Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

GeoGebra en 3D como recurso didáctico para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional para tercero de Bachillerato General Unificado

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física

Autor:

Brian Gabriel Bermeo Peña

Diego Paúl Yanza Quituisaca

Director:

Marco Alejandro Rojas Rojas

ORCID: 0000-0002-2644-1344

Cuenca, Ecuador

2024-01-16

Resumen

Este trabajo de titulación es la propuesta de una guía de enseñanza en el área de geometría en el tema de rectas en el espacio tridimensional con GeoGebra para docentes de la Unidad Educativa Fiscomisional Alicia Losa Meneses. En la propuesta se elaboraron guías didácticas que pueden ayudar al docente en los diferentes temas de rectas en el espacio. Se crearon actividades con la ayuda del software matemático GeoGebra, para graficar las rectas se usaron comandos del software y así facilitar la enseñanza de los temas propuestos en libro de tercero de bachillero del ministerio de Educación. Además, para la elaboración de las guías didácticas se realizó un estudio cualitativo con tres docentes del área de matemáticas del colegio Alicia Loza Menese, mediante una entrevista de ocho preguntas que ayudaron a conocer sobre la enseñanza de las rectas en tres dimensiones en tercero de bachillerato y el material utilizado para impartir estas clases. Posteriormente se elaboran las guías didácticas de enseñanza basadas en el manejo del GeoGebra para la ayuda de estos temas de muy amplia complejidad.

Palabras clave: software matemático, guía didáctica, geometría, docentes

Abstract

This degree work is the proposal of a teaching guide in the area of geometry on the subject of lines in three-dimensional space with GeoGebra for teachers of the Alicia Losa Meneses Fiscomisional Educational Unit. In the proposal, didactic guides were elaborated that can help the teacher in the different topics of lines in space. Activities were created with the help of GeoGebra mathematical software, software commands were used to graph the straight lines and thus facilitate the teaching of the topics proposed in the third-year high school book of the Ministry of Education. In addition, for the elaboration of the didactic guides, a qualitative study was carried out with three teachers of the mathematics area of the Alicia Loza Menese school, through an interview of eight questions that helped to know about the teaching of lines in three dimensions in the third year of high school and the material used to teach these classes. Subsequently, didactic teaching guides based on the management of GeoGebra are prepared to help these highly complex topics.

Keywords: mathematical software, teaching guide, geometry, teachers

Índice de contenido

Índice de tablas

DEDICATORIA.

Este trabajo va dedicado a mi familia, a mi madre Graciela que ha sido mi apoyo a lo largo de estos años, a mi padre Carlos con su motivación de seguir adelante y a mis hermanos Andrés y Felipe, ya que siempre han creído en todo lo que he hecho.

Gran parte de este merito académico se lo debo a mi familia ya que son la luz que guía mi vida.

Brian

A mi madre, que sin ella no hubiera llegado hasta donde estoy, me ha guiado en los momentos más difíciles de mi vida y es la única que siempre creído en mí.

Dedico a mi padre que desde el cielo ilumina mi camino para no rendirme y cumplir mis metas.

También dedico a mis hijos Aaron y Gabriel, que han sido mi principal motivación para no rendirme en mis estudios y poderles dar una vida mejor, además de guiarles con sabiduría en el camino de la vida.

Diego

AGRADECIMIENTO.

Quiero agradecer a mi tutor de tesis Mgt. Marco Rojas por su tiempo y ayuda brindada en el desarrollo de este trabajo.

Brian.

Agradezco a mi tutor profesor Marco por la paciencia que ha tenido cuando hemos cometido errores. Por la enseñanza y la motivación que nos dió en el proceso de realización de la tesis.

Diego.

1 Capítulo I. Introducción.

1.1 Introducción.

En la actualidad las nuevas aplicaciones son de gran ayuda para implementarlas en la hora de clase, muchos docentes optan por incluir estas nuevas tecnologías en sus materias. Tanto en la matemática como en la geometría, se necesita de ciertas herramientas que ayuden a un mejor entendimiento al momento de la enseñanza por parte del docente. Es por eso que este proyecto tiene como finalidad incorporar una nueva tecnología como el GeoGebra al momento de impartir la clase de rectas en el espacio tridimensional para tercero de bachillerato en el área de geometría para estudiantes la Unidad Educativa Fiscomisional Alicia Loza Menes. El GeoGebra es un software que cuenta con una amplia gama de herramientas que brinda la capacidad de apreciar de manera visual figuras geométricas y lograr gráficos complejos que el docente no puede alcanzar al momento de graficarlos en el pizarrón, por esta razón se ha propuesto un guía de enseñanza en el tema de rectas en el espacio por medio de GeoGebra.

En el primer capítulo se puede encontrar la problemática y los desafíos que conlleva las gráficas de rectas en el espacio tridimensional por parte del docente, donde para mejorar la compresión de este tema los ejercicios a trabajar deben ser graficados. Además se muestran los objetivos que se pretende alcanzar en esta propuesta.

En el segundo capítulo encontramos el marco teórico, el cual hace referencia a los fundamentos teóricos que sustenten la propuesta, a más de eso, se encuentran criterios de varios autores que ayudan a sostener la presente propuesta didáctica.

En el capítulo tres habla de la metodología utilizada para recabar información, para eso se contó con la ayuda de tres docentes del área de matemáticas del colegio Alicia Loza Meneses.

Y por último en el capítulo cuatro, se encuentra elaborado la propuesta de las guías didáctica de enseñanza que permite al docente tener el apoyo a la hora de enseñar rectas en el espacio tridimensional con la ayuda de la herramienta GeoGebra, se detalla a paso a paso como usar, implementar y graficar, dando un enfoque distinto y más entretenido a dicho tema de clase. Por medio de esta guía tendemos a facilitar el uso de esta herramienta GeoGebra a los docentes del área de matemáticas.

1.2 Antecedentes

Actualmente los docentes de matemáticas han tenido un gran apoyo de los recursos tecnológicos al momento de realizar sus clases. Cotic (2014) menciona que “lograr que las Tics sean integradas en el aula de matemáticas va a depender mucho del interés y de la capacidad del docente para generar un ambiente de aprendizaje que permita la producción de conocimientos con la elaboración de clases dinámicas, para estimular el aprendizaje continuo y el trabajo colaborativo de los alumnos” (p.2) , entonces el docente debe buscar los recursos y las actividades necesarias que ayuden al estudiante a mejorar su aprendizaje y de esta manera se puede generar un aprendizaje significativo.

Entonces si hablamos de mejorar la enseñanza, el uso de las Tics es una alternativa comprobada. Entre los programas que se pueden utilizar para abordar la matemática está el GeoGebra, que es una de las mejores opciones que el docente debe tener en cuenta. “El GeoGebra es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo” (Hohewarter, 2019, p.1), por ende, se puede trabajar de muchas maneras a la hora de aprender rectas en el espacio tridimensional mediante GeoGebra en 3D. La geometría analítica no debe ser tomada con miedo sino como una oportunidad para aprender lo complicado de manera sencilla. El docente debe buscar la manera adecuada para que una clase se vuelva entendible, por eso debe generar un aula donde se socialice y se trabaje de mejor manera.

En las últimas décadas han existido numerosos estudios sobre la enseñanza de la matemática por medio de la visualización para garantizar un mejor aprendizaje de temas que son abstractos y requieren ser llevados a contextos reales, como, por ejemplo: rectas en el espacio pertenecientes a la cátedra de Geometría Analítica. “La utilidad de estos estudios radica en la importancia que tiene la visualización en el aprendizaje matemático y de manera especial en la geometría” (Fernández, Bravo. 2003, p.70). De aquí parte la utilidad de softwares para un mejoramiento del aprendizaje matemático porque esto nos puede llevar a un contexto más real e interactivo, que simples operaciones aritméticas.

Los profesores han hecho de la enseñanza de las matemáticas algo donde solo se use la memoria y esto es debido a que en la actualidad muchos docentes no están familiarizados con la tecnología, por eso los docentes no optan por recurrir a este tipo de recursos, dando como resultado el pronto olvido de este tipo de aprendizaje. Sin embargo, sacándole al estudiante de un aprendizaje tradicional y conectándolo con la tecnología podemos generar interés y autoaprendizaje. Esto se puede lograr utilizando softwares interactivos como GeoGebra, el cual nos permite incluso hacer animaciones con movimiento, donde se puede generar interés por parte del alumnado y así garantizar un resultado óptimo en el aprendizaje de esta asignatura.

1.3 Problema.

Actualmente la asignatura de geometría analítica representa una gran dificultad para estudiantes de tercero de bachillerato de la Unidad Educativa Alicia Losa Meneses, puesto que existen problemas que obligatoriamente necesitan ser graficados, para a través de esto, visualizar y entender mejor los procesos matemáticos que conllevan dichos problemas; esto se debe a que sus contenidos son de difícil interpretación y usando solo procesos algebraicos no permite a los alumnos asimilar conceptos y procesos de forma clara. Las rectas en el espacio tridimensional se abordan en el tercero de bachillerato y los temas que se desarrollan son: ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas, ecuaciones continuas, ecuaciones implícitas, posiciones relativas de dos rectas, posición de rectas respecto de la referencia. La matemática al ser una asignatura abstracta necesita de programas didácticos que ayuden a interpretar y a comprender de mejor manera los conceptos, los procesos, los cálculos y los resultados para alcanzar un aprendizaje significativo, ya que esta materia representa un pilar fundamental para materias como cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo de varias variables entre otros.

La presente investigación gira en torno a la interrogante: ¿Cómo debe elaborarse una propuesta didáctica mediante GeoGebra para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional en el tercero de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Alicia Losa Meneses?

1.4 Justificación.

Las rectas en el espacio tridimensional son temas de geometría analítica fundamentales que se imparten en los últimos años de colegio como preparación básica para el ingreso a las universidades ya que las principales pruebas de admisión contienen temas de geometría analítica en 2D y en 3D. Además, son base para los primeros años en carreras técnicas como: ingenierías, arquitectura, ciencias químicas, etc.; lo que conlleva a que su enseñanza debe ir más allá de lo tradicional. La utilización de un recurso digital didáctico como GeoGebra para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional ayudaría a los estudiantes a mejorar su rendimiento académico, pues según (Puentes, 2019, p.39) “las TIC nos proporcionan múltiples formas de representar situaciones problemáticas que les permite a los estudiantes desarrollar estrategias de resolución de problemas y mejor comprensión de los conceptos matemáticos que están trabajando”.

Gonzales, Gutiérrez y Sandoval (2017) consideran que “el GeoGebra contribuye en muchos aspectos a mejorar las metodologías de enseñanza-aprendizaje y para la solución de problemas académicos proporcionando información valiosa en aspectos gráficos, lo cual genera interés en la aplicación de esta herramienta para la resolución de problemas” (p.104). Este recurso ofrece al alumnado a visualizar e interpretar de una mejor manera los conceptos, procesos, resultados que se imparten en esta asignatura. A menudo los recursos tradicionales utilizados en esta asignatura como la pizarra o los textos del ministerio, no son suficientes para mejorar la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

Las rectas en el espacio se presentan en la vida real y juegan un papel importante ya que llega a desarrollar en el estudiante una inteligencia visual-espacial o una habilidad aritmética-analítica, por lo tanto, el GeoGebra es una herramienta que puede ampliar estas habilidades ya que al constar de gráficas en 3D, expresiones algebraicas y geométricas, los simuladores permiten llevar a contextos más reales los contenidos abstractos que son difíciles de visualizar o imaginar por los estudiantes. Estos simuladores como GeoGebra pueden aumentar la capacidad para razonar, formular y solucionar problemas matemáticos de nuestro entorno y desarrollar las competencias que sean necesarias en la matemática.

1.5 Objetivo General:

Elaborar una propuesta didáctica mediante el uso del GeoGebra para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional para estudiantes del tercero de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Alicia Losa Meneses.

1.5.1 Objetivos Específicos:

Fundamentar teórica los conceptos de Teorías del aprendizaje, Constructivismo, Rol del docente en el constructivismo, Enseñanza de la geometría, Didáctica, Recursos didácticos, Guía didáctica, GeoGebra.

Indagar mediante una entrevista a los docentes, algunos aspectos sobre la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional en el tercero de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Alicia Losa Meneses.

Elaborar actividades con el uso de GeoGebra sobre los seis temas referentes a rectas en el espacio tridimensional para el tercero de Bachillerato General Unificado.

2 Capítulo II. Marco Teórico

Algunos conceptos que fundamentan la presente investigación son los siguientes: Enseñanza, Aprendizaje, Teorías del aprendizaje, Constructivismo, Rol del docente en el constructivismo, Enseñanza de la geometría, Didáctica, Recursos didácticos, Guía didáctica, GeoGebra.

2.1 Enseñanza.

Para Sarmiento Santana (2007) "La enseñanza es una actividad socio comunicativa y cognitiva que dinamiza los aprendizajes significativos en ambientes ricos y complejos, aula virtual, aula global o fuera del aula, síncrona o asíncronamente" (p. 47). Entonces, la enseñanza es la transferencia de conocimientos, habilidades que realiza un individuo a otro mediante un medio comunicativo que le permita al individuo adquirir nueva información para su beneficio. La forma de enseñanza puede ser muy amplia ya que no solo se aprende en un aula de clase, sino que también de manera grupal en pláticas con compañeros, en el diario vivir de cada individuo y esta debe generar un aprendizaje. Sarmiento cita a Zabalza, menciona que para que haya enseñanza esta no está confinada a un aula de clase y tampoco ocurre solo a una interacción entre dos personas, sino que adquiere un sentido didáctico cuando está vinculada al aprendizaje.

2.1.1 La enseñanza en la educación y el docente.

Si hablamos de enseñanza, se debe abordar temas como la enseñanza en la educación y cómo el docente aborda este papel tan importante. El docente al ser el guía de los estudiantes en el aula de clase, debe estar listo y dispuesto a orientar a los estudiantes a un aprendizaje significativo para eso debe tener estrategias de enseñanza que sirvan de ayuda a la hora de la enseñanza de cualquier tema en clase.

Según (Fortoul Ollivier, 2008) "El maestro debe tener un desarrollo cognitivo alto, mismo que le permita contar con las herramientas suficientes para articular en torno a su propia práctica docente estrategias de autoestudio, de resolución de las problemáticas que en ella se presentan y de mejora permanente. Este dominio personal le posibilita además la implementación en el aula de estrategias que coadyuven a la formación de la autonomía en los alumnos" (p. 77). Por lo tanto, el docente debe fomentar en el estudiante el autoaprendizaje para que por su propia cuenta genere un aprendizaje significativo que le ayude a alcanzar sus metas y propósitos al momento de sus estudios.

2.1.1.1 La enseñanza de las matemáticas.

Al momento de abordar la matemática con un mayor grado de dificultad, el docente encargado de impartir esta asignatura debe contar con varias herramientas que le lleven al éxito al momento de enseñar matemáticas. Para Sarmiento Santana (2007) “Si promocionamos el aprendizaje a través de la comprensión del entorno motivando a los niños(as) para que descubran las relaciones existentes entre los elementos de información y luego los abstraemos de ese contexto con actividades y estrategias de enseñanza que procuren o que den importancia al correcto manejo del lenguaje matemático, contribuiríamos a que el manejo de la notación surja desde dentro evitando el uso de métodos memorísticos, no sólo por lo ineficaz que pueden resultar sino por evitar que las Matemáticas carezcan de significado para ellos(as)” (p. 106) . Por lo tanto, al asimilar la matemática con nuestro medio que nos rodea, nuestro entorno personal o el aula de clase generamos en el estudiante una visión más amplia de las matemáticas, como por ejemplo asociar el salón de clases a una figura geométrica o que los estudiantes divisen en el aula de clase donde pueden encontrar rectas o rectas paralelas, generaría en el estudiante una mayor capacidad de retención de conceptos y no solo memorísticos. Para Sarmiento Santana el aprendizaje matemático se desarrolla con el binomio de la percepción y la acción.

2.1.2 La enseñanza y las nuevas tecnologías.

Se ha hablado que la enseñanza es la capacidad que el docente tiene de implementar lo necesario para que sus estudiantes sean capaces de aprender. Actualmente hay muchas formas en que un docente puede destacar al momento de impartir clases a sus alumnos. Para (Williams Bailey et al., 2020) “El rol de experto en instrucción consiste en que el docente aporte todo el conocimiento, imaginación y creatividad posible para hacer el proceso de aprendizaje del alumno efectivo y atractivo. Para lograrlo el experto debe convertirse en un auténtico diseñador de originales experiencias de aprendizaje” (p. 3).

Implementar las TIC´s al plan de estudio no garantiza el éxito del aprendizaje. Según Torres Cañizales y Cobo Beltrán (2017) “el éxito de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC’s) aplicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, depende en gran medida de la manera en la que los profesores las incorporen en el ámbito didáctico” (p. 36), entonces dependerá del docente de cómo incorporar la TIC´s a su material de estudio para que sirva de ayuda a mejor la enseñanza del tema a tratar.

2.2 Aprendizaje

Sobre este proceso existen muchas definiciones y algunos teóricos están en desacuerdo entre ellos, pero trataremos de responder a cuestiones que nos permitan entender cómo las personas aprenden, antes de todo respondamos que es el aprendizaje.

Zapata menciona algunos autores que definen el aprendizaje como:

> Para Bigge es un proceso dinámico dentro del cual el mundo de la comprensión que constantemente se extiende llega a abarcar un mundo psicológico continuamente en expansión significa desarrollo de un sentido de dirección o influencia, que puede emplear cuando se presenta la ocasión y lo considere conveniente todo esto significa que el aprendizaje es un desarrollo de la inteligencia, también menciona a Gagné el cual define al aprendizaje como cambio de la disposición o capacidad humana, con carácter de relativa permanencia y que no es atribuible simplemente al proceso de desarrollo, por otra parte menciona la definición de Schunk el cual define al aprendizaje como la adquisición y modificación de conocimientos, estrategias, habilidades, creencias y actitudes. (Zapata. M, 2015, p. 73)

Estas definiciones mencionadas anteriormente tienen un amplio significado, sintetizando los mencionado anteriormente, sabemos que una persona muestra ciertos rasgos inusuales cuando aprende algo nuevo, sabe cosas que antes no sabía, hacer cosas que salen de lo habitual e incluso se puede observar que tiene actitudes diferentes en su comportamiento.

Según Gagne, R. M., Briggs, L. J., & Wager, W. W. los cambios que tienen las personas cuando han aprendido son:

- Información verbal
- Habilidades intelectuales
- Estrategias cognitivas
- Actitudes
- Habilidades motoras

Aunque el aprendizaje es un proceso que compartimos con otras especies, el aprendizaje puede presentarse de manera intencional o sin intención, por lo cual en ambos casos la diferencia con otras especies es que el ser humano se caracteriza por comprender lo aprendido, nuestra especia trata de darle un significado, para dar uso de la nueva información. Básicamente el aprendizaje es la adquisición de conocimientos pudiendo ser adquiridas de múltiples formas como se menciona anteriormente y este puede ser consciente o inconscientemente.

2.2.1 Aprendizaje intencional.

López menciona en su tesis a Madden el cual explica que “el aprendizaje intencional es búsqueda de metas cognitivas por encima de los puros requisitos de las tareas es lo que se denomina aprendizaje intencional, es decir, tal aprendizaje incluye un proceso de una significación apropiada dentro de los esquemas ya existentes en el sujeto, es por ello que una persona no va a aprender si no tiene esa perspectiva futura influida por el conocimiento aportado por el entorno contextual” (López. V, 1998, p. 99). Por lo tanto, se puede entender que el aprendizaje intencional es cuando el aprendiz dispone de motivos o razones para aprender, empujados por el entorno en el cual se desarrollan, este aprendizaje se puede observar en un aula de clases, donde para que se dé un aprendizaje intencional debe haber tres factores: 1. El aula de clases que es lugar propuesto por la sociedad para la adquisición de conocimiento, 2. El emisor será el profesor el cual impartirá la información. 3. El receptor, es el estudiante el cual recibe información, estos son los factores fundamentales para que se dé el aprendizaje mencionado anteriormente.

2.2.2 Aprendizaje no intencional o aprendizaje casual.

Camacho menciona a Masters, Law y Maxwell los cuales definen al aprendizaje casual como “la forma en la que construimos juicios acerca de la relación entre los estímulos y las acciones que se deben llevar a cabo” (Camacho. P, 2012, p. 10). Este tipo de aprendizaje no necesariamente se encuentra en un aula de clases, se la puede observar en cualquier situación de la vida cotidiana y en cualquier edad, no tiene que ser planificado y no requiere de un objetivo específico, por lo cual el fin de este aprendizaje es de general interés por el entorno en el que se habita más no una utilidad.

2.3 Teorías del Aprendizaje

Ahora abordaremos algunas teorías del aprendizaje:

2.3.1 Tradicionalismo.

El modelo pedagógico tradicional es la forma predominante de enseñanza en escuelas, colegios y universidades, etc. La idea principal de este modelo es que el estudiante sea un receptor pasivo de la información, mientras que el docente se convierte simple transmisor de información, autores como Flores Rafael menciona en su libro que “el modelo pedagógico tradicionalista se enfatiza en la formación del carácter de los estudiantes para moldear, a través de la voluntad, la virtud y el rigor de la disciplina, el ideal humanístico y ético que recoge la tradición metafísico - religioso medieval" (Flores. R, 1994, p. 176). Hoy en día el crecimiento político, económico, religioso y educativo exigen mejor preparación a los docentes ya que la sociedad se ha visto en la necesidad de mejorar la calidad de la educación con la finalidad preparar mejor a los jóvenes para los retos que se vendrán en el futuro y tener mejores profesionales que afronten los retos y den solución a problemas sociales económicos, políticos, educativos, administrativos para un óptimo desarrollo de la sociedad. Se ha visto en la necesidad de mejor las estrategias de enseñanza buscando nuevos caminos, nuevas alternativas de enseñanza, las cuales deben salir del bucle del tradicionalismo, sin descartar por completo, con el fin de que todos los estudiantes accedan al conocimiento de una u otra forma.

2.3.2 Conductismo.

Según Pradas (2018) "el objeto de estudio no es la conciencia, sino las relaciones que se forman entre los estímulos y las respuestas que dan origen a nuevas conductas y comportamientos observables" (p. 14). Entonces, el conductismo se centrará en llevar un proceso de aprendizaje a través de estímulos y así obtener respuestas positivas por parte del estudiante. Además, Segura (2005) menciona que "el conductismo, desde el punto de vista del proceso de enseñanza y aprendizaje, responde a un momento histórico determinado que requería la memorización de los estudiantes de conocimiento científico; por esa razón, los estudiantes eran simples receptores de información" (p. 13). En este caso la enseñanza no está enfocada a que el estudiante sea un ser pensante sino a que el estudiante sea un receptor y repetidor de información.

En siglo XXI la pedagogía conductista, ya no está presente en algunas aulas de clase ya que esta teoría precisa el comportamiento o conducta del estudiante.

Para Limongi Izaguirre (2017) "El conductismo plantea la enseñanza como un programa de refuerzos que modifican la conducta del alumno. Se centra en el estudio de la conducta observable para controlarla y predecir. Su objetivo es conseguir una conducta determinada. Si el alumno responde correctamente se ofrecen estímulos positivos. Si el alumno no responde acorde al programa, se eliminan los estímulos positivos o se ofrecen estímulos negativos. Esta secuencia se repite el número de veces que sea necesario hasta que todas las respuestas estén asimiladas" (p. 8). Por lo tanto, el docente tiene la completa autoridad de regañar al estudiante si éste contesta mal una pregunta o hace caso omiso a las reglas impuestas en el aula de clase; el estímulo se aplica hasta que este haya comprendido el tema a tratar y mejore su comportamiento. Cabe recalcar que este modelo pedagógico busca también la repetición de preguntas y respuestas las veces que sean necesarias para generar en el estudiante una enseñanza-aprendizaje repetitiva y memorística.

