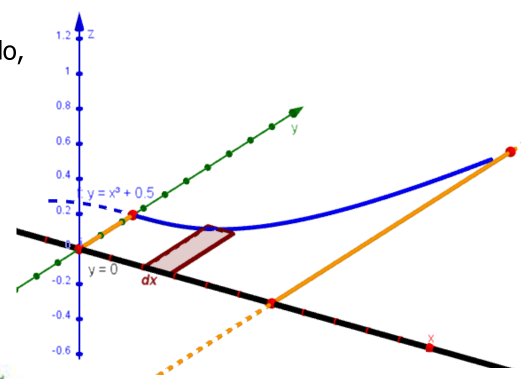
Los diferenciales ***dx*** y ***dy*** se escogen de acuerdo al eje de rotación.
Si el sólido rota alrededor del eje ***X*** o alguna recta paralela al mismo, el diferencial a utilizar es ***dx***.
Si el sólido rota alrededor del eje ***Y*** o alguna recta paralela al mismo, el diferencial a utilizar es ***dy***.



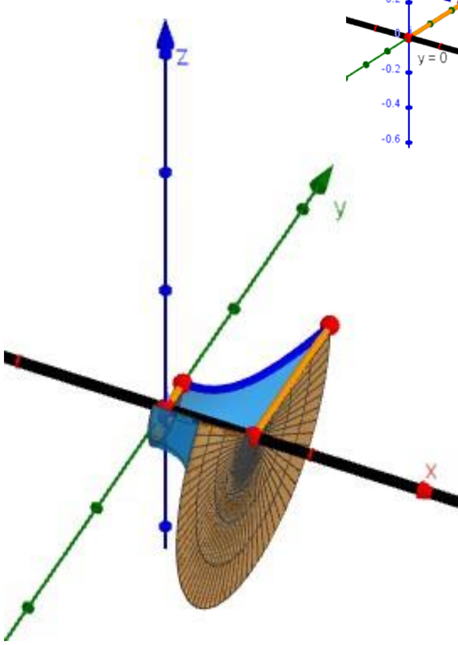


Por ejemplo, para hallar el volumen del sólido de revolución generado por la función $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}$ en el intervalo$[0; 1.2]$ alrededor del eje *X*, los límites están definidos por el mismo intervalo dado, con su respectivo diferencial *dx*.

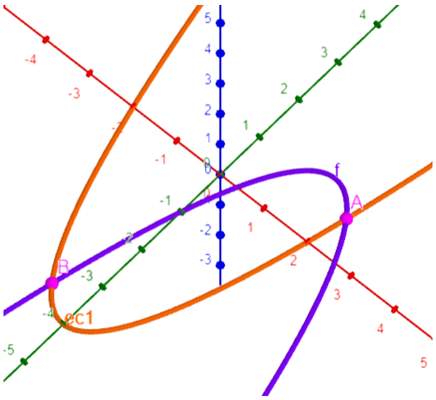
Entonces, los límites de integración para este ejemplo, son ***a=0*** y ***b=1.2***.



Como lo que tenemos que formar es un sólido de revolución, las paredes que forman la región a revolucionar son las rectas *x=1.2*, *x=0* e ***y=0*** (eje de giro).



Determinar los límites de la región encerrada entre las funciones $y = x^2 - 4$ e $y = 3x - x^2 - 1$.

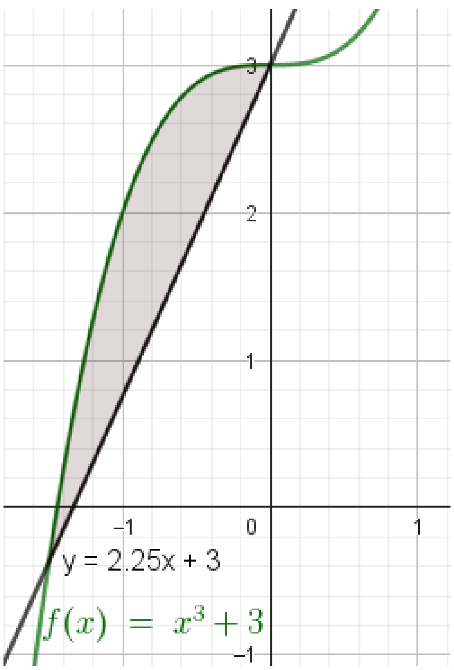


$$x^2 - 4 = 3x - x^2 - 1$$
$$2x^2 - 3x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$
$$x_1 = 2{,}186$$
$$x_2 = -0{,}686$$

$$y = (2{,}186)^2 - 4$$
$$y_1 = 0{,}779$$
$$y_2 = (-0{,}686)^2 - 4$$
$$y = -3{,}529$$
$$P_1(2{,}186; 0{,}779)$$
$$P_2(-0{,}686; -3{,}529)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Dadas las siguientes funciones, encuentre los límites para la integral de área definida por la región encerrada.

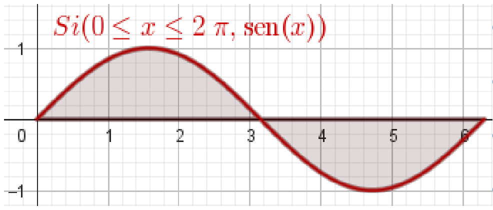


$$f(x) = x^3 + 3$$
$$g(x) = \frac{9}{4}x + 3$$

Reflexión

¿Por qué es fundamental saber cómo determinar y reconocer los límites de integración al calcular el área de una región o el volumen de un sólido de revolución?

2) Dada la siguiente función, encuentre los límites superior e inferior para la integral definida por la región encerrada, como se muestra en el gráfico:

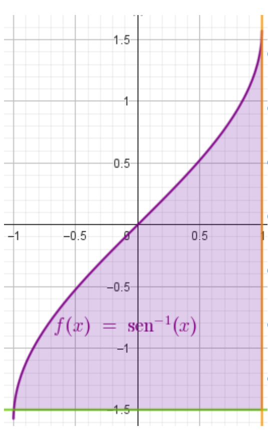


Reflexión

En funciones como esta, es más fácil identificar los límites de integración, ¿por qué?

Para este mismo caso, si el eje de rotación fuese el eje ***Y***, ¿cómo obtendríamos los límites de integración a partir de la función especificada? Explique en palabras el procedimiento.

3) Dadas la siguiente función y rectas, encuentre los límites superior e inferior para la integral definida por la región encerrada, como se muestra en el gráfico:



$f(x) = arcsen(x)$

$y = -\dfrac{3}{2}$

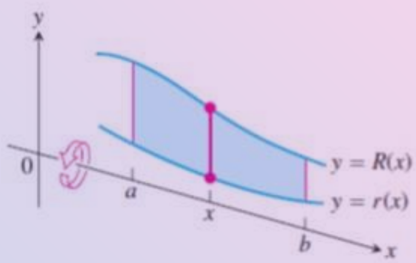
$x = 1$

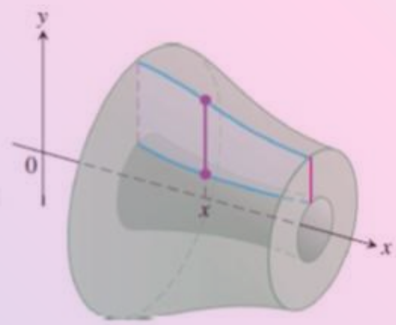
Reflexión

En el caso de las funciones trigonométricas, es importante conocer el dominio y la periodicidad de las mismas antes de trabajar con integrales y determinar los límites,
¿por qué?

Clase 1:

Método de Arandelas o Anillos



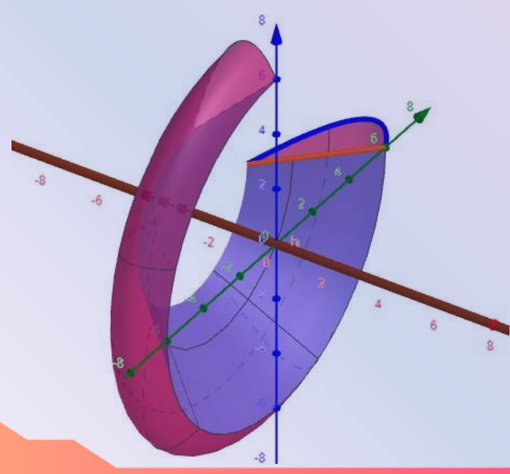


Resultado de Aprendizaje:

Aplica los teoremas fundamentales del cálculo para hallar áreas de superficies entre funciones y sólidos de revolución.

Objetivo:

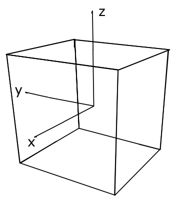
Interpretar e identificar correctamente la aplicación de los diferenciales para hallar el área de una superficie limitada por dos funciones, utilizando el método de arandelas o anillos.



Introducción

El estudiante debe estar en la capacidad de identificar las aplicaciones reales de los sólidos de revolución en la vida diaria, para a su vez mostrar las mismas a sus estudiantes de colegio.

Previo a abordar el cálculo del volumen de un sólido de revolución aplicando el método de arandelas o anillos, es necesario que el estudiante domine el cálculo de áreas de regiones entre funciones.



Experiencia

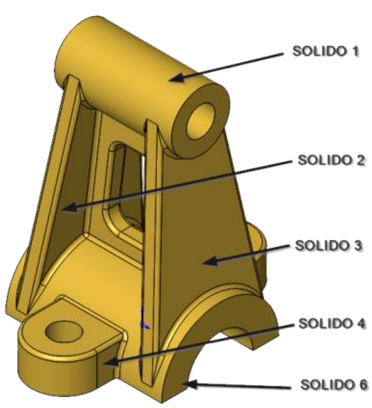
Aplicaciones de los Sólidos de Revolución

Algunas de las aplicaciones de los Sólidos de Revolución se encuentran en el modelado de objetos cotidianos como: botellas (de vidrio o plástico), lámparas, envases, etc., o en la fabricación de piezas de mecánica, para conocer la cantidad del material necesaria para fabricar las mismas; entre otros.

Elaboración de juguetes

Floreros

¿Qué otras aplicaciones existirán para los sólidos de revolución?



Piezas mecánicas

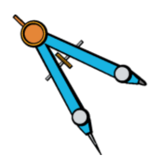
Modelado de botellas

Reflexión

Software de graficación como AutoCAD, Inventor, Blender, Lumion, entre otros, sirven para modelado tridimensional. Pero, si conoces o has utilizado alguno de esos programas, sabrás que no se necesitan funciones para las gráficas, sino únicamente trazos geométricos.
¿Crees que dichos trazos puedan representarse como funciones en el plano?

¿Qué tipo de representación permite el software de modelado tridimensional al crear un objeto?

Suponiendo que manejes a la perfección alguno de los programas de modelado 3D que se utilizan en ingeniería o arquitectura, ¿qué objeto tridimensional podrías elaborar de forma que se pueda utilizar en tus clases como docente para motivar a los estudiantes?



