Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

Guía didáctica para el aprendizaje de funciones cuadráticas a través de la modelización matemática

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física

Autor:

Juan José Fajardo Heredia

Director:

César Augusto Trelles Zambrano

ORCID: 0000-0002-4096-8353

Cuenca, Ecuador

2023-08-31

Resumen

La modelización matemática en la educación ha demostrado ser de mucha ayuda para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes; aun así, la aplicación de la misma por parte del profesorado es aún limitada, a pesar de que el propio currículo ecuatoriano menciona la modelización matemática como parte de las destrezas dentro del área de matemática. La modelización matemática permite a los estudiantes conectar con la vida real, con el entorno en el cual se desarrollan, lo que permite comprender la verdadera importancia de las matemáticas en la sociedad. Por ello, el presente trabajo desarrolla un marco teórico acerca del tema mencionado, en que consiste, ciclos, enfoques y la importancia de estas actividades para un aprendizaje significativo. Además, a través de un análisis de contenido cuantitativo se analizan las distintas actividades que realizan los estudiantes, con el fin de conocer la presencia o ausencia de la modelización matemática. La modelización sirve para representar mediante un modelo matemático un fenómeno o suceso de la vida real, dicho modelo puede ser una función cuadrática, la cual representa una gran importancia en la sociedad, por lo que es necesario que este tema sea comprendido de manera significativa en los estudiantes. Por lo expuesto, con la investigación realizada se propone una guía didáctica que ayude a los estudiantes en el tema de funciones cuadráticas a través de la modelización matemática.

Palabras clave: modelización sucesos, aprendizaje significativo, vida real

Abstract

Mathematical modeling in education has proven to be very helpful in achieving significant learning in students; even so, its application by teachers is still limited, even though the Ecuadorian curriculum itself mentions mathematical modeling as part of the skills within the area of mathematics. Mathematical modeling allows students to connect with real life, with the environment in which they develop, which allows them to understand the true importance of mathematics in society. For this reason, the present work develops a theoretical framework about the mentioned topic, what it consists of, cycles, approaches, and the importance of these activities for meaningful learning. In addition, through a quantitative content analysis, the different activities carried out by the students are analyzed, to know the presence or absence of mathematical modeling. Modeling is used to represent a phenomenon or event in real life through a mathematical model, said model can be a quadratic function, which represents great importance in society, so it is necessary that this topic is understood in a significant way in the students. For these reasons, with the research carried out, a didactic guide is proposed to help students in the subject of quadratic functions through mathematical modeling.

Keywords: event modeling, meaningful learning, real life

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Dedicatoria

Este trabajo de titulación se lo dedico a mis padres, quienes siempre se han esforzado por brindarme lo mejor, por cuidarme, motivarme y estar pendientes de mí en todo momento, este trabajo y todo lo que he logrado hasta ahora no sería posible sin ellos.

A mis hermanos, Manuel y María, que siempre se han preocupado de su hermano menor en todo momento y llenarme de muchas alegrías día a día.

A mi tío Julio, quien también me ha cuidado desde pequeño, ha velado por mi bienestar y por darme siempre su incondicional ayuda.

Para toda mi familia que me ha estado acompañando y alentando en todo este proceso, para ellos y por ellos todo mi esfuerzo y dedicación.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por la vida de todas mis personas queridas, por cada día que me bendice dándome la oportunidad de seguir compartiendo con las personas que amo y por ayudarme a cumplir con éxito esta etapa de mi vida.

De manera especial, a mis padres, que me han estado ayudando día tras día, por sus enseñanzas y lecciones, por ser los promotores de mi vida y siempre creer en mí. También a mis hermanos que a lo largo del camino siempre me han apoyado, por aconsejarme y velar por mí.

Este párrafo va dirigido para una persona muy especial, Paola, quien me ha estado apoyando durante todo este camino, impulsándome día tras día, por confiar en mí y ser mi soporte. Gracias por todo lo que has hecho por mí, siempre estarás en mi corazón.

Al Dr. César Trelles, que con su experiencia y conocimiento me ha ayudado a lo largo de la carrera, ha sido paciente y ha estado pendiente, apoyándome incondicionalmente en el proceso del trabajo de titulación.

Por último, a todos los maestros que me han ensañado durante esta etapa, no solamente en aspectos teóricos o prácticos, también con lecciones para la vida, gracias por siempre dar lo mejor de ustedes, me llevo todas sus enseñanzas.

Introducción

Desde la antigüedad las matemáticas han formado parte de la vida del ser humano, desde el área de un terreno, hasta problemas actuales como las construcciones de edificios. No por nada, es una de las áreas de mayor importancia en la sociedad, porque permite predecir fenómenos, ayuda a resolver problemas cotidianos y explicar situaciones.

Por ello, es necesario que las generaciones jóvenes entiendan el valor tan importante de las matemáticas. El estudio de la asignatura debe tener como objetivo despertar el interés y la motivación por aprender por parte del estudiante, no solamente limitarse a los cálculos, ir más allá, entender su aplicación en la sociedad y su conexión con la vida real.

Para conseguir un aprendizaje diferente, de valor y significativo para el estudiante, se hace presente la modelización matemática, proceso que permitirá a los estudiantes conectar las matemáticas con la vida real, al resolver un problema o suceso cotidiano o predecir algún fenómeno. Esta metodología hará que el estudiante descubra la utilidad de las matemáticas, reflexionará y utilizará sus experiencias diarias, investigará con el fin de adquirir y construir nuevos conocimientos, llegando a un aprendizaje significativo.

Con lo expuesto anteriormente, la presente investigación tratará la modelización matemática, su presencia en las aulas de clase en Ecuador, en los niveles de Bachillerato General Unificado (BGU), su utilización y se propondrá una guía didáctica que ayude a su aplicación.

En el primer capítulo se aborda toda la fundamentación teórica referente a la modelización matemática, el cómo se trabajan sus actividades y la importancia para el aprendizaje significativo. Además, se trata el tema de funciones cuadráticas, que serán los modelos que se obtendrán de dichas actividades.

Mas adelante, en un capítulo segundo, se tratará la metodología utilizada, el enfoque de la investigación para conocer la presencia o ausencia de la modelización matemática en los niveles de BGU, las actividades que realizan los estudiantes en el tema de funciones cuadráticas y se obtendrán conclusiones a partir de ello.

Por último, en el capítulo tercero, se propondrá una guía didáctica basada en la modelización matemática para el desarrollo de funciones cuadráticas, con el fin de brindar un instrumento que ayude el aprendizaje significativo.

Para concretar el trabajo correctamente, se ha propuesto los siguientes objetivos:

Objetivo General:

Diseñar una guía didáctica de modelización matemática para el aprendizaje de funciones cuadráticas para el nivel de bachillerato general unificado.

Objetivos Específicos:

- Fundamentar la modelización matemática como una metodología que contribuye al aprendizaje significativo.
- Analizar las actividades de aprendizaje planteadas a los estudiantes en el tema de funciones cuadráticas en los libros de texto ecuatorianos, con el fin de descubrir la presencia o ausencia de la modelización matemática.
- Diseñar actividades basadas en modelización matemática con el propósito de mejorar el aprendizaje de funciones cuadráticas.

1. CAPÍTULO I Fundamentación Teórica

1.1. Constructivismo

El Constructivismo es una corriente pedagógica en donde se considera al conocimiento y a la personalidad de los individuos como características que están en permanente construcción debido a que dan respuesta a un proceso continuo de interacción entre sentimientos, aspectos cognitivos y aspectos sociales. Uno de los principales representantes de esta teoría es el psicólogo suizo Jean Piaget, y ha sido aplicada a diferentes campos, entre ellos, la educación (pedagogía).

Carretero (2005) indica que la persona, con sus aspectos cognitivos y sociales, junto con las emociones que influyen en su comportamiento, no se originan únicamente por su entorno o por sus características internas, sino que se forman de manera individual a medida que interactúa con esos elementos, construyéndose de manera continua. El conocimiento no se limita a ser una mera reproducción de la realidad, sino que es el resultado de la capacidad constructiva del ser humano. Mediante la utilización de los esquemas previos que ha adquirido a través de su interacción con el entorno, la persona genera y desarrolla su propio conocimiento (Carretero, 2005).

Piaget, basado en sus investigaciones, define al constructivismo como: "El sujeto interactúa con la realidad, construyendo su conocimiento y, al mismo tiempo, su propia mente. El conocimiento nunca es copia de la realidad, siempre es una construcción" (Serulnikov y Suárez, 2001, p. 126).

La teoría de Piaget indica como el individuo ha ido evolucionando sus esquemas, capacidades y conocimiento a lo largo de las distintas edades. Dicha teoría expone que el desarrollo cognitivo puede entenderse como una adquisición sucesiva de estructuras lógicas cada vez más complejas que resultan en situaciones que el sujete será capaz de ir resolviendo a medida que crece. Los estadios se consideran como estrategias diversas que corresponden a la manera en la que la persona tiene que enfocar los problemas como a su estructura (Huillca, 2008).

El paso entre etapas no es abrupto, debido a que en cada una de ellas hay una fase de preparación y otra en la que se completan los logros de esa etapa. Las etapas o estadios que define Piaget son: el estadio sensorio – motor, el estadio preoperacional, el estadio de las operaciones concretas y el estadio de las operaciones formales. El estadio de las operaciones formales hace referencia a la edad de 12 años en adelante, es decir, en la adolescencia. En esta etapa el sujeto es capaz de pensar de forma abstracta y reflexiva y también de analizar la validez intrínseca de un argumento (Linares, 2007).

El constructivismo enlaza lo cognitivo y lo social, ve al estudiante como un ser completo e integrado en una comunidad, aspecto que le permitirá adquirir habilidades, destrezas, actitudes y valores que serán de ayuda en un su entorno, permitiéndole un desenvolvimiento pleno dentro de la sociedad que le toque vivir (Guerra, 2020).

Como se puede evidenciar, el constructivismo busca que los estudiantes construyan su propio conocimiento mediante experiencias y conocimientos que ya se conocen e involucrarlos en la sociedad en la que viven. La modelización matemática es una estrategia que permitirá conectar al estudiante con su conocimiento existente y con el entorno en el que se desenvuelve, permitiendo construir y adquirir nuevos conocimientos.

1.2. Modelización Matemática

Una de las riquezas del idioma español radica en la multiplicidad de significados para determinados conceptos. Tal es el caso de modelización, modelación e incluso modelaje; estos dentro de un contexto educativo y matemático. Giordano, Weir y Fox (citados por Villa, 2007), definen el "modelo matemático" como: "una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del "mundo-real". Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales" (p. 66).

Según Gómez (como se citó en Sierra et al., 2011): "La modelización matemática consiste en formular un problema real en términos matemáticos, resolverlo si es posible e interpretar los resultados en los términos del problema y de la situación estudiada". La modelización matemática se presenta como una estrategia didáctica y pedagógica que implica resolver problemas reales de forma continua, estrechamente vinculados a situaciones de la vida diaria. Al emplear esta técnica en el aula, los estudiantes adquirirán habilidades para construir conceptos matemáticos a partir del proceso de modelización. A través de esta práctica, aprenderán a desarrollar pensamiento crítico, analizar información y establecer conexiones entre diferentes ideas relacionadas con los conocimientos matemáticos. (Bejarano, 2016).

Alsina et al. (2007), define a la modelización matemática como una metodología adecuada para emular en el aula los procesos por los cuales la ciencia establece las bases matemáticas para predecir fenómenos o dar explicación a hechos de la vida real.

En este sentido, un modelo matemático es una representación abstracta que simplifica el funcionamiento de un objeto o describe una porción de la realidad que deseamos entender. La modelización matemática se convierte en un enfoque sistemático para construir modelos matemáticos que capturen diferentes conceptos, de modo que reflejen situaciones reales dentro de un contexto específico. (Pavón, 2021).

El propósito principal de introducir la modelización matemática en el aula es fomentar el desarrollo de habilidades de los estudiantes. Esta práctica contribuye a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos aplicados en un contexto particular, así como en otros contextos y áreas de conocimiento. La modelización matemática se presenta como una estrategia de aprendizaje que estimula el pensamiento matemático, ya que los estudiantes, utilizando los conceptos matemáticos aprendidos, exploran y analizan situaciones reales, planteando reflexiones y posibles soluciones a problemas. En este contexto, se entiende como modelación matemática la actividad realizada en las clases de matemáticas que se basa en la actividad científica de la modelización matemática.

La modelación matemática no solo es una herramienta para desarrollar conceptos, sino que también se convierte en una estrategia que permite comprender un concepto matemático dentro de un "micromundo" específico, que está lleno de relaciones y significados. Esta estrategia prepara al estudiante para adoptar una actitud diferente al enfrentarse a problemas en un contexto real, fomentando su capacidad de hacer preguntas y abordar los desafíos de manera más efectiva (Villa et al., 2008). En resumen, este proceso se desarrolla como una herramienta en el aprendizaje de Matemática que proporciona una mejor comprensión de los conceptos, paralelamente, constituye una herramienta motivadora de la clase para resolver situaciones problémicas que se puedan presentar.

Arias y Deulofeu (2019) afirman que mediante actividades de modelización matemática los estudiantes logran la apropiación, la categorización de la información y transforman el aula de clase en un espacio de interacción. Además, indican que el resultado es que el estudiante logra asumir un rol activo en el proceso de aprendizaje, mientras que el docente se convierte en un agente facilitador, que incentiva el trabajo en equipo como estrategia para suprimir la presión, externalizar los significados y construir conceptos comunes desde roles de conflicto y apoyo, elementos importantes en el aprendizaje cooperativo.

La modelización matemática se convierte en una metodología que forma en competencias cruciales para el entendimiento y la simplificación de la realidad, situación que se fortalece significativamente en el estudiante cuando comprende que los aprendizajes adquiridos en su experiencia formativa tienen aplicación práctica en su diario vivir. Cuando el estudiante encuentra que su conocimiento es relevante para la sociedad, se estimula a seguir aprendiendo y a profundizar sobre lo aprendido por lo que, la modelización matemática también tiene un efecto motivacional en el alumno (Arias y Deulofeu, 2019).

Aparisi y Pochulo (2013) en una investigación realizada a profesores, definen ventajas y desventajas que puede presentar la implementación de actividades de modelización matemática dentro del aula, algunas de las ventajas son:

- La modelización matemática desarrolla la independencia del estudiante, el descubrimiento autónomo y la autogestión del propio aprendizaje.
- El estudiante tiene la libertad de realizar una búsqueda crítica de la información, tomar decisiones, intercambiar ideas, opinar, equivocarse, entre otros.
- El trabajo matemático en el aula toma relevancia al relacionar lo que se descubre con la vida real, el estudiante construye su propio conocimiento y confianza.

En cuanto a las desventajas que pueden presentar las actividades de modelización matemática, podemos encontrar:

- La modelización matemática, al ser una actividad abierta necesita de un tiempo considerable, para llevar a cabo orientaciones y guiar al alumno, la planificación de la actividad, etc., y los docentes no cuentan con el tiempo necesario para realizar actividades abiertas, ya sea porque hay que avanzar con varios temas, existen otras prioridades por atender, o por la exigencia del mismo currículo.
- Para desarrollar una actividad de modelización matemática de excelencia, es necesario contar con el apoyo de herramientas, como pudieran ser: computadoras para facilitar la búsqueda de información, disponibilidad de internet, conocimiento en programas, entre otros, y no todas las aulas cuentan con el equipamiento necesario.
- A lo largo de los años ha primado un modelo tradicional que genera seguridad al docente, pues primero explica la teoría y luego se resuelven ejercicios. El trabajo con modelización pone al profesor en una zona de incertidumbre, donde no necesariamente se saben todas las respuestas ni los posibles acercamientos y descubrimientos que realizarán los alumnos.

El modelado como método para relacionar la matemática con la vida cotidiana en el proceso educativo se ha demostrado que es indudablemente útil e incluso siendo necesario, el modelado motiva e incentiva a los alumnos en el proceso de aprendizaje, encontrando nuevos puntos de vista y descifrando nuevas perspectivas matemáticas (Gallart et al, 2019). Complementando lo anterior, se sabe que el aprendizaje por investigación propia puede llegar a ser positivo para los alumnos de las matemáticas y relacionarlos en un contexto de la vida real refuerza la idea de la aplicación de modelos matemáticos (Sala et al., 2021).

1.2.1 Proceso de la Modelización Matemática

Varios autores (Brito et al, 2011; Cervantes, 2015; Vega y Ramírez, 2022) coinciden en que el proceso de modelización matemática se puede describir y sintetizar mediante cuatro pasos que permitirán el correcto desarrollo de la actividad:

1. Estudio de la situación real: consiste en comprender lo mejor posible la situación o problema planteado, para ello es conveniente conocer o investigar sobre las definiciones presentes, identificar con claridad las preguntas a responder, reconocer los datos, entre otros.
2. Elaboración del modelo matemático: en el cual se involucra netamente la matemática. Es necesario poder simplificar y sintetizar datos del problema, separar las distintas variables involucradas y extraer lo más relevante y sencillo. En este proceso se tiene libertad de escoger el camino que el estudiante crea correcto, pueden basarse en modelos ya existentes o generar su propio modelo.
3. Solución del modelo: los modelos matemáticos más sencillos son aquellos que son expresados mediante cualquier función. Por lo general, se resuelven de manera analítica, pero también es posible que solo se puedan realizar análisis cualitativos. En ambas circunstancias, se deberán generar soluciones que ayudarán a responder el problema real.
4. Validación del modelo: cabe mencionar, que no hay una respuesta “correcta” en concreto, pues cada estudiante podría tomar un camino diferente. Para validar el modelo se parte de las soluciones y se contrastan con datos del problema original e información conocida al respecto. Si existe una estrecha relación entre el modelo y datos reales, se concluye que el modelo es aceptable, caso contrario se puede volver a pasos anteriores para ajustar parámetros o variables.