A más de eso Limongi Izaguirre (2017) menciona que “mediante la aplicación de una prueba se verifica el aprendizaje y si el alumno tiene éxito en la prueba, entonces puede pasar al siguiente nivel. Si el alumno no pasa la prueba, debe quedarse en ese nivel y reforzar los contenidos instruccionales hasta que logre pasar la prueba” (p. 10). Una de las formas más conocidas de conductismo aplicadas en nuestra educación es cuando el estudiante recibe una calificación después de rendir una prueba o examen, recibirá una buena calificación si estudio para su test o reprobará sino dedico tiempo a aprender y memorizar el tema a evaluar.

2.3.2.1 El conductismo y las Tics.

Según (Izurieta, 2015) “Cualquier instrumento cumple la función que la metodología le asigna. Esto también es aplicable a las TIC. Si el docente desea aplicar metodologías conductistas, las TIC son perfectamente funcionales”. Entonces el uso de las TIC ´s en la pedagogía conductista encaja a la perfección ya que al momento de usar algún software educativo como: YouTube, ¡Kahoot!, CmapTools, etc. Estos vienen establecidos con patrones que permiten al estudiante aprender por medio de ejercicios de repetición por ejemplo si usamos un software para aprender un tema en específico el estudiante podría repetir las veces que desee la pregunta o un video hasta llegar a memorizar o entender el concepto deseado.

2.3.2.2 El conductismo y la matemática.

Según Gallo Águila (2021) “El conductismo es una corriente de la psicología que defiende el empleo de procedimientos estrictamente experimentales, para estudiar el comportamiento observable (la conducta) considerando al entorno como un conjunto de estímulos-respuesta” (p. 30). Los docentes en la matemática utilizan un enfoque conductista, ya que por medio de la repetición y la formulación de pasos buscan que el estudiante memorice como resolver un ejercicio, a más de eso si el estudiante falla en su resolución o falla algún paso o proceso del ejercicio, el docente repite hasta que el estudiante grabe la correspondiente formulación del problema y su debida resolución.

2.3.3 Cognitivismo.

El cognitivismo parte de una teoría psicológica cuyo principal objetivo es el estudio de la mente y cómo ésta procesa la información, interpreta y almacena en la memoria. Llevado al ámbito educativo mencionaremos como algunos autores definen a la teoría del aprendizaje cognitivista.

Para Bruner (1960) “El propósito de la educación no es impartir conocimiento, sino facilitar el pensamiento del niño y sus habilidades de resolución de problemas que luego pueden transferirse a una variedad de situaciones. Específicamente, la educación debería desarrollar el pensamiento simbólico en los niños” (p. 6). Según Christian Rossell (2016) “Para Jean Piaget la teoría cognitiva trata del aprendizaje que posee el individuo o ser humano a través del tiempo mediante la práctica, o interacción con los demás seres de su misma u otra especie. Es la teoría que nos indica que existen cambios cualitativos en el modo de pensar de los niños, que se desarrollan en una serie de cuatro etapas entre la infancia y la adolescencia”. Por lo tanto, esta teoría del aprendizaje cognitivista resulta muy útil a la hora de enseñar rectas en el espacio tridimensional, ya que esta teoría se centra en los procesos de aprendizaje y cómo el estudiante lo asimila y lo almacena en su memoria, esta teoría no se centra en los resultados, sino más bien en cómo almacena la información en su memoria y lo interpreta para poder llegar a un resultado óptimo del tema de estudio.

2.3.4 Constructivismo

El constructivismo es una corriente pedagógica que da al estudiante todas las herramientas para que él construya su propio conocimiento. Por lo tanto “El constructivismo se plantea el desarrollo personal haciendo énfasis en la actividad mental constructiva, actividad auto constructiva del sujeto para lo cual insiste en lograr un aprendizaje significativo mediante la necesaria creación de situaciones de aprendizaje por el maestro, que le permiten a los alumnos una actividad mental y también social y afectiva que favorece su desarrollo” Ferreiro (2008, p. 9), es decir, que el profesor se transformar en un guía capaz de generar y crear en su aula un ambiente óptimo de aprendizaje, además de brindar las pautas que necesita el estudiante para que genere por su propia instrucción, que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre docente-estudiante.

2.4 Rol del docente en el constructivismo

Desde la perspectiva constructivista, “el docente emplea técnicas a manera de estrategias didácticas con la finalidad de brindar apoyo a los estudiantes en su autonomía y organización de aprendizaje, asimismo, la funcionalidad y el resultado de estas estrategias se convierten en técnicas de aprendizaje que son apropiadas por los estudiantes para dar cumplimiento a diferentes tareas y objetivos propios” (Berni y Olivero, 2019, p. 10). Entonces el docente deja de ser el centro principal del proceso de aprendizaje, su papel es de moderador, coordinador y facilitador, debe fomentar en los educandos el interés por el aprendizaje por medio de didácticas que vaya acorde a cada estudiante, además debe estimular a los alumnos a tomar conciencia sobre el proceso de aprendizaje propio de cada uno de ellos, también especificar con claridad el propósito de la clase y explicar claramente las tareas a realizar.

2.5 Enseñanza de la Geometría.

La geometría es una de las ramas más antiguas de la matemática. Fue la primera en desarrollarse como un cuerpo teórico ordenado, con axiomas, teoremas, y demostraciones; este desarrollo fue imitado luego por el resto de las matemáticas. "La geometría forma parte de nuestro lenguaje cotidiano, tiene importantes aplicaciones en problemas de la vida real, se usa en todas las ramas de la matemática, sirve de base para comprender conceptos de matemática avanzada y de otras ciencias, es un medio para desarrollar la percepción espacial y la visualización." (Bressan, Bogisic y Crego 2006, p. 47). Por ende, la geometría juega un rol importante en la vida diaria de todo estudiante, ya que se debe tomar en cuenta que en todo lo que percibimos podemos encontrar muestras de geometría, como, por ejemplo: encontrar el perímetro, el área o la superficie de un terreno, la altura de una casa, el volumen o la capacidad de un estadio de fútbol, entre otros. No hay que olvidar que la enseñanza de la geometría juega un papel importante en la vida estudiantil ya que existen asignaturas con un grado mayor de complejidad siendo esta necesaria como base para dichas asignaturas.

2.6 Didáctica.

"La Didáctica es un conjunto de métodos, técnicas o procedimientos que procuran guiar, orientar, dirigir e instrumentar, con eficacia el proceso de aprendizaje donde esté presente como categoría básica" (Penteado, 1982, p. 21). Por lo tanto, la didáctica nos permite crear, diseñar y desarrollar técnicas que faciliten la enseñanza del aprendizaje y que ayuden al estudiante a asimilar de mejor manera temas y conceptos de difícil comprensión, para que tenga una mayor capacidad de entendimiento a la hora de aprender un tema complejo.

2.7 Recursos didácticos.

"El material didáctico son herramientas de aprendizaje que apoyan al estudiante en lo emocional, físico, intelectual, y socialmente es decir auxilian en la búsqueda de su desarrollo integral. Además, son medios para estimular el aprendizaje, desarrollando la capacidad creativa" (Cedeño, M. 2004, p. 47). Por otro lado, según Valdez, menciona a Montessori, quién define los materiales didácticos o materiales de enseñanza como, "materiales para el desarrollo del proceso enseñanza- aprendizaje. Cada uno de los materiales es, de hecho, una serie de objetos con los que el estudiante ejecuta una parte definida de trabajo, que ayuda al desarrollo intelectual, de análisis y de su propia personalidad" (Valdez. 2003, p 31). Por lo tanto, en la actualidad el uso de los recursos didácticos va tomando fuerza hoy en día, hasta el punto de ser necesario y casi indispensable el uso de materiales didácticos en los centros educativos para la enseñanza de asignaturas que pueden ser un tanto difícil para los estudiantes como: matemáticas, estadística, cálculo, geometría, etc. Con lo que el uso frecuente de material didáctico en el aula de clases, estimula el aprendizaje, desarrolla la capacidad creativa, fomenta la curiosidad, crea interés por la asignatura, etc.

2.8 Guía didáctica.

A continuación, se dará a conocer como algunos autores definen a una guía didáctica:

Para García Aretio (2002, p. 241) La Guía Didáctica es "el documento que orienta el estudio, acercando a los procesos cognitivos del alumno el material didáctico, con el fin de que pueda trabajarlos de manera autónoma".

Según Feijoo, (2004) en su estudio menciona definiciones de algunos autores sobre guía didáctica:

> "Merce la define como la herramienta que sirve para edificar una relación entre el profesor y los alumnos, Castillo complementa la definición anterior al afirmar que la Guía Didáctica es una comunicación intencional del profesor con el alumno sobre los pormenores del estudio de la asignatura y del texto base y por último, Mediano señala que la Guía didáctica constituye un instrumento fundamental para la organización del trabajo del alumno y su objetivo es recoger todas las orientaciones necesarias que le permitan al estudiante integrar los elementos didácticos para el estudio de la asignatura" (p. 182).

Por lo tanto, una guía didáctica a la hora de enseñar se convierte en un instrumento valioso para el docente ya que en ella está organizado los objetivos, las actividades, los recursos que se utilizará a la hora de enseñar, además están los contenidos que se impartirán en el aula durante el periodo escolar, la metodología con la que se va a trabajar, el método de evaluación, etc. Por consiguiente, el rol de la guía didáctica es facilitar la práctica docente diaria, para responder las inquietudes, necesidades y curiosidades de los alumnos para poder acercarnos a un aprendizaje significativo.

2.9 GeoGebra.

GeoGebra es un software matemático creado por el matemático Markus Hohenwarter como tesis de su maestría en el año 2002 en la Universidad de Salzburgo, Austria. El software fue creado para llevar cálculos simbólicos a cálculos más explícitos a través de gráficas, animaciones, simulaciones, etc. Este software presenta una amplia gama de comandos los cuales nos permiten llevar cálculos simbólicos a sus respectivas representaciones gráficas o incluso llevar estos cálculos a animación en 2D y 3D para poder interpretar los resultados, ver cómo se relaciona con nuestro entorno y darles una respectiva utilidad. Hoy en día GeoGebra ya no solo es considerado como un software si no, como un recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje, de los docentes-estudiantes.

2.9.1 GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas.

La introducción de un software en este caso GeoGebra en una clase de matemáticas incrementa las posibilidades de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje puesto resulta muy beneficioso para ambas partes alumno-profesor, ya que por medio de este software podemos tratar temas abstractos en matemáticas y llevarlos metafóricamente a que tengan vida, generando en el estudiante curiosidad por al contenido que alguna vez fue abstracto y fomentando el autoaprendizaje.

“Diversos autores afirman que la introducción y desarrollo de este asistente matemático en las aulas potencia el cambio de un enfoque estático de la enseñanza a un enfoque dinámico caracterizado por como aquel que proporciona un cambio de visión del tratamiento de la geometría de forma estática, como tradicionalmente se ha venido haciendo, a una en la que las figuras adquieren dinamismo y no sólo puedan moverse en el plano o unas sobre otras, sino que se transformen ellas mismas a partir del movimiento de sus puntos o lados, implica un cambio en el trabajo de los maestros y los alumnos”.(Yasser. M, 2021, p. 2)

Castellanos, Castellanos, Llivina y Silverio, mencionan que la introducción de un software en una clase de matemáticas puede:

a) “Promover el desarrollo integral de la personalidad del educando, es decir, activar la apropiación de conocimientos, destrezas y capacidades intelectuales en estrecha armonía con la formación de sentimientos, motivaciones, cualidades, valores, convicciones e ideales. En otras palabras, el aprendizaje desarrollador tendría que garantizar la unidad y equilibrio de lo cognitivo y lo afectivo valorativo en el desarrollo y crecimiento personal de los aprendices.

b) Potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y a la autorregulación, así como el desarrollo en el sujeto de la capacidad de conocer, controlar y transformar creativamente su propia persona y su medio.

c) Desarrollar la capacidad para realizar aprendizajes a lo largo de la vida, a partir del dominio de las habilidades, estrategias y motivaciones para aprender a aprender, y de la necesidad de una autoeducación constante" (Castellanos, Castellanos, Llivina y Silverio, 2001, p. 85)

Cada vez la enseñanza de las matemáticas va teniendo un enfoque diferente en comparación con años pasados, donde la enseñanza de las matemáticas se centraba en lo repetitivo y memorístico, sin tener en cuenta el razonamiento que implica un proceso matemático, con GeoGebra se puede alcanzar este objetivo, ya que sus comandos permiten graficar, animar, visualizar un proceso matemático.

3 Capítulo III. Metodología

3.1 Descripción de la metodología.

La investigación tiene un enfoque cualitativo que es el “procedimiento metodológico que utiliza palabras, textos, discursos, dibujos, gráficos e imágenes, la investigación cualitativa estudia diferentes objetos para comprender la vida social del sujeto a través de los significados desarrollados por éste” (Navarrete, 2004, p. 278). Se usará esta metodología con el fin de recabar información que nos brinde apoyo para nuestra investigación.

La técnica a utilizar es la entrevista. El objetivo es recolectar información que nos ayude con nuestra propuesta, para eso, participaran dos personas, la una adoptara el rol de entrevistado y la otra persona el de entrevistador, su principal funcion es obtener opiniones personales con respecto a un fin determinado, Folgueiras (2018), por ende, la entrevista es de gran utilidad para recoger datos cualitativos, que sean de ayuda a nuestra investigación.

El instrumento de recolección de información a utilizar será un cuestionario. El cuestionario brindara la ayuda necesaria al momento de recabar la información, ya que es herramienta de la cual se base un investigador para el desarrollo del proyecto de investigación. Su principal finalidad será el extraer los datos necesarios que nos brinde el entrevistado para nuestro proyecto.

3.2 Población y muestra.

La población se refiere al conjunto de individuos que participaran y nos ayudaran en nuestra investigación, para deducir conclusiones específicas y necesarias que necesite nuestro análisis de investigación, López y Fachelli (2015). En este caso nuestra población son los tres docentes que dictan la asignatura de matemáticas en el tercero de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Alicia Losa Meneses.

Una muestra estadística parte de la selección aleatoria de la población que participa en la investigación, su objetivo principal es recabar la información necesaria que nos pueda brindar la población. En la presente investigación no se realiza un muestreo puesto que se toma el total de la población para el estudio, que son los tres docentes que dictan la asignatura de matemáticas en el tercero de BGU.

3.3 Resultados obtenidos.

Se realizó una entrevista y para ello se elaboró un cuestionario de preguntas (Anexo 1.). La entrevista fue realizada a los tres docentes que dictan la asignatura de matemáticas en el tercero de BGU de la Unidad Educativa Unidad Educativa Alicia Losa Meneses, donde se obtuvieron los siguientes resultados de acuerdo a cada pregunta.

Pregunta 1. ¿Cuánto tiempo lleva enseñando matemáticas en su vida profesional?

Tabla 1.

Experiencia laboral.

DOCENTES	RESPUESTAS
Docente A	En mi vida profesional llevo 28 años enseñando matemáticas.
Docente B	Aproximadamente llevo 10 años enseñando matemáticas.
Docente C	En mi vida profesional llevo enseñando matemáticas 33 años.

Análisis de las respuestas: Se evidencia que los docentes entrevistados tienen experiencia en la docencia, pues todos llevan más de 10 años trabajando como profesores de matemáticas.

Pregunta 2. ¿Cuánto tiempo lleva enseñando matemáticas en tercero de bachillerato?

Tabla 2.

Experiencia laboral en Matemáticas de tercero de bachillerato.

DOCENTES	RESPUESTAS
Docente A	Si, antes enseñaba en la especialidad de físico matemática durante 6 años.
Docente B	En tercero de bachillerato he tenido la oportunidad de enseñar 3 años que se van a completar ahora.
Docente C	En tercero de bachillerato llevo enseñando matemáticas 20 años.

Análisis de las respuestas: Los docentes entrevistados tienen experiencia en la enseñanza, pues llevan más de tres años como profesores en matemáticas de 3ro de BGU.

Pregunta 3. ¿Qué recursos ha utilizado para la enseñanza de las matemáticas?

Tabla 3.

Recursos utilizados en la enseñanza de matemáticas.

DOCENTES	RESPUESTAS
Docente A	Eh utilizado los proyectores, actualmente se usa las apps y programas en línea.
Docente B	Los recursos que he usado son infografías, algunos programas en línea pizarra y marcador.
Docente C	El principal recurso didáctico que he usado es el pizarrón, hojas de problemas, hojas de ejercicios y GeoGebra.

Análisis de las respuestas: Para la enseñanza de las matemáticas, los recursos que más utilizan los docentes son: el pizarrón, los marcadores y programas en línea.

Pregunta 4. ¿Ha escuchado sobre los recursos didácticos digitales? ¿Cuáles?

Tabla 4.

Recursos digitales conocidos por los docentes.

DOCENTES	RESPUESTAS
Docente A	Si, hay varios recursos entre ellos podemos encontrar el GeoGebra, también hay programas para dibujos técnicos y dibujos geométricos.
Docente B	Si, escuchado sobre recursos didácticos digitales conozco algunos: GeoGebra, Wimplot, Match Editor, también Symbolab y otras como el Camba, el Kahoot, Desmos que se usa para hacer pruebas digitales.

Docente C	Si, lo que conozco es YouTube, la plataforma del colegio Runa chay y GeoGebra.

Análisis de las respuestas: Se evidencia que los docentes entrevistados conocen como mínimo 2 recursos digitales para la enseñanza de las matemáticas.

Pregunta 5. ¿Conoce usted el software GeoGebra?

Tabla 5.

Ha escuchado sobre el GeoGebra.

DOCENTES	RESPUESTAS
Docente A	Si, conozco el GeoGebra es software que nos ayuda principalmente en la geometría, dibujo técnico.
Docente B	Si, conozco el software GeoGebra, antes había que descargar ahora lo encontramos en línea. Su funcion principalmente es para geometría
Docente C	Si, conozco y he manejado hace 10 años, su principal función es para el uso de las matemáticas.

Análisis de las respuestas: Se evidencia que los docentes entrevistados conocen sobre el software GeoGebra y su principal funcion en la enseñanza de las matemáticas.

Pregunta 6. ¿Ha usado GeoGebra para impartir sus clases de geometría?

Tabla 6.

El uso de GeoGebra para clases de geometría.

DOCENTES	RESPUESTAS
Docente A	No, para este caso, el GeoGebra es un recurso digital que necesita que todos los instrumentos electrónicos están en óptimas condiciones.

Docente B	Si un poco, para graficar funciones y algunas figuras geométricas.
Docente C	Un poco, solo para graficar funciones.

Análisis de las respuestas: Se pudo constatar que al menos dos docentes entrevistados han utilizado el GeoGebra para impartir sus clases siendo esta la de funciones algebraicas.

Pregunta 7. ¿Cree usted que la enseñanza del tema rectas en el espacio tridimensional mediante el software GeoGebra mejoraría el conocimiento en los estudiantes?

Tabla 7.

Importancia del GeoGebra para mejor el conocimiento de los estudiantes

DOCENTES	**RESPUESTAS**
Docente A	Si, mejoraría el conocimiento del tema rectas en espacio tridimensional puesto que el software GeoGebra permite graficar en 3D.
Docente B	Si, ayudaría a mejor el conocimiento puesto que GeoGebra ayuda a visualizar rectas y objetos y planos en 3D, etc.
Docente C	No, porque no se tiene el conocimiento necesario en el uso del GeoGebra en 3 dimensiones.

Análisis de las respuestas: Se llego a verificar que los docentes entrevistados dos concordaron que el uso del GeoGebra ayuda a mejor el conocimiento en los estudiantes en el tema rectas en el espacio tridimensional.

Pregunta 8. ¿Le gustaría contar con una guía didáctica para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional mediante el software GeoGebra?

Tabla 8.

Guía didáctica para la enseñanza de rectas en el espacio mediante GeoGebra.

DOCENTES	**RESPUESTAS**

Docente A	Si, sería interesante porque sería un apoyo para el docente.
Docente B	Claro, sería un gran apoyo para el docente.
Docente C	Si, sería de gran ayuda para refuerzo del maestro.

Análisis de las respuestas: Se evidencia que los docentes entrevistados les gustaría contar con una guía didáctica para refuerzo en las clases de geometría en el tema rectas en el espacio tridimensional.

3.4 Conclusiones de la entrevista.

Se puede concluir de la entrevista, que los docentes tienen experiencia en el ámbito educativo, contando con una experiencia de más de 10 años y además llevan más de tres años como docentes de matemáticas de 3ro de BGU, por lo que tienen un amplio conocimiento de cómo llevar una clase de matemáticas utilizando recursos tangibles como: pizarrón, marcadores, textos, además del uso de recursos digitales como: plataformas virtuales, plataformas interactivas, softwares matemáticos, etc.

Por lo que, los docentes entrevistados tienden a escoger el software GeoGebra, por ser un software de fácil manejo el cual les permite dinamizar sus clases principalmente en el área de geometría, además este software nos permite realizar graficas en tres dimensiones lo que facilitaría la enseñanza del tema rectas en el espacio tridimensional, por lo que los docentes creen que sería conveniente apoyarse en una guía didáctica para la enseñanza de dicho tema.

4 Capítulo IV. Propuesta.

4.1 Descripción de la propuesta.

En la siguiente propuesta **“**GeoGebra en 3D como recurso didáctico para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional para tercero de Bachillerato General Unificado” se trabaja con la destreza con criterio de desempeño “M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3” (Ministerio de Educación, 2016); la misma que es tomada del Currículo Ecuatoriano 2016. La propuesta se trabaja mediante una guía didáctica, la cual consta con: tema, introducción, objetivos, destrezas, el ciclo de aprendizaje y evaluación. Es importante indicar que la propuesta esta dirigida a la Unidad Educativa Fiscomisional Alicia Loza Meneses, por lo que se adaptó la estrategia didáctica del ciclo de aprendizaje (anticipación, construcción, consolidación), recomendado por el Ministerio de Educación del Ecuador.

La guía didáctica tiene la siguiente estructura:

1.Tema: En cada inicio de guía, se encontrará sobre que tarta clase a impartir.

2.Introducción: Se podrá visualizar sobre que trata cada guía.

3.Objetivos: Lo que se pretende alcanzar al terminar la guía.

4. Destrezas: Habilidad que desarrollara el estudiante al terminar la guía.

5.Anticipación: Conocimientos previos del estudiante.

6.Construcción: Elaboración de problemas o ejercicios que ayuden al aprendizaje del estudiante.

7.Consolidación: Fortalecimiento y solides el tema visto en la guía.

8.Evaluación: Poner en uso el conocimiento aprendido para resolverlo en la práctica.

4.2 Presentación de la propuesta.

En la propuesta **“**GeoGebra en 3D como recurso didáctico para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional para tercero de Bachillerato General Unificado”, se elaboraron seis guías didácticas, que se presentan a continuación:

Universidad de Cuenca

Guía didáctica para la enseñanza de rectas en el espacio con GeoGebra

Brian Bermeo

Diego Yanza

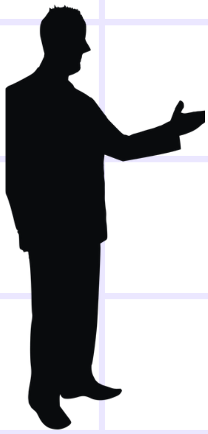
ENSEÑANZA DE RECTAS EN EL ESPACIO CON GEOGEBRA

Índice de contenidos

Guía 1

COMANDOS BÁSICOS EN GEOGEBRA PARA GRAFICAR RECTAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Introducción:



En el siguiente guía se trabaja los comandos básicos que necesita el docente para trabajar los temas de rectas en el espacio tridimensional para tercero de bachillerato por medio del software GeoGebra. Para obtener una clase con resultados favorables, tanto para del docente como para el estudiante, se debe llevar a cabo una planificación la cual necesariamente debe tener un ciclo de aprendizaje, por lo tanto, nos basaremos en anticipación, construcción y consolidación.