Argumenta tus respuestas desde tu punto de vista tanto de estudiante como de docente

¿Qué otras aplicaciones se te ocurren para los sólidos de revolución, además de los mencionados en la página de experiencia?

____

____

¿Crees que cada uno de los trazos de dibujo técnico que se utilizan en los programas de modelado tridimensional, serían funciones algebraicas?

____

____

____

En el modelamiento 3D que se realiza, ¿qué tipo de representación genera un objeto creado?

____

____

Si fueras un estudiante de ingeniería o arquitectura, ¿qué objeto novedoso te gustaría crear en alguno de los programas de dibujo o modelado en tres dimensiones? Bosqueja tu diseño.

____

____

____

Conceptualización

Método de Rebanadas o Discos

Una extensión del método de discos, el cual se utiliza principalmente en el cálculo del volumen del sólido rotado alrededor de un eje que está separado de la región o superficie a rotar.
Es decir, para el caso del método de discos, la integral para el volumen es:

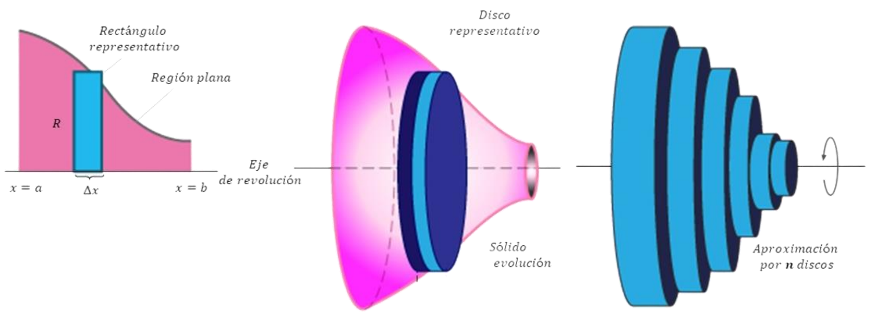
Eje de revolución horizontal

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$$

Eje de revolución vertical

$$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2\, dy$$

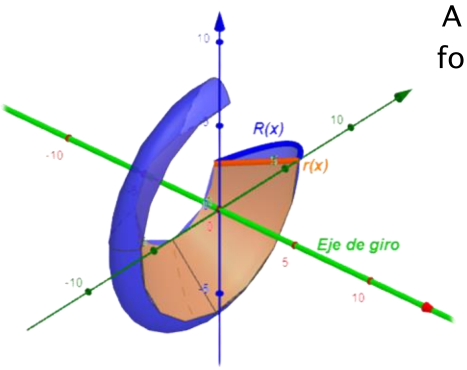
En donde existe un único radio **R.**



Método de Arandelas o Anillos

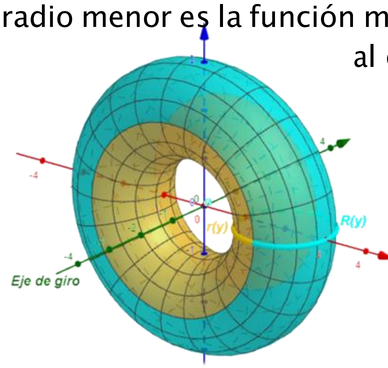
A diferencia del método anterior en el que el sólido se forma solo con un radio, éste contiene dos radios: uno mayor **R** y uno menor **r.** En este caso, el volumen se obtiene a partir de la integral:

$$V = \pi \int_a^b \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2\right) dx.$$



$$V = \pi \int_a^b [R(x)^2 - r(x)^2]dx$$

Para estos casos, **R(x)** o el radio mayor está determinado por la función más alejada del eje de giro, y **r(x)** o radio menor es la función más cercana al eje de giro.



$$V = \pi \int_a^b [R(y)^2 - r(y)^2]dy$$

Aplicación

En Cálculo, la principal tarea que tiene el estudiante es aplicar todos aquellos conceptos abordados en clase en la resolución de problemas que, si bien es cierto la mayoría parecieran no tener un contexto, con base en las aplicaciones en la vida real sí que existen y por ello es necesario dominar la parte procedimental o algebraica.

Ejemplo 1: Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por: $y = 4x - x^2$ alrededor de $y = -2$

$y = x^2$

Solución:

En primer lugar, es recomendable identificar los puntos de corte existentes entre las dos curvas, lo cual nos sirve de ayuda para determinar los límites de la integral. Además, al tener dos parábolas, hallamos sus vértices utilizando el criterio de la primera derivada para hallar puntos críticos.

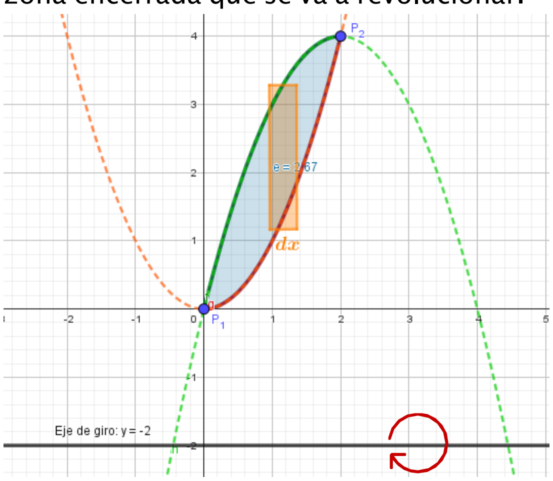
$$y = y$$
$$4x - x^2 = x^2$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad \boldsymbol{P_1}(0,0)$$
$$x_2 = 2 \quad y_2 = 4 \quad \boldsymbol{P_2(2,4)}$$

Vértices:

$$y = 4x - x^2$$
$$y' = 4 - 2x \quad \text{(Punto crítico)}$$
$$4 - 2x = 0$$
$$x = 2$$
$$\boldsymbol{V_1(2,4)}$$

$$y = x^2$$
$$\boldsymbol{V_2(0,0)}$$

Graficamos las funciones en 2D, con ayuda de los puntos obtenidos. Identificamos la zona encerrada que se va a revolucionar.



Recuerda:

El método de discos y arandelas se forma cuando el diferencial es perpendicular al eje de giro.

Como estudiantes, es recomendable realizar primero el cálculo del área de la región formada, a manera de refuerzo.

Como en este caso el eje de giro es paralelo al eje *X*, el diferencial que se va a utilizar es *dx*, por lo tanto, los límites de integración corresponden a las abscisas de los puntos **P1** y **P2**, es decir, la integral para la superficie y el valor del área de la región encerrada son los siguientes:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

f(x): Curva superior

g(x): Curva inferior

$$A = \int_0^2 (4x - x^2 - x^2)dx$$

$$A = \frac{8}{3}\, u^2$$

Luego, procedemos a calcular el volumen del sólido revolucionado mediante la integral:

$$\boldsymbol{V = \pi \cdot \int_a^b [R(x)^2 - r(x)^2]dx}$$

$R(x) = f(x) - eje\ de\ giro$ Mayor – menor

$R(x) = 4x - x^2 - (-2)$

$R(x) = 4x - x^2 + 2$

$r(x) = g(x) - eje\ de\ giro$ Superior – inferior

$r(x) = x^2 - (-2)$

$r(x) = x^2 + 2$

Nota:
Los radios ***R(x)*** y ***r(x)*** indican que se están trabajando en relación a ***dx***.

$$V = \pi \cdot \int_0^2 [(4x - x^2 + 2)^2 - (x^2 + 2)^2]dx$$

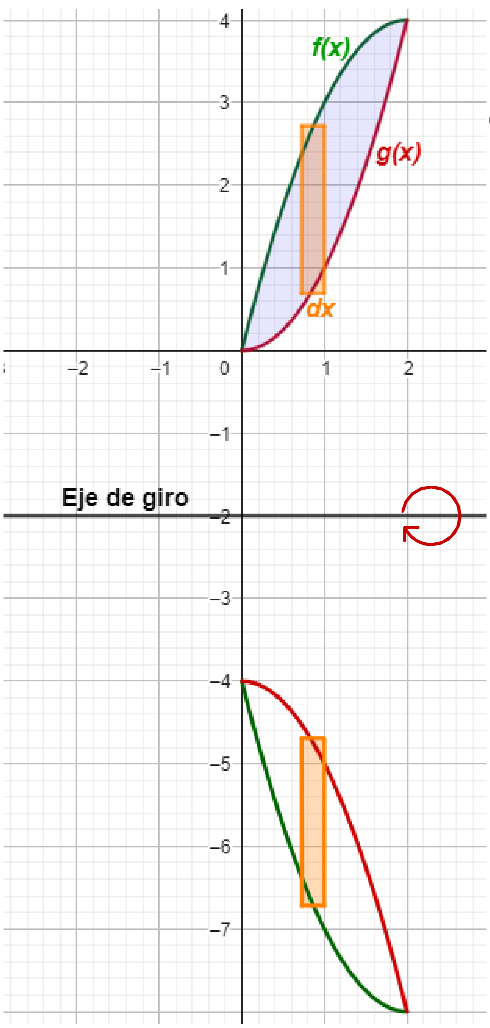
$$V = \pi \cdot \int_0^2 [(16x^2 + x^4 + 4 - 8x^3 - 4x^2 + 16x) - (x^4 + 4x^2 + 4)]dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (-8x^3 + 8x^2 + 16x)dx$$

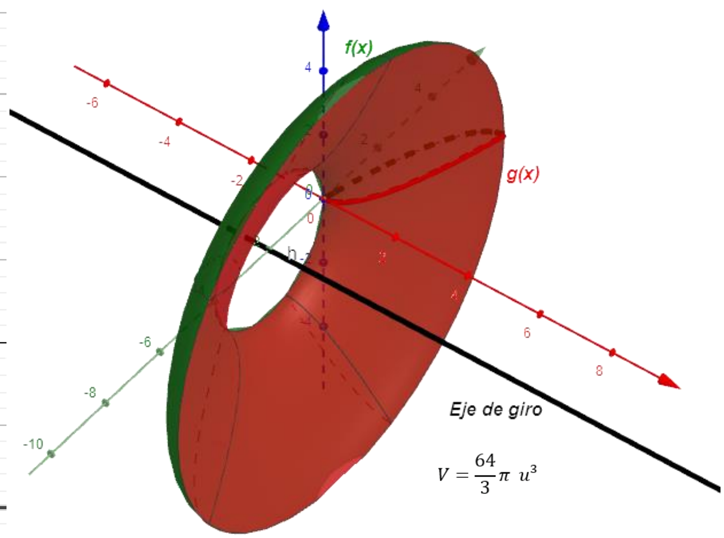
$$V = \pi \cdot \left[-8\frac{x^4}{4} + 8\frac{x^3}{3} + 16\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$V = \frac{64}{3}\pi\ u^3$$

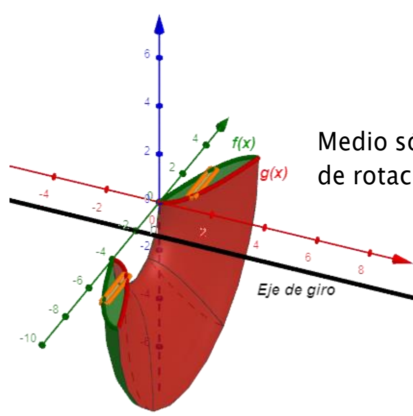
La representación gráfica en dos dimensiones de cómo va a rotar la región sombreada, es la siguiente:



Finalmente, el sólido revolucionado se ve de la siguiente forma:



Sólido de Revolución en tres dimensiones



Medio sólido (ángulo de rotación de 180°)

Ejemplo 2: Encuentre el volumen del sólido definido al girar la región circular acotada por $(x-2)^2+y^2=1$ alrededor del eje y.