1.2.2 Ciclos de la Modelización

El modelo matemático se puede entender como la relación que existe entre objetos netamente matemáticos con una situación o entorno de naturaleza no matemática (Blomhøj, 2008). Y es mediante esta relación que la modelización requiere de un proceso. Existen varias formas de explicar el proceso de la modelización matemática según varios autores. A continuación, se detallarán algunas de ellas.

Blomhøj (2008) ve a la modelización matemática como todo un proceso que requiere de los siguientes sub - procesos:

(a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.

(b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e idealización de estas para hacer posible una representación matemática.

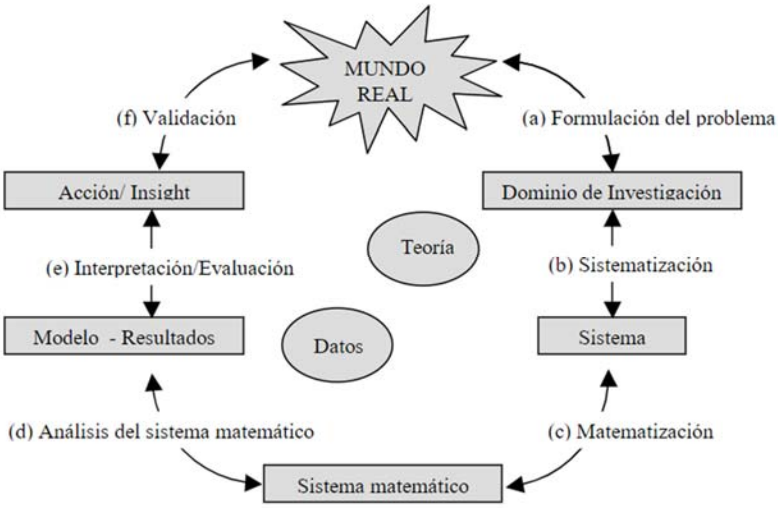
(c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones. (e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

(f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida (Blomhøj, 2008, p. 23).

Figura 1

Ciclo de modelización de Blomhøj

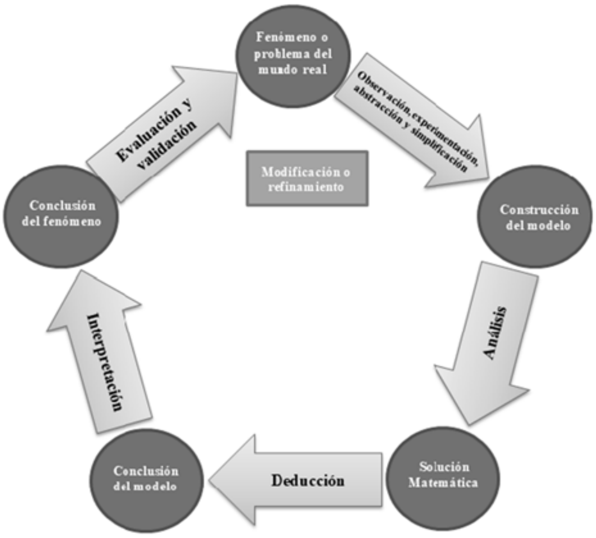


Recuperado de Blomhøj, (2008, p. 24).

Villa (2007), entiende a la modelización como una herramienta de clase dentro del área de matemática. El modelo se utiliza con la finalidad de crear conocimiento matemático y despertar el interés al aplicar soluciones matemáticas dentro de un contexto conocido por el estudiante. También, considera a la modelización como una herramienta que permita la representación de situaciones o fenómenos reales, que será desarrollada a través de etapas representadas a través del siguiente ciclo:

Figura 2

Ciclo de modelización de Villa



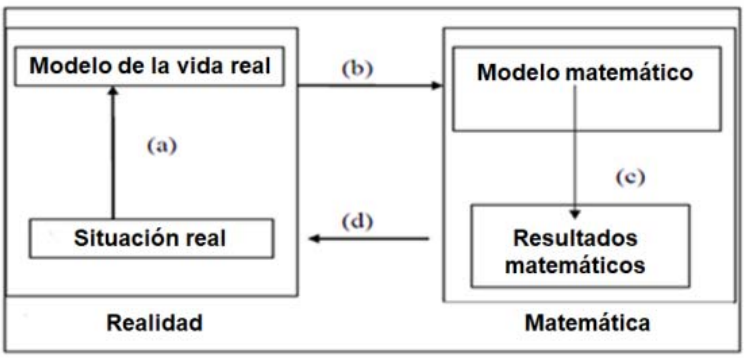
Recuperado de Villa, (2007, p. 68).

Es necesario conocer de un ciclo de la modelización didáctico o pedagógico, Borromeo (2018) define que una de las características de este ciclo es la importancia de cada paso que realiza una persona ante el proceso de modelización. Es un ciclo mediante el cual la modelización se convierte en una herramienta para promover competencias en los estudiantes. Blum y Kaiser, representantes de este modelo, establecen el siguiente proceso:

> Parten de una situación real, la cual se transforma (a) a un modelo de la vida real. Este modelo será "traducido" (b) a un lenguaje matemático, para así obtener un modelo matemático. Luego, al finalizar el modelo matemático se obtienen (c) resultados matemáticos, los cuales serán llevados (d) a la situación real original para dar respuesta a dicha situación (Vega y Ramírez, 2022, p. 29).

Figura 3

Ciclo de modelización didáctico



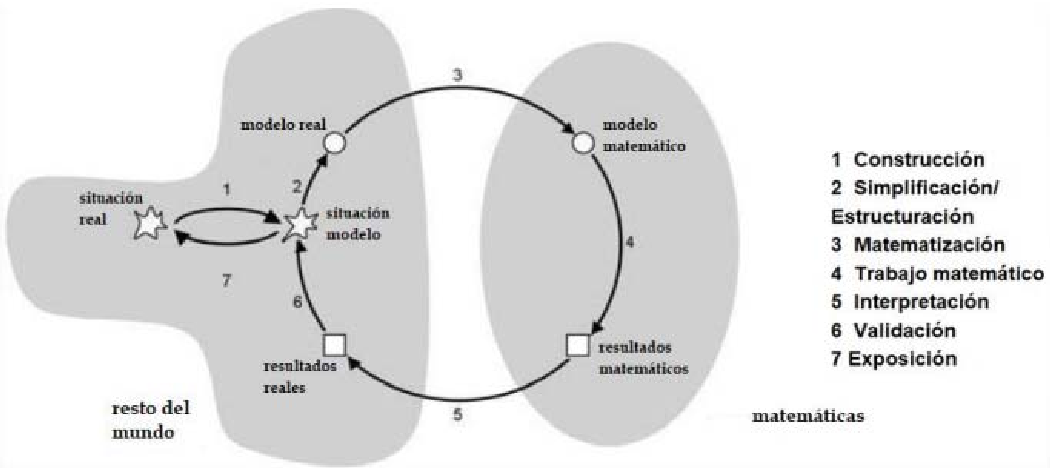
Adaptado de *Modelo cíclico de Kaiser y Blum* , de Borromeo, (2006, p.88)

La modelización matemática, vista desde una perspectiva cognitiva, desde el constructivismo, establece un ciclo que se enfoca en los procesos cognitivos de las personas cuando realizan la modelización. Son las personas quienes le prestan mayor o menor atención a los procesos y es importante resaltar la transición que hay entre la situación real o situación modelo y la fase de modelo de la situación (Borromeo, 2018)

Gallart et. al. (2015), presentan un gráfico en el que se definen las etapas del proceso de modelización cognitivo de Blum y LeiB (2007), y se establece los procesos de transición entre una etapa y otra.

Figura 4

Ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva

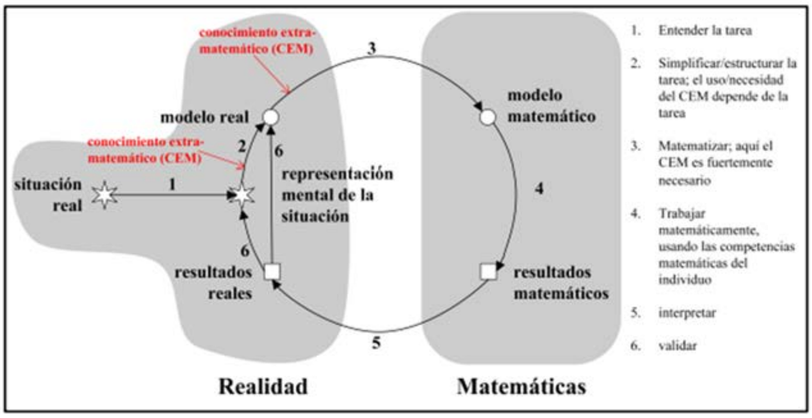


Adaptado de *Ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007)*, de Gallart et. al., (2015, p.94)

Por último, Borromeo (2018) replantea el ciclo de modelización matemática de Blum y LeiB (2007) donde empela el término de "representación mental", necesario para describir los procesos que atraviesa la persona para obtener la imagen mental. El ciclo de la modelización de Borromeo se sintetiza en el siguiente gráfico:

Figura 5

Ciclo de modelización de Borromeo



Adaptado de *Ciclo de modelización matemática desde la perspectiva cognitiva de Borromeo (2018)*, de Ledezma et. al., (2021, p. 369)

En base a lo expuesto por Borromeo (2018), Ledezma et al. (2021) resume y explica las etapas del ciclo de modelización de la siguiente manera: *la situación real* se entiende como un desafío extraído de la realidad y que se puede plasmar por escrito (texto descriptivo), visualmente (imágenes, videos) o en una combinación de ambos (texto acompañado de imágenes). La comprensión de la tarea, la reconstrucción mental del problema y las conexiones que el individuo establece con respecto al problema propuesto, dan lugar a la *representación mental de la situación*. Para crear un modelo realista *(matematizar)*, es necesario simplificar y estructurar la imagen mental que el individuo ha formado acerca del problema, pudiendo incluir representaciones externas como esquemas o figuras. Dado que en un problema de modelización no siempre se proporciona toda la información necesaria para su resolución, el conocimiento no matemático del individuo juega un papel fundamental al trabajar con la información disponible, añadiendo consideraciones adicionales al contexto de la situación según su experiencia personal. *El modelo matemático* se basa en los conceptos matemáticos que permiten explicar la situación concreta presentada (Abassian et al., 2020), y surge a partir de la traducción al lenguaje matemático del modelo real y las contribuciones del conocimiento no matemático del individuo. Mediante el *análisis matemático* del modelo matemático, se obtienen resultados que, una vez interpretados en el contexto de la situación, permiten obtener resultados concretos. Por último, la *validación de los resultados* concretos, es decir, la comparación entre los resultados obtenidos, la representación mental de la situación y el modelo real debe llevar a una respuesta adecuada al problema planteado.

1.2.3 Enfoques de las actividades de modelización matemática

Se ha evidenciado la importancia que tiene la modelización matemática para el aprendizaje de los estudiantes, pero ¿cómo se establecen las actividades de modelización matemática? Existen diferentes enfoques para abordar las actividades de modelización, en este trabajo exploraremos tres de ellos: las actividades basadas en los problemas de Fermi, las actividades según la matemática realista y las Modeling-Eliciting Activities (actividades generadoras de modelos).

1.2.3.1 Problemas de Fermi

Según Efthimiou y Llewellyn (2006), los problemas de Fermi son preguntas abiertas que no proporcionan mucha información específica para orientar su resolución. Esto significa que no es necesario tener conocimientos especializados previos para intentar resolverlos. La escasez de datos acerca de la situación o fenómenos a resolver conduce a los estudiantes a tener que reconocer e investigar los elementos que brindan información importante acerca de lo que se pretende (Albarracín, 2017)

Para Ärlebäck (2009), la descripción de un problema de Fermi consiste en problemas abiertos y no convencionales en los que los estudiantes deben hacer suposiciones sobre la situación del problema y estimar las cantidades relevantes antes de realizar una serie de cálculos simples.

Los problemas de Fermi se pueden usar en cualquier área del conocimiento, como pudiera ser en geografía, química, economía, medicina, entre otros. En la matemática, su práctica consiste como soporte de aprendizaje en el proceso de actividades de modelización matemática (Albarracín et al., 2021).

Ärlebäck (2011) establece las siguientes características de los problemas de fermi:

- Accesibilidad: pueden ser abordados de forma individual o grupal y por cualquier nivel educativo, variando su complejidad.
- Conexión con el mundo real
- Problema abierto, de tal manera que no sea claro el procedimiento a seguir, lo que propicie a las personas a recurrir a experiencias previas, construcciones y diferentes estrategias.
- Ausencia de datos numéricos, lo que hace recurrir a estimaciones.
- Promueve la discusión, sobre todo si se trabaja como una actividad grupal.

Estas características se contrastan con las concepciones acerca de la modelización matemática, una actividad que conecte con el mundo real y que permita a los estudiantes recurrir a conceptos previos y a la investigación.

Una de las ventajas de los problemas de Fermi según Ferrando (2019), es que promueven el uso de modelos a través del razonamiento y que, a pesar de que en un principio pueda ser un reto para los estudiantes debido a que no están acostumbrados a problemas sin datos numéricos, luego de que ellos logren reflexionar, no presentarían dificultades.

Entonces, los problemas de Fermi pueden ser adaptados para actividades de modelización debido a la fuerte conexión entre ambos, permitiendo el desarrollo de competencias de los alumnos. Los problemas de Fermi representan una oportunidad para conocer e investigar la competencia modelizadora de los alumnos (Ferrando et al., 2017).

1.2.3.2 Matemática Realista

La matemática realista en la educación o en sus siglas (EMR), posee un gran valor educativo porque permite comprender el entorno social y cultural que nos rodea. Esta visión fomenta una aproximación educativa universal en la que, si bien no todos aquellos que estudian matemáticas se convertirán en usuarios profesionales de las mismas, las matemáticas sí pueden brindarles herramientas para resolver situaciones de la vida diaria (Ferrando, 2019).

La perspectiva realista argumenta que la educación en matemáticas tiene un valor significativo, debido a que el aprendizaje de esta disciplina permite a los estudiantes comprender, participar y evaluar de manera crítica cómo las matemáticas organizan diferentes aspectos del entorno social y natural (Zolkower et al., 2006).

Desde esta perspectiva, se entiende que las matemáticas son una actividad realizada por seres humanos, que implica el acto de matematizar, es decir, ordenar o estructurar la realidad, incluyendo a las propias matemáticas (Cárcamo et al., 2015). En otras palabras, la EMR relaciona las matemáticas y su uso en la vida real, a través de esquemas, modelos, entre otros.

En la EMR, los estudiantes deben pasar por diferentes niveles de compresión que abordan la utilización de diferentes estrategias, modelos y lenguajes que no necesariamente implican un orden concreto (Cárcamo et al., 2015). Gravemeijer (2007), indica que los estudiantes empiezan modelando su propia actividad informal y, mientras avanzan en el proceso su modelo va cambiando y mejorando basado en su razonamiento. Con respecto a lo anterior, Gravemeijer (1999) distingue cuatro tipos o niveles de actividad:

- Actividad situacional: las interpretaciones y soluciones dependen de la comprensión de cómo actuar en el entorno.
- Actividad referencial: implica modelos que se refieren a la actividad en el entorno descrito.
- Actividad general: se otorga significados a los modelos del inciso anterior, a través de la reflexión y generalización matemática.
- Actividad formal: Implica razonamiento, ya no depende del apoyo de modelos.

Por lo general, las actividades inician con un problema del mundo real (noticia, artículo, investigación), seguido de diferentes preguntas que permitan a los estudiantes razonar y encaminarlos hacia desarrollar los contenidos estudiados (Cárcamo et al., 2015)

Entonces, podemos evidenciar que, en la Educación Matemática Realista, la modelización matemática es un medio por el cual relacionan el entorno social o cultural, con las matemáticas y sirve como experiencia para evidenciar la importancia de esta área del conocimiento en la vida real.

1.2.3.3 Actividades Generadoras de Modelos (MEAs)

Lesh y Harel (2003) entienden que los modelos matemáticos que general los alumnos deben estar conformados por: una primera parte en donde se emplean ideas o términos para describir y explicar los elementos matemáticos pertinentes al fenómeno o situación involucrado, junto con las conexiones, operaciones y pautas asociadas a la resolución de problemas. Y una segunda parte en la cual se encuentran los métodos que acompañan para crear construcciones útiles y predicciones para lograr el objetivo.