Objetivo:

·Aprender los comandos básicos de GeoGebra para gráficas de rectas en el espacio tridimensional.

M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3.

40 MIN

Anticipación

El docente realizara preguntas abiertas a los estudiantes (10min):

1. ¿Qué es una recta?

Sol. La recta es un elemento unidimensional en geometría que se define como una serie infinita de puntos que mantiene una sola dirección, es decir, no presenta curvas.

2. ¿Qué es un punto?

Sol. Un punto se define como una ubicación en cualquier espacio y se representa como (.). No tiene dimensión, longitud, área, volumen, ni otro ángulo dimensional.

3. ¿Qué es un segmento?

Sol. El segmento es un fragmento de la recta que está comprendido entre dos puntos, llamados puntos extremos o finales.

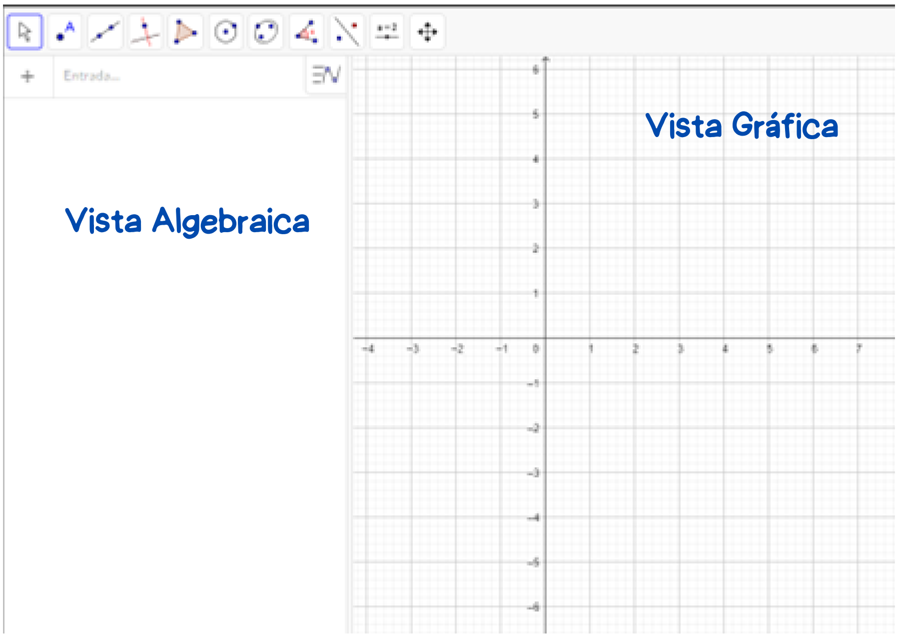
Recuerda:
También puedes trabajar con GeoGebra en línea.

Construcción

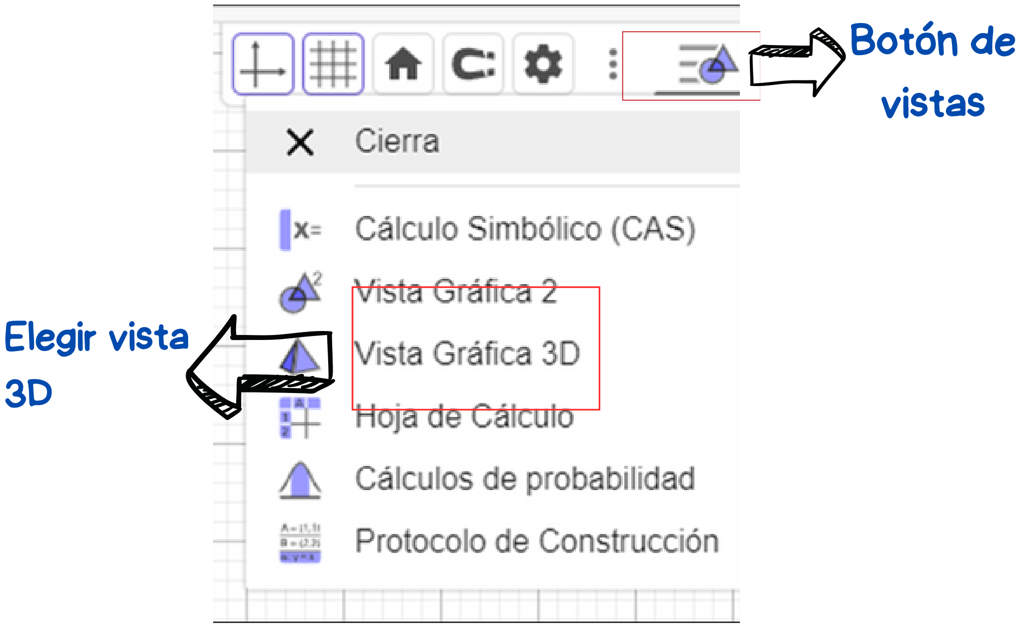
A continuación, se plantean actividades para conocer los comandos del GeoGebra (20min).

1.Abrimos GEOGEBRA.

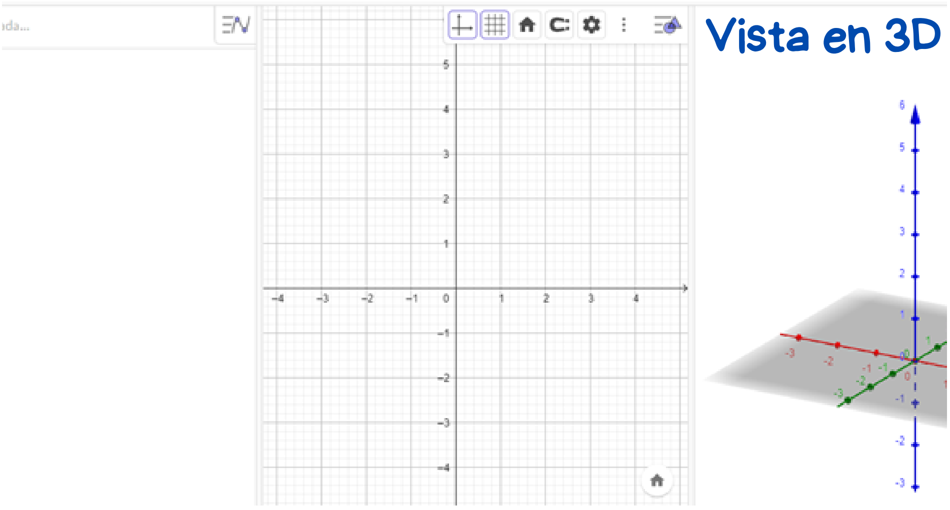
2.Una vez ingresado al GeoGebra observamos 2 pantallas, la una es la vista gráfica y la otra es la vista algebraica.



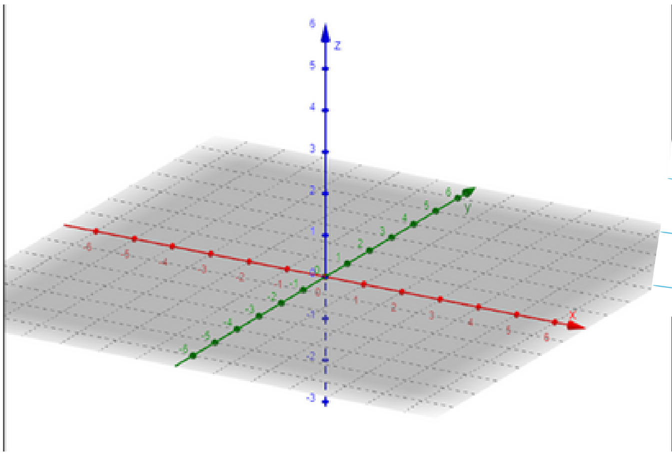
3.Una vez en la pantalla principal, nos dirigimos al icono botón de vistas y elegimos la opción vista gráfica en 3D



4.Una vez ingresado en vista grafica 3D observamos tres pantallas, la vista algebraica, la vista en 2D y la vista en 3D como se puede observar en la siguiente imagen, opcional se puede eliminar la vista en 2D para trabajar solo con la vista algebraica y la 3D.



5.En la vista gráfica 3D observamos que nos aparecen tres ejes: Verde (eje y), Rojo (eje x), Azul (eje z).

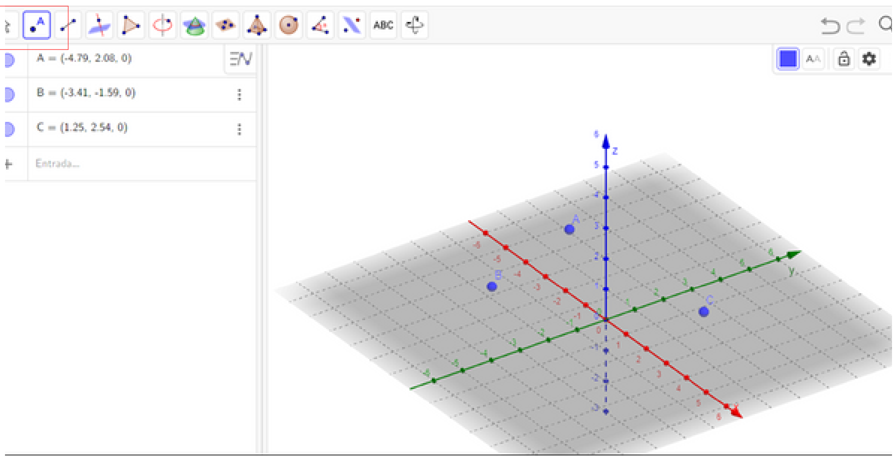


¡Sabias que! GeoGebra es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo.

A Continuación, describiremos algunos comandos necesarios para graficar rectas en el espacio tridimensional:

Botón Punto:

Este comando nos da una ubicación en el espacio con sus respectivas coordenadas.

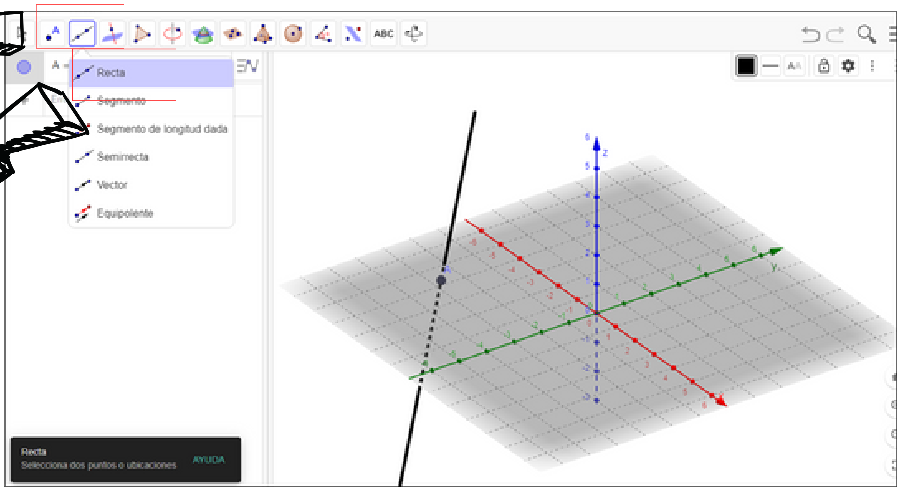


Recta: Este comando permite crear una recta que pasa por un punto indicado.

Elegimos el segundo Botón a lado de punto, después, opción recta.

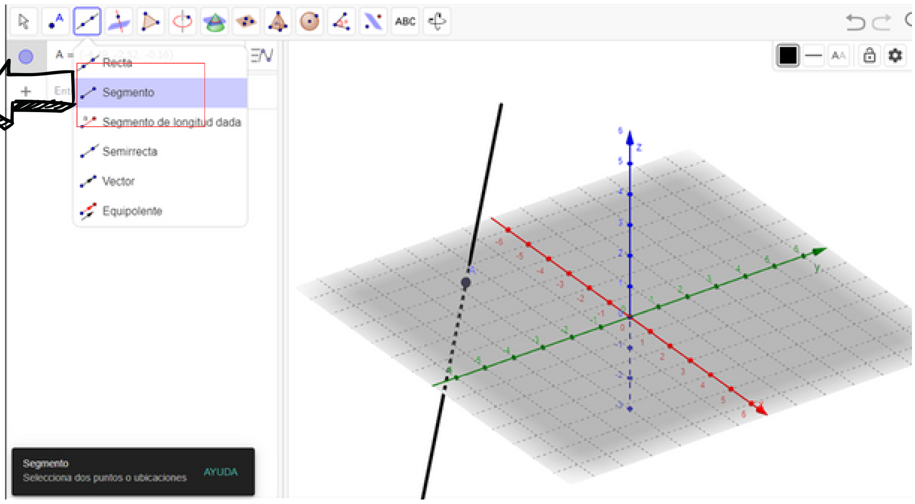
Botón 2

Opción Recta

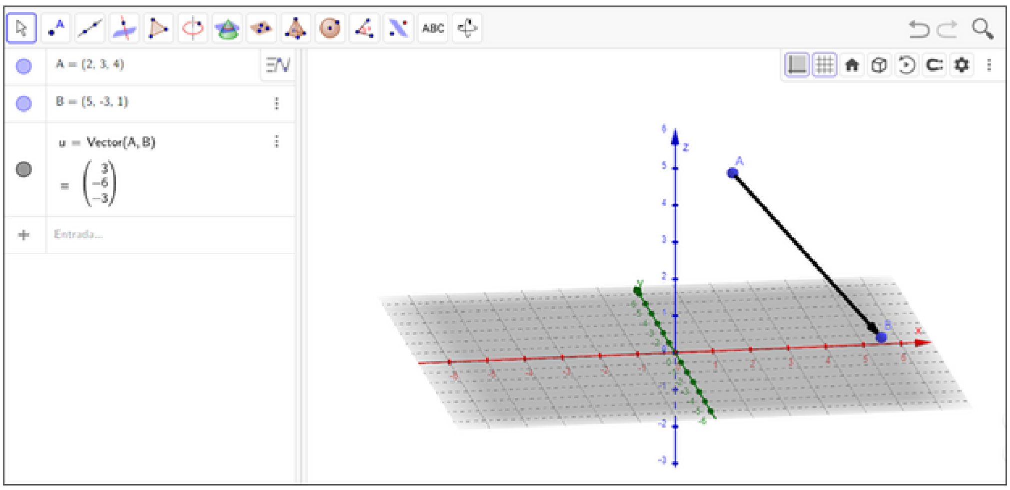


Segmento: Este comando permite crear un segmento con la longitud indicada a partir de 2 puntos dados.

Opción Segmento



Vector: Crea un vector dado 2 puntos.



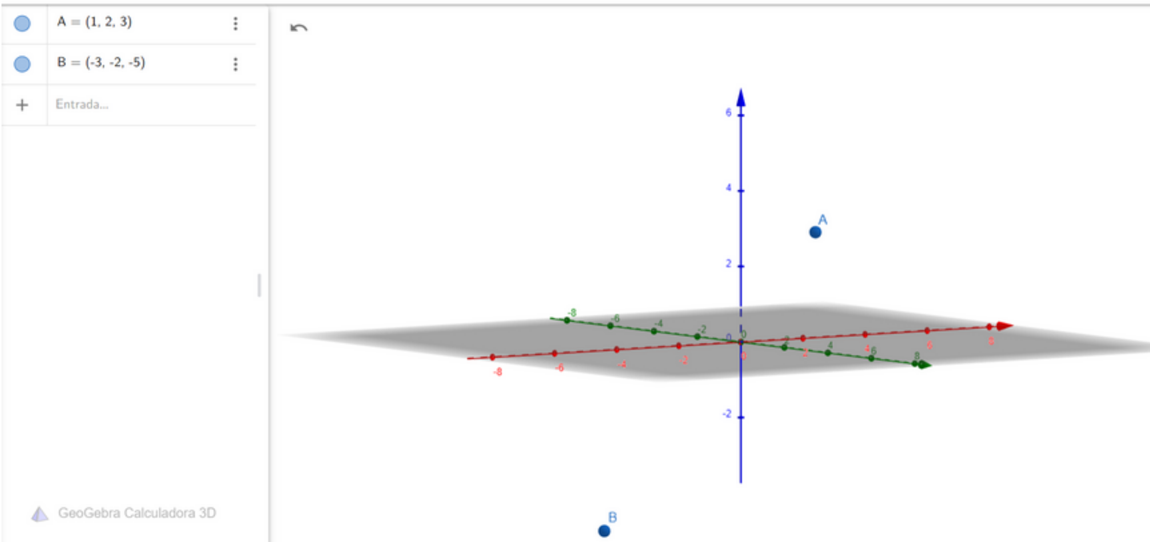
Consolidación

Para reforzar el conocimiento, el docente enviará los siguientes ejercicios a sus estudiantes (10min):

El estudiante deberá graficar los siguiente:

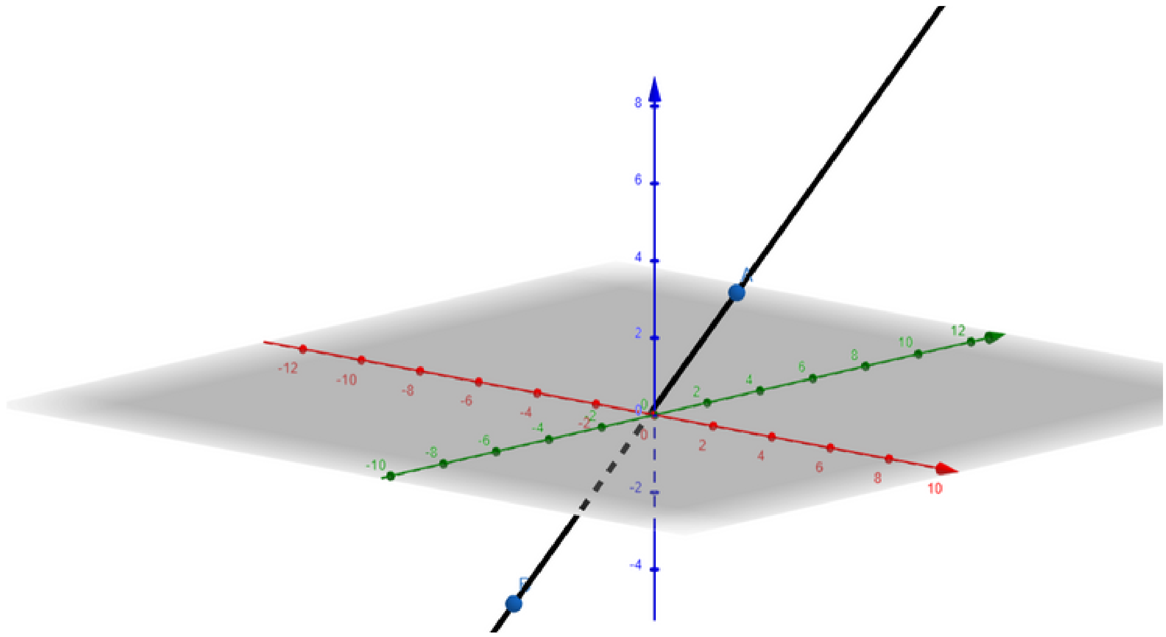
1.Graficar los puntos A (1,2,3) y B (-3,-2-,5).

Sol.



2. Graficar la recta entre los puntos A y B.

Sol.



Evaluación

El docente enviara al estudiante tarea para su casa.

1. ¿Cómo podemos construir una recta en GeoGebra?

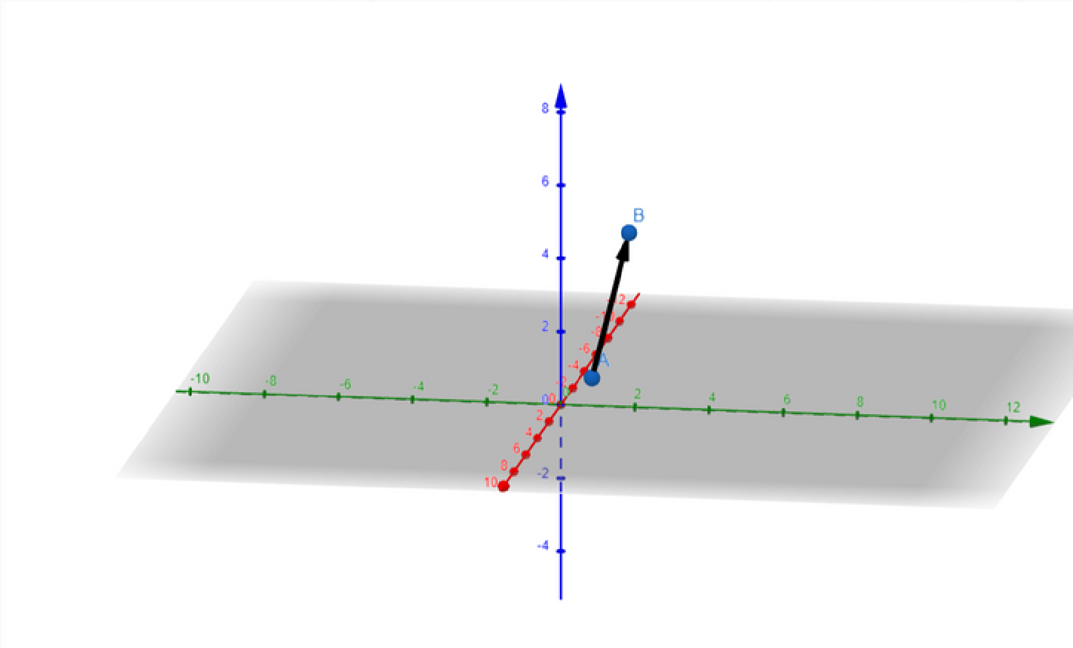
Sol. Para construir una recta en el plano se selecciona en la barra de herramientas la opción línea recta.

2. ¿Cómo podemos graficar un vector en el GeoGebra?

Sol. Para construir un vector en el plano se selecciona en la barra de herramientas la opción vector.

3. Graficar un vector con los puntos (1,1,1) y el punto (1,2,5).

Sol.



Guía 2

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Introducción:

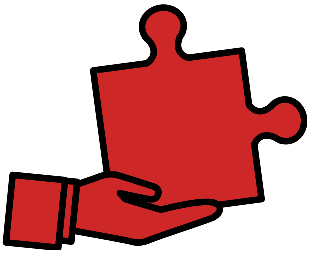
En esta guía 2 se muestra una alternativa paso a paso como se puede impartir la clase de ecuación vectorial de la recta en tres dimensiones por medio del software GeoGebra. Es necesario conocer los comandos de GeoGebra para agilizar el desarrollo de la clase.

Objetivo:

Reconocer la ecuación de la recta en su forma vectorial utilizando GEOGEBRA.

M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3.

40 MIN



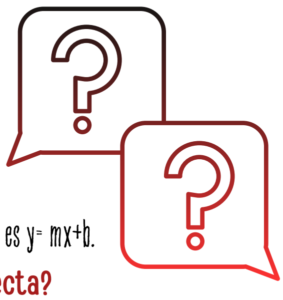
Anticipación

El docente puede realizar al estudiante una lluvia de ideas o preguntas abiertas (10 minutos):

LLuvia de Ideas:

- Para esta actividad el docente formara grupos de 5 estudiantes los cuales analizarán las preguntas y cada grupo obligatoriamente tendrá que dar ideas, luego de las ideas propuestas por el estudiante, el docente construirá un mapa conceptual en el pizarrón con las ideas de los estudiantes, para así recordar conceptos básicos que se necesitará para reconocer y construir una ecuación vectorial en el espacio 3D.