Solución:

En primer lugar, es recomendable identificar los puntos de corte existentes entre las dos curvas, lo cual nos sirve de ayuda para determinar los límites de la integral. Además, al tener dos parábolas, hallamos sus vértices utilizando el criterio de la primera derivada para hallar puntos críticos.

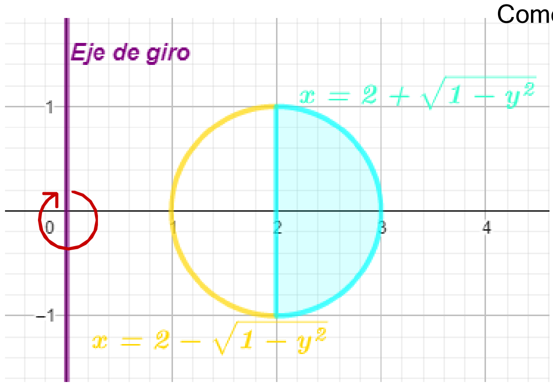
$(x-2)^2+y^2=1$ Se despeja *x* para trabajar con el diferencial *dy*

$(x-2)^2=1-y^2$

$x-2=\pm\sqrt{1-y^2}$

$x=2\pm\sqrt{1-y^2}$ La circunferencia se divide en dos partes

Graficamos la circunferencia dividida en dos dimensiones y ubicamos el eje de giro. Como repaso y para identificar los límites de integración, calculamos primero el área de la región encerrada por la circunferencia.



Como el eje de giro es el eje *Y*, el diferencial será *dy*

Curva derecha - curva izquierda

$$\boldsymbol{A=\int_a^b[f-g]dy}$$

$$A=\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)\right]dy$$

$$A=\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)\right]dy$$

$$A=2\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$$

$$A=\pi\, u^2$$

Luego, procedemos a calcular el volumen del sólido revolucionado mediante la integral:

$$\boldsymbol{V=\pi\cdot\int_a^b[R^2-r^2]dy}$$

$R = curva\ derecha - eje\ de\ giro$

$R=2+\sqrt{1-y^2}-0$

$R=2+\sqrt{1-y^2}$

$r(x) = curva\ izquierda - eje\ de\ giro$

$r(x)=2-\sqrt{1-y^2}$

$r(x)=2-\sqrt{1-y^2}$

$$V=\pi\cdot\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]dy$$ Utilizamos el producto notable: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

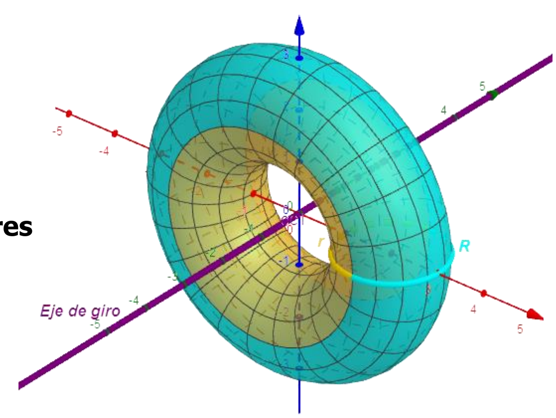
$$V=\pi\cdot\int_{-1}^{1}\left[\left(\cancel{2}+\sqrt{1-y^2}\right)-\left(\cancel{2}-\sqrt{1-y^2}\right)\right]\left[\left(2+\cancel{\sqrt{1-y^2}}\right)+\left(2-\cancel{\sqrt{1-y^2}}\right)\right]dy$$

$$V=\pi\cdot\int_{-1}^{1}\left[2\sqrt{1-y^2}\right]\cdot(4)dy$$

$$V=8\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$\boldsymbol{V=4\pi^2\, u^3}$$

Sólido de Revolución en tres dimensiones



Pongamos en práctica los conocimientos

Resuelve el siguiente ejercicio a continuación, identifica los límites de integración así como también el diferencial a utilizar, grafica la región formada por las dos curvas, calcula su área y el volumen del sólido formado y finalmente haz un bosquejo de cómo consideras tú que sería la figura en 3 dimensiones.

Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$ alrededor de $x = 2$

CLASE 2

Sólidos de Revolución con Realidad Aumentada

Objetivo:

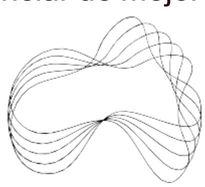
Graficar e interpretar los sólidos de revolución mediante la herramienta de Realidad Aumentada (AR) integrada en la aplicación móvil GeoGebra Calculadora 3D

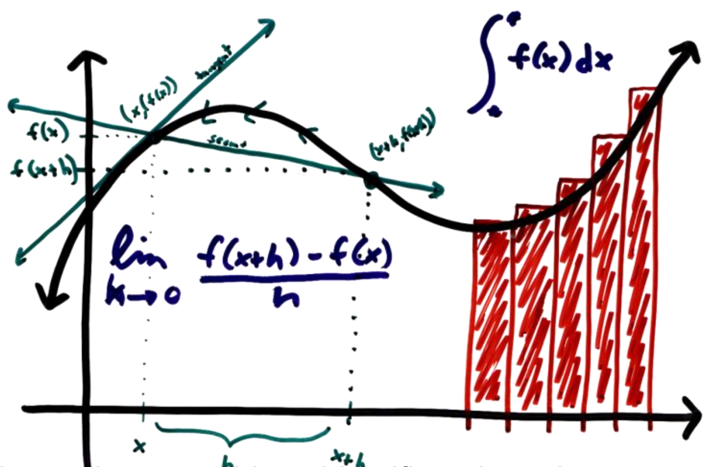
Introducción

En la actual era digital en la que se dispone de un sinnúmero de recursos tecnológicos, el estudiante en formación para ser docente de Matemáticas debe contar con las habilidades necesarias para hacer uso de los mismos, a fin de complementar de mejor manera sus clases, manteniendo a su vez la vanguardia en nuevas técnicas de enseñanza que permita conseguir resultados positivos en el aprendizaje de sus alumnos.

TIC en Matemáticas

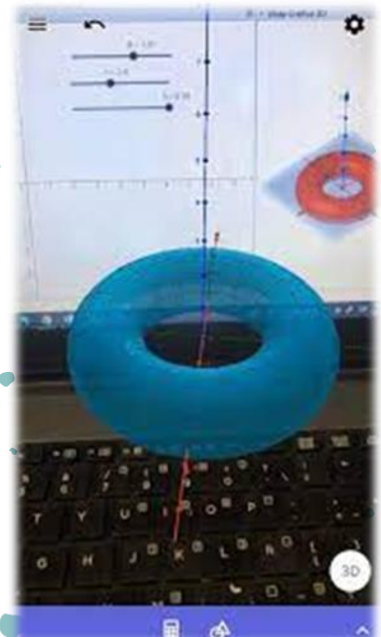
El constante avance tecnológico y su implementación como recurso para el proceso enseñanza aprendizaje, han permitido cambiar la forma en la que se abordan las Matemáticas, pasando de una forma clásica donde se estudia de forma abstracta y meramente lógica, a una que permite visualizar, interpretar y analizar resultados obtenidos, fomentando consecuentemente la integración con el entorno en aplicaciones reales, modelando matemáticamente, entre otros aspectos que permiten evidenciar de mejor manera la utilidad del cálculo numérico (Molina, 2016).

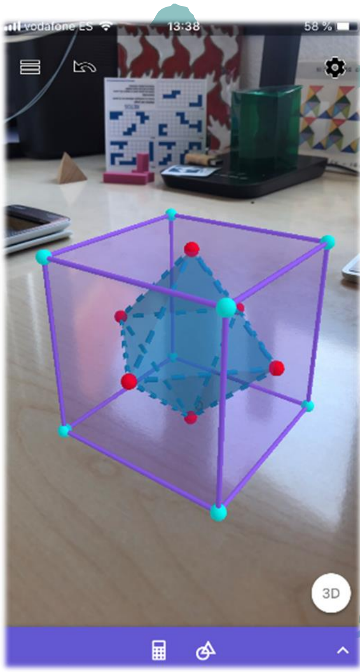




En este sentido, para el caso específico de Cálculo Integral, hacer uso de las herramientas tecnológicas permiten al estudiante la facilidad de comprender conceptos mediante la representación gráfica, teniendo la posibilidad de manipular el objeto, identificar de mejor manera ciertos parámetros que pueden llegar a existir, además del comportamiento según cómo se modifiquen los datos en tiempo real, entre otros aspectos que resultan difícil de interpretar si solo se hace uso de los clásicos recursos como la pizarra. (Molina, 2016)

En plena era digital en la que la gran mayoría de estudiantes disponen de un teléfono celular inteligente, los docentes pueden tomar ventaja del uso de dichos smartphones gracias a la comodidad de emplear las aplicaciones móviles para actividades escolares, consistiendo así en un método de innovar y conectar el mundo de la tecnología con el aprendizaje de sus estudiantes, facilitando a su vez la labor catedrática.

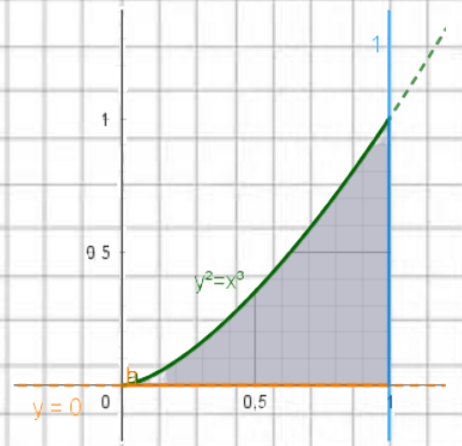




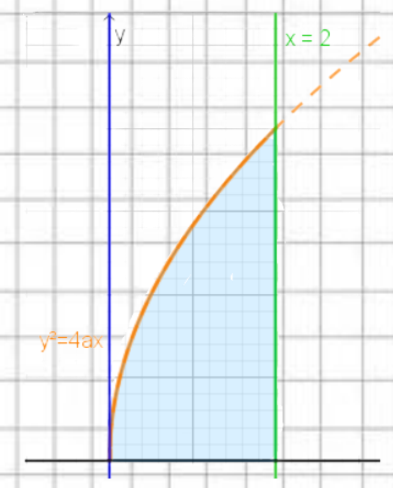
Lopes y Santos (2017) expresan que una de las tecnologías que puede ayudar al docente y al alumnado, es precisamente la Realidad Aumentada, debido a que es una tecnología la cual, pese a no ser tan nueva, aporta innovación e interacción entre el mundo real y virtual, es decir, entre el profesor/alumnos y los objetos 3D creados en un ordenador y hacer que el aprendizaje sea más atractivo para los estudiantes.