Para lo anterior, surge las actividades generadoras de modelos (MEAs, por sus iniciales en inglés: model-eliciting activities), Lesh y Harel (2003) las definen como aquellas actividades basadas en la vida real que, al ser resueltas por los estudiantes, generan un modelo que representa un sistema del mundo real y, además, describe, explica y predice el comportamiento del problema o fenómeno dado.

El enfoque de estos problemas debe permitir a los estudiantes establecer pautas o criterios necesarios que ayuden a encaminar a una solución de entre todo un conjunto de alternativas posibles (Aymerich y Albarracín, 2022). Al presentar una MEA, por lo general, se pedirá que los estudiantes trabajen en grupo (Zawojewski et al., 2003) y resuelvan la actividad planteada, que sería dar respuesta a un suceso o fenómeno real, lo cual requerirá que los alumnos amplíen su conocimiento.

Como resultado de esta actividad, los estudiantes generalmente experimentan una serie de fases de interpretación y desarrollo en las que los datos, objetivos y métodos de solución pertinentes se abordan desde diversas perspectivas. Una vez que se ha construido el modelo, los estudiantes deben determinar si este se aplica únicamente a la situación específica planteada en el problema o si, por el contrario, el modelo puede ser compartido, adaptado, transferido y reutilizado de manera más amplia en otros tipos de problemas o situaciones (Aymerich y Albarracín, 2022).

Trelles et al. (2019) explican las características principales de estas actividades desarrolladas por Lesh: se trabajan en grupos pequeños, de tres a cuatro estudiantes máximo, alrededor de dos o tres sesiones de clase; en la mayoría de las actividades se solicita que por medio de una carta se brinde asesoría a una persona para la resolución del problema en cuestión, especificando como se llegó al modelo, porque es útil e incluso, si se podría aplicar el modelo en otros contextos.

Por otro lado, Trelles et al., (2019) explican también, las fases que se dan durante la aplicación de la actividad:

1. Lectura y contestación a preguntas orientadoras: se sugiere que esta parte se realice de manera individual, preferiblemente antes de la clase, como por ejemplo en casa o en sesiones de trabajo individual dedicadas.
2. Discusión de las respuestas a la lectura en cada grupo de trabajo: con el objetivo de que cada estudiante escuche las perspectivas planteadas por sus compañeros y pueda considerar aspectos que quizás no había tenido en cuenta en sus respuestas iniciales (aproximadamente 15 minutos). Posteriormente, se proporciona la actividad en sí, y el papel del profesor en esta etapa es interactuar con cada grupo y observar detenidamente los procesos de pensamiento de los estudiantes, brindando apoyo solo cuando sea necesario, pero sin darles las soluciones al problema.
3. Presentación conjunta de las soluciones de cada grupo: el profesor puede seleccionar al azar a un miembro del grupo para que exponga la solución a la que han llegado. Después de escuchar las soluciones de sus compañeros, cada grupo tiene la oportunidad de mejorar sus modelos si lo desean, teniendo en cuenta aspectos que quizás no fueron considerados previamente.

Es crucial tener en cuenta que, al tratarse de un problema abierto, este tipo de actividades no tienen respuestas únicas, lo que significa que todas las respuestas son válidas, aunque algunas pueden ser más eficientes que otras. (Trelles et al., 2019). El objetivo de esta actividad no se centra directamente en la respuesta, evalúa todo el proceso que se desarrolló para la solución del problema y también la viabilidad del modelo.

1.2.4 Evaluación de una actividad de modelización matemática

Para conocer el aprendizaje por parte de los estudiantes, es necesario de contar con algún instrumento que me permita evaluar el avance de los alumnos. Para la modelización matemática, la lista de cotejo, como herramienta a evaluar puede ser una buena opción. Una lista de cotejo es una rúbrica que permite evaluar el nivel de competencia de habilidades, según criterios de rendimiento, por parte del alumno. El profesor puede utilizar este instrumento al asignar una tarea, ya sea individual o grupal, y al recorrer los lugares de trabajo de cada estudiante o grupo para observar su desempeño. También puede ser útil cuando solicita a los estudiantes que presenten un trabajo específico que ha sido preparado con antelación (Trelles et al., 2017).

Para la evaluación de las actividades, se tomará en cuenta el trabajo de Toalongo et al., (2022) quienes desarrollaron una rúbrica para evaluar los procesos de modelización matemática (REMMP, por sus siglas en inglés *Rubric to Evaluate Mathematical Modelling Processes*), en donde se evalúan siete aspectos con diferentes criterios, que varían según la edad y nivel educativo, para este trabajo es necesario evaluar a estudiantes de BGU, que rondan entre las edades de entre 15 – 18 años. Tomando en cuenta lo anterior, la rúbrica es:

Tabla 1

Rúbrica para la evaluación de los procesos de modelización matemática

Fases	Colegio
COMPRENSIÓN	Explica las principales características del problema a los compañeros y al profesor, relacionándolo con sus conocimientos previos.
	Capaz de reformular el problema.
	Indica el tipo de solución que el problema generaría, por ejemplo, un número, un rango de valores, un conjunto de valores, un gráfico, una fórmula, una tabla, el diseño de un objeto, entre otros.
	Representa las principales características del problema a través de dibujos.
	Reflexiona sobre la medida en que la solución del problema influiría el medio en que se desarrolla.
ESTRUCTURACIÓN	Identifica los datos que aparecen, se pueden conocer y desconocer en el problema.
	Propone ideas y/o sugerencias que contribuyan a la simplificación del problema.
	Identifica las variables presentes en el problema y es capaz de buscar relaciones entre ellos.

MATEMATIZACIÓN	Reemplaza los elementos reales con objetos matemáticos
	Justifica el uso de objetos matemáticos en base a las características del problema
	Identifica todos los parámetros matemáticos presentes en el problema y las relaciones entre ellos.
	Formula hipótesis y/o conjeturas relacionadas con los objetos matemáticos del problema.
TRABAJO MATEMÁTICO	Utiliza diversas estrategias según la edad que le permitan plantear soluciones al problema.
	Utiliza objetos matemáticos y los opera para resolver el problema.
	Obtiene un modelo matemático inicial como resultado de un trabajo previo.
	Comprueba la coherencia de la solución matemática aplicada al contexto real inicial.
	Identifica las posibles limitaciones o restricciones de la solución matemática en el contexto real inicial.
INTER PRETA CIÓN	Comprueba la coherencia de la solución matemática aplicada al contexto real inicial.
	Identifica las posibles limitaciones o restricciones de la solución matemática en el contexto real inicial.
VALIDACIÓN	Justifica el modelo propuesto mediante argumentos válidos
	Evalúa si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total al problema inicial
	Identifica si el modelo es siempre válido o si se requieren cambios para hacerlo generalizable a nuevas situaciones.
	Generaliza los resultados, demostrando que el modelo se puede aplicar a nuevas situaciones
PRESENTACIÓN	Explica las razones de las decisiones tomadas a lo largo de cada fase del proceso.
	Explica el modelo obtenido aplicado en la situación del contexto real, sus alcances y limitaciones utilizando un lenguaje apropiado para la edad.
	Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, diagramas, dibujos, gráficos, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.
	En el caso de uso de tecnología en una o varias fases del proceso, se establece claramente en qué momento, cómo y para qué se utilizó.
	Escucha las observaciones y/o sugerencias planteadas por los compañeros y/o el profesor.
	Responde a las observaciones y/o sugerencias de los compañeros y del profesor, utilizando un lenguaje acorde a su edad.
	Si en el proceso se utilizaron caminos que no condujeron a ninguna solución, reflexiona sobre ellos y socializa sus principales aspectos.
	Analiza críticamente las presentaciones realizadas por los compañeros de clase.

Adaptado de *Final version of the REMMP*, de Toalongo et al., 2022

1.3. Aprendizaje Significativo

Un aprendizaje significativo según Ausubel, autor de la Teoría del Aprendizaje Significativo (MLT), consiste en la interacción no arbitraria y no literal de nuevos conocimientos con el conocimiento previo del aprendiz (Agra et al., 2019). En este tipo de aprendizaje, las ideas no se toman literalmente, sino que se relacionan de manera relevante con el conocimiento existente en la mente del individuo que está aprendiendo (Moreira, 2012).

El aprendizaje significativo ocurre cuando el estudiante, como creador de su propio conocimiento, establece conexiones entre los conceptos que está aprendiendo y les da significado basándose en su estructura conceptual existente, es decir, en sus conocimientos y experiencias previos. Este proceso puede surgir tanto a través del descubrimiento como de la recepción, pero siempre es crucial que el estudiante tenga la voluntad y el interés de aprender.

Para que se produzca aprendizaje significativo, Rodríguez (2004) indica que es necesario dos condiciones:

- La actitud del aprendiz debe ser significativa en su proceso de aprendizaje, es decir, debe tener la disposición para aprender de manera profunda y con significado.
- Presentación de un material potencialmente significativo, para esto es necesario:

    - Es importante que el material tenga coherencia y sentido lógico, es decir, que pueda ser relacionado de manera relevante con la estructura cognitiva del individuo que está aprendiendo, de forma no arbitraria y con un impacto sustancial.

    - El sujeto cuente con ideas previas o conceptos relacionados que le permitan interactuar de manera adecuada con el nuevo material que se le presenta.

Solano (2011) que la importancia de un aprendizaje significativo radica en que el proceso de adquisición del conocimiento no termina nunca y siempre puede nutrirse de cualquier tipo de experiencias. Considera que cuando se logra este tipo de aprendizaje se seguirá aprendiendo para toda la vida. Es decir, cuando los estudiantes logran asimilar conceptos de manera significativa, aquellos conocimientos perdurarán por toda la vida.

El aprendizaje significativo presenta la ventaja de fomentar una participación activa por parte de los estudiantes porque ellos mismos formulan sus propios criterios, ya sea en colaboración con el docente o entre compañeros, para luego ser revisados. Este proceso es interactivo e integrador debido a que involucra al estudiante en los diversos temas abordados en clase. Además, la comprensión de los contenidos de estudio se facilita, ya que los estudiantes deducen el significado de los temas relacionándolos con su vida cotidiana, lo que les permite adquirir un aprendizaje que difícilmente se olvidará (Baque y Portilla, 2021).

Un aprendizaje significativo por parte del estudiante conlleva el relacionar sus experiencias previas con nuevos conocimientos, involucrar lo que aprende con el entorno en el que se desarrolla, posibilitando un aprendizaje que fomentará a seguir aprendiendo y que perdurará por toda la vida.

1.3.1 Contribución de la modelización matemática en el aprendizaje significativo

La sociedad cada vez evoluciona, y la educación también debe evolucionar con ella. No se necesita un alumno que retenga o guarde información exacta, lo que importa es un aprendiz consciente de lo que hace y porqué lo hace (Roa, 2021). Es inherente el vínculo entre el estudiante y el contexto, por este motivo es importante trabajar con metodologías que involucren este lazo. El modelado actúa como puente entre las actividades cotidianas y la matemática. Una de las ventajas de la modelización según varios autores (Brito et al.,2011), es que el alumno se enfrenta a tareas que se pueden presentar en su futura actividad como profesional.

La matemática está presente todos los días en nuestra vida cotidiana, desde lo más común como lo es recibir el cambio de la compra, o hasta un proceso más "elaborado" como calcular distancias y costos para un óptimo viaje. Actividades como estas pueden ser trabajadas a través de la modelización matemática y permitiría la conexión de la matemática con la sociedad, desarrollando en el estudiante habilidades requeridas para convivir en ella.

La modelización matemática no tiene como único objetivo la aplicación de algoritmos para llegar a un resultado, lo fundamental es intentar describir alguna situación del mundo real en términos matemáticos. (Brito et al.,2011). Este intento de explicar una situación a través de la matemática involucra que el estudiante recurra a sus experiencias, a sus conocimientos existentes, proporcionando un sentido de lo que se está haciendo, característica del aprendizaje significativo.

Gallart (2016) basado en diferentes experiencias de modelización recomienda el trabajo en pequeños grupos debido al protagonismo que asumen los propios estudiantes en su aprendizaje. El trabajo en grupo o colaborativo, es un principio básico para el aprendizaje significativo pues el proporcionar actividades que permitan al alumno opinar, intercambiar ideas y debatir con los demás permite la construcción del conocimiento, así se refiere Ausubel citado en Sanfeliciano (2022).

El interés y motivación que tenga el estudiante frente a la asignatura es esencial para el verdadero aprendizaje. La modelización se vuelve atrayente al estudiante al momento de involucrarlo en un contexto, así lo evidenció González (2021), quien, tras implementar un proyecto basado en la modelización en 7 aulas diferentes, la participación, el trabajo en clase, los aprendizajes logrados y el entusiasmo por el desarrollo de las actividades fueron consideradas como excelentes.

Un ejemplo de la modelización matemática y su influencia en el aprendizaje significativo, se evidencia en el estudio de Porras Y Fonseca (2015), quienes diseñaron e implementaron actividades de modelización matemática en un colegio público, y llegaron a la conclusión de que estas actividades favorecieron, en el grupo de estudiantes, la comprensión y relación entre conceptos matemáticos , aplicación de conocimientos previos en problemas, su conexión con el entorno y en aplicaciones de la vida diaria así como la construcción de situaciones ideadas por ellos como parte de su entorno. Así, los estudiantes tuvieron la oportunidad de aprender matemáticas de una manera divertida y significativa. Entonces, la modelización matemática contribuye al aprendizaje significativo de muchas formas, destacándose entre ellas, la vinculación directa de la matemática con el entorno, con la sociedad que constantemente evoluciona. Además, el trabajar de una manera distinta e innovadora, despierta curiosidad e interés del estudiante por aprender.

1.4. Función Cuadrática

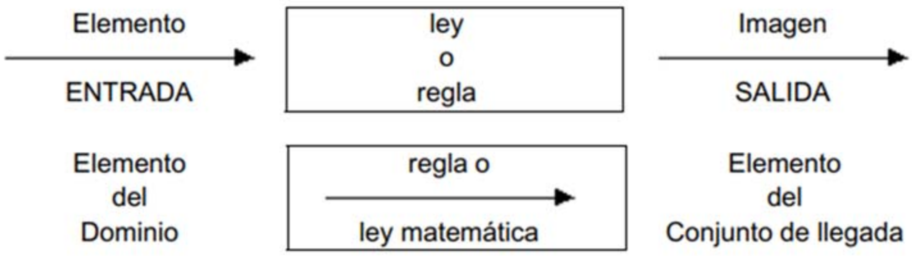
Como el presente trabajo se centra en la modelización matemática de funciones cuadráticas, es necesario conocer a que hace referencia una función cuadrática. Para ello, es necesario empezar definiendo que es una función:

> Sean A y B dos conjuntos no vacíos, que llamamos dominio y conjunto de llegada respectivamente. Entendemos por función de A en B a toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio un único elemento del conjunto de llegada. (Engler et al., 2019, p. 16)

Una forma sencilla de entender una función puede ser a través del siguiente gráfico:

Figura 6

Interpretación de la función



Recuperado de **Engler et al.,** 2019.

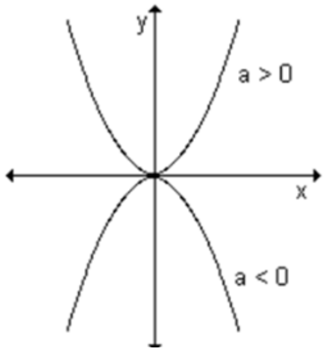
Podemos considerar una función como un mecanismo de entrada y salida. Se proporciona un elemento (entrada) a una ley o regla matemática que lo transforma en una imagen o resultado (salida). Una función es una forma específica de relación que describe cómo una cantidad (la salida) depende de otra (la entrada) (Engler et al., 2019).

En cuanto lo anterior, aparecen dos términos: "La variable que representa elementos de entrada para la función se llama **variable independiente**. La variable que representa elementos de salida recibe el nombre de **variable dependiente** pues su valor depende de la variable independiente" (Engler et al., 2019, p. 17). También aparece lo que es el **dominio**, que es el conjunto de todos los valores de entrada. (Engler et al., 2019)

Existen diversos tipos de funciones, entre ellas, se encuentra la función cuadrática, donde su característica principal es que su grado es 2. A una función cuadrática se la puede definir como $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b\ y\ c$ son números reales y $a \neq 0$. Existen muchas aplicaciones (negocios, ciencia, medicina) que requieren el conocimiento de funciones, en la que la variable independiente esté elevada al cuadrado (Engler, et al., 2019).

Figura 7

Gráfico Función Cuadrática



Recuperado de Engler et al., 2019.

Cuando el valor de a, adquieren valores mayores a cero, la "abertura" de la gráfica se llama concavidad. El punto de donde nace la "abertura" se conoce como **vértice** y, dependiendo del valor que adquiere *a*, puede representar un punto máximo o mínimo. Cundo el valor de *a* es mayor a cero se dice que la concavidad es positiva (hacia arriba) y el vértice representa el punto mínimo de la función , caso contrario, cuando *a* adquiere un valor menor a cero, la concavidad es negativa (hacia abajo) y el vértice representa el punto máximo de la función.