Preguntas abiertas:

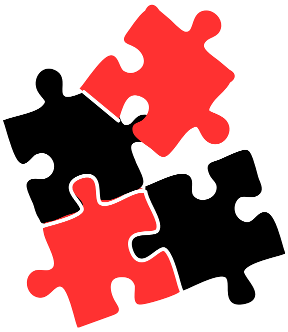


- ¿Qué se necesita para construir una recta?

  Sol. Se necesita como mínimo 2 puntos y después dibujarla.
- ¿Una recta puede tener una ecuación?

  Sol. Efectivamente, una recta puede ser expresada mediante una ecuación y las más común es y= mx+b.
- ¿Puede haber distintas formas de escribir la ecuación de una recta?

  Sol. Claro que si como por ejemplo la ecuación vectorial, paramétrica continua, punto pendiente explicita, general.



Construcción

Luego de haber dado la anticipación (conocimientos previos) el docente comenzara definiendo la ecuación vectorial de la recta y expresión matemática. (20 minutos)

A. ¿Qué es la ecuación vectorial de la recta?

Definimos a la ecuación vectorial de la recta como un conjunto de puntos del plano, alineados con un punto (a,b) y con una dirección dada (vector).

B. Expresión matemática.

$$(x, y, z) = P + \lambda * \vec{v}$$
$$(x, y, z) = (x, y, z) + \lambda * (v_1, v_2, v_3)$$

Donde:

P= Es un punto P(x,y,z)

v= El vector dirección, v (v1 ,v2 ,v3)

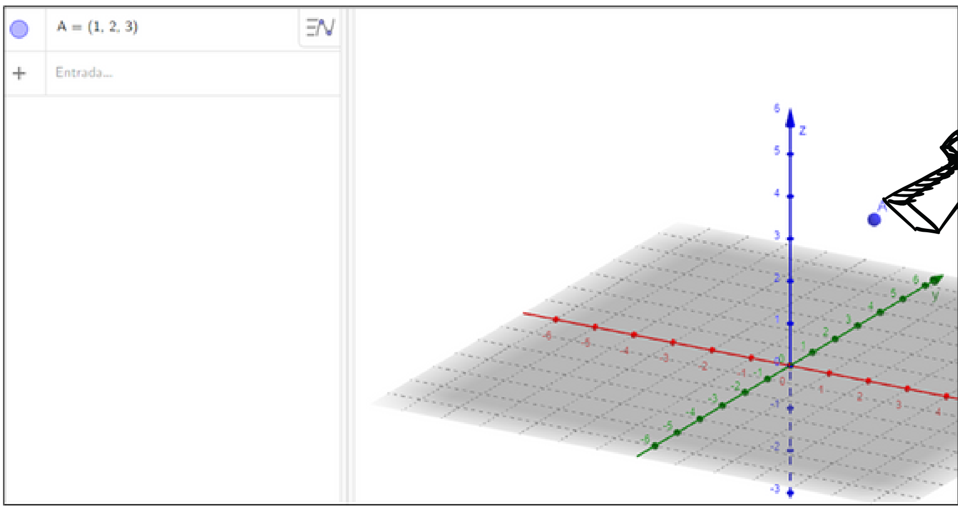
λ = Parámetro

El docente trabajará la ecuación vectorial de la recta con un problema.

Antonio se pregunta cómo puede ayudar GeoGebra a reconocer la ecuación vectorial de la recta en 3D. Si por el punto A (2,-1,4) puede pasar infinitas rectas. Por lo tanto es necesario, conocer uno de los vectores que nos indique la dirección.

Para ayudar a reconocer la ecuación vectorial de la recta vamos a utilizar GeoGebra en 3D, en la entrada ingresamos el punto (2,-1,4).

Ingresamos el punto A

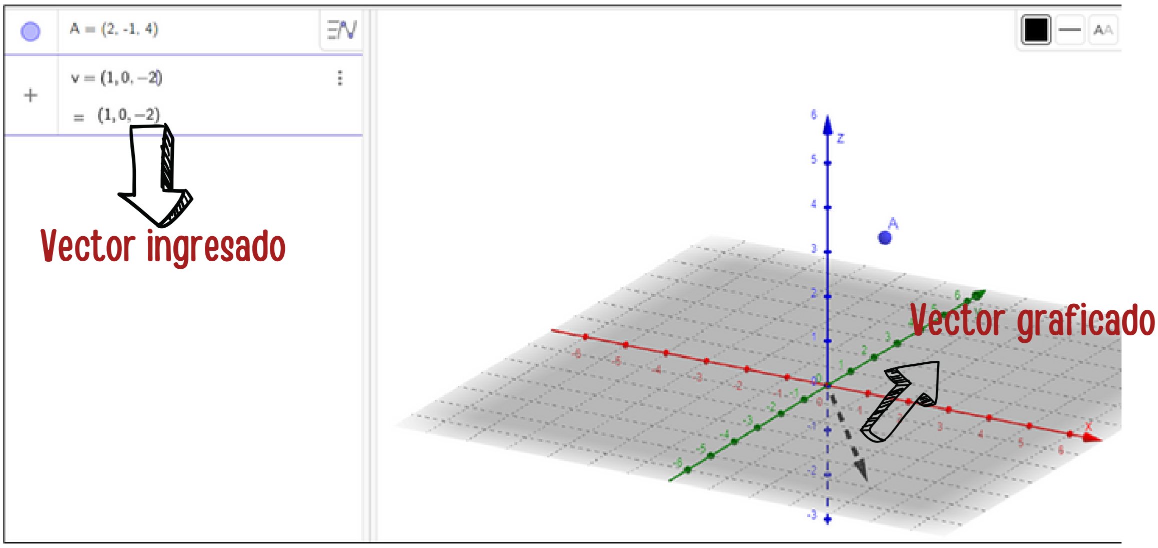


Punto A

Posteriormente vamos a necesitar un vector el cual es v= (1,0,-2), cabe mencionar que hay que diferenciar a la hora de ingresar un punto y un vector en GeoGebra.

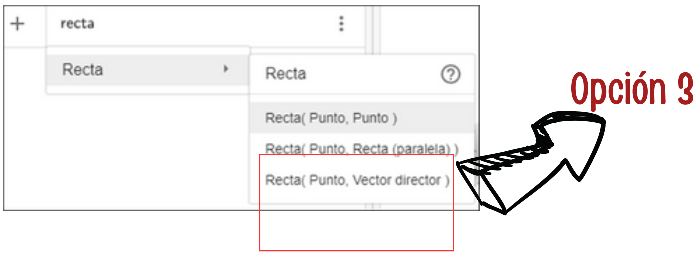
- Para un punto solo colocamos paréntesis (valores del punto), Ejemplo (2,6,5).
- Para un vector se coloca una letra (v) seguido del igual y de ahí paréntesis v= (valores del vector).

Entonces v= (1,0, -2).

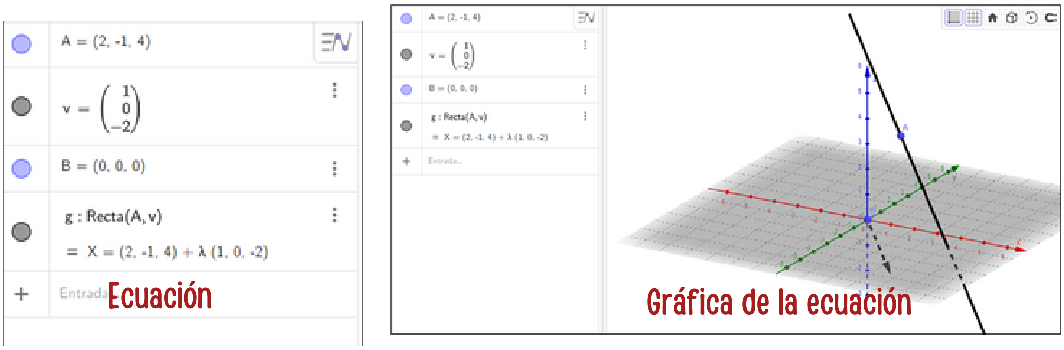


- Luego de tener un punto y un vector graficados pasamos a encontrar la ecuación vectorial de la recta, hacemos los siguientes pasos:

En la entrada escribimos recta y se desplegará tres opciones, escogemos la opción (punto, vector director).



Finalmente, se escribe el punto A y el vector director v, para obtener la ecuación y la gráfica.



Luego de haber obtenido la ecuación vectorial en la forma gráfica, se obtiene analíticamente la ecuación vectorial de la recta.

Ecuación vectorial

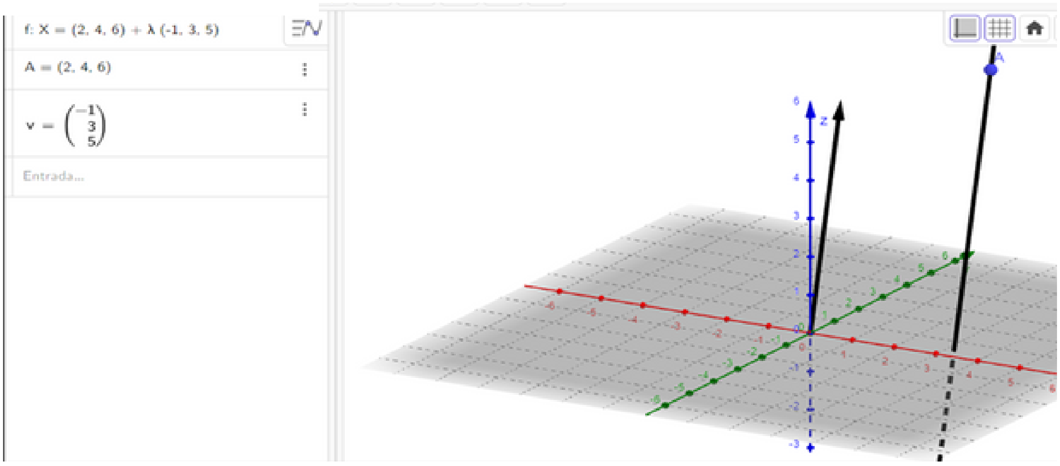
$$x = (2, -1, 4) + \lambda(1, 0, -2)$$

Consolidación

El docente para reforzar el tema planteará un punto y un vector director y los estudiantes determinaran la ecuación vectorial de cada recta con su respectivo gráfico (10min):

1. A (2,4.6); v= (-1,3,5)

Sol. X = (2,4.6) + λ (-1,3,5)



2. Una recta pasa por los puntos A (1, −3,5) y B (2, 1,6). Averigua:

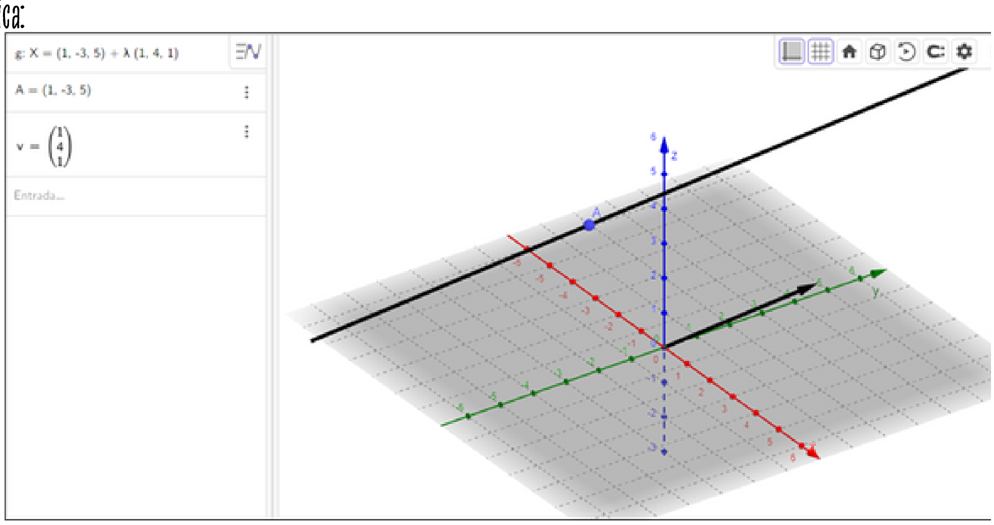
a) Su vector director:

Sol. AB (2-1) i +(1-(-3)) j +(6-5) k= (1,4,1)

b) La ecuación vectorial de la recta:

Sol. X= (1,-3,5) + λ (1,4,1)

c) Grafica:



Evaluación

Contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es un plano tridimensional?

sol. Los planos tridimensionales se caracterizan principalmente por cumplir con estas tres dimensiones: Longitud, altura y profundidad o en términos matemáticos con X, Y, Z.

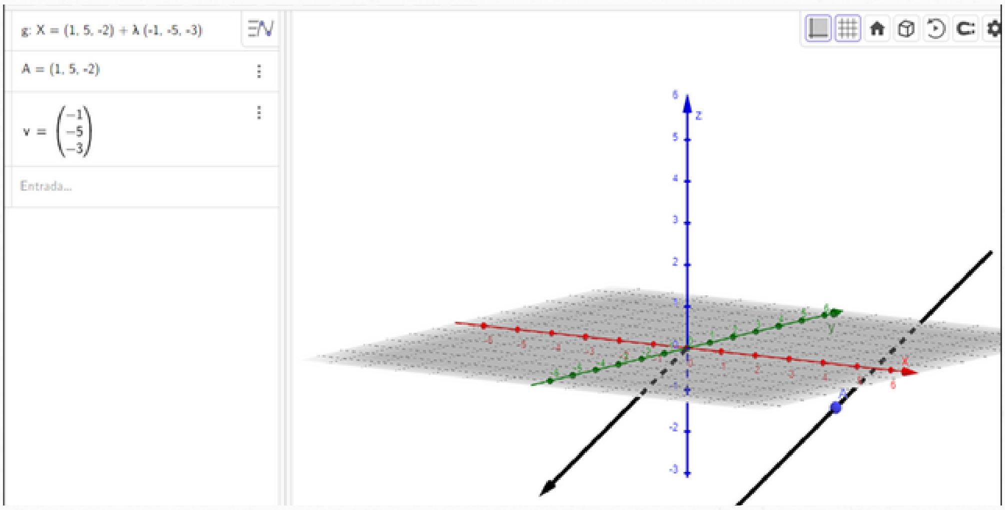
2. ¿Qué se necesita para formar la ecuación vectorial de una recta?

sol. Se necesita 2 puntos o un punto y un vector.

3.Graficar y encontrar su ecuación por medio de GeoGebra:

A. P (1, 5, -2); v= (-1,-5,-3)

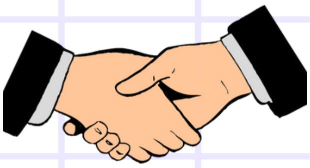
Sol. A= (1, 5, -2) + λ (-1,-5,-3)



Guía 3

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

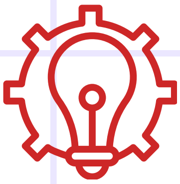
Introducción:



En esta guía 3 se muestra una alternativa paso a paso como se puede impartir la clase de la ecuación paramétrica de la recta en tres dimensiones por medio del software GeoGebra. Es necesario conocer los comandos de GeoGebra para agilizar el desarrollo de la clase.

Objetivo:

·Reconocer la ecuación de la recta en su forma paramétrica utilizando GEOGEBRA.



M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3.

40 MIN

Anticipación

Experiencia concreta: 5 min
Actividad Presentación de video.

·Para la presente actividad el docente presentara un video de interés para el estudiante acerca de la importancia de las rectas paramétricas y su utilidad en la vida real.

·Luego de a ver presentado el video se procederá a formar grupos para discutir las ideas que más les llamaron la atención.

·El docente recogerá todas esas ideas y se creará un mapa conceptual para sintetizar las ideas.

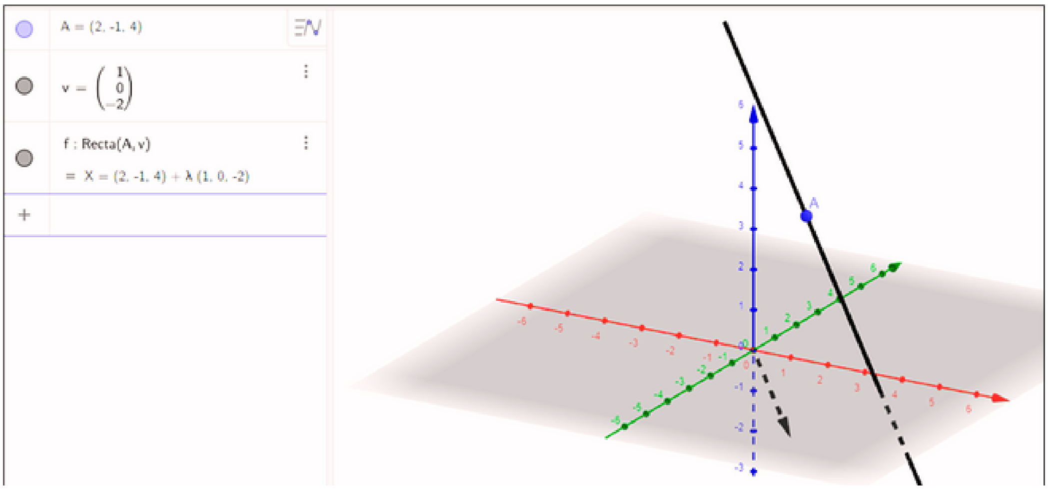
Link del video: https://www.youtube.com/watch?v=kH7vu3iLFms

Construcción

El docente a través del software GeoGebra explicará como se obtiene una ecuación paramétrica de la recta, por medio de los siguientes pasos. (20 minutos)

Partiremos de la ecuación vectorial explicada anteriormente la cual teníamos como datos Punto (2,-1,4) y nuestro vector director v= (1,0,-2) el cual nos generaba la siguiente ecuación vectorial.

$$x = (2, -1,4) + \lambda(1,0, -2)$$



Luego en entrada asignamos la siguiente función las cuales van a depender de nuestro punto y de nuestro vector director, aplicando la siguiente operación:

$$\boxed{x = (2, -1,4) + \lambda(1,0, -2)}$$

Punto: (2,-1,4)
Vector: (1,0,2) ⇨ (1x,0x,2x)

⇩

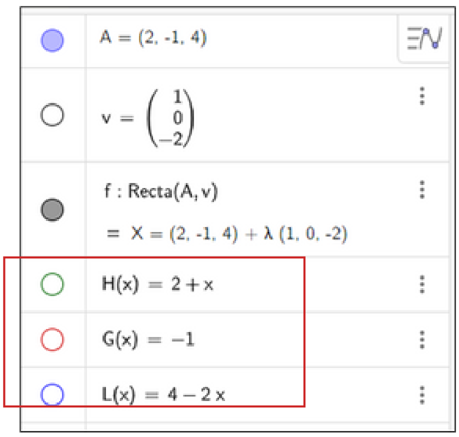
Procedemos a sumar el punto más el vector:

H(x) = 2 + x

G(x) = -1+ 0x

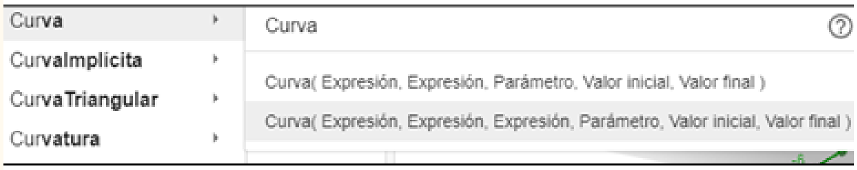
L(x) = 4 – 2x

⇨

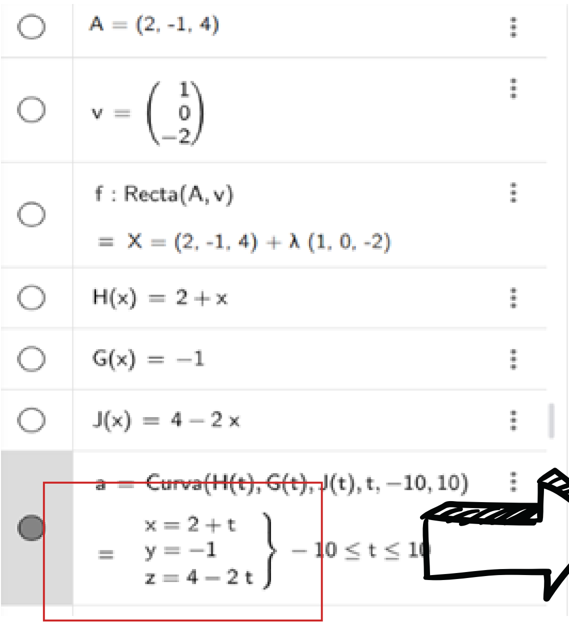


Utilizamos el comando curva opción 2 en GeoGebra el cual nos pide ingresar los siguientes datos.

- Expresión 1 colocamos H(t)
- Expresión 2 colocamos G(t)
- Expresión 3 colocamos L(t)
- Parámetro colocamos (t)
- Valor inicial (cualquier valor numérico)
- Valor final (cualquier valor numérico)



Después, de ingresados nuestras expresiones en la fórmula de GeoGebra, obtenemos nuestras ecuaciones paramétricas:



Ecuaciones paramétricas obtenidas:

$x = 2 + t$

$y = -1$

$z = 4 - 2t$

Consolidación

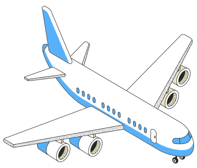
El docente enviará al estudiante un ejercicio que deberá ser resuelto en pizarrón y graficado en GeoGebra (15min).

Un radar detecta la navegación de dos aviones. A las 10h exactamente uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas (4, 3, 2) y sigue la dirección del vector (2, 1, 1). El otro avión se encuentra en el punto de coordenadas (2,3,2) con dirección del vector (5,4,3)

-Determinar si la navegación de los aviones es segura o si alguno de ellos debería rectificar su dirección:

Sol. Los dos aviones siguen distintas dirección y distinto sentido porque sus vectores directores son: (4, 3,2) y (2,3, 2) por lo tanto su navegación es segura y no deben modificar su dirección.

- Encontrar sus ecuaciones paramétricas en GeoGebra:



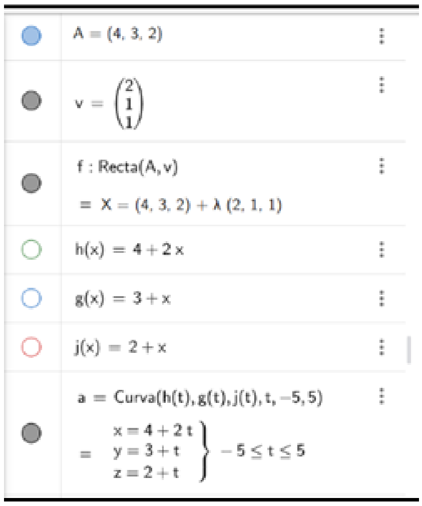
Avión A:

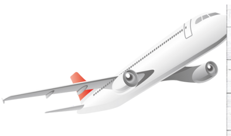
Ecuaciones paramétricas:

x=4+2t

y=3+t

z=2+t





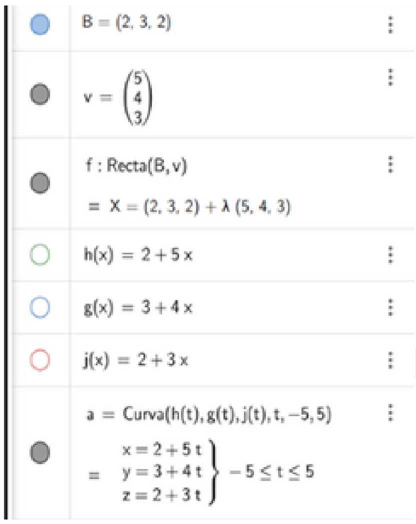
Avión B:

Ecuaciones paramétricas:

x=2+5t

y=3+4t

z=2+3t



Evaluación

Contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo identificamos una ecuación paramétrica de la recta?