PROBLEMAS PROPUESTOS

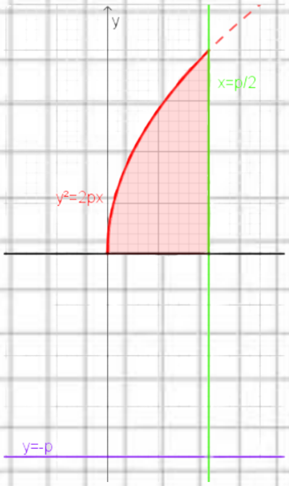
Ejemplo 1: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, el eje *OX* y la recta $x = 1$, alrededor del eje *OY*.



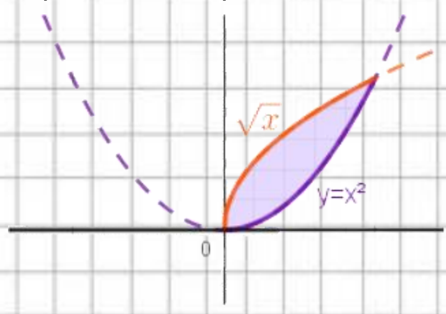
Ejemplo 2: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje *OY*, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$ que intercepta la recta $x = a$.



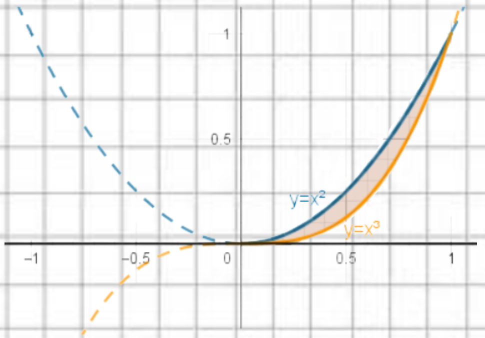
Ejemplo 3: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor de la recta $y = -p$, la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y por la recta $x = \frac{p}{2}$.



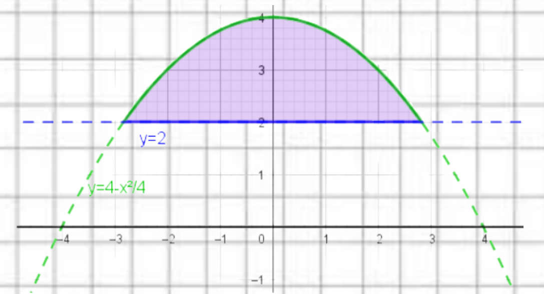
Ejemplo 4: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje *OX*, la superficie comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



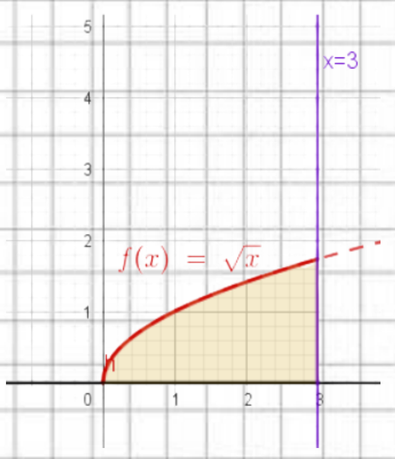
Ejemplo 5: Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $y = x^3$ e $y = x^2$ alrededor del eje *OX*.



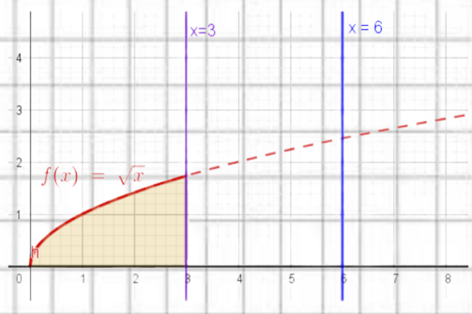
Ejemplo 6: Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $y = 2$ e $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ alrededor del eje x.



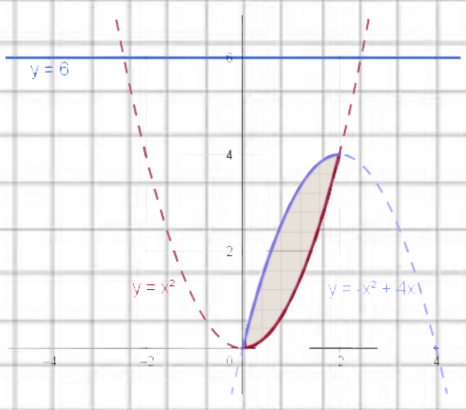
Ejemplo 7: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sqrt{x}.$, $y = 0$ y $x = 3$ al girar alrededor del eje *OY*.



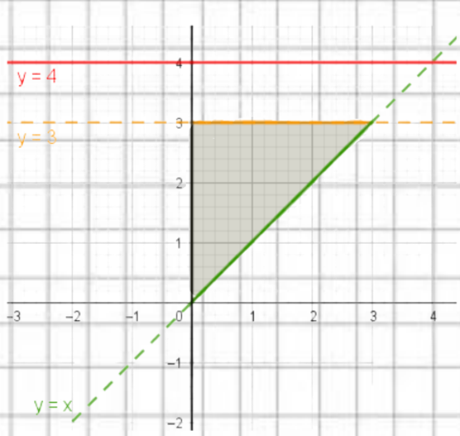
Ejemplo 8: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sqrt{x}.$ e $y = 0$ al girar alrededor de la recta $x = 3$.



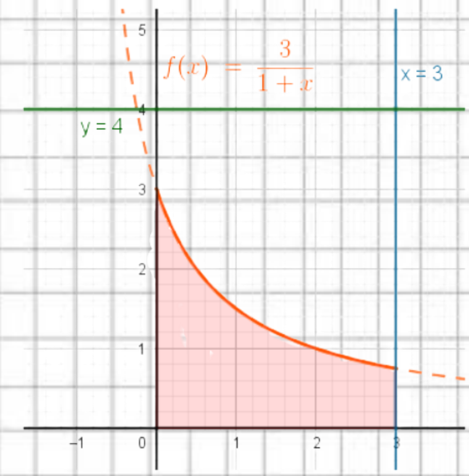
Ejemplo 9: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$ al girar alrededor de la recta $y = 6$.



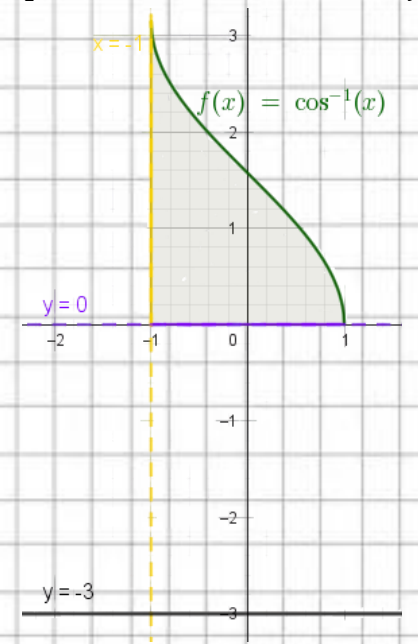
Ejemplo 10: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = 3$, $x = 0$, al girar alrededor de la recta $y = 4$.



Ejemplo 11: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \dfrac{3}{1+x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, al girar alrededor de la recta $y = 4$.



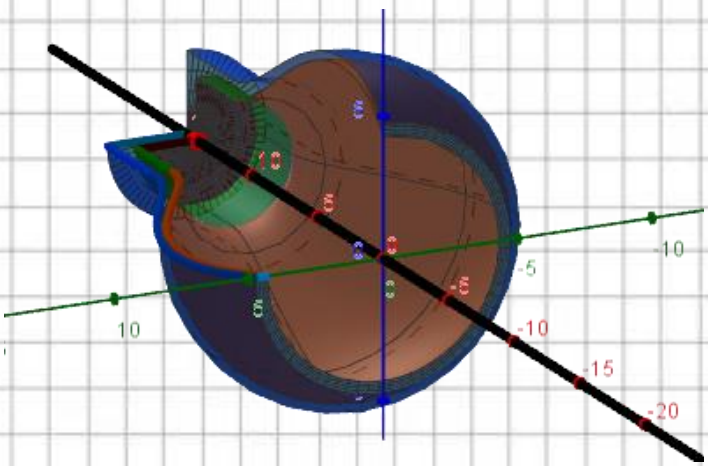
Ejemplo 12: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = arccos(x)$, $x = -1$ e $y = 0$ alrededor del eje $y = -3$.



RETO (Recipiente de vidrio): Se desea saber la cantidad de vidrio (en volumen) necesaria para elaborar un recipiente de vidrio. Calcule el volumen entre las paredes del recipiente si las siguientes funciones por partes definen las paredes del mismo:

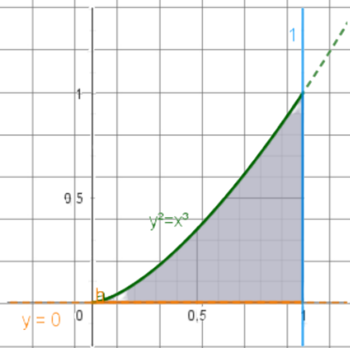
$$y = \begin{cases} \sqrt{0.1x^3 - 2{,}2x^2 + 10{,}9x + 22{,}2} & 0 \leq x \leq 11{,}5 \\ 2{,}95 & 11{,}5 < x \leq 15 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{0.1x^3 - 2{,}2x^2 + 10{,}9x + 18{,}5} & 0 \leq x \leq 11{,}5 \\ 2{,}23 & 11{,}5 \leq x \leq 14{,}25 \end{cases}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

Ejemplo 1: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, el eje *OX* y la recta $x = 1$, alrededor del eje *OY*.



$R = curva - eje$

$R = 1 - 0$

$r = curva - eje$

$r = y^{2/3} - 0$

$$V = \int_a^b \left(R^2 - r^2\right) dy$$

$$V = \int_0^1 \left[1^2 - \left(y^{2/3}\right)^2\right] dy$$

$$V = \int_0^1 \left(1 - y^{4/3}\right) dy$$

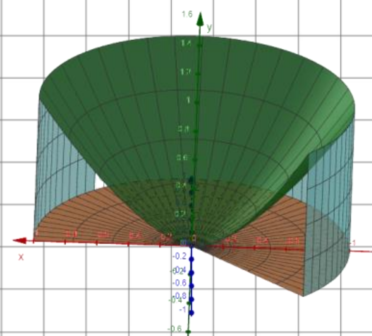
$$V = \pi\left[\int_0^1 dy - \int_0^1 y^{4/3} dy\right]$$

$$V = \pi\left[y - \frac{3}{7}y^{7/3}\right]_0^1$$

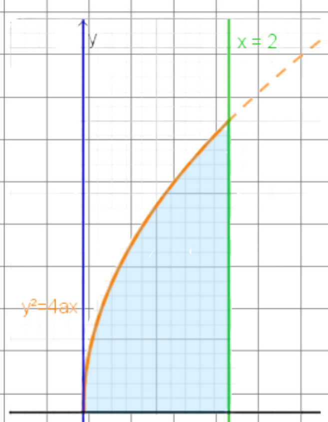
$$V = \pi\left[1 - \frac{3}{7}(1)^{\frac{7}{3}} - 0\right]$$

$$V = \pi\left[\frac{4}{7}\right]$$

$$V = \frac{4}{7}\pi \quad (u^3)$$



Ejemplo 2: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje *OY*, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$ que intercepta la recta $x = a$.