Dentro de una función cuadrática, se pueden analizar varios aspectos (Engler, et al., 2019), entre ellos:

- Concavidad
- Punto mínimo y punto máximo
- Intersecciones con los ejes: para encontrar dónde corta al eje de ordenadas debemos tener en cuenta que todo punto ubicado sobre el eje *y* tiene abscisa *0*. Buscamos los valores de y para los cuales $x = 0$.
- Ceros de una función cuadrática: Llamamos ceros de la función cuadrática a los valores del dominio que tienen como imagen el cero, es decir, a aquellos valores para los cuales $y = 0$.
- Dominio
- Rango

Las funciones tienen la capacidad de ser aplicadas para representar problemas que ocurren en el mundo real. Por ejemplo, un fabricante puede utilizar una función para comprender la relación entre la ganancia de su empresa y el nivel de producción. Un biólogo puede estar interesado en analizar cómo cambia el tamaño de un cultivo de bacterias a lo largo del tiempo. Del mismo modo, a un químico le puede interesar estudiar la relación entre la velocidad inicial de una reacción química y la cantidad de sustrato utilizado (Engler, et al., 2019).

Las funciones cuadráticas, debido a las características que posee, son claves para poder representar problemas de la vida real, el estudio de ellas debe ser de vital importancia para la vida.

1.5. Guía didáctica

Para una educación de calidad, que posibilite un aprendizaje significativo por parte del estudiante, requiere un buen ambiente de aprendizaje. Un entorno de aprendizaje es el espacio en donde los estudiantes colaboran entre sí, brindándose apoyo mutuo y utilizando una variedad de herramientas e instrumentos para alcanzar los objetivos de aprendizaje y resolver problemas (Lizarralde y Huapaya, 2012). Estos entornos se basan en el enfoque constructivista, donde los estudiantes desempeñan un papel activo en su proceso de aprendizaje, ya que no solo absorben información, sino que también establecen relaciones entre los conocimientos previamente adquiridos para construir nuevos (Huang et al., 2010).

Una de las herramientas que posibilitan un buen entorno de aprendizaje es la guía didáctica. Una guía didáctica se define como un recurso, ya sea en formato digital o impreso, que sirve como herramienta para el aprendizaje. Esta guía desempeña un papel fundamental en el proceso docente ya que se concreta la acción del profesor al presentar este recurso de manera planificada y organizada a los estudiantes. La guía proporciona información técnica al estudiante y se basa en la premisa de que la educación es un proceso activo y de procesos.

Además, está fundamentada en la didáctica como ciencia, con el objetivo de fomentar el desarrollo cognitivo y los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes (García y De la Cruz, 2014)

Una buena guía didáctica debe estar al servicio del estudiante y servir como artilugio que permita motivar y despertar el interés por la asignatura. Debe ser el instrumento que ayude a guiar y a facilitar el aprendizaje, que contribuya a una mejor comprensión y aplicación de los distintos conocimientos y donde también se indique el cómo integrar todos los recursos que se presentan al estudiante como apoyo. En otras palabras, una guía didáctica es el andamiaje para el logro de competencias (García, 2014).

La guía didáctica, según Aguilar (2004) cumple cuatro funciones básicas:

- Función Motivadora:
    - Genera atracción hacia la materia y sostiene el enfoque durante el autoestudio.
- Función facilitadora de la comprensión y activadora del aprendizaje:
    - Propone metas claras que orientan el estudio.
    - Completa y profundiza la información del texto básico.
    - Propone métodos de trabajo intelectual que promueven la comprensión del texto y ayudan a un estudio efectivo, tales como la lectura, el subrayado, la creación de esquemas y la realización de ejercicios.
- Función de orientación y diálogo:
    - Estimula la habilidad de organizar y estudiar de manera sistemática.
    - Fomenta la participación activa, tanto con los materiales de estudio como con los compañeros.
    - Anima a comunicarse con el profesor/tutor.
    - Proporciona recomendaciones pertinentes para facilitar el aprendizaje autónomo.
- Función evaluadora:
    - Brinda retroalimentación continua al estudiante, con el objetivo de estimular una reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje.
    - Especifica la manera a evaluar.

Una guía didáctica debe estar compuesta de varios aspectos, entre los que podemos destacar como indispensables los siguientes:

- Índice y presentación: En qué consiste la guía, su estructura.

- Competencias y Objetivos: redactados de acuerdo con el tema en cuestión. Se explicarán las metas que se pretenden que alcancen los estudiantes.
- Materiales: recursos adicionales que servirán de ayuda a los estudiantes. Puede ser bibliografía adicional que permita al estudiante ver más allá de lo básico. También la recomendación de otros medios, ya sean libros o recursos digitales.
- Plan de trabajo/cronograma: es necesario estipular un tiempo mínimo o máximo para el desarrollo del trabajo.
- Orientaciones específicas para el estudio: sugerencia de técnicas y estrategias apropiadas para el estudio del tema.
- Actividades: trabajos que realizarán los estudiantes.
- Tutoría: recalcar a los estudiantes que tienen la oportunidad de conversar con su profesor, con el fin de ayudar a solventar inquietudes sobre el trabajo.
- Evaluación: los estudiantes deben conocer el cómo se evaluarán las distintas actividades, criterios, normativas, procedimientos, entre otros (García, 2014).

2. CAPÍTULO II

2.1. Metodología

El presente capítulo detalla el proceso metodológico que se siguió para el desarrollo del trabajo. La investigación tuvo como propósito conocer la cantidad de actividades de modelización matemática presentes en los libros de texto de bachillerato. A continuación, se menciona el procedimiento que se llevó a cabo.

Para conocer el nivel en el que se emplea la modelización matemática dentro del contexto educativo se seleccionaron los textos entregados por el Ministerio de Educación para el año lectivo 2022 – 2023 correspondientes a los años del Bachillerato General Unificado. Dentro de los registros administrativos del Ministerio de Educación [MinEduc] (2022) correspondiente al año lectivo 2022 – 2023, en donde se encuentran inscritas todas las instituciones educativas, el 80,97% de ellas corresponde a instituciones fiscales y fiscomisionales, el 18,36% a instituciones particulares y el 0,67% a instituciones municipales.

Además, según lo estipulado en el Reglamento General a la Ley Orgánica de Educación Intercultural, en el artículo 49, punto 1 inciso a, el Estado está en la obligación de proveer los textos escolares de forma gratuita a las instituciones educativas públicas y fiscomisionales, y serán destinados exclusivamente a los procesos de enseñanza-aprendizaje (Presidencia de la República, 2023).

Con lo expuesto anteriormente, siendo la mayor parte de instituciones fiscales y fiscomisionales, y así mismo, son quienes usan los libros entregados por parte del Estado, se analizan los distintos libros acordes a los niveles de primero, segundo y tercero de bachillerato general unificado, con el fin de descubrir cuánta frecuencia hay de modelización matemática en el bloque de algebra y funciones.

Se analizará todo el bloque curricular de álgebra y funciones de los tres años de bachillerato debido a que el trabajo se centra en funciones cuadráticas, donde su destreza pertenece al bloque curricular mencionado.

> M.5.1.31. Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, que pueden ser **modelizados con funciones cuadráticas**, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. (MinEduc, 2019, p. 131)

Para analizar el texto, se ha tomado en cuanta, el índice de este, en donde se especifican los temas y páginas correspondientes a cada uno de los tres bloques curriculares que plantea el ministerio.

Figura 8

Índice de contenido del libro perteneciente al nivel de Segundo de BGU de Ecuador

BC 1 **Bloque Curricular 1:** Álgebra y funciones
BC 2 **Bloque Curricular 2:** Geometría y medida
BC 3 **Bloque Curricular 3:** Estadística y Probabilidad

Recuperado de MinEduc (2021)

La presente investigación es de un enfoque cuantitativo que, para Sampieri et al., (2014) consiste en la recolección de datos con base en la medición numérica para probar hipótesis y establecer conclusiones. La técnica utilizada es el análisis de contenido cuantitativo, el cual se define como una técnica objetiva y sistemática para investigar la comunicación. Esta metodología permite la clasificación cuantitativa de los contenidos en categorías específicas (Sampieri y Mendoza, 2018).

Para la recolección de datos se ha tomado en cuenta el trabajo de Trelles, Toalongo, y Alsina (2022) quienes, basados en la investigación de Blanco (1993) establecieron las siguientes categorías para distinguir las actividades:

1. Ejercicios de reconocimiento: pretenden resolver, reconocer o recordar factores específicos, una definición, un concepto, un teorema, etc., por ejemplo: si x es positivo, y w es negativo ¿x/w es positivo?
2. Ejercicios algorítmicos o de repetición: son resueltos con un procedimiento algorítmico, generalmente un algoritmo numérico, un ejemplo de estos ejercicios

puede ser el cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo mediante la aplicación del teorema de Pitágoras.

3. Problemas de traducción simple o compleja: implican una traducción del lenguaje común al lenguaje matemático, en los enunciados de estos problemas aparece toda la información necesaria para resolverlos y frecuentemente de forma implícita se indica la estrategia a seguir; un ejemplo de estos problemas puede ser: la edad de una madre es el doble de la de su hija, si entre las dos suman 60 años ¿cuál es la edad de cada una? En actividades de estadística, pueden conllevar a relacionar diferentes tablas con sus respectivos gráficos.
4. Problemas de procesos: a diferencia de los anteriores la forma de cálculo no se presenta claramente delimitada, pues permiten conjeturar diferentes vías de solución; un ejemplo de estos problemas puede ser: ¿de cuántas maneras puedo ordenar seis libros en un estante?
5. Problemas sobre situaciones reales: son problemas lo más cercanos posibles a la realidad, donde se necesita el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos para su resolución. Por ejemplo: determinar el porcentaje de estudiantes del aula que les gusta el fútbol.
6. Problemas de investigación matemática: utilizan contenidos estrictamente matemáticos, cuyos enunciados en ocasiones no presentan ninguna estrategia para representarlos, son usuales expresiones como: “probar que…”; “demostrar que…”; “encontrar todos los…”; ejemplo: demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.
7. Problemas de puzles: pretenden mostrar las matemáticas desde un enfoque recreativo y obligan a los estudiantes a ser flexibles en la forma de abordar un problema, ejemplo: dividir un triángulo obtusángulo en triángulos acutángulos, y
8. Historias matemáticas: son relatos, novelas, cuentos, etc. que demandan de los estudiantes esfuerzos que impliquen conceptos matemáticos. Por ejemplo: la historia del tablero de ajedrez y los granos de trigo.
9. Problemas de modelización matemática: situaciones extra-matemática que permitan acercar a los estudiantes al aprendizaje de los conceptos matemáticos.

El presente trabajo, se centró en analizar las distintas actividades presentes en los textos del Ministerio de Educación, y se las clasificó según la tipología mencionada. Cabe recalcar que no solo se analizaron las actividades propuestas a los estudiantes, también se contemplaron los ejemplos presentados en el propio texto.

Además del análisis de los libros de texto, también se consideró el trabajo de los estudiantes que realizan en sus clases, a través de los deberes y actividades de su cuaderno. Para ello se determinaron cuatro diferentes colegios, dos de ellos fiscales y los otros dos particulares, debido a la facilidad de acceso que presentaron con el autor de esta obra. Las instituciones las denominaremos como: Colegio A, colegio B, colegio C y colegio D. Los cuadernos de estos colegios pertenecen al nivel de Primero de Bachillerato del año lectivo 2022 - 2023 y su revisión también será de carácter cuantitativo, basado en la misma clasificación que se usó para los libros de texto. Cabe recalcar que toda la información obtenida se trabajó de forma confidencial.

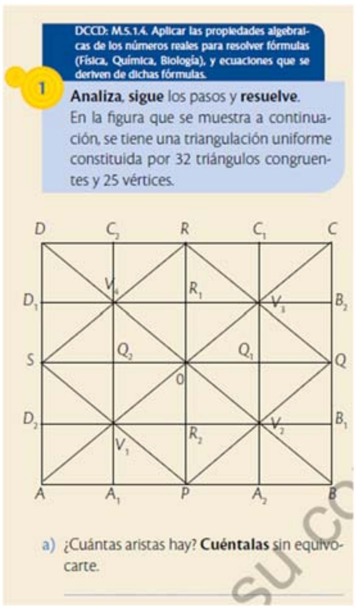
2.2. Resultados

Previo a presentar los resultados concernientes a los libros de texto correspondientes al año lectivo 2022 – 2023, se presentan algunos ejemplos de las actividades presentes en estos libros.

- Ejercicios de reconocimiento

Figura 9

Actividad de reconocimiento presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador


DCCD: M.5.1.4. Aplicar las propiedades algebraicas de los números reales para resolver fórmulas (Física, Química, Biología), y ecuaciones que se deriven de dichas fórmulas.

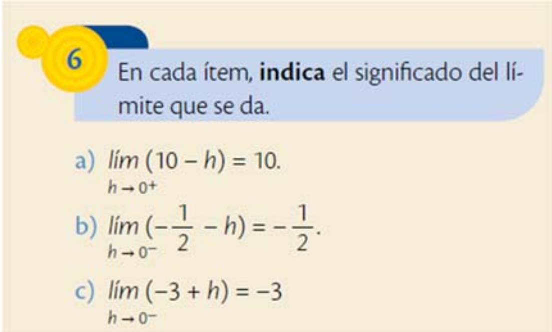
1 **Analiza**, **sigue** los pasos y **resuelve**.
En la figura que se muestra a continuación, se tiene una triangulación uniforme constituida por 32 triángulos congruentes y 25 vértices.

a) ¿Cuántas aristas hay? **Cuéntalas** sin equivocarte.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 54)

Figura 10

Actividad de reconocimiento presente en el libro de Segundo de BGU de Ecuador


6 En cada ítem, **indica** el significado del límite que se da.

a) $\lim_{h \to 0^+} (10 - h) = 10.$

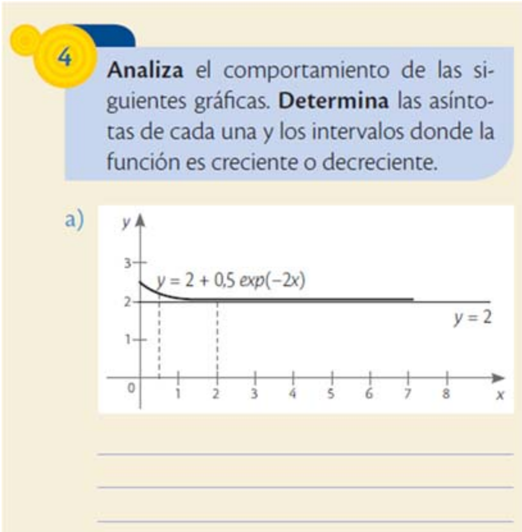
b) $\lim_{h \to 0^-} (-\frac{1}{2} - h) = -\frac{1}{2}.$

c) $\lim_{h \to 0^-} (-3 + h) = -3$

Recuperado de MinEduc (2021, p. 61)

Figura 11

Actividad de reconocimiento presente en el libro de Tercero de BGU de Ecuador


4 **Analiza** el comportamiento de las siguientes gráficas. **Determina** las asíntotas de cada una y los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

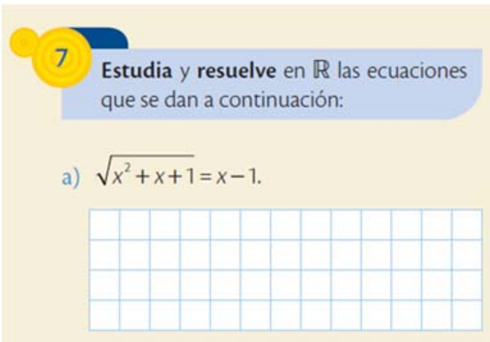
a)

Recuperado de MinEduc (2021, p. 119)

- Ejercicios algorítmicos o de repetición

Figura 12

Actividad de repetición presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador

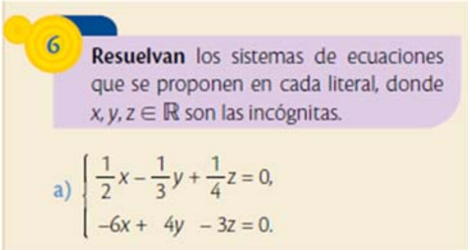

7 **Estudia** y **resuelve** en $\mathbb{R}$ las ecuaciones que se dan a continuación:

a) $\sqrt{x^2+x+1} = x-1.$

Recuperado de MinEduc (2021, p. 137)

Figura 13

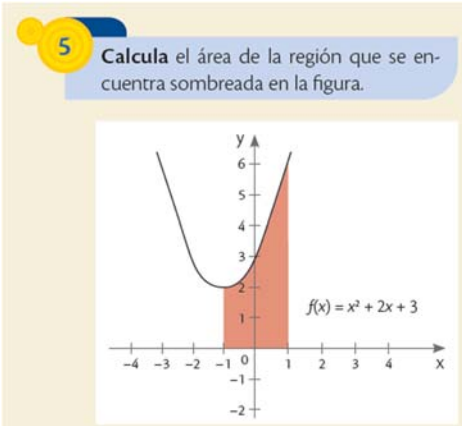
Actividad de repetición presente en el libro de Segundo de BGU de Ecuador



Recuperado de MinEduc (2021, p. 23)