Sol. Podemos identificar una ecuación paramétrica cuando tenemos las coordenadas del punto conocido (p1, p2, p3) por el cual pasa la recta y las coordenadas de un vector director, que nos indica la dirección de la recta y es un número real que nos permitirá conocer cualquier coordenada de la recta según el valor que le asignemos.

2. ¿Cómo se obtendría una ecuación paramétrica?

Sol. Las ecuaciones paramétricas se obtendrían por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{x} = p1 + \lambda\ v1$$
$$\mathbf{y} = p2 + \lambda\ v2$$
$$\mathbf{y} = p3 + \lambda\ v3$$

3. ¿Qué utilidad se le daría en la vida diaria?

Sol. Una de las mayores utilidades que se les da a las ecuaciones paramétricas, nos permiten graficar la posición de un objeto a lo largo del tiempo.

Guía 4

ECUACIÓN CONTINUA

Introducción:

En esta guía 4 se muestra una alternativa paso a paso como se puede impartir la clase de ecuación continua de la recta en tres dimensiones por medio del software GeoGebra. Es necesario conocer los comandos de GeoGebra para agilizar el desarrollo de la clase.

Objetivo:

Reconocer la ecuación de la recta en su forma continua utilizando GEOGEBRA

M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3.

40 MIN

Anticipación

El docente comenzará la clase mediante un diálogo con los estudiantes, diciéndoles que, para obtener las ecuaciones en su forma continua, se debe tener en cuenta las ecuaciones vectoriales y ecuaciones paramétricas; por lo cual recordará a los estudiantes mediante un ejemplo como obtener estas ecuaciones (10min).

1 Ejemplo N°1. Ecuación en su forma vectorial:

$(x, y) = A + \lambda V$

Punto A (5, 3, -2)

Vector V = (-2, 5, 7)

Parámetro: λ

2 **Construcción de la ecuación:**

$(x, y, z) = A + \lambda V \qquad (x, y) = (5, 3, -2) + \lambda (-2, 5, 7)$

3 Continuando con el ejemplo pasaremos a formar la ecuación paramétrica, igualamos las componentes a uno y otro lado de la ecuación obtenemos lo que se denominan ecuaciones paramétricas de la recta.

Expresión:

$X = (a1 + \lambda v1)$

$Y = (a2 + \lambda v2)$

$Z = (a3 + \lambda v3)$

4 Construcción de la ecuación: multiplicamos el parámetro lambda con sus respectivas componentes del vector.

$$(x, y, z) = (5, 3, -2) + (-2\, \lambda, 5\, \lambda, 7\, \lambda)$$

5 Igualamos las componentes a uno y otro lado de la ecuación obtenemos lo que se denomina ecuaciones paramétricas de la recta.

Ecuación de la recta en su forma paramétrica

$X = 5 - 2\lambda$

$Y = 3 + 5\lambda$

$Z = -2 + 7\lambda$

Una vez recordado las ecuaciones en su forma vectorial y en su forma paramétrica, continuaremos con la ecuación de la recta en su forma continua.

Construcción

El docente a través de una clase magistral, continuará con la narración propuesta en la guía N°2 (20min).

Luego de que Antonio aprendió a reconocer la ecuación de la recta en su forma vectorial y en su forma paramétrica se preguntó ¿Habrá la posibilidad de expresar la ecuación de la recta en otra forma distinta?

Respuesta: Por supuesto, existe algunas formas de expresar y una de ellas es en su forma continua que lo explicaremos a continuación.

Usando el pizarrón se construye la ecuación vectorial y paramétrica con el siguiente ejemplo:

1 Ejemplo N°2:

Punto A (5, -4, 6)

Vector V= (-3, 5, -1)

2 **Ecuación de la vectorial de la recta**

$$(x, y, z) = (5, -4, 6) + \lambda\ (-3, 5, -1)$$

3 **Ecuación Paramétrica: desarrollamos el producto.**

$$\lambda\ (-3, 5, -1) = (-3\ \lambda, 5\ \lambda, -1\ \lambda)$$

$$(x, y, z) = (5, -4, 6) + (-3\ \lambda, 5\ \lambda, -1\ \lambda)$$

4 **Igualamos las componentes a uno y otro lado de la ecuación obtenemos la ecuación paramétrica de la recta.**

Ecuaciones Paramétricas

$X = 5 - 3\ \lambda$

$Y = -4 + 5\ \lambda$

$Z = 6 - 1\ \lambda$

5 **Una vez obtenido la ecuación paramétrica procederemos a obtener la ecuación continúa. Despejamos λ ¨lambda¨ de las ecuaciones obtenidas en la forma paramétrica**

$$\lambda = \frac{x-5}{-3}$$

$$\lambda = \frac{y+4}{5}$$

$$\lambda = \frac{z-6}{-1}$$

6 **Igualamos las tres ecuaciones:**

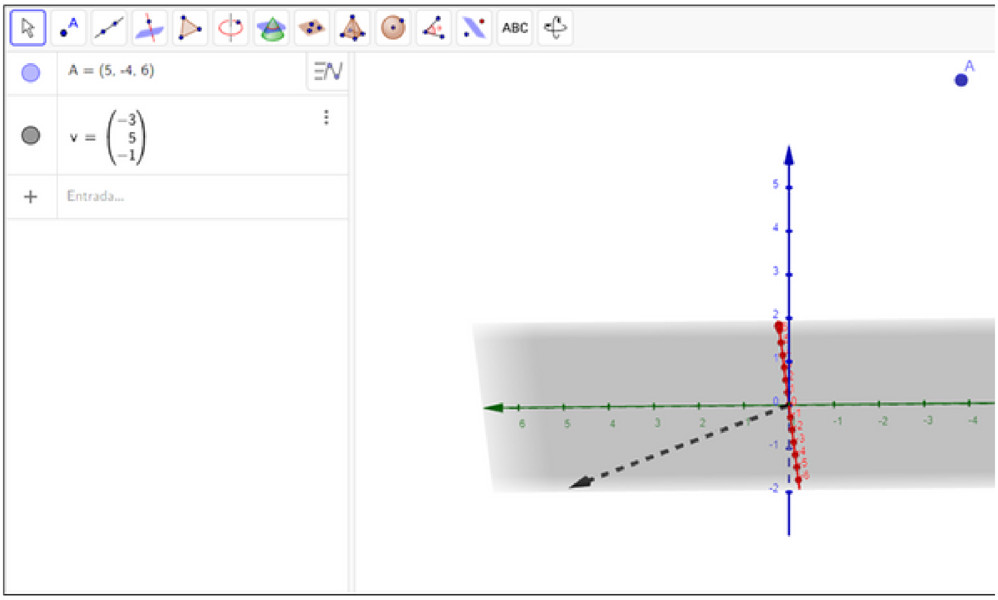
$$\frac{x-5}{-3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-6}{-1}$$

Y así se obtiene la ecuación de la recta en su forma continua

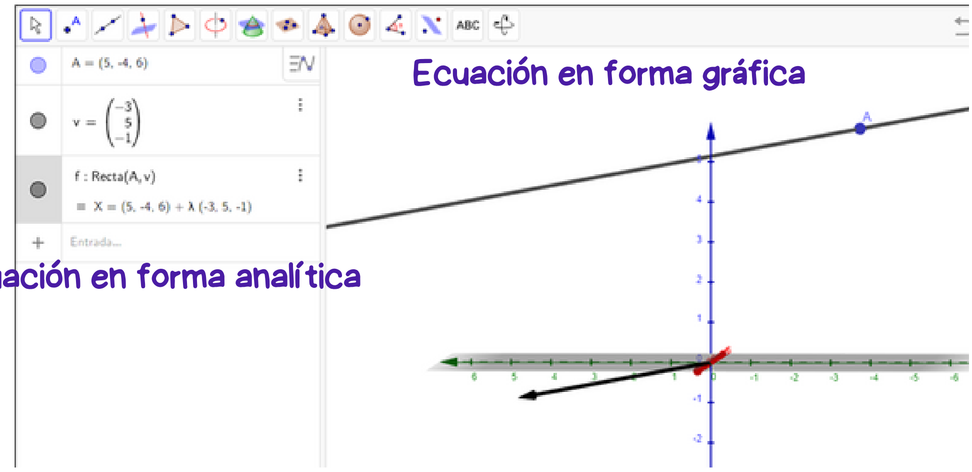
Una vez obtenida de forma analítica pasaremos a graficarla y a reconocerla en su forma continúa haciendo los siguientes pasos:

1 Abrimos GeoGebra en 3D e ingresamos nuestro punto y vector del ejemplo 2.

Punto: A (5, -4, 6)
Vector: V= (-3, 5, -1)



2 Una vez obtenido el punto y el vector, en la entrada escribimos el comando Recta (Punto, Vector director) e ingresamos el nombre de nuestro punto que en este caso es ¨A¨ y el nombre de nuestro vector que es ¨v¨ y damos enter y así obtenemos la ecuación en su forma vectorial.



3 Procedemos a obtener la ecuación de la recta en su forma paramétrica formado las siguientes ecuaciones.

$$g(x) = 5 - 3x$$

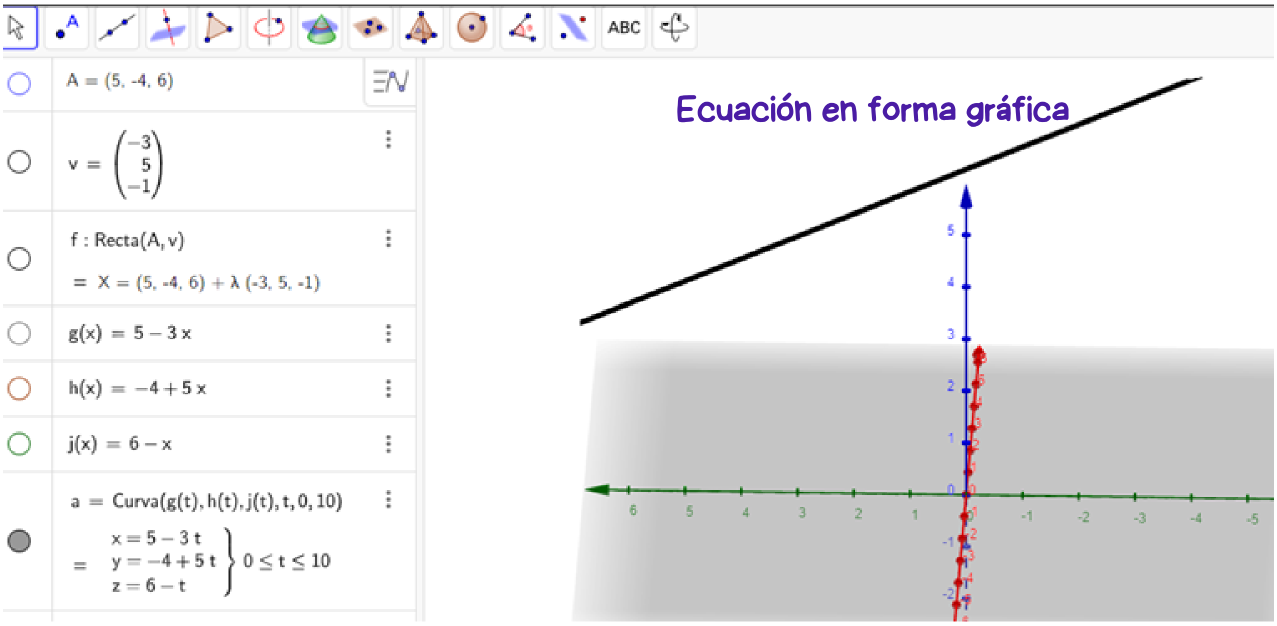
$$h(x) = -4 + 5x$$

$$j(x) = 6 - x$$

4 En la entrada colocamos el siguiente comando curva (expresión1, expresión2, expresión3, parámetro, Valor Inicial, valor final).

Nuestra expresión 1 = g(x)
Nuestra expresión 2= h(x)
Nuestra expresión 3=j(x)
Parámetro (t)
Valor inicial (cualquier valor)
Valor final (cualquier valor)

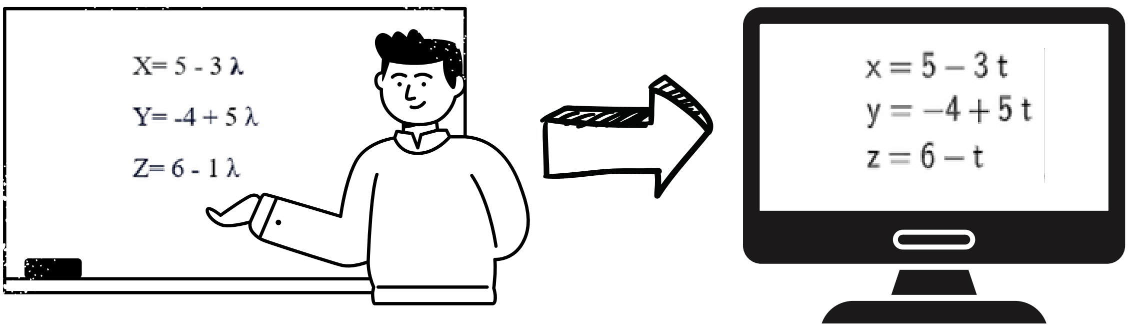
5 Luego de haber ingresado todos estos datos vamos a obtener la gráfica y ecuación en su forma paramétrica.



Ecuación en forma analítica

6 Finalmente procedemos a obtener la ecuación de la recta en su forma continua, como podemos observar las ecuaciones obtenidas de forma paramétrica en GeoGebra son las mismas las cuales obtuvimos en el pizarrón.

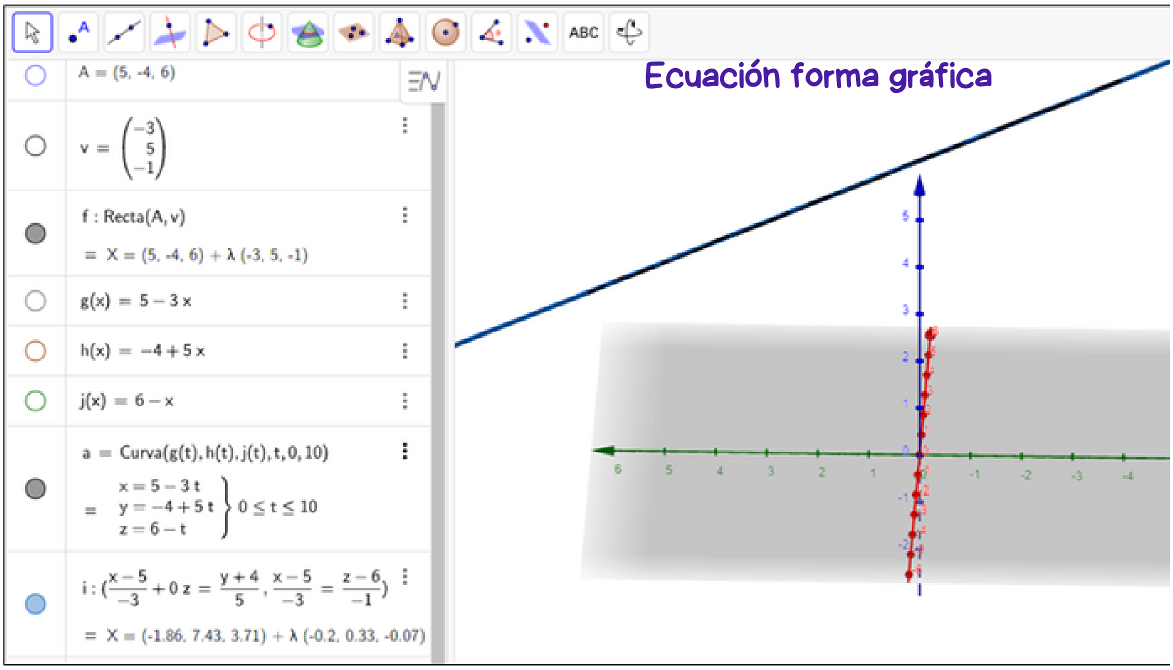
Pizarrón GeoGebra



7 Como podemos notar el parámetro que utiliza GeoGebra es t y nosotros λ por lo tanto podemos decir que las ecuaciones son las mismas, por lo que procederemos a despejar t e igualamos las ecuaciones.

$$\frac{x-5}{-3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-6}{-1}$$

8 Ingresamos la siguiente expresión y obtenemos la siguiente gráfica.



Ecuación forma analítica

Como se puede observar, se tiene marcado las tres formas de la ecuación de la recta (vectorial, paramétrica, continua) y en los tres casos nos da la misma gráfica.

Consolidación

El docente enviará al estudiante los siguientes ejercicios que serán resueltos en el pizarrón y graficados en GeoGebra (10 minutos).

1. Dado los siguientes puntos y vectores construir la ecuación continua de la recta .

a) A (3, -1, -5) v = (4 ,3, -2)

Sol. $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+5}{-2}$

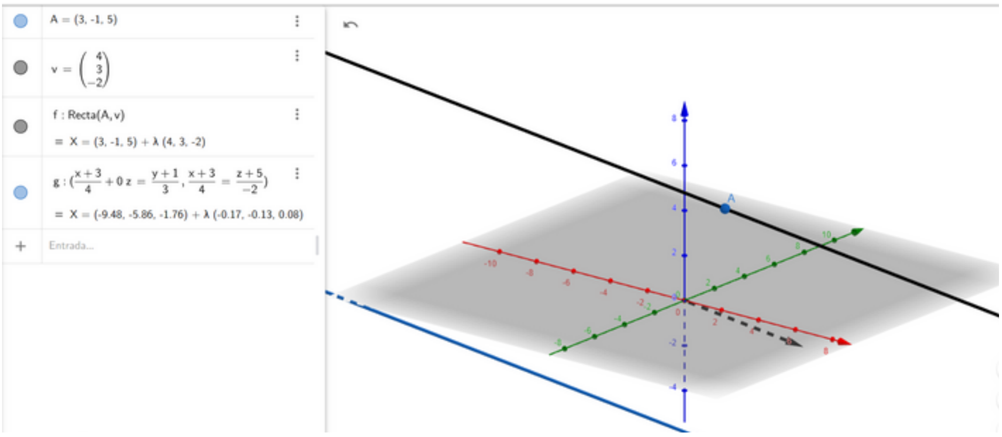
b) A (1, -6, 0) v = (0, 3, 7)

Sol. $\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z}{7}$

2. Graficar el literal a y b

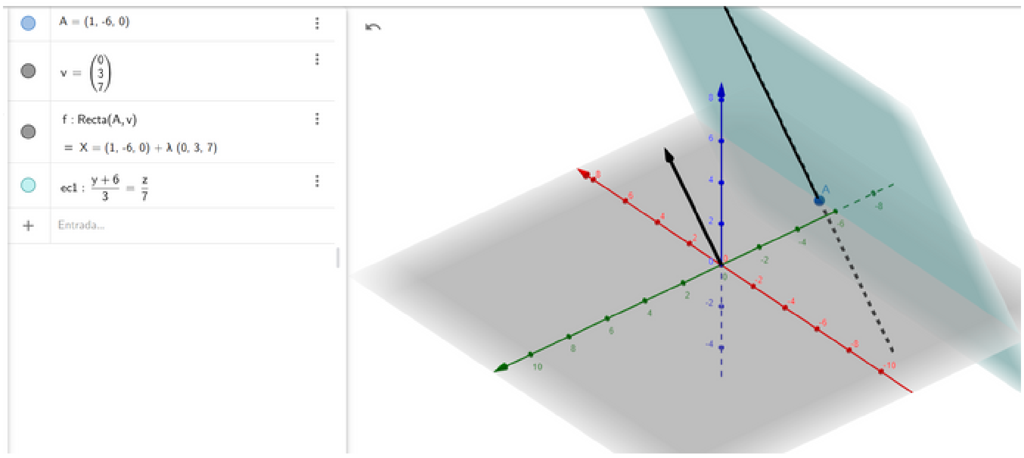
a) A (3, -1, -5) v = (4 ,3, -2)

Sol.



b) A (1, -6, 0) v = (0, 3, 7)

Sol.



Evaluación

Contestar las siguientes preguntas:

1.Dada la ecuación vectorial de la recta encontrar.

a. Su ecuación paramétrica.

b. Su ecuación continua

$A = (3,2,-1) + \lambda(-1,-2,1)$

Solución del literal a y b

$$x = 3 - \lambda$$
$$y = 2 - 2\lambda$$
$$z = -1 + \lambda$$

$$-x + 3 = \frac{y-2}{2} = z + 1$$

$B = (1,4,2) + \lambda(2,-2,3)$

Solución del literal a y b

$$x = 1 + 2\lambda$$
$$y = 4 - 2\lambda$$
$$z = 2 + 3\lambda$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-2}{3}$$

$C = (-2,5,6) + \lambda(7,2,-3)$

Solución del literal a y b

$$x = -2 + 7\lambda$$
$$y = 5 + 2\lambda$$
$$z = 6 - 3\lambda$$

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{-3}$$

2. Elegir y graficar una ecuación vectorial del ejercicio anterior con su respectiva ecuación continua.

Guía 5

ECUACIONES IMPLÍCITAS

Introducción:

En esta guía 5 se muestra una alternativa paso a paso como se puede impartir la clase de ecuaciones implícitas de la recta en tres dimensiones por medio del software GeoGebra. Es necesario conocer los comandos de GeoGebra para agilizar el desarrollo de la clase.

Objetivo:

Reconocer la ecuación de la recta en su forma implícita utilizando GEOGEBRA.

M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3.

40 MIN

Anticipación

El docente comenzará la clase mediante un conversatorio con los estudiantes diciéndoles que para obtener las ecuaciones en su forma implícita se debe tener la ecuación de la recta en su forma continua, por lo cual recordará a los estudiantes mediante un ejemplo como llegar a la ecuación de la recta en forma continua (10min).

1 **Ejemplo N°1.**

Ecuación en su forma vectorial

$$(x, y) = A + \lambda\, V$$

Punto A (3,-2,1)

Vector V = (3,- 5, 4)

Parámetro: λ

2 **Construcción de la ecuación:**

$(x, y, z) = A + \lambda\, V \quad (x, y) = (3,-2,1) + \lambda\ (3, -5, -4)$

3 Multiplicamos el parámetro lambda con sus respectivas componentes del vector.

$$(x, y, z) = (3, -2, 1) + (3\lambda, -5\lambda, -4\lambda)$$

4 Igualamos las componentes de los dos lados de la ecuación y obtenemos lo que se denomina ecuaciones paramétricas de la recta.

Ecuación de la recta en su forma paramétrica

$X = 3 + 3\lambda$

$Y = -2 - 5\lambda$

$Z = 1 - 4\lambda$

5 Despejamos λ "lambda" de cada una de las ecuaciones y obtenemos lo siguiente:

$$\lambda = \frac{x-3}{3}$$

$$\lambda = \frac{y+2}{-5}$$

$$\lambda = \frac{z-1}{-4}$$

6 Igualamos las 3 ecuaciones y obtenemos una solo expresión:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{-4}$$

De esta manera se le recuerda a los estudiantes como llegar a la ecuación de la recta en su forma continua, la cual es necesaria para llegar a la ecuación de la recta en su forma implícita.