$y = \sqrt{4ax}$

intersección

$y = \sqrt{4a \cdot a}$

$y = 2a$

$R = curva - eje$

$R = a - 0$

$R = a$

$r = curva - eje$

$r = \frac{y^2}{4a} - 0$

$r = \frac{y^2}{4a}$

$$V = \pi\int_a^b \left(R^2 - r^2\right) dy$$

$$V = \pi\int_0^{2a} \left[a^2 - \left(\frac{y^2}{4a}\right)^2\right] dy$$

$$V = \pi\left[\int_0^{2a} a^2 dy - \int_0^{2a} \frac{y^4}{16a^2} dy\right]$$

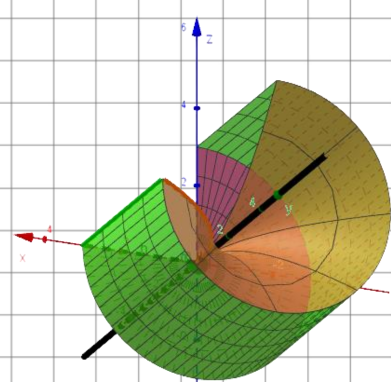
$$V = \pi\left[a^2 y - \frac{1}{16a^2} \cdot \frac{y^5}{5}\right]_0^{2a}$$

$$V = \pi\left[2a^3 - \frac{32a^5}{s \cdot 16a^2}\right]$$

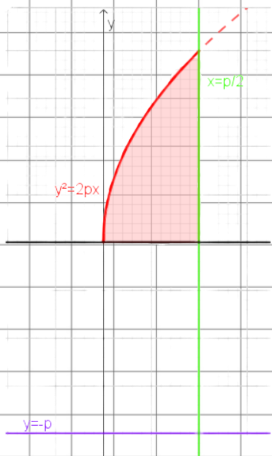
$$V = \pi\left[2a^3 - \frac{32a^3}{80}\right]$$

$$V = \pi\left(2a^3 - \frac{2}{5}a^3\right)$$

$$V = \frac{8}{5}\pi \quad (u^3)$$

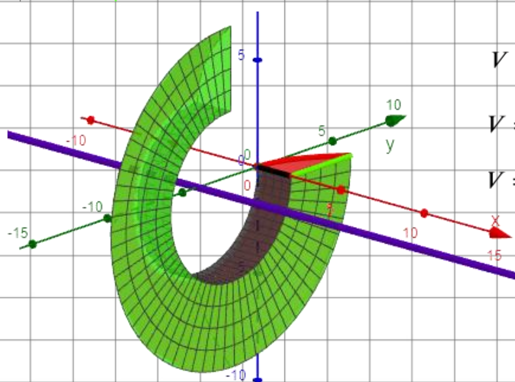


Ejemplo 3: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor de la recta $y = -p$, la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y por la recta $x = \frac{p}{2}$.

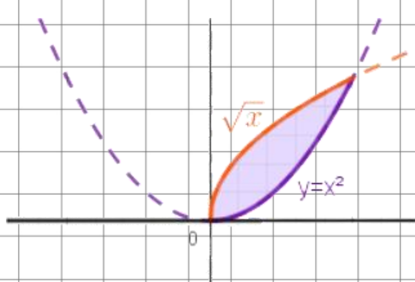


$$R = curva - eje$$
$$R = \sqrt{2px} - (-p)$$
$$R = \sqrt{2px} + p$$
$$r = curva - eje$$
$$r = -\sqrt{2px} - (-p)$$
$$r = p - \sqrt{2px}$$

$$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2\right) dx$$
$$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left[\left(\sqrt{2px} + p\right)^2 - \left(p - \sqrt{2px}\right)^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left[\left(2px + 2p\sqrt{2px} + p^2\right) - \left(p^2 - 2p\sqrt{2px} + 2px\right)\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\cancel{2px} + 2p\sqrt{2px} + \cancel{p^2} - \cancel{p^2} + 2p\sqrt{2px} - \cancel{2px}\right) dx$$
$$V = \pi \int_0^{P/2} 4p\sqrt{2px}\, dx$$
$$V = 4p\pi \int_0^{p/2} (2px)^{1/2} dx$$
$$V = 4p\pi\sqrt{2p} \cdot \int_0^{p/2} x^{1/2} dx$$
$$V = 4p\pi\sqrt{2p}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)_0^{\frac{p}{2}}$$
$$V = 4p\pi\sqrt{2p}\frac{2}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^{3/2}$$
$$V = \frac{4}{3}p^3\pi \left(u^3\right)$$



Ejemplo 4: Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje *OX*, la superficie comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

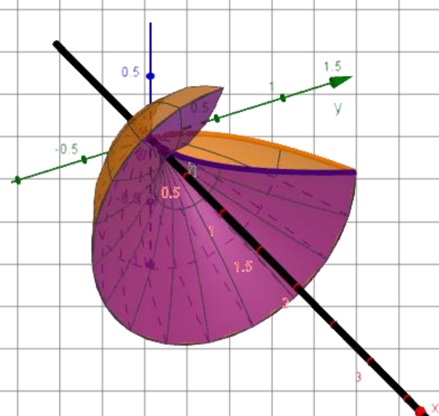


Intersección

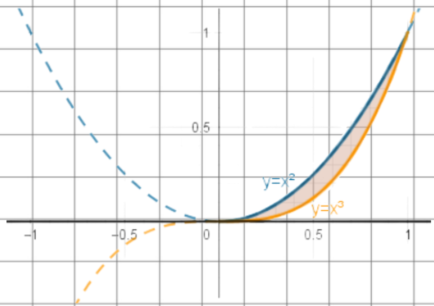
$$x^2 = \sqrt{x}$$
$$\frac{x^2}{x^{1/2}} = 1$$
$$x^{1/2} = 1$$
$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$P(1;1)$$

$$R = curva - eje$$
$$R = \sqrt{x} - 0$$
$$R = \sqrt{x}$$
$$r = curva - eje$$
$$r = x^2 - 0$$
$$r = x^2$$

$$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2\right) dx$$
$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx$$
$$V = \pi \left[\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^4 dx\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$
$$V = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 0\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{3}{10}\right]$$
$$V = \frac{3}{10}\pi \quad \left(u^3\right)$$



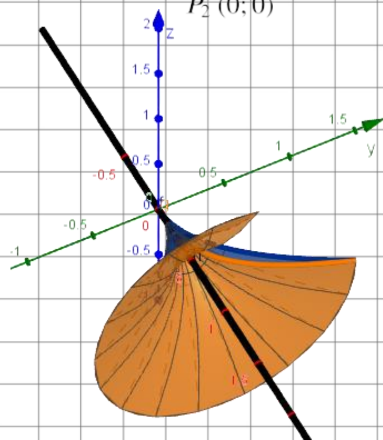
Ejemplo 5: Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $y = x^3$ e $y = x^2$ alrededor del eje *OX*.



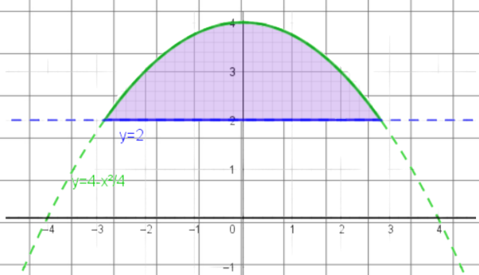
$$x^2 = x^3$$
$$1 = \frac{x^3}{x^2}$$
$$1 = x$$
$$y = 1$$
$$P_1\ (1;1)$$
$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$P_2\ (0;0)$$

$R = curva - eje$
$R = x^2 - 0$
$R = x^2$
$r = curva - eje$
$r = x^3 - 0$
$r = x^3$

$$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2\right) dx$$
$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^1 \left(x^4 - x^6\right) dx$$
$$V = \pi \left[\int_0^1 x^4\,dx - \int_0^1 x^6\,dx\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1$$
$$V = \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7} - 0\right]$$
$$V = \frac{2}{35}\pi \quad \left(u^3\right)$$



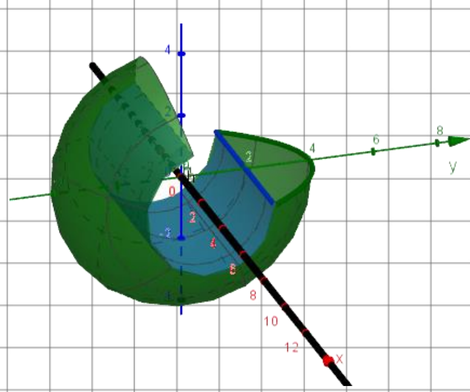
Ejemplo 6: Formular y evaluar la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $y = 2$ e $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ alrededor del eje x.



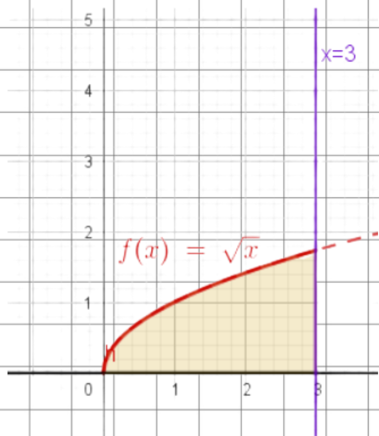
$R = curva - eje$
$R = 4 - \frac{x^2}{4} - 0$
$R = 4 - \frac{x^2}{4}$
$R = \frac{16 - x^2}{4}$
$r = curva - eje$
$r = 2 - 0$
$r = 2$

$$y = 2$$
$$y = 4 - \frac{x^2}{4}$$
$$2 = 4 - \frac{x^2}{4}$$
$$-2 = -\frac{x^2}{4}$$
$$x^2 = 8$$
$$x = 2\sqrt{2}$$
$$y = 2$$
$$P_1\ \left(2\sqrt{2};2\right)$$
$$P_2\ \left(-2\sqrt{2};2\right)$$

$$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2\right) dx$$
$$V = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{16 - x^2}{4}\right)^2 - 2^2\right] dx$$
$$V = \pi \left[\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{16}\left(16 - x^2\right)^2 dx - 4\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{1}{16}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(16 - x^2\right)^2 dx - 4\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dx\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{1}{16}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(256 - 32x^2 + x^4\right) dx - 4\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} d\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{1}{16}\left|256x - \frac{32}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} - 4|x|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{1}{16}(1037{,}8442) - 0\right]$$
$$V = 203{,}780 \ \left(u^3\right)$$



Ejemplo 7: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sqrt{x}.$, $y = 0$ y $x = 3$ al girar alrededor del eje *OY*.