Figura 14

Actividad de repetición presente en el libro de Tercero de BGU de Ecuador

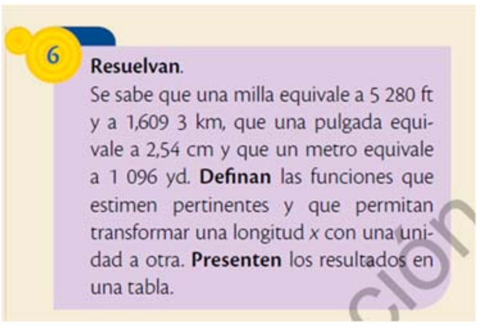


Recuperado de MinEduc (2021, p. 197)

- Problemas de traducción simple o compleja

Figura 15

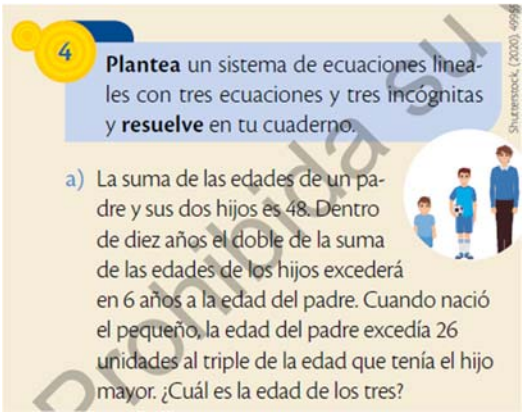
Actividad de traducción presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador



Recuperado de MinEduc (2021, p. 111)

Figura 16

Actividad de traducción presente en el libro de Segundo de BGU de Ecuador



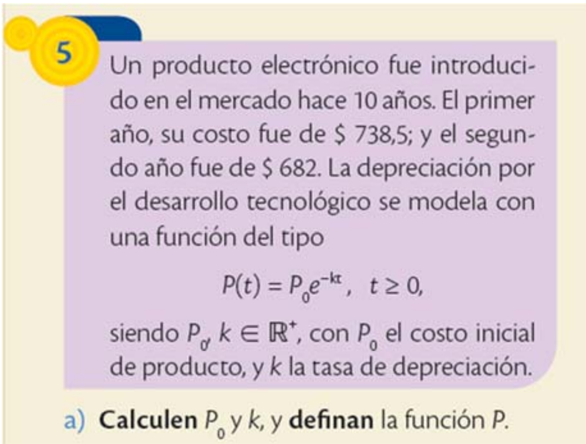
4 **Plantea** un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas y **resuelve** en tu cuaderno.

a) La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es 48. Dentro de diez años el doble de la suma de las edades de los hijos excederá en 6 años a la edad del padre. Cuando nació el pequeño, la edad del padre excedía 26 unidades al triple de la edad que tenía el hijo mayor. ¿Cuál es la edad de los tres?

Recuperado de MinEduc (2021, p. 15)

Figura 17

Actividad de traducción presente en el libro de Tercero de BGU de Ecuador



5 Un producto electrónico fue introducido en el mercado hace 10 años. El primer año, su costo fue de \$ 738,5; y el segundo año fue de \$ 682. La depreciación por el desarrollo tecnológico se modela con una función del tipo

$$P(t) = P_0 e^{-kt}, \quad t \geq 0,$$

siendo P_0, $k \in \mathbb{R}^+$, con P_0 el costo inicial de producto, y k la tasa de depreciación.

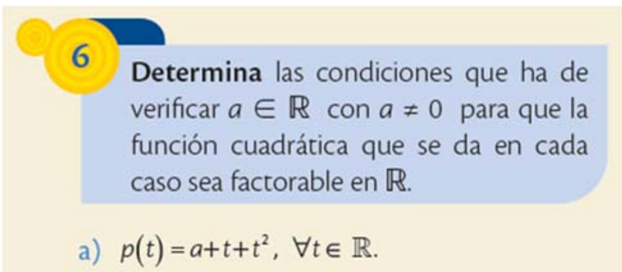
a) **Calculen** P_0 y k, y **definan** la función P.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 133)

- Problemas de procesos

Figura 18

Actividad de procesos presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador



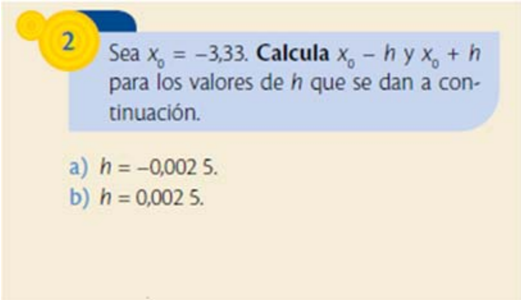
6 **Determina** las condiciones que ha de verificar $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ para que la función cuadrática que se da en cada caso sea factorable en $\mathbb{R}$.

a) $p(t) = a + t + t^2, \ \forall t \in \mathbb{R}.$

Recuperado de MinEduc (2021, p. 133)

Figura 19

Actividad de procesos presente en el libro de Segundo de BGU de Ecuador



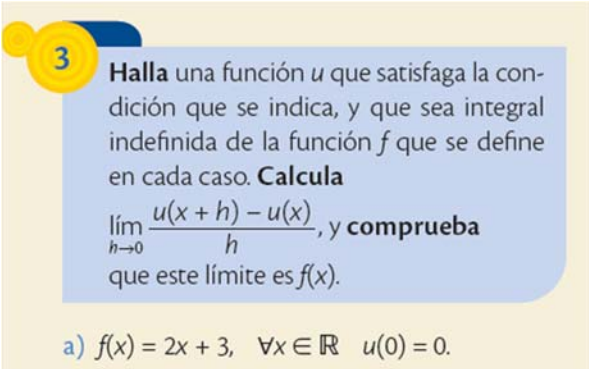
2 Sea $x_0 = -3{,}33$. **Calcula** $x_0 - h$ y $x_0 + h$ para los valores de h que se dan a continuación.

a) $h = -0{,}002\,5$.
b) $h = 0{,}002\,5$.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 60)

Figura 20

Actividad de procesos presente en el libro de Tercero de BGU de Ecuador



3 **Halla** una función u que satisfaga la condición que se indica, y que sea integral indefinida de la función f que se define en cada caso. **Calcula**

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$, y **comprueba** que este límite es $f(x)$.

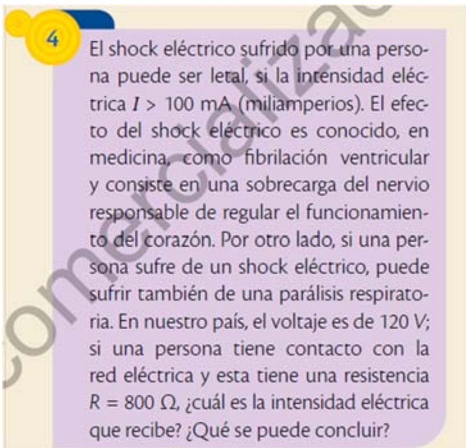
a) $f(x) = 2x + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u(0) = 0.$

Recuperado de MinEduc (2021, p. 190)

- Problemas sobre situaciones reales

Figura 21

Actividad sobre situaciones reales presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador



4 El shock eléctrico sufrido por una persona puede ser letal, si la intensidad eléctrica $I > 100$ mA (miliamperios). El efecto del shock eléctrico es conocido, en medicina, como fibrilación ventricular y consiste en una sobrecarga del nervio responsable de regular el funcionamiento del corazón. Por otro lado, si una persona sufre de un shock eléctrico, puede sufrir también de una parálisis respiratoria. En nuestro país, el voltaje es de 120 V; si una persona tiene contacto con la red eléctrica y esta tiene una resistencia $R = 800\ \Omega$, ¿cuál es la intensidad eléctrica que recibe? ¿Qué se puede concluir?

Recuperado de MinEduc (2021, p. 55)

Figura 22

Actividad sobre situaciones reales presente en el libro de Segundo de BGU de Ecuador

5 En el mismo aeropuerto del ejercicio anterior, un avión de carga debe alcanzar una velocidad mínima de 216 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

La función de posición está dada por $S(t) = 0{,}05t + 0{,}2t^2 + 0{,}008t^3, \quad t \in [0, 60]$, medida en metros.

a) **Calcula** el tiempo t en el que el avión alcanza la velocidad de 216 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) **Calcula** la distancia recorrida en ese tiempo y su aceleración.

c) **Calcula** la distancia recorrida, y la velocidad y aceleración alcanzada al instante $t = 60$ s.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 159)

Figura 23

Actividad sobre situaciones reales presente en el libro de Tercero de BGU de Ecuador

3 Paúl estudia diseño gráfico y realiza sus prácticas en una empresa de impresión, durante 10 semanas. Debe atender a una diversidad de clientes que quieren imprimir diferentes tipos de documentos ya elaborados. En la tabla se muestran los resultados alcanzados.

Semana	*Número de clientes atendidos*
1	80
2	120
3	152

Determina una función A definida como

$$A: \begin{cases} [1, \infty[\to \mathbb{R} \\ t \to A(t) \end{cases}, \quad \text{con } A(t) = a - bc^t,$$

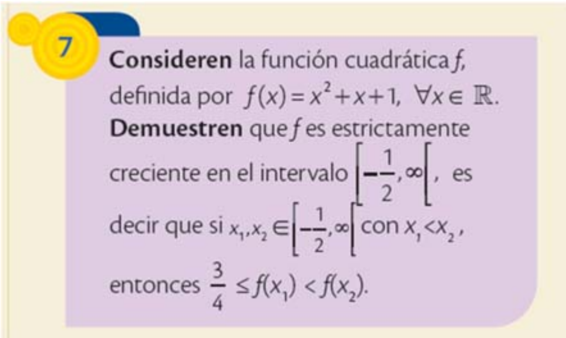
siendo a, b, c constantes reales por determinar. La meta de Paúl es atender al menos a 6 personas por hora.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 133)

- Problemas de investigación matemática

Figura 24

Actividad de investigación matemática presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador

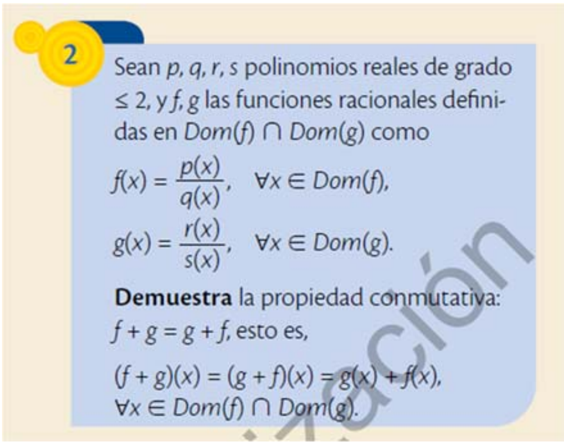


7 **Consideren** la función cuadrática f, definida por $f(x)=x^2+x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **Demuestren** que f es estrictamente creciente en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\infty\right[$, es decir que si $x_1,x_2\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right[$ con $x_1<x_2$, entonces $\frac{3}{4}\leq f(x_1)<f(x_2)$.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 127)

Figura 25

Actividad de investigación matemática presente en el libro de Segundo de BGU de Ecuador



2 Sean p, q, r, s polinomios reales de grado ≤ 2, y f, g las funciones racionales definidas en $Dom(f)\cap Dom(g)$ como

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)},\quad \forall x\in Dom(f),$$

$$g(x)=\frac{r(x)}{s(x)},\quad \forall x\in Dom(g).$$

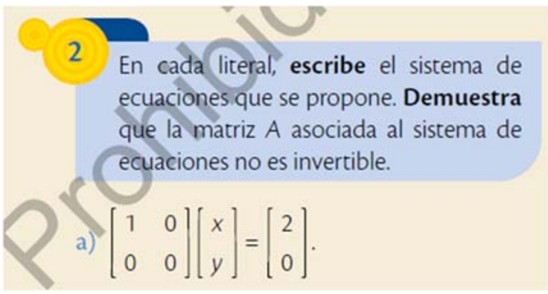
Demuestra la propiedad conmutativa: $f+g=g+f$, esto es,

$(f+g)(x)=(g+f)(x)=g(x)+f(x)$, $\forall x\in Dom(f)\cap Dom(g)$.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 66)

Figura 26

Actividad de investigación matemática presente en el libro de Tercero de BGU de Ecuador



2 En cada literal, **escribe** el sistema de ecuaciones que se propone. **Demuestra** que la matriz A asociada al sistema de ecuaciones no es invertible.

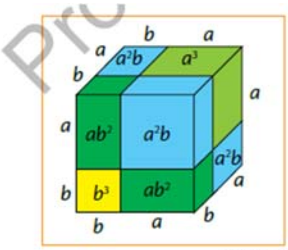
a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 28)

- Problemas de puzles

Figura 27

Actividad de puzles presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador



▲ Figura 1.6.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

La respuesta es 9 rectángulos.

Ejercicio

5. Sean a, b dos números reales no negativos y un cubo de lado $a + b$, como el que se ilustra en la Figura 1.6.

Formen grupos de tres compañeras y compañeros. Luego, cada grupo debe descomponer este cubo en 8 paralelepípedos rectangulares. Elaboren una lista de todos estos paralelepípedos rectangulares con sus respectivos volúmenes. Discutan los resultados obtenidos.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 26)

- Problemas de modelización matemática

Figura 28

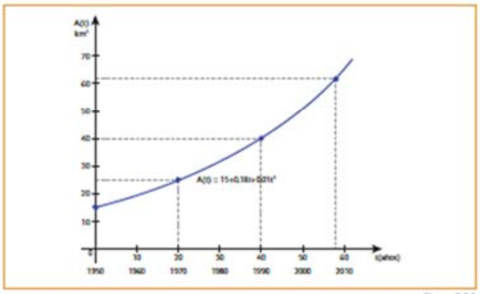
Actividad de modelización matemática presente en el libro de Primero de BGU de Ecuador

Crecimiento del área urbana de una ciudad

Para la planificación de las ciudades, es muy importante encontrar o construir funciones a partir de datos históricos que permitan calcular, en forma aproximada, su crecimiento. En este ejemplo, se plantea el crecimiento que experimenta el área urbana de una pequeña ciudad del Ecuador. En la siguiente tabla se muestran los resultados:

Año	t	Área urbana aproximada (km²)
1950	0	15,0
1970	20	23,0
1990	40	39,8
2007	57	61,0

Nótese que al año 1950 se lo asocia con 0; a 1970, con 20; a 1990, con 40; y al año 2007, con 57. Estos datos se grafican en el sistema de coordenadas rectangulares (Figura 3.16.).



▲ Figura 3.16.

Se asume que el crecimiento es continuo, lo que permite trazar una curva continua que pasa por dichos puntos. El crecimiento que experimenta la ciudad se modela con una función cuadrática de la forma $A(t) = a + bt + ct^2$, $t \geq 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes. Para esa información, se ha encontrado que $a = 15$, $b = 0{,}18$, $c = 0{,}001$, con lo que la función A se escribe como sigue:

$$A(t) = 15 + 0{,}18t + 0{,}011t^2 = 15 + t(0{,}18 + 0{,}011t), \quad t \geq 0.$$

Nótese que $A(0) = 15$, $A(20) = 23$, $A(40) = 39{,}8$, $A(57) = 60{,}999$ y $A(0) < A(20) < A(40) < A(57)$. De manera general, si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ con $t_1 < t_2$, se tiene $A(t_1) < A(t_2)$, es decir que la función A es estrictamente creciente.

Recuperado de MinEduc (2021, p. 148)

Al analizar las diferentes actividades planteadas en los libros de texto se encontraron los siguientes resultados:

Tabla 2

Resultados del análisis de los tipos de problemas de los textos del bloque curricular de álgebra y funciones EGB Superior para el periodo lectivo 2022 – 2023 de Ecuador

Tipo de actividad	**Primero**		**Segundo**		**Tercero**	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
Ejercicios de reconocimiento	50	16,95	27	14,59	26	14,21
Ejercicios algorítmicos y de repetición	159	53,90	125	67,57	137	74,86
Problemas de traducción simple o compleja	13	4,41	3	1,62	5	2,73
Problemas de procesos	13	4,41	5	2,70	6	3,28
Problemas sobre situaciones reales	23	7,80	2	1,08	3	1,64
Problemas de investigación matemática	35	11,86	23	12,43	6	3,28
Problemas de puzles	1	0,34	0	0,00	0	0,00
Historias matemáticas	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Problemas de modelización matemática	1	0.34	0	0,00	0	0,00
Total	295	100	185	100	183	100

Tabla 3

Resultado global del análisis de los tipos de problemas de los textos del bloque curricular de álgebra y funciones EGB Superior para el periodo lectivo 2022 – 2023 de Ecuador

Tipo de actividad	**Total**	
	N	**%**
Ejercicios de reconocimiento	103	15,54
Ejercicios algorítmicos y de repetición	421	63,50
Problemas de traducción simple o compleja	21	3,17
Problemas de procesos	24	3,62
Problemas sobre situaciones reales	28	4,22
Problemas de investigación matemática	64	9,65
Problemas de puzles	1	0,15
Historias matemáticas	0	0,00
Problemas de modelización matemática	1	0,15
Total	663	100

Como se puede observar, se han analizado en total de los tres libros correspondientes a los niveles de BGU, 663 preguntas de las cuales, tan solo se ha encontrado una actividad de modelización matemática respectivo al 0,15%, evidenciando notoriamente la ausencia de estas actividades.