Construcción

Se continuará con la narración propuesta en la guía N° 1 (20min).

Antonio luego de haber aprendido hasta el momento las tres formas de la ecuación de la recta que son vectorial, paramétrica y continua, se fue a casa muy contento porque había aprendido algo nuevo en clase, cuando de repente Antonio se encontró con su abuelo y este le pregunto por qué estaba feliz, a lo que Antonio respondió que se sentía muy alegre por lo que había aprendido en la escuela y quería aprender más. Entonces su abuelo saco de su maleta un libro de matemáticas muy antiguo, el cual le obsequio a Antonio, una vez Antonio llegado a su casa, saco el libro para leer, cuando de repente vio un tema que decía ecuación de la recta en su forma implícita, el cual intento comprender pero no pudo por lo que llevo esta inquietud a su maestro al día siguiente, y así su maestro comenzó con la explicación.

Partiremos de la ecuación de la recta en su forma continua la cual usaremos del ejemplo anterior

Punto A (3, -2, 1)

Vector V = (3,-5, -4)

1 Ecuación Continua

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-1}{-4}$$

2 Se puede observar que tenemos una igualdad, por lo cual podemos formar ecuaciones a partir de ellas.

Para formas nuestras ecuaciones vamos a escoger la expresión 1 con 2.

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-1}{-4}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

1 2 3

3 Expresión 1 y 2:

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-5}$$

4 Aplicamos sus respetivas operaciones para obtener una ecuación lineal.

- Partimos de a ecuación.

$$5(x-3)=3(y+2)$$

- Aplicamos la propiedad distributiva en ambos lados.

$$-5x+15=3y+6$$

- Pasamos todo al lado izquierdo de la igualdad e igualamos a cero.

$$-5x+15-3y-6=0$$

- Reducimos términos semejantes.

$$-5x-3y+9=0$$

Primera Ecuación obtenida.

5 Para formar la siguiente ecuación, escogeremos la expresión 2 con 3.

$$\frac{y+2}{-5}=\frac{z-1}{-4}$$

- Eliminamos las fracciones.
- $-4(y+2)=-5(z-1)$
- Aplicamos la propiedad distributiva en ambos lados.

$$-4y-8=-5z+5$$

- Pasamos todo al lado izquierdo de la igualdad e igualamos a cero.

$$-4y-8+5z-5=0$$

- Reducimos términos semejantes.

$$-4y+5z-13=0$$

- Segunda Ecuación obtenida.

6 Ecuaciones Implícitas.

$$-4y+5z-13=0$$

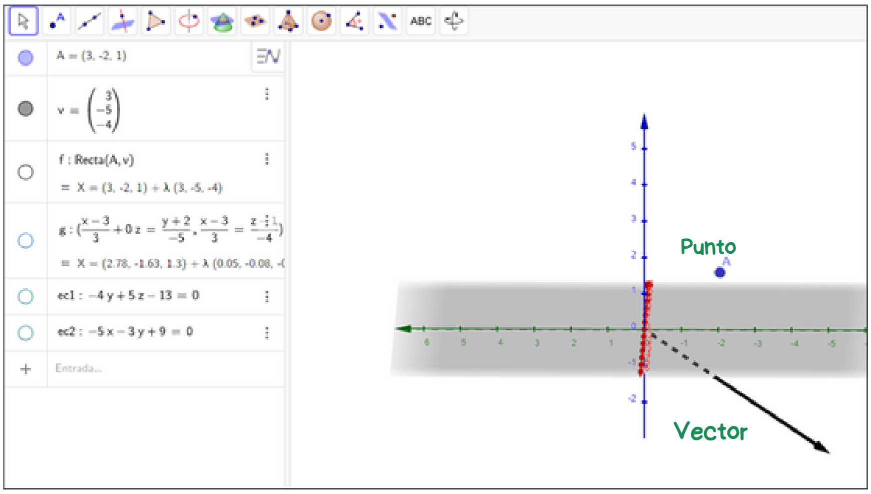
$$-5x-3y+9=0$$

Una vez obtenida de forma analítica pasaremos a graficarla y a reconocerla en su forma continúa haciendo los siguientes pasos:

1 Abrimos GeoGebra en 3D e ingresamos nuestro punto y vector del ejemplo 1 y obtenemos la gráfica.

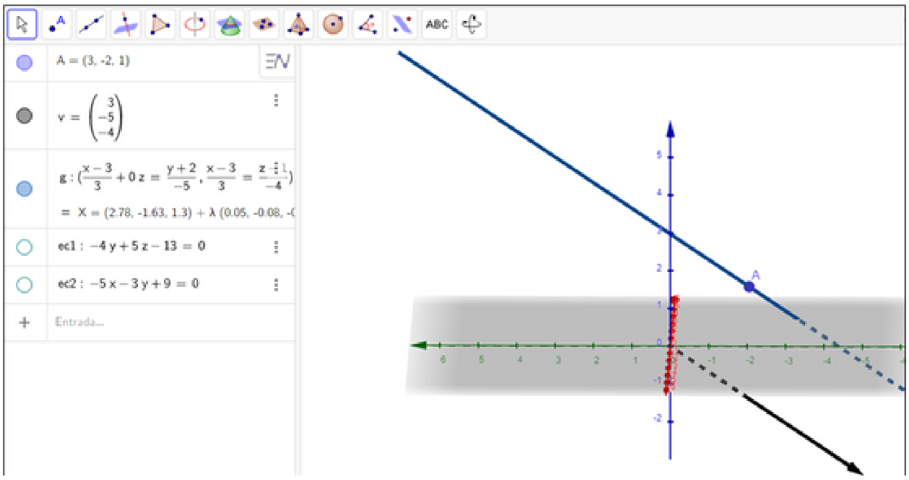
Punto A (3, -2, 1)

Vector V = (3, -5, -4)



2 Ingresamos nuestra ecuación en forma continua y obtenemos su gráfica.

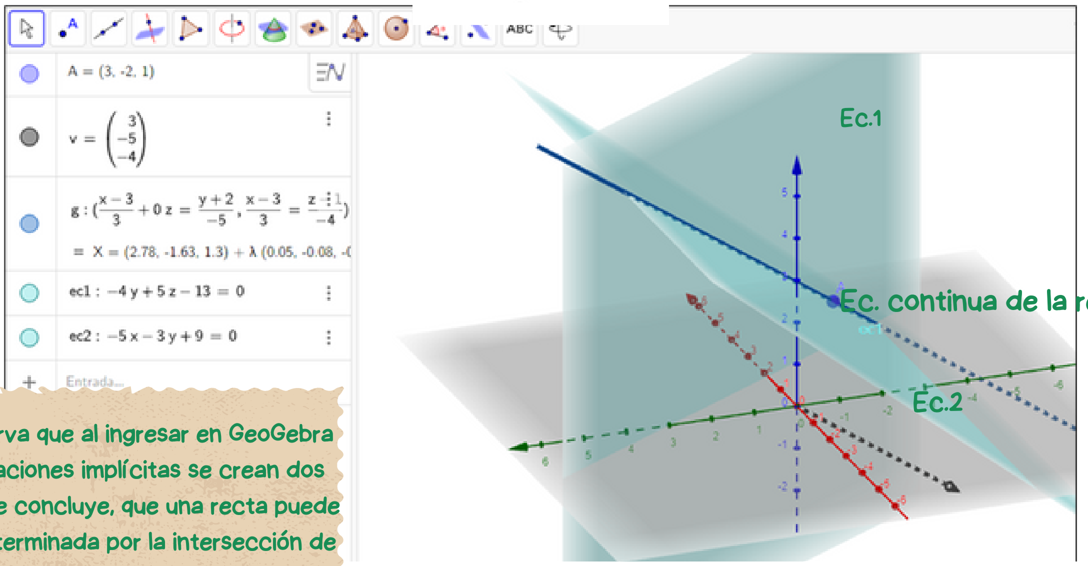
$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{-4}$$



3 Ingresamos nuestras ecuaciones implícitas, obtenidas de forma analítica y obtenemos la gráfica.

$$-4y + 5z - 13 = 0$$

$$-5x - 3y + 9 = 0$$



Se observa que al ingresar en GeoGebra las ecuaciones implícitas se crean dos planos, se concluye, que una recta puede venir determinada por la intersección de los planos.

Consolidación

El docente enviará al estudiante ejercicios los cuales tendrán que ser resueltos en el pizarrón y graficados en GeoGebra (10min).

1.Dado los siguientes puntos y vectores construir la ecuación continua de la recta y grafíquelos en GeoGebra.

a) A (3,0, -4) v = (4 ,3, 9).

sol. $3x - 9 - 4y = 0,\ 9y - 3z - 12 = 0$

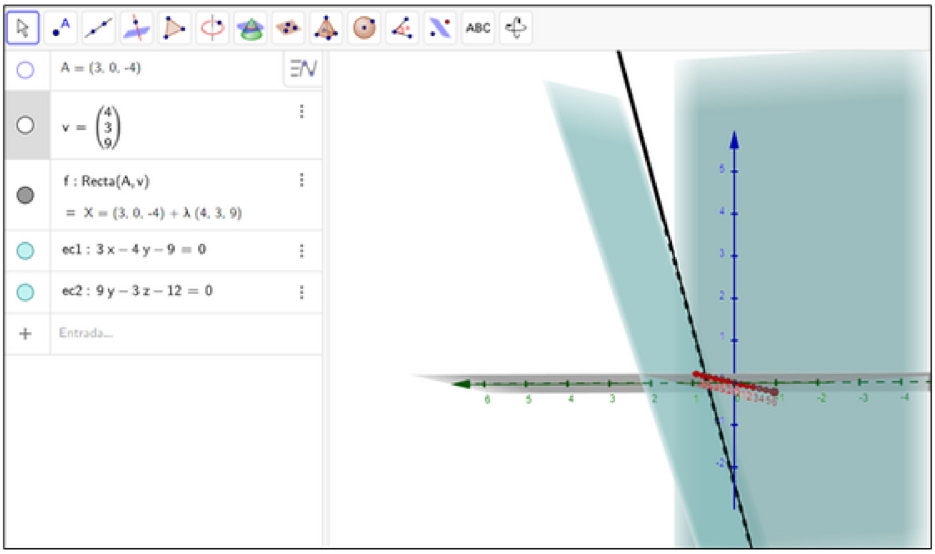
b) A (2,-2,5) v = (1,-3,-4).

sol. $-3x - y + 4 = 0,\ -4y + 3z - 23 = 0$

2. Luego de haber obtenido las respectivas ecuaciones grafique el literal a y d.

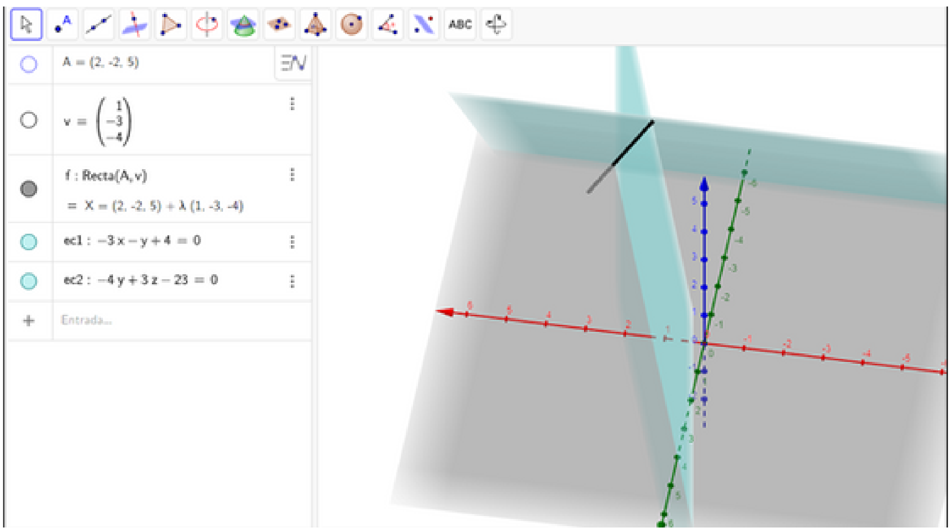
a) A (3,0, -4) v = (4 ,3, 9).

Sol.



b) A (2,-2,5) v = (1,-3,-4)

Sol.



Evaluación

Contestar las siguientes preguntas:

1. Unir con una línea lo correcto.

a. Ecuación paramétrica.
b. Ecuación implícita
c. Ecuación vectorial de la recta
d. Ecuación continua

1. $(x, y, z) = (2,3,-5) + \lambda(-1,2,4)$
2. $x = 4 + \lambda \, ; y = 1 - 2\lambda \, ; z = -5 - 7\lambda$
3. $2x - y - 1 = 0 \, ; 5z - y + 2 = 0$
4. $\frac{x}{7} = \frac{y-8}{5} = \frac{z-2}{6}$

Sol. (a,2; b3; c,1; d,4)

2. Escoja la respuesta correcta si tengo el punto (1,2,3,) y el vector (-2,-1,4). ¿Cuál será su ecuación implícita?

a. $x - y = 0$; $3x - z - 1 = 0$; $y - 3z + 3 = 0$

b. $x - 2y + 3 = 0$; $4y + z - 11 = 0$; $4x + 2z - 10 = 0$

c. $3x - 2y + 1 = 0$; $y + 4z - 2 = 0$; $3x + z - 5 = 0$

Sol. b

3. Dada la ecuación implícita de la recta. Hallar su paramétrica. Sabiendo que z=λ

$$x + y - z = 1$$
$$x - y + 3z = 2$$

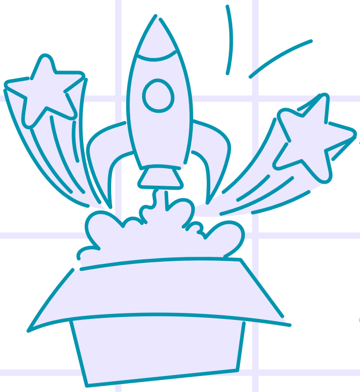
Sol.

$$x = \frac{3-2\lambda}{2}; y = \frac{-3-2\lambda}{2}; z = \lambda$$

Guía 6

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Introducción:



Es muy importante que los estudiantes relacionen conceptos abordados en esta guía, con la realidad y sus aplicaciones. Por ejemplo, sabemos que el termino posición relativa suele emplearse en el campo de la geografía para la localización de ciertos lugares con respecto a otros. Aplicado estas definiciones entre 2 rectas podemos establecer que hay 4 tipos de posiciones relativas y estas son: coincidentes, secantes, paralelas y alabeadas.

Objetivo:

Conocer la posición relativa de 2 rectas mediante GeoGebra, utilizando sus ecuaciones implícitas.

M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3.

40 MIN

Anticipación

El docente iniciará su clase explicando que podemos identificar la posición entre 2 rectas mediante gráficas utilizando GeoGebra, para estás gráficas se puede utilizar cualquiera de las ecuaciones ya conocidas paramétrica, vectorial, implícitas y continuas, pero para facilitar la introducción de las ecuaciones en GeoGebra se utiliza las ecuaciones de la recta en su forma vectorial, para ellos construimos e identificaremos la ecuación vectorial (10min).

Comenzamos mostrando imágenes de las diferentes formas de la ecuación y el estudiante identificará cuál de ellas pertenece a la ecuación vectorial .

A. $Ax + By + Cz + D = 0$
$A'x + B'y + C'z + D' = 0$

B. $(x, y, z) = A + \lambda V$

C. $X = (a1 + \lambda v1)$
$Y = (a2 + \lambda v2)$
$Z = (a3 + \lambda v3)$

D. $\frac{x-a1}{v1} = \frac{y-a2}{v2} = \frac{z-a3}{v3}$

sol. $(x, y, z) = A + \lambda V$

Para poder establecer las condiciones de las diferentes posiciones relativas de la recta es necesario que los estudiantes identifiquen los tipos de ecuaciones de la recta que se han estudiado hasta el momento que son necesarias para poder graficar las distintas posiciones .

Obtener la ecuación vectorial dada siguiente ecuación.

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{-4}$$

1 Reconocer la forma en la que esta la ecuación.

Esta ecuación se presenta en forma continua

2 Cogemos cada miembro de la ecuación e igualamos a lambda ¨ λ¨ y despejamos x, y, z.

$$\frac{x-3}{3} = \lambda \quad x = 3 + 3\lambda$$

$$\frac{y+2}{-5} = \lambda \quad y = -2 - 5\lambda$$

$$\frac{z-1}{-4} = \lambda \quad z = 1 - 4\lambda$$

3 Observamos que los termino 3, -2 y 1 forman el punto que se necesita para formar la ecuación vectorial y los términos 3, -5, -4 forman el vector, por lo tanto, la ecuación queda de la siguiente manera.

$$(x, y, z) = (3, -2, 1) + \lambda(3, -5, -4)$$

4 Una vez recordado que forma tiene la ecuación vectorial de la recta pasamos a graficar las distintas posiciones relativas de la recta utilizando GeoGebra

$(x, y, z) = A + \lambda V$ ⇨ Ecuación vectorial

Construcción

Se dará continuidad a la narración propuesta en la guía N° 1 (20min).

Antonio luego de haber aprendido las distintas formas en las que se puede expresar la ecuación de la recta paramétrica, vectorial, continua e implícita fue caminando hasta su casa cuando de repente alguien se le acerco y le pregunto acerca de una dirección y usó los términos paralelos, intersección o coincidentes. Antonio quedó pensativo y no supo que decir así que decidió llegar a casa e investigar. Resulto que estos términos son muy utilizados en la posición entre 2 rectas.

El primer caso que Antonio vió fue:

Rectas Coincidentes

Definición: Son rectas que son coincidentes si tiene un punto en común y sus vectores son paralelos.

Ejemplo:

Ec.1 $(x, y, z) = (-3,4,3) + \lambda(3,-5,-4)$

Ec.2 $(x, y, z) = (0,-1,-1) + \lambda(6,-10,-8)$

Pasamos la ecuación dos vectorial a paramétrica y después a continúa despejando λ e igualando las ecuaciones.

$$\begin{aligned} x &= 0 + 6\lambda \\ y &= -1 - 10\lambda \\ z &= -1 - 8\lambda \end{aligned} \Rightarrow \frac{x-0}{6} = \frac{y+1}{-10} = \frac{z+1}{-8}$$

Las condiciones para que sean coincidentes:

UNO: Cogemos el vector de la ecuación 1, el vector de la ecuación 2 y aplicamos la siguiente condición, si la igualdad se cumple podemos tener rectas paralelas o coincidentes. $\overrightarrow{v1} = (3,-5,-4)\ y\ \vec{v}2 = (6,-10,-8)$

Condición:

$$\frac{\vec{x}}{\vec{x}'} = \frac{\vec{y}}{\vec{y}'} = \frac{\vec{z}}{\vec{z}'} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-5}{-10} = \frac{-4}{-8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Simplificando la igualdad.

Vemos que se cumple la igualdad y podemos tener paralelas o coincidentes

DOS: Para comprobar que son coincidentes cogeremos un punto de la ecuación 1 y la reemplazamos en la ecuación continua .

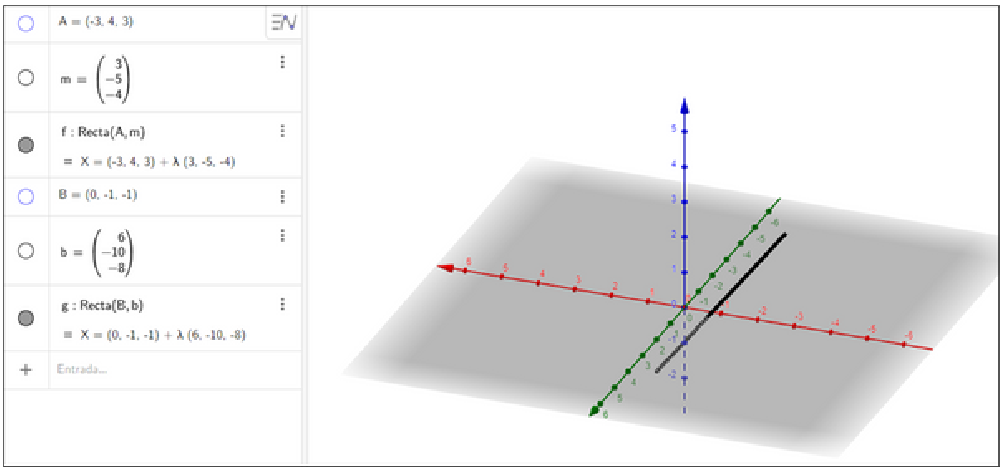
Punto escogido $\Rightarrow$ **P=(-3,4,3)**

$$\frac{x-0}{6} = \frac{y+1}{-10} = \frac{z+1}{-8} \rightarrow \frac{-3-0}{6} = \frac{4+1}{-10} = \frac{3+1}{-8} \rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Efectivamente se cumple la igualdad y por lo tanto podemos afirmar que las rectas son coincidentes.

Mediante GeoGebra confirmaremos que estas 2 rectas son coincidentes

Ec.1 $(x, y, z) = (-3,4,3) + \lambda(3, -5, -4)$
Ec.2 $(x, y, z) = (0, -1, -1) + \lambda(6, -10, -8)$



Se observa que se ha ingresado tanto sus puntos como sus vectores y al elegir la opción recta se obtiene las ecuaciones correspondientes. Se puede comprobar que obtuvimos una sola gráfica, por lo tanto, concluimos que son coincidentes.

Rectas paralelas

Definición: Son aquellas rectas que no presentan ningún punto en común nunca se llegan a cortar incluso si se prolonga hasta el infinito, tiene la misma pendiente.

Ejemplo:

Ec.1 $(x, y, z) = (-3,4,3) + \lambda(3, -5, -4)$
Ec.2 $(x, y, z) = (-6,8,6) + \lambda(6, -10, -8)$

Pasamos la ecuación dos vectorial a paramétrica y después a continúa despejando λ e igualando las ecuaciones.

$$\begin{aligned} x &= -6 + 6\lambda \\ y &= 8 - 10\lambda \\ z &= 6 - 8\lambda \end{aligned} \Rightarrow \frac{x+6}{6} = \frac{y-8}{-10} = \frac{z-6}{-8}$$

Las condiciones para que sean paralelas:

UNO: Cogemos el vector de la ecuación 1, el vector de la ecuación 2 y aplicamos la siguiente condición, si la igualdad se cumple podemos tener rectas paralelas o coincidentes.

$$\overrightarrow{v1} = (3, -5, -4) \text{ y } \vec{v}2 = (6, -10, -8)$$

$$\frac{\vec{x}}{\vec{x}'} = \frac{\vec{y}}{\vec{y}'} = \frac{\vec{z}}{\vec{z}'} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-5}{-10} = \frac{-4}{-8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Simplificando la igualdad.

Vemos que se cumple la igualdad y podemos tener paralelas o coincidentes

DOS: Para comprobar que son coincidentes cogeremos un punto de la ecuación 1 y la reemplazamos en la ecuación continua.