$cortes$

$x = 3$

$y = \sqrt{3}$

$P_1\left(3; \sqrt{3}\right)$

$P_2\left(0; 0\right)$

$R = curva - eje$

$R = 3 - 0$

$R = 3$

$r = curva - eje$

$r = y^2 - 0$

$r = y^2$

$$V = \pi \int_a^b \left[R^2 - r^2\right] dy$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[3^2 - \left(y^2\right)^2\right] dy$$

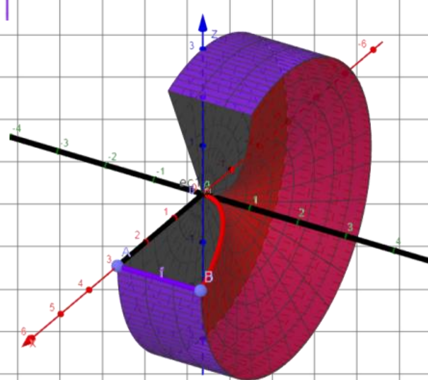
$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(9 - y^4\right) dy$$

$$V = \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} 9dy - \int_0^{\sqrt{3}} y^4 dy\right]$$

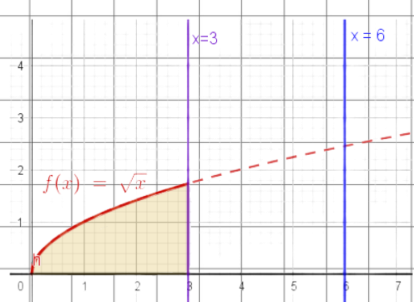
$$V = \pi \left[9y - \frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$V = \pi \left[9\sqrt{3} - \frac{3^{5/2}}{5} - 0\right]$$

$$V = \frac{36\sqrt{3}}{5}\pi \quad \left(u^3\right)$$



Ejemplo 8: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sqrt{x}.$ e $y = 0$ al girar alrededor de la recta $x = 3$.



$P_1\left(3; \sqrt{3}\right)$

$R = curva - eje$

$R = y^2 - 6$

$r = curva - eje$

$r = 3 - 6$

$r = -3$

$$V = \pi \int_a^b \left[R^2 - r^2\right] dy$$

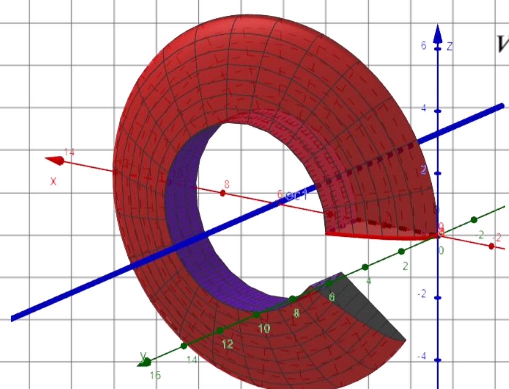
$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[\left(y^2 - 6\right)^2 - (-3)^2\right] dy$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[y^4 - 12y^2 + 36 - 9\right] dy$$

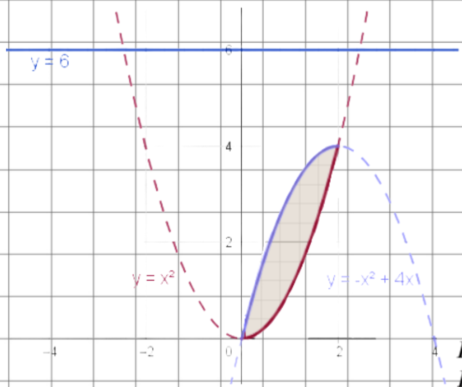
$$V = \pi \left[\int_0^{\sqrt{3}} y^4 dy - 12\int_0^{\sqrt{3}} y^2 dy + \int_0^{\sqrt{3}} 27dy\right]$$

$$V = \pi \left[\frac{y^5}{5} - 4y^3 + 27y\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{84\sqrt{3}}{5}\pi \quad \left(u^3\right)$$



Ejemplo 9: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$ al girar alrededor de la recta $y = 6$.



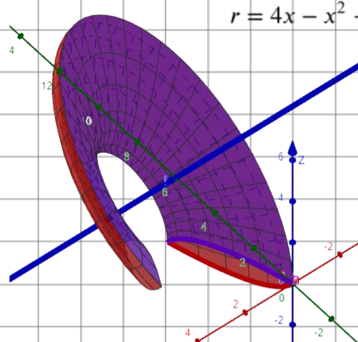
cortes

$$x^2 = 4x - x^2$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$
$$P_1\,(0;0)$$
$$P_2\,(2;4)$$

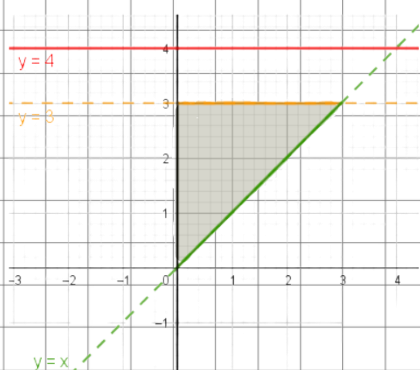
$$R = curva - eje$$
$$R = x^2 - 6$$

$$r = curva - eje$$
$$r = 4x - x^2 - 6$$

$$V = \pi \int_a^b \left[R^2 - r^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(x^2-6\right)^2 - \left(4x - x^2 - 6\right)^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^2 \left(x^4 - 12x^2 + 36 - x^4 + 8x^3 - 28x^2 + 48x - 36\right) dx$$
$$V = \pi \int_0^2 \left(8x^3 - 40x^2 + 48x\right) dx$$
$$V = 8\pi \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right) dx$$
$$V = 8\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2\right]_0^2$$
$$V = 8\pi \left(4 - \frac{40}{3} + 12 - 0\right)$$
$$V = \frac{64}{3}\pi \quad \left(u^3\right)$$



Ejemplo 10: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = 3$,$x = 0$, al girar alrededor de la recta $y = 4$.



cortes

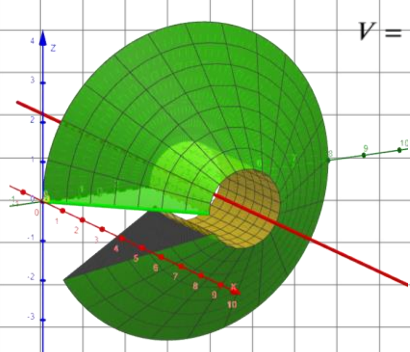
$$y = x$$
$$y = 3$$

$$P_1\,(3;3)$$
$$P_2\,(0;0)$$

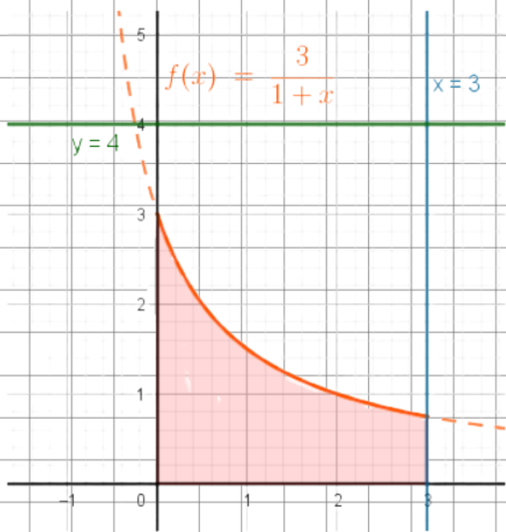
$$R = curva - eje$$
$$R = x - 4$$

$$r = curva - eje$$
$$r = 3 - 4$$
$$r = -1$$

$$V = \pi \int_a^b \left[R^2 - r^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^3 \left[(x-4)^2 - (-1)^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^3 \left(x^2 - 8x + 16 - 1\right) dx$$
$$V = \pi \left[\int_0^3 x^2 dx - 8\int_0^3 x dx + 15\int_0^3 dx\right]$$
$$V = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 15x\right]^3$$
$$V = \pi \left[\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 0\right]$$
$$V = 18\pi \left(u^3\right)$$



Ejemplo 11: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \dfrac{3}{1+x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, al girar alrededor de la recta $y = 4$.



$$Cortes$$
$$y = 0$$
$$x = 3$$
$$P_1\ (3;0)$$

$$x = 3$$
$$y = \frac{3}{1+3}$$
$$y = \frac{3}{4}$$
$$P_2\left(3;\frac{3}{4}\right)$$

$$x = 0$$
$$y = 3$$
$$P_3\ (0;3)$$

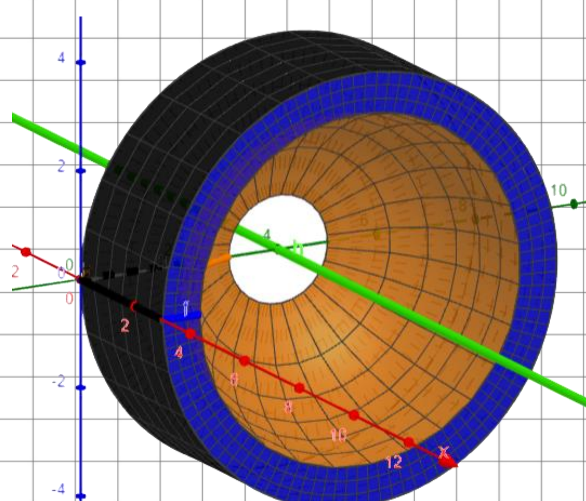
$$R = curva - eje$$
$$R = 0 - 4$$
$$R = -4$$

$$r = curva - eje$$
$$r = \frac{3}{1+x} - 4$$
$$r = \frac{3-4-4x}{1+x}$$
$$r = -\left(\frac{4x+1}{1+x}\right)$$