Previo a presentar los resultados concernientes a los cuadernos de trabajo de los estudiantes de primero de bachillerato de los colegios A, B, C y D, correspondientes al año lectivo 2022 – 2023, se presentan algunos ejemplos de las actividades presentes en estos apuntes. Es importante destacar que las fotos han sido editadas de tal manera que no se encuentre información sobre la institución, nombres de profesores y alumnos, entre otros aspectos.

- Ejercicios algorítmicos y de repetición

Figura 29

Actividad de repetición presente en un cuaderno de Primero de Bachillerato. Colegio A.

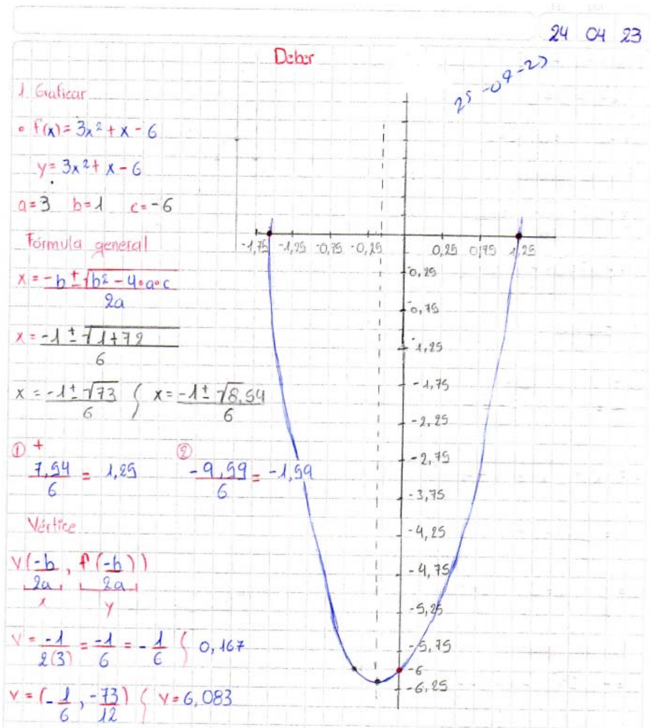


Figura 30

Actividad de repetición presente en un cuaderno de Primero de Bachillerato. Colegio B.

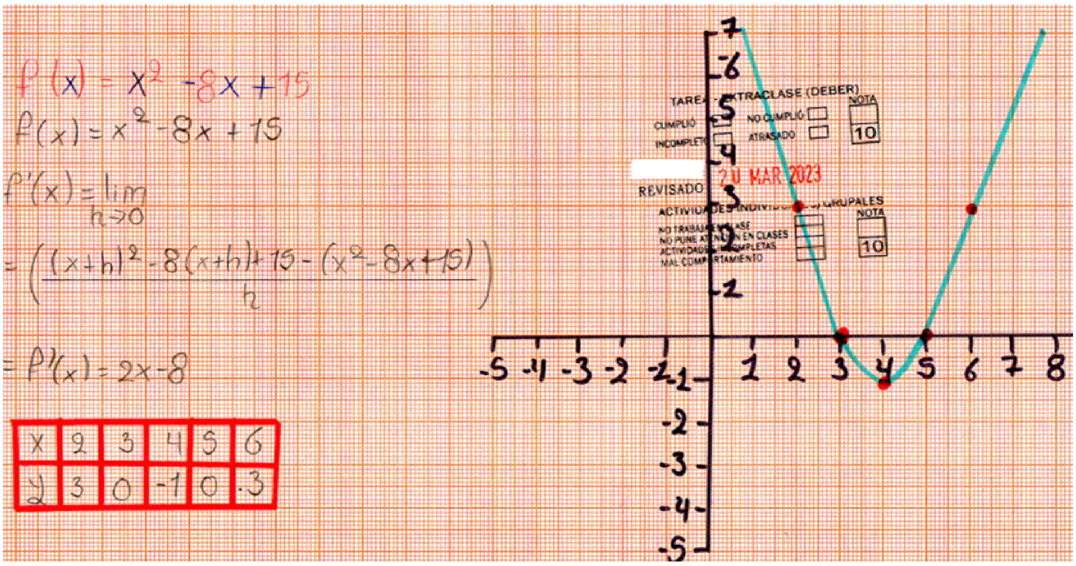


Figura 31

Actividad de repetición presente en un cuaderno de Primero de Bachillerato. Colegio C.

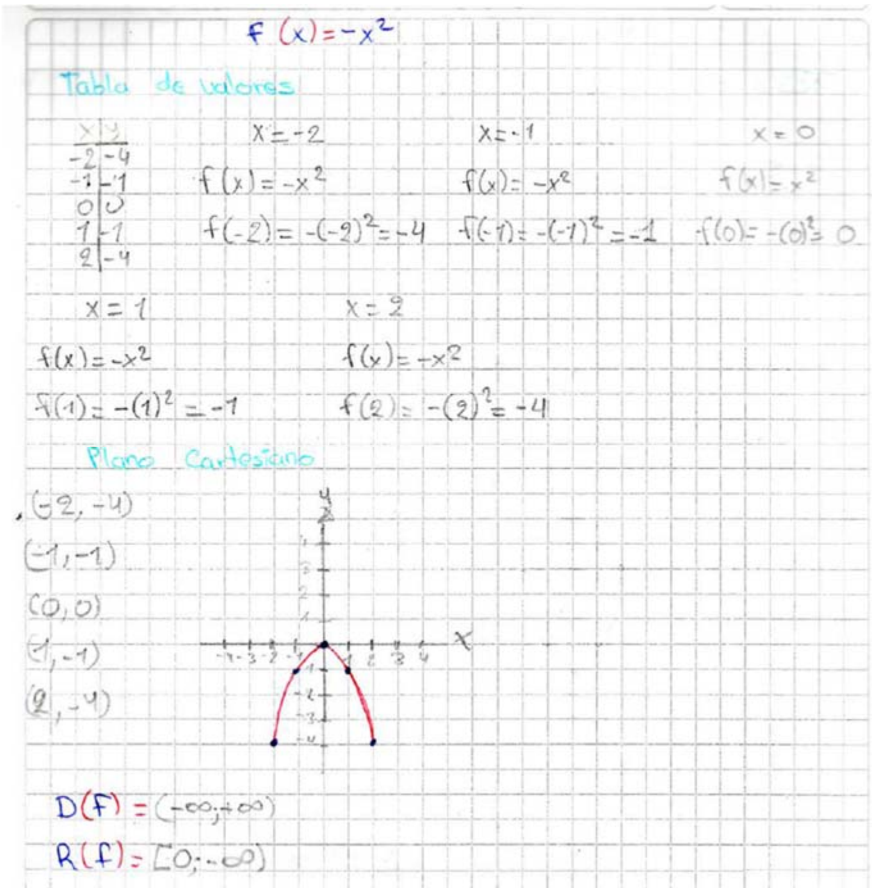
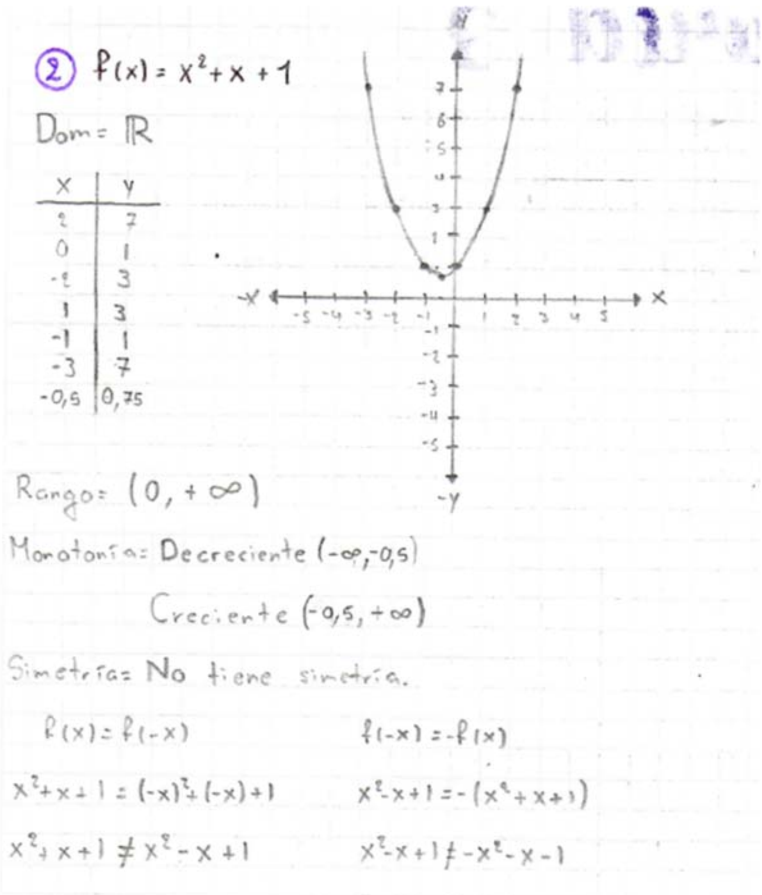


Figura 30

Actividad de repetición presente en un cuaderno de Primero de Bachillerato. Colegio D.



- Problemas de traducción simple o compleja

Figura 31

Actividad de traducción presente en un cuaderno de Primero de Bachillerato. Colegio A.

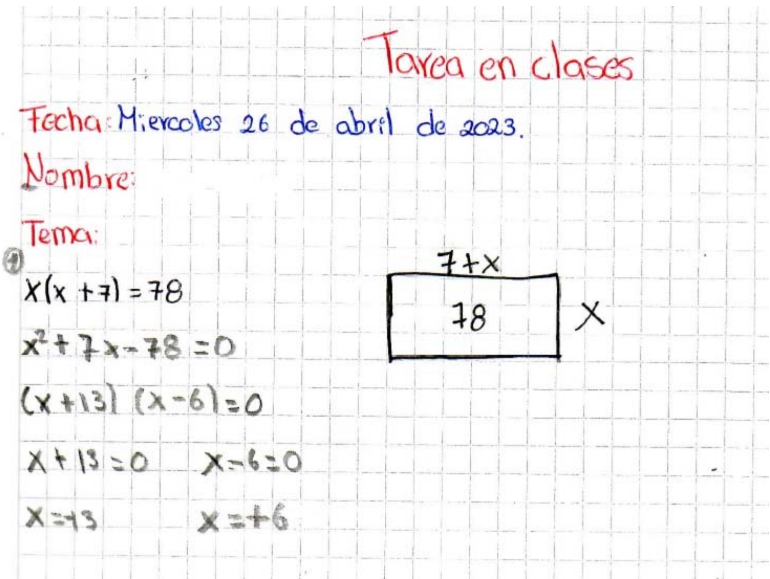


Figura 32

Actividad de traducción presente en un cuaderno de Primero de Bachillerato. Colegio B.

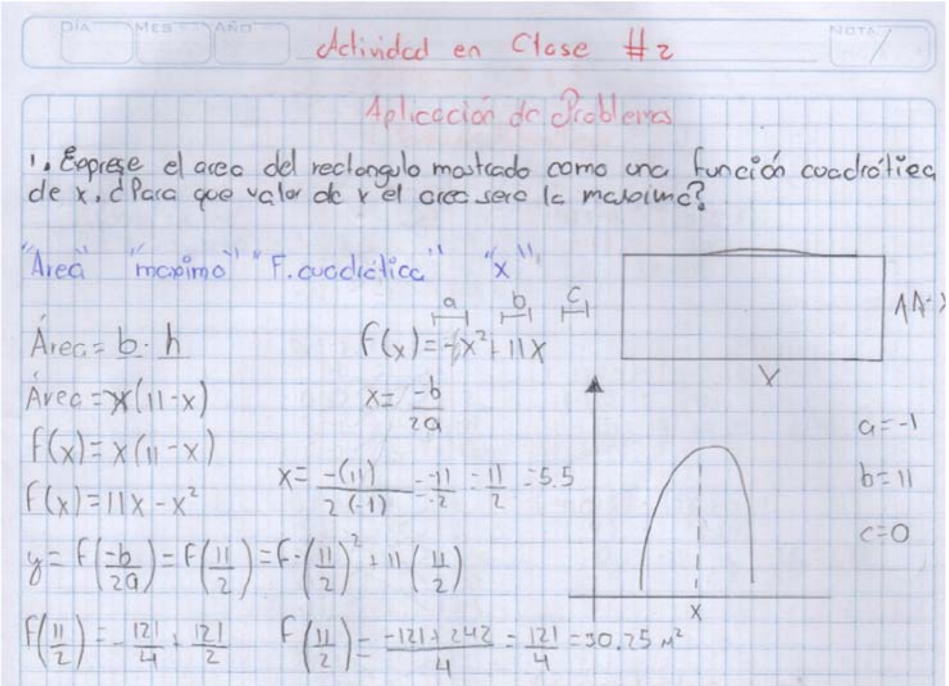
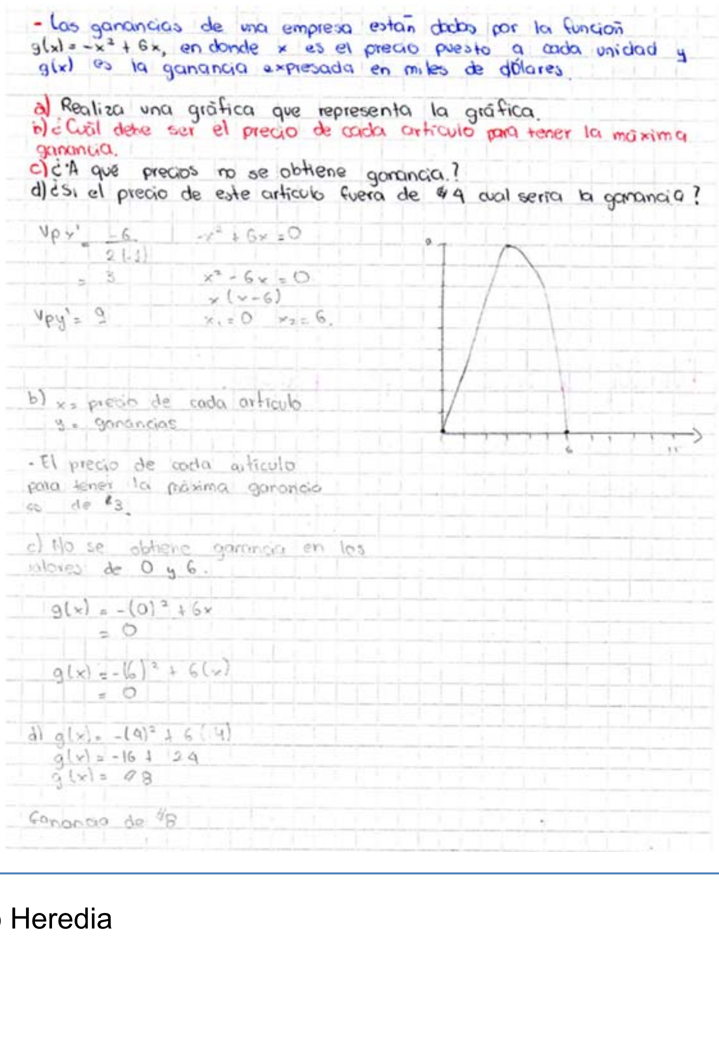


Figura 33

Actividad de traducción presente en un cuaderno de Primero de Bachillerato. Colegio D.



Al analizar las diferentes actividades planteadas en los cuadernos de trabajo de estudiantes de primero de bachillerato se encontraron los siguientes resultados:

Tabla 4

Resultados del análisis de las actividades de los cuadernos de trabajo de Primero de Bachillerato de 4 colegios diferentes, correspondiente al periodo lectivo 2022 – 2023 de Ecuador

Tipo de actividad	Colegio A		Colegio B		Colegio C		Colegio D	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Ejercicios de reconocimiento	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0
Ejercicios algorítmicos y de repetición	41	82,00	23	100,00	19	67,86	57	83,82
Problemas de traducción simple o compleja	9	18,00	0	0,00	9	32,14	11	16,18
Problemas de procesos	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Problemas sobre situaciones reales	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Problemas de investigación matemática	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Problemas de puzles	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Historias matemáticas	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Problemas de modelización matemática	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Total	50	100	23	100	28	100	68	100

Tabla 5

Resultado global del análisis de las actividades de los cuadernos de trabajo de Primero de Bachillerato de 4 colegios diferentes, correspondiente al periodo lectivo 2022 – 2023 de Ecuador

Tipo de actividad	Total	
	N	%
Ejercicios de reconocimiento	0	0,00
Ejercicios algorítmicos y de repetición	140	82,84
Problemas de traducción simple o compleja	29	17,16
Problemas de procesos	0	0,00
Problemas sobre situaciones reales	0	0,00
Problemas de investigación matemática	0	0,00
Problemas de puzles	0	0,00
Historias matemáticas	0	0,00
Problemas de modelización matemática	0	0,00
Total	169	100

En total, se analizaron 169 problemas de los cuales la mayoría representa ejercicios netamente algorítmicos y de repetición. En cuanto a los problemas de modelización matemática, se puede observar que en ninguno de los colegios se encuentran presentes, indicando que los estudiantes no tienen contacto con este tipo de ejercicios en los que se busca conectar con la realidad.