Y se tiene que cumplir la siguiente desigualdad.

$$\frac{\vec{x}}{\vec{x}'} \neq \frac{\vec{y}}{\vec{y}'} \neq \frac{\vec{z}}{\vec{z}'}$$

Punto escogido P=(-3,4,3)

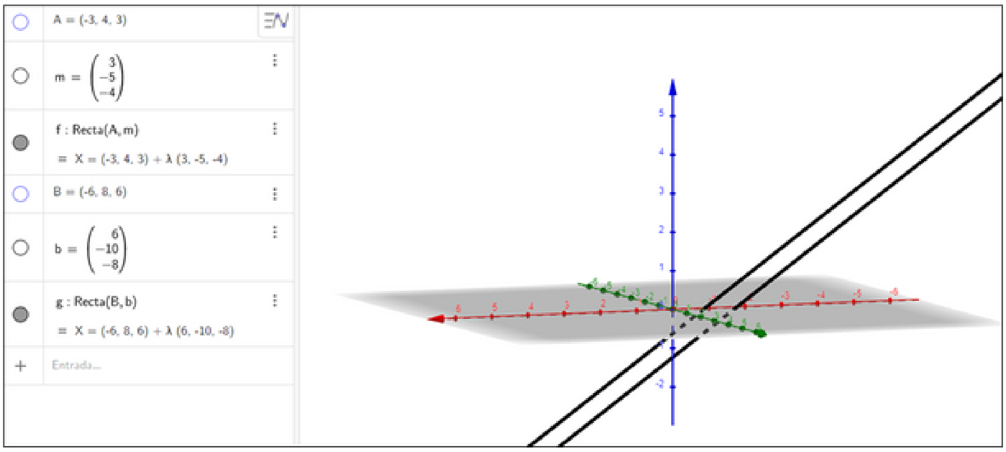
$$\frac{x+6}{6} = \frac{y-8}{-10} = \frac{z-6}{-8} \rightarrow \frac{-3+6}{6} = \frac{4-8}{-10} = \frac{3-6}{-8} \rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{3}{8}$$

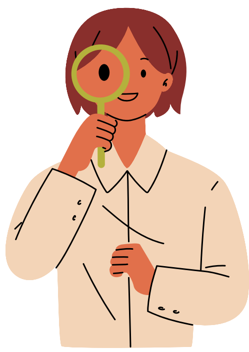
Efectivamente se cumple la desigualdad y por lo tanto podemos afirmar que las rectas son paralelas

Mediante GeoGebra confirmaremos que estas 2 rectas son coincidentes

Ec.1 $(x, y, z) = (-3,4,3) + \lambda(3,-5,-4)$

Ec.2 $(x, y, z) = (-6,8,6) + \lambda(6,-10,-8)$





Se observa que las dos ecuaciones de la recta al ser graficadas son paralelas.

Rectas secantes

Definición: Son aquellas rectas que se cortan en un punto.

Ejemplo:

Ec.1 $(x, y, z) = (-3,4,3) + \lambda(3,2,4)$

Ec.2 $(x, y, z) = (-6,8,6) + \lambda(6,-10,-8)$

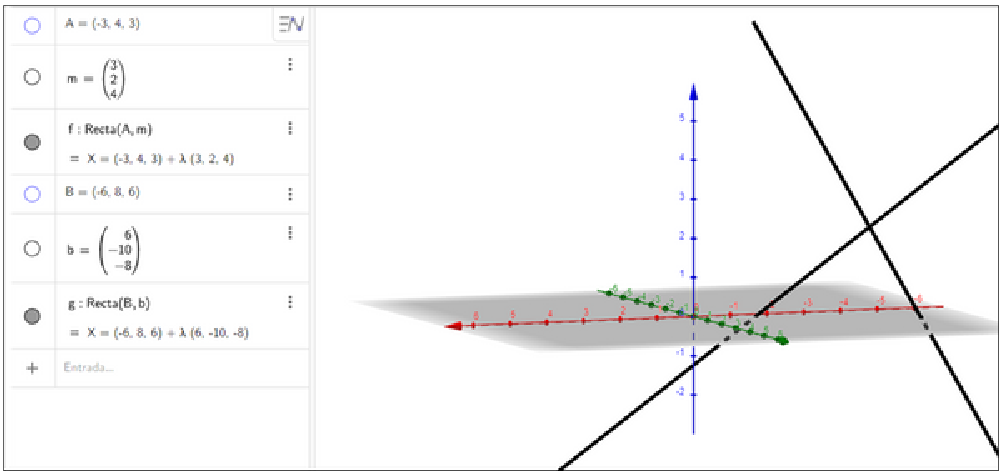
Para comprobar que estas 2 rectas son secantes, se tiene que cumplir la siguiente desigualdad

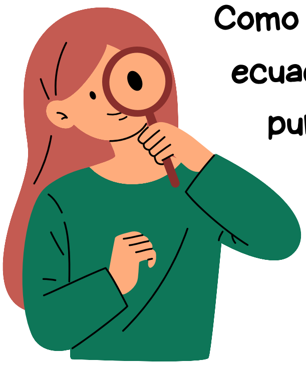
$$\frac{\vec{x}}{\vec{x}'} \neq \frac{\vec{y}}{\vec{y}'} \neq \frac{\vec{z}}{\vec{z}'}$$

$$\overrightarrow{v1} = (3,2,4) \text{ y } \vec{v}2 = (6,-10,-8)$$

$$\frac{3}{6} \neq \frac{2}{-10} \neq \frac{4}{-8} \rightarrow \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{5} \neq -\frac{1}{2}$$

Remplazando los vectores en la condición dada, vemos que se cumple la desigualdad y podemos aseverar que tenemos rectas secantes. Esto lo podemos confirmar mediante GeoGebra.





Como se observa en la gráfica, las dos ecuaciones se intersecan en un solo punto, por tanto, son secantes.

Rectas alabeadas

Definición: En el espacio tridimensional las rectas alabeadas con aquellas que presentan las siguientes características, nunca se cortan y no son paralelas por lo tanto no son coplanares.

Ejemplo:

Ec.1 $(x, y, z) = (-3{,}7{,}5) + \lambda(1{,}3{,}2)$

Ec.2 $(x, y, z) = (4{,}8{,}10) + \delta 1, -2, -4)$

Convertimos en ecuaciones paramétricas la Ec1. y la Ec.2.

Ecuación 1

$$x = -3 + \lambda$$
$$y = 7 + 3\lambda$$
$$z = 5 + 2\lambda$$

Ecuación 2

$$x = 4 + \delta$$
$$y = 8 - 2\delta$$
$$z = 10 - 4\delta$$

Ecuaciones Paramétricas

Para que las rectas sean alabeadas, se tiene que comprobar 2 opciones.

Uno: Que no seas paralelas.

Dos: Que no se corten. Si se cumple estas 2 condiciones podemos afirmar que son alabeadas.

Comprobar que no sean paralelas.

$$\frac{\vec{x}}{\vec{x}'} \neq \frac{\vec{y}}{\vec{y}'} \neq \frac{\vec{z}}{\vec{z}'}$$

Condición para que no sean paralelas

$$\overrightarrow{v1} = (1,3,2) \;\; y \;\; \vec{v}2 = (1,-2,-4)$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{3}{-2} \neq \frac{2}{-4}$$

Una vez comprobada la primera condición, se procede a comprobar que no se corten.

Comprobar que no se corten.

1 Igualamos las x, y, z de la ecuación paramétrica 1 con las x, y, z de la ecuación paramétrica 2.

$$x = x \quad ; \quad y = y \; ; \quad z = z$$

$$-3 + \lambda = 4 + \delta$$
$$7 + 3\lambda = 8 - 2\delta$$
$$5 + 2\lambda = 10 - 4\delta$$

2 Reducimos términos semejantes

$$\lambda - \delta = 7 \text{ Ec.1}$$
$$3\lambda + 2\delta = 1 \text{ Ec.2}$$
$$2\lambda + 4\delta = 5 \text{ Ec.3}$$

3 Se forma un sistema de ecuaciones y procedemos a resolver la ec.1 con la ec.2.

$$\lambda - \delta = 7$$
$$3\lambda + 2\delta = 1$$

$$\boxed{\lambda = 3, \delta = -4}$$

4 Una vez obtenido los valores de lambda y delta procedemos a sustituir estos valores en la ecuación 3, si al sustituir estos valores nos da una desigualdad esto quiere decir que no se cortan.

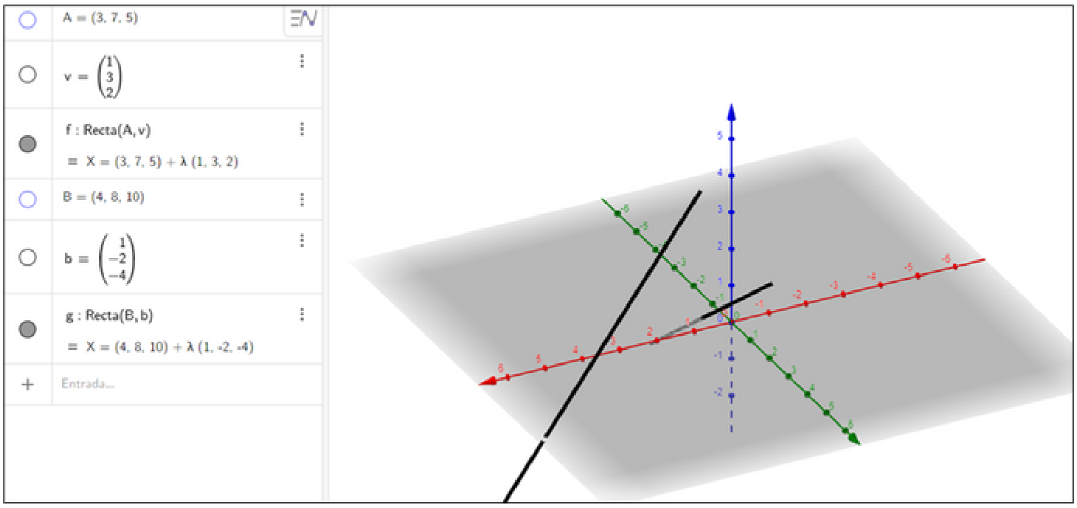
$$\lambda = 3, \delta = -4$$

$$2\lambda + 4\delta = 5 \rightarrow 2.3 + 4.-4 = 5 \rightarrow -10 \neq 5$$

Se observa que existe una desigualdad, por lo tanto, no se cortan, entonces se ha comprobado que no son paralelos, podemos concluir que son alabeadas.

Podemos comprobar por GeoGebra introduciendo las ecuaciones.

Ec.1 $(x, y, z) = (-3,7,5) + \lambda(1,3,2)$
Ec.2 $(x, y, z) = (4,8,10) + \delta 1, -2, -4)$



Como se puede observar, al ingresar las ecuaciones en su forma vectorial, se obtiene 2 gráficas, de la cual podemos decir, que estas rectas no son paralelas, ni se cortan, por lo tanto, son alabeadas.

Consolidación

El docente planteará la siguiente actividad (10min).

1. Defina con sus propias palabras:

Rectas paralelas:

sol. Son aquellas rectas que no presentan ningún punto en común nunca se llegan a cortar incluso si se prolonga hasta el infinito, tiene la misma pendiente.

Rectas secantes:

sol. Son aquellas rectas que se cortan en punto.

Rectas coincidentes:

sol. Son rectas son coincidentes si tiene un punto en común y sus vectores son paralelos.

Rectas alabeadas:

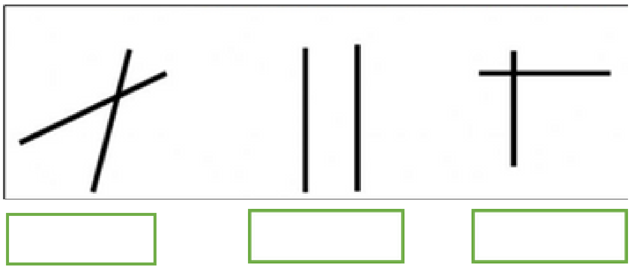
sol. En el espacio tridimensional las rectas alabeadas con aquellas que presentan las siguientes características, nunca se cortan y no son paralelas por lo tanto no son coplanares.

2.Complete el espacio en blanco:

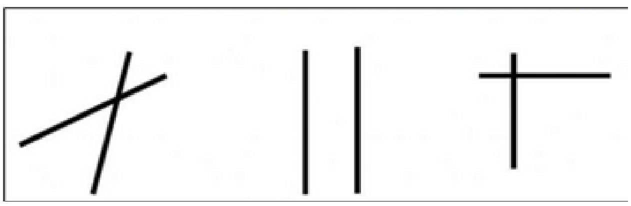
En el espacio ___________ las rectas alabeadas con aquellas que presentan las siguientes características, nunca se ______ y no son ________ por lo tanto no son coplanares.

sol. En el espacio tridimensional las rectas alabeadas con aquellas que presentan las siguientes características, nunca se cortan y no son paralelas por lo tanto no son coplanares.

3.Debajo de cada grafico colocar que tipo de rectas son :



sol.



Secantes | Paralela | Perpendicular

Evaluación

Contestar las siguientes preguntas:

1. Unir con una línea lo correcto.

a. Rectas coincidentes.
b. Rectas paralelas.
c. Rectas secantes.
d. Rectas alabeadas.

1.No presentan un punto en común.
2. Se cortan a través de un punto.
3. Presentan un punto en común.
4. Son rectas no coplanares.

Sol. (a,3; b1; c2; d,4)

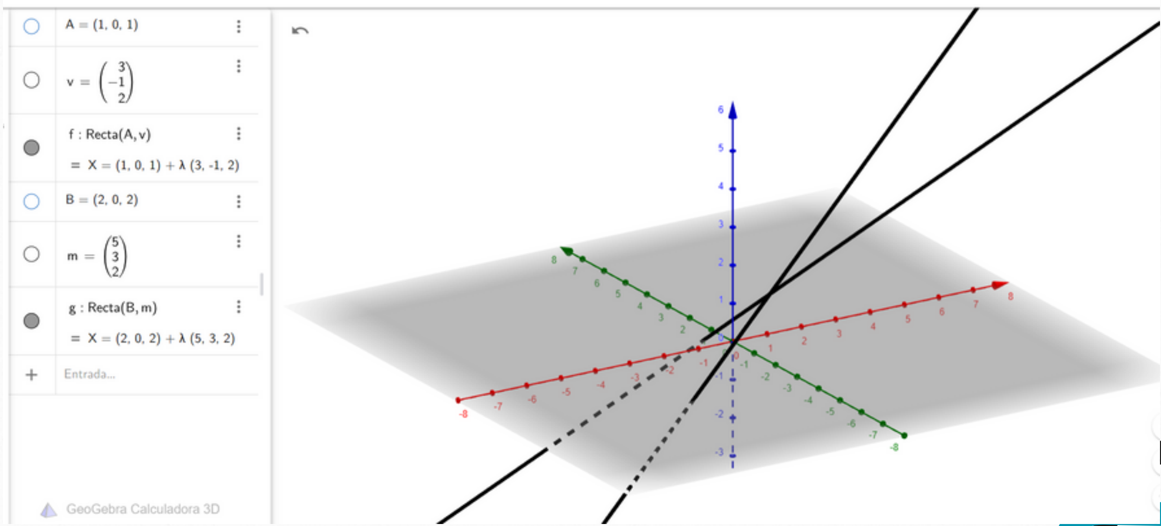
2. Encuentra la posición relativa de estas dos rectas y gráfica:

A. $(x, y, z) = (1,0,1) + \lambda(3, -1. -2)$
B. $(x, y, z) = (2,0,2) + \lambda(5,3,2)$

Sol. $\overrightarrow{v1} = (3, -1,2)$ $\quad \vec{v}2 = (5,3,2)$

$$\frac{3}{5} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{2}{2} \rightarrow \frac{3}{5} \neq -\frac{1}{3} \neq \frac{1}{1}$$

Estas dos rectas son secantes.



Guía 7

POSICIÓN DE RECTAS RESPECTO DE LA REFERENCIA

Introducción:

Es muy importe establecer un sistema de referencia ya que nos ayuda a representar la posición de un objeto en el espacio, esta posición puede ser establecida mediante sistemas de coordenadas cartesianas (x, y, z), este tema permite al estudiante desarrollar su visión espacial.

Objetivo:

Conocer las distintas posiciones que tiene una recta con respecto al origen.

Escribir y reconocer posición relativa de dos rectas a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en R3 (M.5.2.20.)

40 MIN

Anticipación

Una vez dada una pequeña introducción sobre este tema, mediante un conversatorio el profesor comenzará dando una serie de términos o palabras claves, para que el estudiante los defina con sus propias palabras y así poder dar inicio al tema posición relativa de las rectas con respecto a la referencia (10min).

Palabras claves:

Posición:
sol. Ubicación de algo en el espacio con respecto a la referencia.

Recta:
sol. Es la relación que se guarda con algo o alguien.

Vector:
sol. Es una porción o segmento de recta que tiene como características dirección, modulo, sentido, y por ende un punto de inicio y un punto final.

Recta paralela:
sol. Son aquellas rectas que nunca llegan a cortarse porque no tiene ningún punto en común, pero presentan la misma pendiente.

Recta perpendicular:
sol. Son aquellas rectas que se cortan en un punto en común y forman cuatro ángulos rectos o ángulos de 90° grados.

Recta oblicua:
sol. Son aquellas rectas que presentan la característica de no ser paralelas y no se intersecan en ningún punto.

Una vez que los estudiantes conozcan estos términos, procedemos al siguiente paso, el cual es recordar la ecuación vectorial de la recta, que es una clave importante a la hora de graficar las posiciones de la recta con respecto a la referencia.

Se les mostrará a los estudiantes las siguientes ecuaciones y ellos identificarán cual de ellas corresponde a la ecuación vectorial.

A. $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$

B. $(x, y, z) = (8,4,0) + \lambda(-9,3,9)$

C. $X = (a1 + \lambda v1)$
$Y = (a2 + \lambda v2)$
$Z = (a3 + \lambda v3)$

sol. $(x, y, z) = (8,4,0) + \lambda(-9,3,9)$

Construcción

Se finalizará con la narración propuesta en la guía N° 1 (20min).

Después de que Antonio aprendió que 2 rectas pueden tener diferentes posiciones relativas entra ellas, ahora de una conversación entre amigos en al cual tenían un partido muy importante en la noche y que todos debían ir juntos al estadio. Decidieron que la casa de Pedro seria el punto de encuentro o la referencia en donde todos deberían encontrarse ya que todos vivían en puntos diferentes de la cuidad, Antonio quedo pensativo y se preguntó ¿es posible que las rectas tengan diferentes posiciones con respecto al origen?

Y la respuesta es si.

Entonces esta interrogante se llevo a clases y el profesor comenzó con la explicación y planteo el primer caso.

Recta en el eje OX.

Esta recta tiene que estar en eje OX por la cual tiene que cumplir con las siguientes características.

Punto

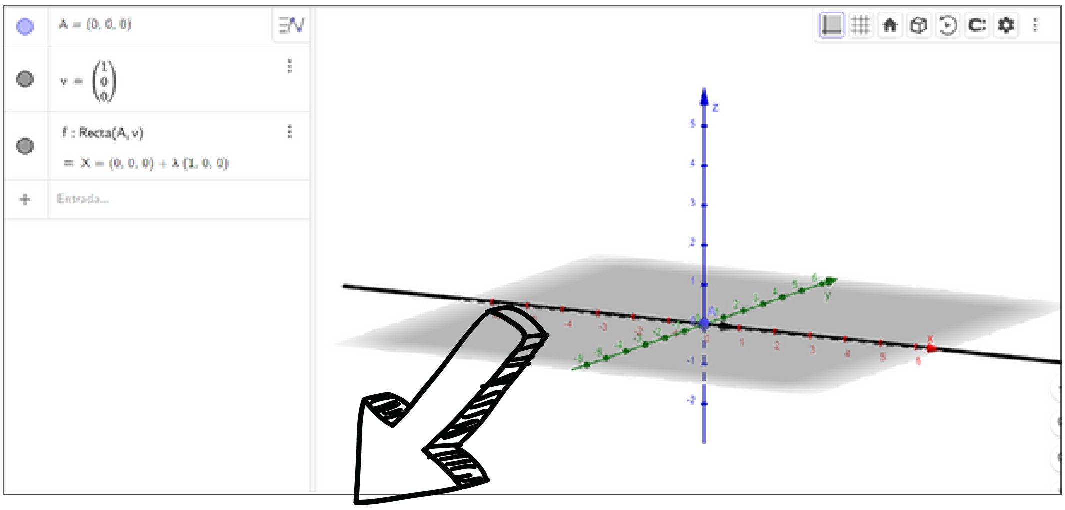
P = (0,0,0)

En el vector solo debe existir la coordenada x.

$$\vec{v} = (1{,}0{,}0)$$

Ec.1 $(x, y, z) = (0{,}0{,}0) + \lambda(1{,}0{,}0)$

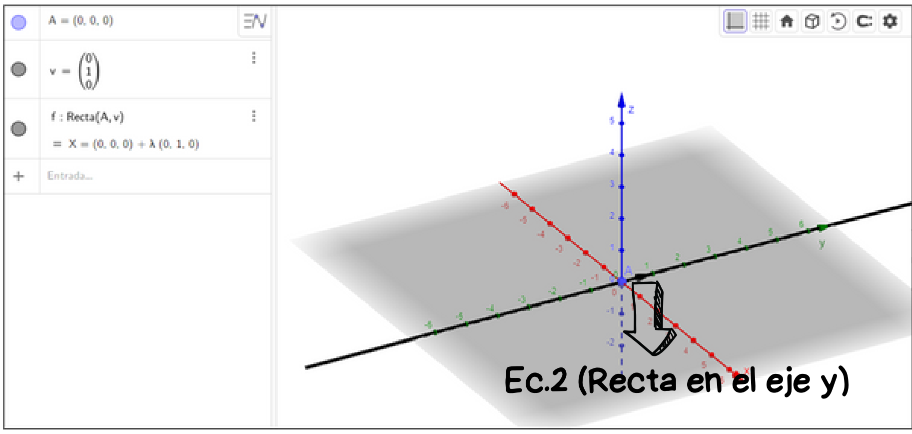
Gráfica



Ec.1 (Recta en el eje x)

Recta en el eje OY

Esta recta tiene que estar en el eje OY por la cual tiene que cumplir con las siguientes características.



Punto

P = (0,0,0)

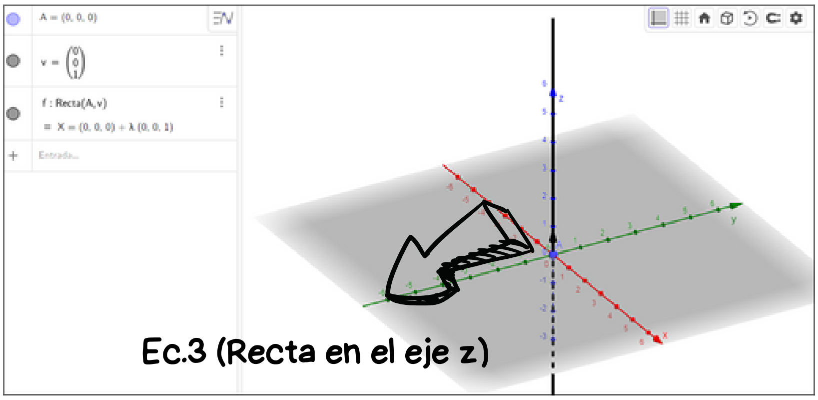
En el vector solo debe haber la coordenada y.

$$\vec{v} = (0{,}1{,}0)$$

Ecuación vectorial

Ec.2 $(x, y, z) = (0{,}0{,}0) + \lambda(0{,}1{,}0)$

Recta en el eje OZ



Esta recta tiene que ser estar en el eje OZ por la cual tiene que cumplir con las siguientes características.

Punto

P = (0,0,0)

En el vector solo debe haber la coordenada z.

$$\vec{v} = (0{,}0{,}1)$$

Ecuación vectorial

Ec.3 $(x, y, z) = (0{,}0{,}0) + \lambda(0{,}0{,}1)$

A continuación, vamos a ver las distintas posiciones de la recta que se forma paralelas a los planos con respecto al origen, a diferencia de los casos anteriores aquí si debe existir coordenadas en el punto de la ecuación vectorial.