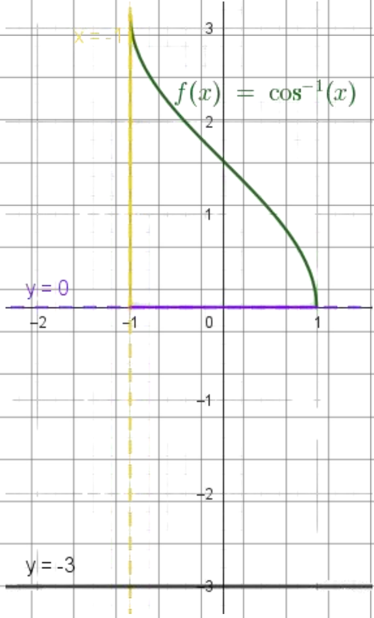
$$V = \pi\int_a^b \left[R^2 - r^2\right] dx$$
$$V = \pi\int_0^3 \left[(-4)^2 - \left(-\frac{4x+1}{1+x}\right)^2\right] dx$$
$$V = \pi\int_0^3 \left[16 - \frac{(4x+1)^2}{(1+x)^2}\right] dx$$
$$V = \pi\int_0^3 \frac{3(8x+5)}{(1+x)^2} dx$$

$$\frac{16-(4x+1)^2}{(1+x)^2}$$
$$\frac{16(1+x)^2-(4x+1)^2}{(1+x)^2}$$
$$\frac{16(1+2x+x^2)-(16x^2+8x+1)}{(1+x)^2}$$
$$\frac{16+32x+16x^2-16x^2-8x-1}{(1+x)^2}$$
$$\frac{24x+15}{(1+x)^2}$$

$$V = 3\pi\int_0^3 \frac{8(u-1)+5}{u^2} du \qquad \begin{matrix} u = (1+x) \\ du = dx \end{matrix}$$
$$V = 3\pi\int_0^3 \frac{8u-3}{u^2} du$$
$$V = 3\pi\left[\int_0^3 \frac{8}{u} du - 3\int_0^3 \frac{1}{u^2} du\right]$$
$$V = 3\pi\left[\left|8ln|u|\right|_0^3 - 3\left|-\frac{1}{u}\right|_0^3\right]$$
$$V = 3\pi\left[\left|8Ln|1+x|\right|_0^3 - 3\left|-\frac{1}{1+x}\right|_0^3\right]$$
$$V = 3\pi\left(11{,}0904\cdot\frac{9}{4}\right)$$
$$V = 83{,}319\ \ (u^3)$$



Ejemplo 12: Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = arccos(x)$, $x = -1$ e $y = 0$ alrededor del eje $y = -3$.



$$R = curva - eje \qquad r = curva - eje$$
$$R = arccos(x) - (-3) \qquad r = 0 - (-3)$$
$$R = arccos(x) + 3 \qquad r = 3$$

$$V = \pi \int_a^b (R^2 - r^2)\, dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [(arccos(x) + 3)^2 - (3)^2]\, dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [arccos(x)^2 + 6 \cdot arccos(x) + 9 - 9]\, dx$$

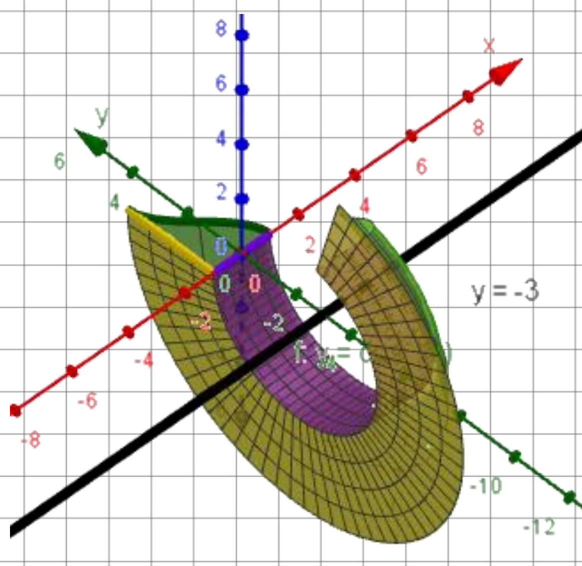
$$V = \pi \int_{-1}^{1} [arccos(x)^2 + 6 \cdot arccos(x)]\, dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\int_{-1}^{1} arccos(x)^2\, dx + 6 \int_{-1}^{1} arccos(x)\, dx\right]$$

$$V = \pi \left[x \cdot arccos(x)^2 - 2x - 2\sqrt{1-x^2} \cdot arccos(x) + 6 \cdot \left(x \cdot arccos(x) - \sqrt{1-x^2}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$V = \pi \cdot \left[x \cdot arccos(x)^2 - 2x - 2\sqrt{1-x^2} \cdot arccos(x) + 6x \cdot arccos(x) - 6\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$V = 24{,}719\ (u^3)$$



Bibliografía

Larson, R., & Edwards, B. (2010). Aplicaciones de la integral. In *Cálculo* (9th ed., pp. 458–468). Mc-GRAW-HILL.

Leithold, L. (1998). Volúmenes de sólidos mediante los métodos de rebanado, de discos y de arandelas. In *EL CÁLCULO. Séptima Edición* (7th ed., p. 382). Grupo Mexicano Mapasa S.A.

Lopes, M., & Santos, G. (2017, July). Realidade Aumentada na Educação. *Revista Tecnologias Na Educação,* 1–2. http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2015/07/Art2-vol12-juho2015

Molina, J. (2016). Experiencia de la integración de las TICs para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo II. *TE & ET*, 18, 85–100. http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/58514

Vergara, J. (2022). Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 22,* 1–20. https://www.redalyc.org/journal/6079/607968030005/html/

Conclusiones

Este trabajo destaca que la integración de la realidad aumentada en el aprendizaje de sólidos de revolución puede ser usado como un recurso valioso y eficaz, pues la aplicación de esta tecnología emergente en diferentes investigaciones, ha demostrado ser una herramienta pedagógica que no solo enriquece la comprensión teórica de los conceptos matemáticos involucrados, sino que también respalda de manera significativa el proceso de aprendizaje de los estudiantes. La realidad aumentada, al ofrecer experiencias interactivas y contextualizadas, se posiciona como un facilitador clave para mejorar la efectividad y la accesibilidad en la adquisición de conocimientos sobre sólidos de revolución.

Luego del análisis, tanto de la encuesta como de la prueba de conocimientos, se respalda la decisión de trabajar con el apoyo de las TIC para potenciar el aprendizaje y mejorar la visualización de sólidos, a su vez, se recalca la importancia de la adaptación del sistema educativo a la era digital y se destaca cómo la integración cuidadosa de herramientas tecnológicas, en particular la realidad aumentada, puede revolucionar la forma en que los estudiantes abordan conceptos matemáticos complejos como los sólidos de revolución.

La investigación enfocada en el aprendizaje del volumen de sólidos de revolución, respaldada por la realidad aumentada, mostró resultados significativos; se identificaron que las dificultades comunes que enfrentan los estudiantes, son limitaciones en la capacidad visoespacial y la falta de conocimientos sólidos previos en el ámbito del cálculo integral. Estos hallazgos fundamentales destacan la importancia de abordar estas barreras de aprendizaje y proporcionar estrategias efectivas para mejorar la comprensión de este concepto matemático clave.

En conjunto, estos hallazgos respaldan la idea de que, la integración de la realidad aumentada en la enseñanza del cálculo integral puede ser una estrategia efectiva para superar las barreras de comprensión. Además, subrayan la importancia de aprovechar las TIC como herramientas educativas, no solo para abordar las dificultades identificadas, sino también para enriquecer y revitalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de las matemáticas.

Recomendaciones

Se recomienda hacer uso de la presente propuesta didáctica a los estudiantes que deseen aprender y reforzar el tema de Volumen de Sólidos de Revolución. Además, tomar como base el presente trabajo de integración curricular para realizar un estudio comparativo entre un grupo que utiliza la realidad aumentada y otro que no la utiliza, evaluando el impacto en la comprensión y rendimiento de los estudiantes, haciendo uso de métricas objetivas y subjetivas para medir el progreso, a fin de verificar la efectividad del uso de la realidad aumentada en el tema volumen de sólidos de revolución.

También se recomienda el uso de herramientas tecnológicas, ya que son un apoyo fundamental, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de los estudiantes en los distintos ámbitos educativos.

Como recomendación para futuras investigaciones y trabajos de titulación, se sugiere la elaboración de un instructivo detallado sobre el uso de GeoGebra como herramienta de refuerzo en el aprendizaje de Volumen de Sólidos de Revolución, dirigido a estudiantes y/o docentes en general. El instructivo podría abordar la integración efectiva de GeoGebra y su aplicación en ejercicios prácticos que mejoren la comprensión de los conceptos clave. Además, este podría explorar estrategias para evaluar el progreso de los estudiantes y recopilar retroalimentación valiosa sobre la utilidad de GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se prevé que este posible proyecto tenga el potencial de enriquecer significativamente la educación matemática, ofreciendo a los estudiantes una herramienta práctica y accesible para fortalecer la comprensión no solo de Volumen de Sólidos de Revolución, sino también de otros temas de la asignatura que requieren del apoyo de las tecnologías como GeoGebra y la Realidad Aumentada.

Referencias

Advíncula, E., Valenzuela, M., y Villogas, E. (2017). Sólidos de revolución en un entorno de geometría dinámica. In S. Carranza (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1574–1581). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/12393/

Aldazabal, O., Vértiz, R., Zorrilla, E., |Aldazábal, L., y Guevara, M. (2021). Software GeoGebra en la mejora de capacidades resolutivas de problemas de figuras geométricas bidimensionales en universitarios. *Propósitos y Representaciones*, *9*(1). https://doi.org/10.20511/PYR2021.V9N1.1040

Andrade, M., y Montecino, A. (2013). Conversión de registros en el cálculo integral: la problemática de los sólidos de revolución. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 473–479). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://funes.uniandes.edu.co/4050/

Barajas, L., y Cuevas, O. (2017). *ADAPTACIÓN DEL MODELO TPACK PARA LA FORMACIÓN DEL DOCENTE UNIVERSITARIO*. Recuperado el 30 de enero del 2023, de https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2150.pdf

Bastidas, J., y Gutarra, F. (2017). *Cálculo II: Manual Autoformativo Interactivo*. Repositorio Institucional - Continental. https://hdl.handle.net/20.500.12394/4282

Berumen, E., Acevedo, S., y Reveles, S. (2021). Realidad aumentada como técnica didáctica en la enseñanza de temas de cálculo en la educación superior. Estudio de caso. *RIDE Revista Iberoamericana Para La Investigación y El Desarrollo Educativo*, *11*(22). https://doi.org/10.23913/ride.v11i22.890

Blázquez, A. (2017). *Realidad aumentada en Educación*. Monografía. https://oa.upm.es/45985/

Bonilla, J. (2014). Ventajas y desventajas de las TIC en el aula. *#ashtag*, *4 & 5*, 124–131. https://revistas.cun.edu.co/index.php/hashtag/article/view/46

Cabero, J., Marín, V., & Castaño, C. (2015). Validation of the application of TPACK framework to train teacher in the use of ICT. *@tic. Revista d'innovació Educativa, ISSN-e 1989-3477, Nº. 14, 2015 (Ejemplar Dedicado a: Competence Assessment in Higher Education:*

Situation, Experiences and Didactic Proposals), Págs. 13-22, *14*, 13–22. https://doi.org/10.7203/attic.14.4001

Cardoso, R., Pereira, S., Cruz, J., & Almeida, W. (2014). Uso da realidade aumentada em auxílio à Educação. *Computer on the Beach 2014*, 331–332.