3. CAPÍTULO III

3.1. Propuesta

El presente trabajo desarrolla la modelización matemática como método para relacionar la vida real con las matemáticas, en el tema de funciones cuadráticas, con el objetivo de desarrollar un aprendizaje significativo en el estudiante. Para trabajar la modelización matemática se ha escogido el enfoque de las actividades generadoras de modelos (MEAs) debido al proceso que conlleva, permitiendo que el estudiante pase por toda una serie de fases de interpretación y desarrollo en la que abordan diferentes perspectivas y además, el docente solo participa como guía y observador, haciendo que los estudiantes sean parte fundamental del proceso. Esto tipo de actividades son libres, sin la obligación de seguir determinado camino, por lo que no existe una respuesta única para el problema o situación planteada.

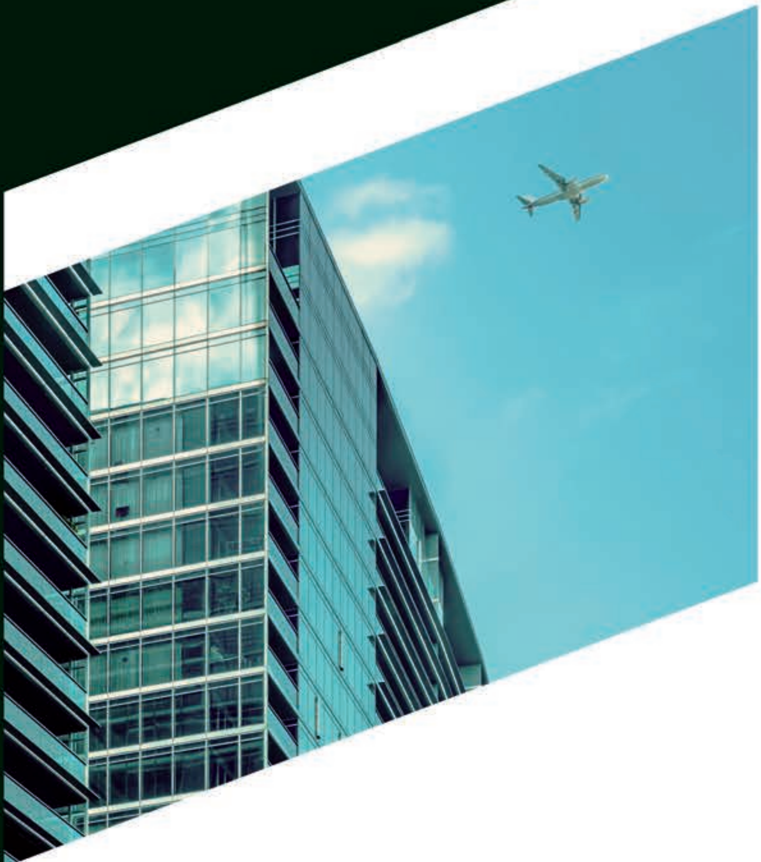
Por lo expuesto anteriormente, se presenta una guía didáctica de modelización matemática para el tema de funciones cuadráticas, en la cual se encontrarán actividades generadoras de modelos (MEAs) a los estudiantes concerniente al tema de funciones cuadráticas, donde se especifican ciertas recomendaciones y el docente participará como guía, orientador y observador. Esta guía está elaborada con el objetivo de que el estudiante sea el actor principal en el aprendizaje.

3.2. Guía Didáctica

El siguiente documento expone cuatro actividades de modelización matemática basadas en las actividades generadoras de modelos (MEAs), incluye recomendaciones y orientaciones. Es importante recalcar que este tipo de actividades son libres, por lo que no se requiere de instrucciones concretas para la actividad. Además, se incluyen las destrezas que se esperan desarrollar y reforzar en el estudiante.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

ACTIVIDADES
MODELIZACIÓN
MATEMÁTICA



2023

Elaborado por:
Juan Fajardo

Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física

Guía didáctica para el aprendizaje de funciones cuadráticas a través de la modelización matemática

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física

Autor:

Juan José Fajardo Heredia

Director:

Dr. César Augusto Trelles Zambrano

ORCID: 0000-0002-4096-8353

Cuenca, Ecuador

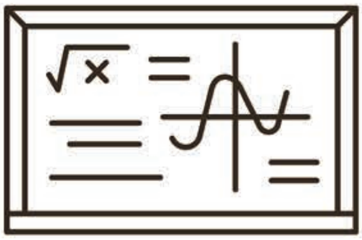
2023-07-06

ÍNDICE

Introducción

El presente texto se basa en la modelización matemática como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de los estudiantes. Se presentan cuatro actividades en las que los alumnos se enfrentarán a problemas, vivencias y situaciones que se encuentran en la sociedad actual. Este documento tiene como fin servir de herramienta en el aprendizaje del alumno, a través de la investigación, la autonomía, el descubrimiento y la construcción del conocimiento a partir de lo que vive día a día.

OBJETIVOS



OBJETIVO GENERAL

Proporcionar un recurso didáctico significativo para el aprendizaje de funciones cuadráticas, permitiendo a los estudiantes comprender y aplicar conceptos clave relacionados con estas funciones a través de la resolución de problemas prácticos y situaciones de la vida real.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Aplicar las propiedades y características de las funciones cuadráticas para resolver problemas y situaciones de la vida real.

Desarrollar habilidades de pensamiento crítico y analítico al enfrentarse a problemas de modelización matemática que involucren funciones cuadráticas, evaluando la viabilidad y coherencia de los modelos y proponiendo mejoras o ajustes cuando sea necesario.

Interpretar y analizar los resultados obtenidos a partir de la modelización matemática de funciones cuadráticas, relacionándolos con el contexto específico de cada problema y extrayendo conclusiones significativas.

Destrezas

El documento pretende abordar las siguientes destrezas:

1

M.5.1.26. Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado en la factorización de una función cuadrática

2

M.5.1.25. Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.

3

M.5.1.27. Resolver ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

4

M.5.1.37. Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones, reales o hipotéticas, que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas, identificando las variables significativas presente y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos.

RECOMENDACIONES

Para la implementación de estas actividades en el aula de clase, es necesario considerar ciertos aspectos para su perfecto desarrollo. A continuación, se establecen ciertas recomendaciones para el trabajo:

- Tiempo: alrededor de 3 sesiones clase como mínimo, hasta 8 sesiones como máximo. Cada sesión clase de dos horas pedagógicas (40 minutos).
- Al implementar las actividades en el aula, el alumno se convierte en el actor principal de su propio aprendizaje, por lo que el docente tendrá un rol de observador y orientador, se limitará a dar pistas.
- El estudiante tendrá acceso libre a cualquier herramienta que necesite para desarrollar la actividad, ya sean libros de texto, cuadernos de trabajo e incluso, recursos digitales como navegadores de internet, softwares, entre otros.
- Se recomienda el trabajo cooperativo, en grupos de entre 2 a 4 estudiantes.
- Al culminar la actividad, realizar una presentación de todos los trabajos de los grupos, con un tiempo de alrededor de 15 minutos por cada uno. Culminar con la reelaboración o mejora de la actividad.

INTRODUCCIÓN A LAS ACTIVIDADES

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Las actividades de modelización matemática buscan conectar la asignatura con la vida real para que los estudiantes entiendan la relevancia que tiene su aplicación en la sociedad.

Este tipo de actividades son libres, el estudiante escogerá la que para él sea la mejor alternativa para dar solución al suceso. Esto implica que no existirán respuestas "equivocadas", solamente modelos que no cumplan totalmente con la actividad.
Es importante que los estudiantes cumplan el ciclo de modelización matemática, el cuál se encontrará en la rúbrica al final del documento y que también servirá para la evaluación de la actividad.

Como se ha especificado, estas actividades se centran en el trabajo del estudiante, en su construcción del conocimiento. Por ello, el docente no debe intervenir para dar respuestas, simplemente deberá guiar al estudiante, a través de pistas o nuevas preguntas que lleven al razonamiento.

A continuación, se presentan cuatro actividades de modelización que han sido construidas en base a las *Actividades Generadoras de Modelos* (MEAs), las cuales incluyen una lectura de introducción a la actividad, preguntas orientadores y la actividad propiamente.

$f(x)$

ACTIVIDAD 1

PUENTE COLGANTE

Los puentes colgantes

Los puentes colgantes han ido evolucionando con el paso del tiempo. En épocas primitivas (siglo XII) los primeros puentes colgantes de los que existen registros abundaban en Sudamérica y Asia, y su estructura dependía principalmente de cuerdas de fibras naturales fuertemente entrelazadas.

El siguiente paso en la evolución de los puentes estuvo marcado por el cambio de material en las estructuras. En China, se empezaban a desarrollar proyectos de puentes colgantes de cadenas, que alcanzaban hasta 100 metros de luz entre sus pilas. Mediante estas estructuras, llega el primer puente colgante de la época moderna, el puente Jacob's Creek (Pennsylvania), obra del ingeniero americano James Finley, inaugurado en el año 1801 con una luz de 21 metros.

Posteriormente, los puentes colgantes han ido evolucionando mediante esquemas más resistentes, como la utilización de vigas metálicas, cables de tensión, etc. La ingeniería se desarrollaba a pasos agigantados, permitía superar de manera continua los récords de mayor luz. Buen ejemplo de ello es el Puente de la Caille en Francia, que en 1839 alcanzó los 182 metros de luz.

Cada vez llama la atención observar en los puentes colgantes cómo la curvatura generada por los cables principales se sitúa más elevada conforme pasan los años. Se había iniciado una competición entre Europa y EE. UU. por demostrar quién construía el puente más largo, más esbelto y seguro; motivo por el que se puede afirmar que en torno a 1850 se inicia la "etapa de esplendor" de los puentes colgantes. Buena prueba de esta etapa de redescubrimiento es el Puente de Brookling (inaugurado en 1883 por Jhon A. Roebling, con 486 metros de luz) o el puente de Golden Gate, obra de L. B. Strauss, que alcanza los 1280 metros de vano.

Puente Golden Gate

Preguntas de Preparación

1. ¿Sobre qué trata el tema?

2. ¿Cómo ha ido evolucionando el puente colgante a lo largo de los años?

3. ¿Conoces algún puente colgante dentro de tu ciudad/país? ¿Qué luz alcanza?

4. ¿Qué forma o figura tienen en común los puentes colgantes?

ACTIVIDAD

La ciudad de Cuenca (Ecuador) es conocida por los diversos ríos que forman parte de ella y por eso ha sido necesario, a lo largo de los años, la construcción de puentes para el paso de sus habitantes. Desde el sector del coliseo Jefferson Pérez, al oeste de Cuenca, hasta el sector del hospital Vicente Corral, en una distancia de aproximadamente 3 kilómetros, siguiendo el río Tomebamba existen 8 puentes; si se hace el mismo recorrido con el río Yanuncay, en la parte sur, desde la avenida Loja, y luego en su unión con el Tarqui hasta el hospital del IESS, se levantan 11 puentes.

El alcalde de la ciudad quiere construir un puente colgante peatonal para atravesar el río Paute (unión entre el río Tomebamba y Yanuncay) para que facilite cruzar de la Av. Pumapungo a la Av. 24 de Mayo o viceversa. Para ello, solicita la colaboración de la ciudadanía a través de propuestas, proyectos y formas de construir dicho puente. La única condición del alcalde es que el proyecto sea similar al puente Golden Gate y ha enviado una foto que pueda ayudar a entender el diseño. Es decir, sugiere poner énfasis en el diseño del puente.

A través de una carta dirigida al alcalde, explique la forma en la que considere construir el puente y una manera en la que se pueda obtener, de forma general, la distancia a la cual ubicar los soportes verticales y la altura de cada uno de ellos.

Desde ya, el alcalde agradece su ayuda y estará gustoso de escuchar sus propuestas y explicación. Éxitos en su trabajo.

Río Paute

Se recomiendan los siguientes recursos en línea y programas para el desarrollo de la actividad. Cabe recalcar que solo son sugerencias, usted es libre de optar por otros caminos.

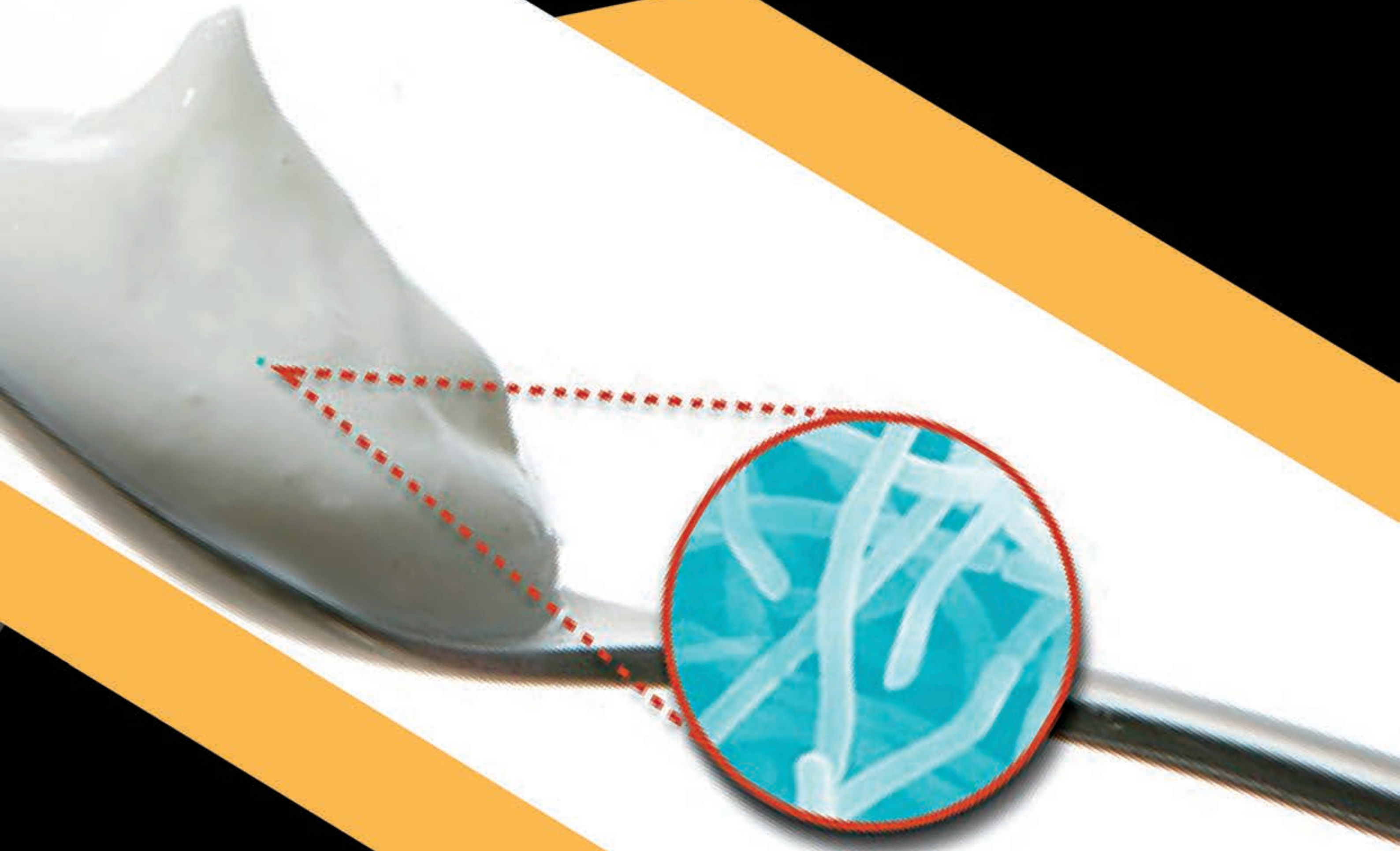
¡Escanéame!

GeoGebra
Dynamic Mathematics for Everyone

Microsoft® Excel

desmos
Graphing Calculator

$f(x)$



ACTIVIDAD 2

ELABORACIÓN DE YOGURT

Lectura

Los secretos de elaborar Yogurt

El yogurt o simplemente yogur, es un alimento que data de miles de años de antigüedad. Los primeros vestigios de su existencia datan de entre 10000 y 5000 a.C. En la actualidad esta bebida es conocida por sus grandes beneficios a la salud debido a los componentes que la conforman. Además, los grandes fabricantes han innovado, incluyendo diferentes sabores, frutas, entre otros. El proceso de elaboración de yogurt consiste:

- La leche cruda será el ingrediente principal. La leche se pasteuriza a 80 °C y se homogeniza.
- Finalizados los procesos anteriores, la leche tiene que enfriarse a 43 – 46 °C y se le añade el cultivo de fermentación que contiene dos bacterias: Treptococcus Thermophilus y Lactobacillus Bulgaricus. Estas bacterias ayudan a crear su consistencia, sabor, aroma y benefician a la salud, además de facilitar la digestión.
- Lugo de enfriarse se explora infinitas posibilidades: añadiendo frutas, endulzantes y más para crear una gama diversa de yogures, listos para el envasado.