Ejemplo:

$\vec{v} = (1{,}0{,}0)$
$\vec{v} = (0{,}1{,}0)$
$\vec{v} = (0{,}0{,}1)$

Punto (a1, a2, a3)

Rectas paralelas a los ejes XY

Esta recta que se forma paralela al plano XY tiene que cumplir la siguiente característica.

Punto

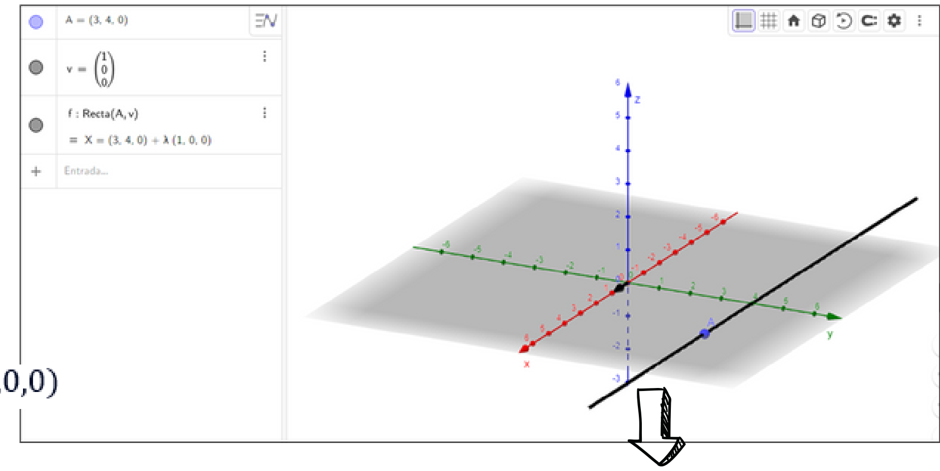
P (3, 4, 0)

En el vector debe existir la coordenada x.

$$\vec{v} = (1,0,0)$$

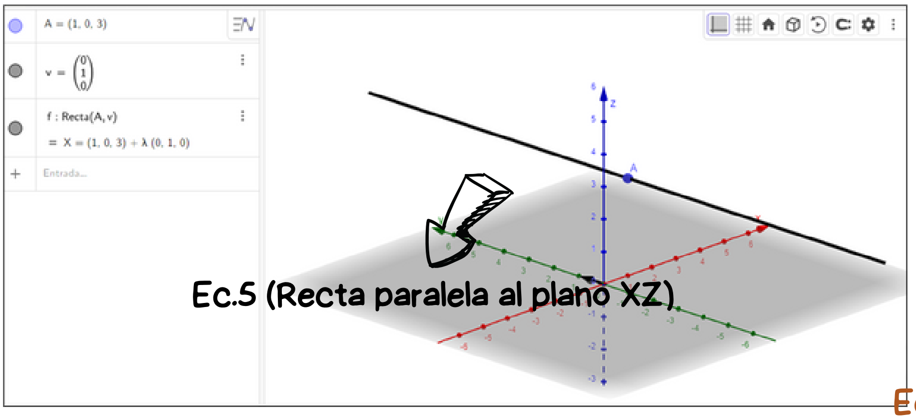
Ecuación vectorial

Ec.4 $(x, y, z) = (3,4,0) + \lambda(1,0,0)$



Ec.4 (Recta paralela a los ejes XY

Rectas paralelas a los ejes XZ



Ec.5 (Recta paralela al plano XZ)

Esta recta que se forma paralela al plano XZ tiene que cumplir la siguiente característica.

Punto

P (1, 0, 3)

En el vector debe existir la coordenada y.

$$\vec{v} = (0,1,0)$$

Ecuación vectorial

Ec.5 $(x, y, z) = (1,0,3) + \lambda(0,1,0)$

Rectas paralelas a los ejes YZ

Esta recta que se forma paralela a los ejes YZ tiene que cumplir la siguiente característica.

Punto

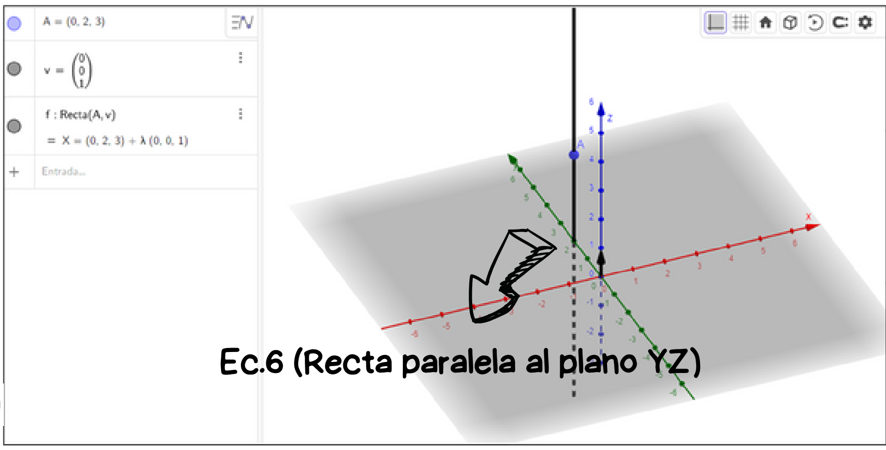
P (0, 2, 3)

En el vector debe existir la coordenada z

$$\vec{v} = (0,0,1)$$

Ecuación vectorial

Ec.6 $(x, y, z) = (0,2,3) + \lambda(0,0,1)$



Ec.6 (Recta paralela al plano YZ)

A continuación, veremos los siguientes casos, las rectas que son paralelas a los planos de los ejes coordenados presentan la característica de que no comparten ningún punto en común como lo veremos en los siguientes ejemplos.

Recta paralela al plano XZ

La característica de esta recta es que es paralela al plano x, z donde la coordenada y del vector debe ser 0, y la ecuación del plano y = 0 .

Punto

A (1, 5, 2)

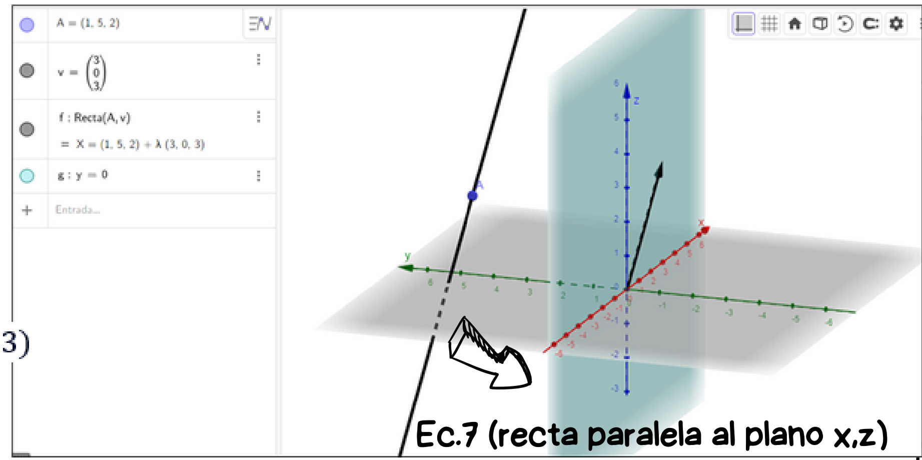
En el vector debe existir la coordenada x, z

$\vec{v} = (3,0,3)$

Ecuación vectorial

Ec.7 $(x, y, z) = (1,5,2) + \lambda(3,0,3)$

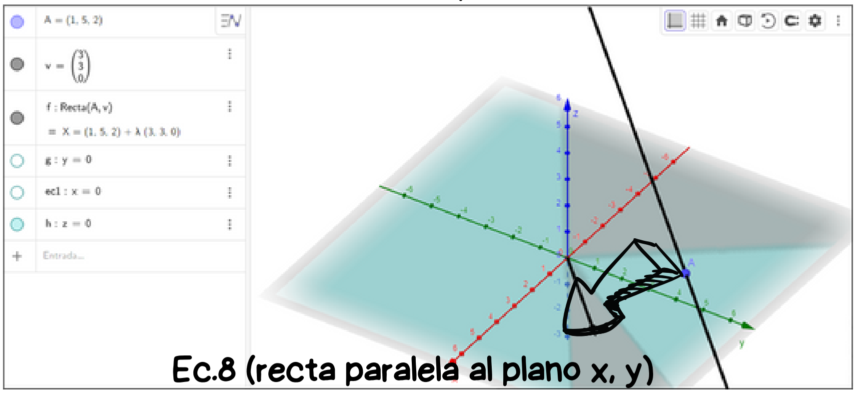
Ecuación del plano Y = 0



Ec.7 (recta paralela al plano x,z)

Recta paralela al plano XY

Ecuación del plano z = 0



Ec.8 (recta paralela al plano x, y)

La característica de esta recta es que es paralela al plano x, y donde la coordenada y del vector debe ser 0, y la ecuación del plano z = 0

Punto

A (1, 5, 2)

En el vector debe existir la coordenada x, y

$\vec{v} = (3,3,0)$

Ecuación vectorial

Ec.8 $(x, y, z) = (1,5,2) + \lambda(3,0,3)$

Recta paralela al plano YZ

La característica de esta recta es que es paralela al plano x, y donde la coordenada y del vector debe ser 0, y la ecuación del plano x = 0

Punto

A (1, 5, 2)

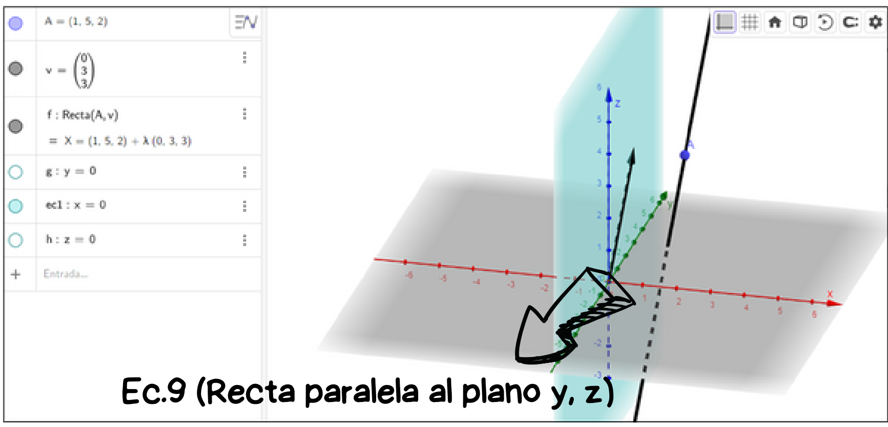
En el vector debe existir la coordenada y, z.

$\vec{v} = (0,3,3)$

Ecuación vectorial

Ec.9 $(x, y, z) = (1,5,2) + \lambda(0,3,3)$

Ecuación del plano x = 0



Ec.9 (Recta paralela al plano y, z)

Consolidación

El docente enviará las siguientes actividades (10min).

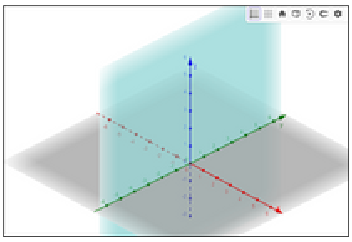
1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta en el eje OX?

A. $(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0)$ B. $(x, y, z) = (0,0,1) + \lambda(0,1,0)$ C. $(x, y, z) = (0,0,1) + \lambda(0,0,0)$

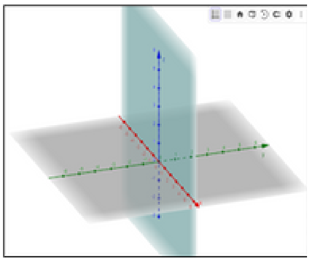
sol. $(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0)$

2.Identifique a que tipo de ecuación corresponden las siguientes gráficas:

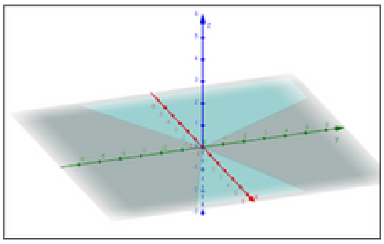
1.



2.



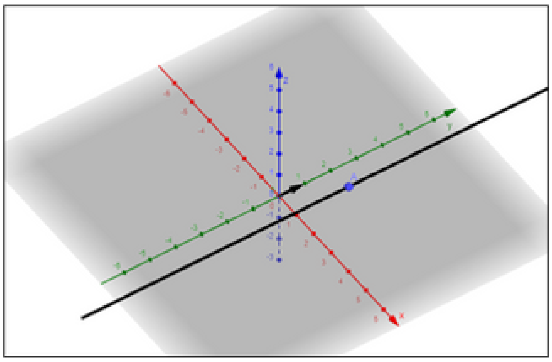
3.



sol.
1. x=0
2. y=0
3. z=0

3. Dada la siguiente ecuación, grafique en GeoGebra y mencione si está en los ejes, si es paralela a los ejes o si es paralela al plano:

Ec: $(x, y, z) = (4,0,4) + \lambda(0,1,0)$



sol. Esta recta es paralela a los ejes x, z

Evaluación

1. Dado los siguientes puntos y vectores graficar en GeoGebra las siguientes rectas, identificar a que caso pertenece y construir la ecuación.

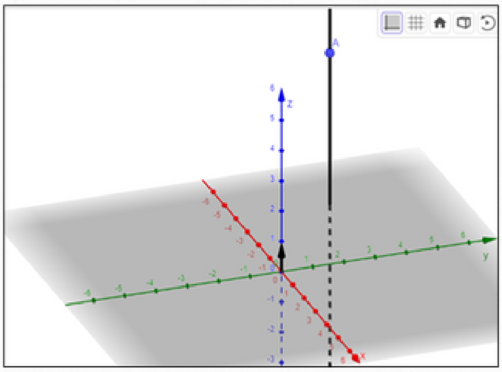
A. P (-4,3,1) v= (0,0,1)

sol.

Paralela a los ejes YZ.

Ecuación:

$$(x, y, z) = (-4,3,1) + \lambda(0,0,1)$$



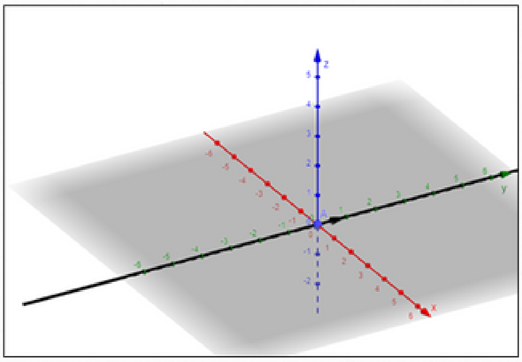
B. P (0,0,0) v= (0,1,0)

sol.

Recta en el eje y

Ecuación:

$$(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0)$$



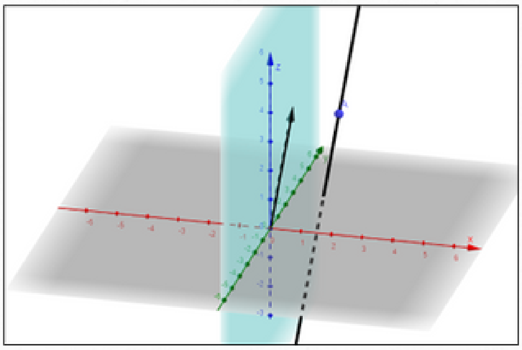
C. P (1,5,2) v= (0,3,3)

sol.

Recta paralela al plano yz.

Ecuación:

$$.(x, y, z) = (1,5,2) + \lambda(0,3,3)$$



5 Conclusiones.

La geometría como la matemática tiene un papel muy amplio en los diferentes campos de la vida diaria, como la arquitectura, pintura, ingeniería, lo que se podría decir que son de gran ayuda en la sociedad, lo que conlleva que haya una enseñanza satisfactoria al momento de impartir matemáticas y geometría. El gran auge de recursos didácticos, programas matemáticos, tics, posibilita una mejora por parte del docente, pero la gran mayoría carece o sigue careciendo de estos enfoques a la hora de enseñar tanto matemática y geometría, provocando aún en el siglo XXI un aprendizaje tradicionalista, ya que hasta el día de hoy se sigue impartiendo clase de geometría de manera repetitiva.

A los docentes entrevistados les gustaría tener una guía que les ayude al momento de impartir tema de rectas en el espacio tridimensional, llegando a destacar el uso del software GeoGebra, ya que brinda una variedad de herramientas que posibilita la enseñanza de la geometría, a más de eso, el pizarrón no ayuda a graficar en 3 dimensiones; por lo que este software mejoraría el entendimiento del estudiante al observar gráficas que en el momento no se pueden visualizar con determinación y además facilitaría el trabajo al docente.

Las TIC aportan a una nueva forma de enseñanza y puede influir en el estudiante si el docente hace de ellas un recurso tecnológico diario. Con esta propuesta lo que se desea lograr es que el docente tenga un nuevo enfoque a la hora de la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional, además de dejar atrás las clases repetitivas y tradicionalistas que se viene llevando desde siglos atrás, no hay porque hacer de la matemática y la geometría una materia aburrida donde los estudiantes teman aprender por la gran complejidad que para algunos representa.

Hay diferentes formas de enseñanza, pero lo que brinda esta propuesta es un enfoque nuevo e innovador que vale la pena adquirir en nuestra forma de trabajo, además lleva a cabo una metodología nueva de enseñanza que hará que las nuevas generaciones tomen una concepción distinta de la matemática.

6 Referencias

Berni, L., y Olivero, F. (2019). *La investigación en la praxis del docente: Epistemología didáctica constructivista.* Revista Espacios, 40(12).

Bressan, M Bogisic, B., y Crego, K. (2006). *Razones para enseñar geometría en la educación básica. Mirar, construir, decir y pensar....* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Bruner, J. S. (1960). *The Process of education.*

Camacho. P. (2012). *El valor del aprendizaje incidental en la toma de decisión y control motor en baloncesto*. /https://scielo.isciii.es/pdf/cpd/v12s1/art03.pdf

Castellanos, D., Castellanos, B., Llivina, M. J., y Silverio. (2001). *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador.* La Habana: ISPEJV. https://www.redalyc.org/journal/3606/360670689008/html/

Cedeño, M. (2004). *El docente preescolar y la importancia de optimizar los materiales didácticos de rehúso.*

Cotic, N. S. (2014). *GeoGebra como puente para aprender matemáticas*. Recuperado de: www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1179.pdf

Feijoo, R. M. (2004). *La guía didáctica, un material educativo para promover el aprendizaje autónomo. evaluación y mejoramiento de su calidad en la modalidad abierta y a distancia de la utpl.* Obtenido de: /http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:20639/guia_didactica.pdf

Fernández, y Bravo. (2003). *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos.*

Ferreiro, R. (2008). *Más allá de la teoría: El aprendizaje cooperativo: el constructivismo social.*

Folgueiras, P. (2016). *Técnica de recogida de información: La entrevista.* Obtenido de: entrevista pf (ub.edu)

Fortoul Ollivier, M. B. (2008). *La concepción de la enseñanza*. https://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v30n119/v30n119a5.pdf

Gallo Á. (2021). *El aprendizaje de las matemáticas a partir de las teorías del conductismo y la psicología de la Gestalt.*

García Aretio L. (2009). *La guía didáctica*. Disponible en: http://www.uned.es/catedraunesco-ead/editorial/p7-2-2009.pdf

González, J. V., Gutiérrez, R. D., y Sandoval, M. (2017). *Desarrollo didáctico con GeoGebra como herramienta para la enseñanza en aplicaciones de mecanismos y diseño de maquinaria dentro de la ingeniería.* Disponible en: http://revistasomim.net/congreso2017/articulos/A5_175.pdf

Hohewarter. (2019). *El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática*.

Izurieta, H. (2015). *El conductismo en las TIC*. Revista Rupturas. Retrieved February 2, 2023, from https://www.revistarupturas.com/el-conductismo-en-las-tic.html

Limongi Izaguirre, M. C. (2017). *Métodos Conductistas en la Escuela del siglo XXI*. http://repositorio.uees.edu.ec/bitstream/123456789/2358/1/pdf-PAPER-CLAUDIA.pdf

López y Fachelli (2015). *Métodos de la investigación social cuantitativa*. Universidad Autónoma de Barcelona. metinvsoccua_cap2-4a2017.pdf

López. V. (1998). El aprendizaje intencional y los entornos informatizados, medios para el desarrollo de las habilidades metalingüísticas: un paso hacia adelante en el área de didáctica de la lengua y la literatura. https://core.ac.uk/download/pdf/61902525.pdf

Martín Guillén, Y. (2017). *Una colección de problemas geométricos que contribuyen a la formación de la cultura estético-artística mediante la utilización de GeoGebra (ponencia). XI Taller Internacional Científico Metodológico de la Cátedra "DULCE MARÍA ESCALONA".* La Habana, Cuba: Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. https://www.redalyc.org/journal/3606/360670689008/html/.

Navarrete, J. M. (2004). *Sobre la investigación cualitativa. Nuevos conceptos y campos de desarrollo.* Obtenido de: extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual data/publicaciones/inv_sociales/n13_2004/a15.pdf.

Penteado, J. (1982). *Didactica y practica de la enseñanza*.

Pradas, C. (2018) *La teoría de B.F. Skinner: conductismo y condicionamiento operante.* Disponible: https://www.psicologia-online.com/la-teoria-de-b-f-skinner-conductismo-y-condicionamiento-operante-4155.html

Puentes, C.(2019). *Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica.*

Rossell ,C. (2016). *Teorías del Aprendizaje.* Obtenido de https://teoriasdeaprendizajesite.wordpress.com/2016/09/04/cognitivismo/

Sarmiento Santana, M. (2007). *Teorías de la Enseñanza. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS NTIC. UNA ESTRATEGIA DE FORMACIÓN PERMANENTE.* https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/8927/D-TESIS_CAPITULO_2.pdf

Segura, M. (2005). *El ambiente y la disciplina escolar en el conductismo y el constructivismo*. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación",* (5) 1-18.

Torres Cañizales, P. C., y Cobo Beltrán, J. K. (2017, 01 18). *Tecnología educativa y su papel en el logro de los fines de la educación.* educere, 21, 31-40. https://www.redalyc.org/pdf/356/35652744004.pdf

Williams Bailey, L., S. de Peralta, M., y Marín Aparicio, J. (2020). *El papel del docente frente a las nuevas formas de aprendizaje.* Centros, 10(1). http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/228/2281844006/2281844006.pdf.

Zapata ,M. (2015). *Teorías y modelos sobre el aprendizaje en entornos conectados y ubicuos:* https://www.redalyc.org/pdf/5355/535554757006.pdf

7 Anexos

Anexo A. Cuestionario para la entrevista a docentes.

PREGUNTAS

1. ¿Cuánto tiempo lleva enseñando matemáticas en su vida profesional?
2. ¿Cuánto tiempo lleva enseñando matemáticas en tercero de bachillerato?
3. ¿Qué recursos a utilizado para la enseñanza de las matemáticas?
4. ¿Ha escuchado sobre los recursos didácticos digitales? ¿Cuáles?
5. ¿Conoce usted el software GeoGebra?
6. ¿Ha usado GeoGebra para impartir sus clases de geometría?
7. ¿Cree usted que la enseñanza del tema rectas en el espacio tridimensional mediante el software GeoGebra mejoraría el conocimiento en los estudiantes?
8. ¿Le gustaría contar con una guía didáctica para la enseñanza de rectas en el espacio tridimensional mediante el software GeoGebra?