Colaborativismo. (27 de junio del 2015). *George Siemens - Conectivismo*. [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=MJDyX7_J51M&list=PLVX0Lg3QewUD0jVNgAfag6QYpHhckXxsr&index=12

Conejo, L. (2018). *El uso de las TIC en la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria: aplicación a las fracciones* [Tesis de Grado]. Universidad de Valladolid http://uvadoc.uva.es/handle/10324/34939

Díaz, D. (2013). TIC en Educación Superior: Ventajas y desventajas. *Educación y Tecnología N°04*, *0719–249*, 44–50. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5072156

García, M., Reyes, J., y Godínez, G. (2018). Las Tic en la educación superior, innovaciones y retos / The ICT in higher education, innovations and challenges. *RICSH Revista Iberoamericana de Las Ciencias Sociales y Humanísticas*, *6*(12), 299–316. https://doi.org/10.23913/ricsh.v6i12.135

Gómez-Vargas, I., Medel-Esquivel, R., y García-Salcedo, R. (2018). Realidad Aumentada como herramienta didáctica en geometría 3D. *Latin-American Journal of Physics Education*, *12*(4). https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6960469

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, *14*(2), 198–214. https://doi.org/10.18041/1900-3803/ENTRAMADO.2.4751

Larson, R., y Edwards, B. (2010). Aplicaciones de la integral. In *Cálculo* (9th ed., pp. 458–468). Mc-GRAW-HILL.

Leithold, L. (1998). Volúmenes de sólidos mediante los métodos de rebanado, de discos y de arandelas. In *EL CÁLCULO. Séptima Edición* (7th ed., p. 382). Grupo Mexicano Mapasa S.A.

Lopes, M., & Santos, G. (julio del 2017). Realidade Aumentada na Educação. *Revista Tecnologias Na Educação*, 1–2. http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2015/07/Art2-vol12-julho2015

Mofolo-Mbokane, B., Engelbrecht, J., & Harding, A. (2013). Learning difficulties with solids of revolution: classroom observations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(7), 1065–1080. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.823253

Molina, J. (2016). Experiencia de la integración de las TICs para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo II. *TE & ET*, *18*, 85–100. http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/58514

Montecé, F., Verdesoto, A., Montecé, C., y Caicedo, C. (2017). Impacto De La Realidad Aumentada En La Educación Del Siglo XXI. *European Scientific Journal, ESJ*, *13*(25), 129. https://doi.org/10.19044/esj.2017.v13n25p129

Prendes, C. (2014). Realidad aumentada y educación: análisis de experiencias prácticas. *Píxel-Bit, Revista de Medios y Educación*, *46*, 187–203. https://doi.org/10.12795/pixelbit.2015.i46.12

Rigueros, C. (2017). La realidad aumentada: lo que debemos conocer. *Tecnología Investigación y Academia*, *5*(2), 257–261. https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/tia/article/view/11278

Rojas, A. (2021). Las TIC en el aprendizaje del cálculo diferencial en la Universidad de las Ciencias Informáticas. *UCIENCIA*. https://repositorio.uci.cu/jspui/handle/123456789/9814

Siemens, G. (2004). *Connectivism: A Learning Theory for the Digital Age*. www.connectivism.ca

Stephenson, K. (s.f.). *Reprinted from Internal Communication Focus* (Issue 36).

Vargas, D. (2015). Las TIC en la educación. *Dialnet*, *16*, 62–79. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5920245

Vergara, J. (2022). Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 22,* 1–20. https://www.redalyc.org/journal/6079/607968030005/html/

Vinueza, S., y Simbaña, V. (2017). Impacto de las TIC en la Educación Superior en el Ecuador. *Revista Publicando*, *4*(11), 355–368. https://revistapublicando.org/revista/index.php/crv/article/view/530

Anexos

Anexo A

Entrevista

UCUENCA
PEDAGOGÍA DE LAS
CIENCIAS EXPERIMENTALES

Entrevista

Título del Trabajo de Integración Curricular

Propuesta didáctica para el aprendizaje de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada

Objetivo general del Trabajo de Integración Curricular

Elaborar una propuesta didáctica empleando la Realidad Aumentada en el aprendizaje de volumen de sólidos de revolución, dirigido a los estudiantes de cuarto ciclo de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.

Objetivo de la entrevista.

Identificar cómo aprendieron y las dificultades que poseen los estudiantes de la Universidad de Cuenca de la carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física en el tema de Volúmenes de Sólidos de Revolución.

Población

Docentes que se encuentran impartiendo o han impartido la asignatura de Cálculo Integral en la carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca.

CARTA DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo ______________________________, CI_______________ declaro que se me ha explicado que mi participación en el estudio sobre Propuesta didáctica para el aprendizaje de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada; consistirá en responder una entrevista que pretende aportar al conocimiento, comprendiendo que mi participación es una valiosa contribución. Acepto la solicitud de que la entrevista sea grabada en formato de audio para su posterior transcripción y análisis, a los cuales podrá tener acceso parte del equipo docente de la carrera de PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y FÍSICA, que guía la investigación.

Declaro que se me ha informado ampliamente sobre los posibles beneficios, riesgos y molestias derivados de mi participación en el estudio, y que se me ha asegurado que la información que entregue estará protegida por el anonimato y la confidencialidad.

Los Investigadores Responsables del estudio, Santiago Loja, CI: 0106909146 y Jennifer Valladarez, CI: 0107342982, se comprometen a responder cualquier pregunta y aclarar cualquier duda que les plantee acerca de los procedimientos que se llevarán a cabo, riesgos, beneficios o cualquier otro asunto relacionado con la investigación. Así mismo, los entrevistadores me han dado seguridad de que no se me identificará en ninguna oportunidad en el estudio y que los datos relacionados con mi privacidad serán manejados en forma confidencial. En caso de que el producto de este trabajo se requiera mostrar al público externo (publicaciones, congresos y otras presentaciones), se solicitará previamente mi autorización.

UCUENCA

PEDAGOGÍA DE LAS
CIENCIAS EXPERIMENTALES

Por lo tanto, como participante, acepto la invitación en forma libre y voluntaria, y declaro estar informado de que los resultados de esta investigación tendrán como producto un informe, para ser presentado como parte del trabajo de titulación de los investigadores.

He leído esta hoja de Consentimiento y acepto participar en este estudio según las condiciones establecidas.

Cuenca, a ______ de mayo de 2023

____________________	____________________	____________________
Firma Investigador	Firma Investigadora	Firma docente participante

Anexo B

Preguntas de la entrevista

UCUENCA
PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Preguntas de la entrevista:

1. Estimado/a docente, cuéntenos ¿Cuánto tiempo lleva usted impartiendo clases de cálculo?
2. ¿Usted impartió clases de cálculo integral durante la pandemia o de manera presencial?
3. ¿Notó alguna dificultad o variación en el rendimiento académico en comparación con años anteriores en los que tuvo clases presenciales?
4. ¿Qué estrategias o técnicas utilizó para el Aprendizaje Autónomo en el tema de Volumen de sólidos de revolución?
5. ¿Qué dificultades observó en los estudiantes al momento de desarrollar ejercicios de Volúmenes de Sólidos de Revolución?
6. ¿Qué estrategias didácticas cree que son las más adecuadas, para que el estudiante aprenda?
7. ¿Tiene formación previa para trabajar con TIC?
8. ¿Qué opina usted de aplicar el conectivismo como modelo pedagógico específicamente en las clases de Cálculo? ¿En ese sentido, el modelo TPACK funcionaría?
9. ¿Consideraría que la aplicación de un software de Realidad Aumentada para el aprendizaje de volumen de sólidos de revolución, generaría un mayor rendimiento académico en los estudiantes?
10. ¿Cree usted que los alumnos están preparados para realizar una experiencia de *trabajo con RA (en cuanto a aspectos técnicos, de autoaprendizaje, de trabajo* colaborativo, etc.)?
11. Muchos docentes de Matemáticas utilizan GeoGebra para explicar algún tema o ejercicio y hay un sinnúmero de artículos respecto a su uso, ¿usted considera que esa aplicación es realmente útil para la enseñanza y el aprendizaje de Volúmenes de Sólidos de Revolución o cree que hay mejores opciones? Y con respecto a Software de Realidad Aumentada, ¿cuál consideraría más útil?
12. Para finalizar, ¿qué consejo le daría a una persona que está iniciando su recorrido en la labor docente? ¿y a una persona que quiere aprender Volúmenes de Sólidos de Revolución de manera autónoma?

Anexo C

Prueba de conocimientos

PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Somos Calidad

Propuesta didáctica para el aprendizaje de Sólidos de Revolución con apoyo de la Realidad Aumentada

Objetivo: Identificar cómo aprendieron los estudiantes de la carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, el tema de Volumen de Sólidos de Revolución y las dificultades presentadas en el aprendizaje del tema.

El siguiente cuestionario contiene preguntas relacionadas al tema Volumen de Sólidos de Revolución, donde se busca analizar el grado de dominio que posee el estudiante a la hora de resolver e interpretar gráficamente ejercicios prácticos, así como también identificar las mayores dificultades que ha experimentado durante su aprendizaje al cursar Cálculo Integral.

1. **Defina, en sus palabras, qué es un sólido de revolución:**

   ____

   ____

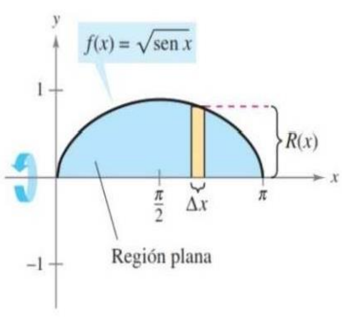
2. **Complete:**

El método de anillos o arandelas es una extensión del método de discos o rebanadas, en donde el sólido de revolución formado es hueco. En este sentido, la fórmula de integración para el método de rebanadas o discos es $V = \pi \cdot \int_a^b [R(x)]^2 dx$, siendo $R(x)$ el radio de giro del sólido.

Sin embargo, para el método de anillos o arandelas existe un ligero cambio en la fórmula de integración, la cual es: ______________________

A continuación, resuelva los siguientes ejercicios aplicando el método solicitado:

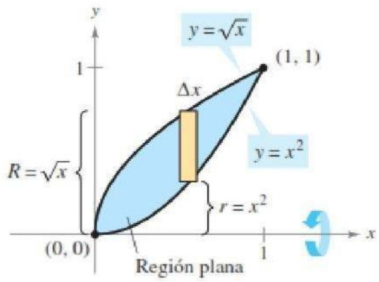
Ejemplo 1: Encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{Sen(x)}$ y el eje x $(0 \leq x \leq \pi)$ alrededor del eje x, utilizando el método de discos o rebanadas.



Ejemplo 2: Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ alrededor del eje x, como se muestra en la figura.

UCUENCA
PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Somos Calidad



Ejemplo 3: Encuentre el volumen del sólido definido al girar la región circular acotada por $(x-2)^2+y^2=1$ alrededor del eje y.

3. ¿Cuál es la mayor dificultad que enfrentó usted cuando aprendió sólidos de revolución?

____

4. ¿Cómo aprendió el tema de sólidos de revolución? Escriba los recursos y estrategias utilizadas en el aprendizaje de dicho tema.

____

5. Marque con una X la opción según considere. ¿Cree usted necesario el uso de aplicaciones de Matemáticas (Desmos, GeoGebra, Symbolab, entre otros) para ayudarle a comprender mejor la resolución e interpretación gráfica de ejercicios sobre Volumen de Sólidos de Revolución?

☐ **Sí**
☐ **No**