El abanico de opciones de yogur en el mercado se extiende según su proceso de fabricación y los ingredientes utilizados, los cuales se añaden antes o después de la fermentación. El tipo de leche utilizada (desnatada, semidesnatada o entera) y la adición de nata determinan el contenido de grasa del yogur al final.

El sabor del yogurt varía según el tiempo de fermentación. Una fermentación breve produce un yogurt de sabor suave, mientras que dejarlo incubar durante 24 horas (o incluso hasta 30 horas) resultará en un sabor agrio e intenso. Además, el crecimiento desenfrenado de las bacterias utilizadas también influiría en el sabor. Algunos cultivos iniciadores de yogurt indican si producirán un sabor "suave" o "agrio".

Preguntas de Preparación

1. ¿Sobre qué trata el tema?

2. Defina con sus palabras, los pasos que debe seguir la elaboración del Yogurt.

3. ¿Cuáles son las bacterias que intervienen en el proceso de fermentación?

4.¿Qué consecuencia puede tener el crecimiento descontrolado de las bacterias en el yogurt?

ACTIVIDAD

ALPINA es una compañía ecuatoriana que por 26 años ha estado alimentando a las familias del país. Kiosko, es una de sus marcas más reconocidas, se centra en la venta de yogures de diferentes sabores, mora, frutilla, limón, entre otros.

La empresa está buscando la forma en la que puedan perfeccionar sus yogures, en la etapa de fermentación, pues consideran que la reproducción de bacterias juega un papel vital en el sabor y consistencia del yogur. Para ellos, un envase de yogur debería contener alrededor de 400000 bacterias Lactobacillus Bulgaricus. El proceso empieza con la introducción de 40000 de estas bacterias, que han ido incrementando según el tiempo y determinadas mediante un conteo de bacterias viables en un laboratorio biológico:

Tiempo (minutos)	0	20	40	60	80	100	120
Número de bacterias	40000	40400	41600	43600	46400	50000	54400

Se necesita de un modelo el cual me pueda ayudar a encontrar el número de bacterias según el tiempo que transcurre, para que sea posible detener el proceso de fermentación cuando se tenga el número de bacterias deseadas.

A través de una carta dirigida a la empresa ALPINA, envíe el procedimiento detallado que se desarrolló para encontrar el tiempo de fermentación al cual se debería someter el yogur para obtener 400000 bacterias Lactobacillus Bulgaricus. Además, agregue el modelo que me permitiría encontrar el número de bacterias según el tiempo.

De antemano, el Gerente de ALPINA, agradece todas las alternativas que envíen, y estará gustoso de leer cada una de ellas.

Se recomiendan los siguientes recursos en línea y programas para el desarrollo de la actividad. Cabe recalcar que solo son sugerencias, usted es libre de optar por otros caminos.

¡Escanéame!

¡Escanéame!

¡Escanéame!

ACTIVIDAD 3

GANANCIAS O
PÉRDIDAS

Sube el precio de los útiles escolares

El inicio de clases para el período 2022 -2023 en la Sierra y Amazonía, retomando clases presenciales, ha causado que los padres de familia regresen a la compra de útiles escolares, pero a precios más elevados en comparación a otros períodos lectivos.

Uno de los útiles y herramienta más necesaria para un estudiante, es el cuaderno, y el precio de un cuaderno universitario de 100 hojas, considerado barato, se vende a $1,89 en Quito. Este producto experimentó un crecimiento del 52% comparado al inicio del año escolar 2021 – 2022, cuando su precio era de $1,24.

Pero ¿por qué el incremento de precio? Erlinda Flores, gerente de Checks, una empresa especializada en útiles escolares, indica que esto se da por factores externos como la escasez del papel. Y esto es debido a la sobredemanda de papel en el mundo, especialmente por parte de empresas de comercio electrónico y productos de aseo que están dispuestas a pagar más por el papel para la creación de empaques, papel higiénico y toallas absorbentes. Por ejemplo, Ecuador pagó un promedio de $1332 por tonelada métrica en junio de 2022, esto según el Banco Central, valor que indica un incremento del 42% frente al año 2021.

Entonces, si el papel es más caro de lo habitual y es necesario para realizar un cuaderno, el costo de producción de este sube, y por lo tanto su precio de salida al mercado también. Esto explica la subida de precios de los útiles escolares en el país.

Preguntas de Preparación

1. ¿Sobre qué trata el tema?

2.¿Porqué subieron el precio de los útiles escolares?

3. ¿A qué se debe la escasez del papel?

4. ¿Qué entiende por costo de producción y precio de venta?

Preguntas Orientadoras

ACTIVIDAD

IMPORSOPAPEL, una empresa que se dedica a la comercialización de útiles escolares, entre ellos cuadernos universitarios de 100 hojas, ha ido incrementando su valor por la subida del precio del papel, según la siguiente tabla:

Precio de venta (S)	Cantidad vendida en un mes (Q)
$1,30	920
$1,40	910
$1,50	900
$1,60	890
$1,70	880
$1,80	870
$1,90	860

El Sr. Paul Espinoza, gerente de la empresa, está buscando la manera en la que pueda calcular la ganancia total al vender cuadernos universitarios de 100 hojas. Además, considera que el valor del papel ya no subirá más, por lo que el precio de producción en realizar el cuaderno es de $1,50.

El gerente de IMPORSOPAPEL ha solicitado su ayuda y pide que a través de un correo dirigido a: *ventaspapeleria@imporsopapel.com.ec* expliquen la manera en la que se puede calcular, de manera general, las ganancias totales dependiendo del precio de venta. También solicita que se encuentre el precio con el que conseguirá las mayores ganancias.
De antemano, el Sr. Espinoza agradece su ayuda y estará encantado de escuchar todas sus propuestas.

Nota: Ayúdese de los datos de la tabla para saber la cantidad de cuadernos vendidos según el precio.

Actividad 3

Se recomiendan los siguientes recursos en línea y programas para el desarrollo de la actividad. Cabe recalcar que solo son sugerencias, usted es libre de optar por otros caminos.

¡Escanéame!

GeoGebra
Dynamic Mathematics for Everyone

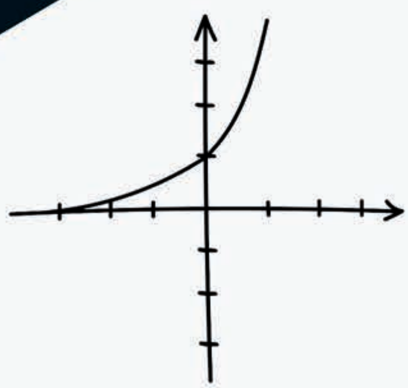
Microsoft® Excel

desmos
Graphing Calculator

¡Escanéame!

¡Escanéame!

$f(x)$



ACTIVIDAD 4

OPTIMIZACIÓN DE RECURSOS

Una de las mayores celebraciones de carácter religioso, es la Semana Santa. Son una serie de festividades centradas en los rituales litúrgicos, pero también es un momento donde se realizan encuentros familiares con grandes comidas.

Dentro del Ecuador, durante esta semana, se llevan a cabo varias tradiciones. Entre las más conocidas se tiene: visitar siete iglesias, preparar la fanesca y acudir a la procesión mas grande del país, la de Jesús del Gran Poder. En el país, es común en estas fechas contar con algunos días de feriado.

Este último feriado inició el viernes 7 de abril y concluyó el domingo 9 de abril de 2023. Los empresarios turísticos de Baños de Agua Santa, en Tungurahua, y Quito, en Pichincha, se alistaron con descuentos y promociones para atraer a los turistas en el feriado. Los dueños de hoteles, hosterías, restaurantes y las direcciones de turismo de estas ciudades, prepararon un plan de promoción para atraer a sus clientes.

En Baños de Agua Santa los propietarios y empresarios de más de 500 locales entre hoteles, hosterías, emprendimientos turísticos promocionaron sus servicios en las redes sociales con ofertas y descuentos.

Por ejemplo, el Hotel Sangay con un total de 66 habitaciones en el centro de Baños, inició las reservaciones con un mes de anticipación. Las reservaciones se realizaron con un mes de anticipación con el propósito de aprovechar las tarifas de descuentos del 35%. Además, ofrecieron un paquete denominado para el feriado como 'Orgullo ecuatoriano' que incluía el desayuno, cena con recetas andinas y acompañado de música folclórica.

En este tipo de feriados, los hoteles crean promociones y actividades para que las personas se interesen en hospedarse, además de crear precios atractivos para el público al bajar de precio en sus habitaciones.

Lectura

Preguntas de Preparación

1. ¿Sobre qué trata el tema?

2. ¿Cómo actúan los hoteles frente a un feriado para llamar la atención del público?

3. ¿Qué procedimiento o idea incluiría usted para que las personas acudan a un hotel?

4. Si los hoteles bajan de precio en sus habitaciones, ¿obtendrían mayores ganancias u obtendrían pérdidas? Justifique.

ACTIVIDAD

El señor Tapia es dueño de un hotel en Baños de Agua Santa, donde se cuenta con 40 habitaciones dobles similares, es decir con dos camas cada habitación. La propiedad se encuentra muy bien posicionada en el centro de la ciudad por lo que recibe buena acogida por parte de turistas nacionales y extranjeros. El señor Tapia, desea encontrar la forma de maximizar sus ganancias para poder invertir en la construcción de otra entidad hotelera. Para ello, el señor Tapia explica en rasgos generales cómo opera el hotel:

- El precio por habitación es de $40 por día.
- El precio no depende del número de personas que ocupan la habitación.
- Por cada $2 que aumenta el costo por habitación, se ocupa una habitación menos.
- El precio de los $40 incluye mantenimiento diario.

Por medio de una carta, generalice el proceso en la que el Señor Tapia pueda encontrar la ganancia máxima dependiendo del número de habitaciones desocupadas y su valor total que generan las habitaciones.
De antemano el dueño del hotel, agradece su ayuda y estará deseoso de leer todas sus alternativas.

Actividad 4

Se recomiendan los siguientes recursos en línea y programas para el desarrollo de la actividad. Cabe recalcar que solo son sugerencias, usted es libre de optar por otros caminos.

¡Escanéame!

GeoGebra
Dynamic Mathematics for Everyone

Microsoft® Excel

desmos
Graphing Calculator

¡Escanéame!

¡Escanéame!

Rúbrica de Evaluación

Fases	Ítems
COMPRENSIÓN	Explica las principales características del problema a los compañeros y al profesor, relacionándolo con sus conocimientos previos.
	Capaz de reformular el problema.
	Indica el tipo de solución que el problema generaría, por ejemplo, un número, un rango de valores, un conjunto de valores, un gráfico, una fórmula, una tabla, el diseño de un objeto, entre otros.
	Representa las principales características del problema a través de dibujos.
	Reflexiona sobre la medida en que la solución del problema influiría el medio en que se desarrolla.
ESTRUCTURACIÓN	Identifica los datos que aparecen, se pueden conocer y desconocer en el problema.
	Propone ideas y/o sugerencias que contribuyan a la simplificación del problema.
	Identifica las variables presentes en el problema y es capaz de buscar relaciones entre ellos.
MATEMATIZACIÓN	Reemplaza los elementos reales con objetos matemáticos.
	Justifica el uso de objetos matemáticos en base a las características del problema.
	Identifica todos los parámetros matemáticos presentes en el problema y las relaciones entre ellos.
	Formula hipótesis y/o conjeturas relacionadas con los objetos matemáticos del problema.
TRABAJO MATEMÁTICO	Utiliza diversas estrategias según la edad que le permitan plantear soluciones al problema.
	Utiliza objetos matemáticos y los opera para resolver el problema.
	Obtiene un modelo matemático inicial como resultado de un trabajo previo.
	Comprueba la coherencia de la solución matemática aplicada al contexto real inicial.
	Identifica las posibles limitaciones o restricciones de la solución matemática en el contexto real inicial.
VALIDACIÓN	Justifica el modelo propuesto mediante argumentos válidos.
	Evalúa si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total al problema inicial.
	Identifica si el modelo es siempre válido o si se requieren cambios para hacerlo generalizable a nuevas situaciones.
	Generaliza los resultados, demostrando que el modelo se puede aplicar a nuevas situaciones.
INTERPRETACIÓN	Comprueba la coherencia de la solución matemática aplicada al contexto real inicial.
	Identifica las posibles limitaciones o restricciones de la solución matemática en el contexto real inicial.
PRESENTACIÓN	Explica las razones de las decisiones tomadas a lo largo de cada fase del proceso.
	Explica el modelo obtenido aplicado en la situación del contexto real, sus alcances y limitaciones utilizando un lenguaje apropiado para la edad.
	Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, diagramas, dibujos, gráficos, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.
	En el caso de uso de tecnología en una o varias fases del proceso, se establece claramente en qué momento, cómo y para qué se utilizó.
	Escucha las observaciones y/o sugerencias planteadas por los compañeros y/o el profesor.
	Responde a las observaciones y/o sugerencias de los compañeros y del profesor, utilizando un lenguaje acorde a su edad.
	Si en el proceso se utilizaron caminos que no condujeron a ninguna solución, reflexiona sobre ellos y socializa sus principales aspectos.
	Analiza críticamente las presentaciones realizadas por los compañeros de clase.

Referencias

Coba, G. (2022). La lista de útiles escolares está más cara por la escasez de papel. *PRIMICIAS*. https://www.primicias.ec/noticias/economia/papel-precios-utiles-escolares-ecuador/

El Comercio (2022). Sector turístico de Baños y Quito listos para el feriado de Semana Santa. *El Comercio*. https://www.elcomercio.com/actualidad/ecuador/sector-turistico-banos-quito-listos-feriado-de-semana-santa.html

Hodgens, B. (2023). Tiempo y temperatura de fermentación para el yogur SCD. *Luvele*. https://www.luvele.es/blogs/recipe-blog/tiempo-y-temperatura-de-fermentation-para-el-yogur scd#:~:text=El%20tiempo%20de%20fermentaci%C3%B3n%20tambi%C3%A9n,de%20bacterias%20determina%20el%20sabor.

Ministerio de Educación. (2019) *Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria. Nivel Bachillerato. Tomo 2.* Quito, Ecuador: Ministerio de Educación. https://educacion.gob.ec/curriculo-bgu/

Toalongo, X., Trelles, C. y Alsina, A. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. Mathematics, 10(24), 1-19. https://doi.org/10.3390/math10244662

Structuralia. (2020). *Evolución de la técnica de los primeros puentes colgantes*. Structuralia. https://blog.structuralia.com/puentes-colgantes

Conclusiones

A través de la presente investigación se demostró que la modelización matemática es una herramienta que contribuye de manera significativa al aprendizaje de los estudiantes, debido a la conexión que se da a la matemática con la realidad, desarrollando en ellos interés, motivación y la necesidad de recurrir a sus experiencias previas para construir conocimientos que perduren durante toda la vida.

A pesar de ello, este recurso no ha sido ni es implementado lo suficiente en las aulas de clases. A través del desarrollo del trabajo, se evidenció la falta de problemas de modelización matemática, tanto en los propios libros de texto entregados por el Estado, como en los cuadernos de trabajo de los estudiantes.

En el análisis de los libros, como en el de los cuadernos de trabajo, se evidencia rotundamente la ausencia de la modelización matemática en el aprendizaje de los estudiantes. La mayoría de los ejercicios son aquellos en los que se resuelven mediante la aplicación de algoritmos, lo que no requiere de algún razonamiento que involucre la conexión con la realidad. Concretamente se encontró un 63,5% de problemas de repetición de algoritmos en los libros de texto y un 82,84% en los cuadernos de los estudiantes. Con respecto a las actividades de modelización un 0,15% corresponden a los libros de texto y un 0% a los cuadernos de trabajo de los estudiantes.

Estos resultados coinciden con el estudio realizado por Valencia y Valenzuela (2017), en el cual se analizaron libros de texto de educación superior y se encontró un 2% de este tipo de problemas. Además, indican que es importante que la educación en matemáticas se expanda y abarque ejercicios de dificultad intermedia y avanzada con el propósito de fortalecer los conceptos a través de aplicaciones y resoluciones que tengan relevancia en la vida real. Estas actividades deben despertar el interés de los estudiantes y fomentar el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y analítico (Valencia y Valenzuela, 2017).

También, Trelles et al., (2022) al realizar un análisis de las actividades del área de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos de los años 2020 - 2022, concluyeron que existe una ausencia total de los problemas de modelización. Concluyendo que, a pesar de los avances realizados por los investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas, aún queda un amplio camino por recorrer para el campo de la modelización y, aunque se han presentado diversas propuestas para promover su uso diario en las aulas, parece que aún hay mucho trabajo por hacer.

Aun cuando la modelización matemática es un recurso que demuestra ser eficaz para un buen aprendizaje, su implementación es escaza. Se ha demostrado que la utilización de esta metodología aporta significativamente en la construcción de saberes por lo que, conocer y proponer esta herramienta a los estudiantes, como parte de su aprendizaje, debería ser indispensable.

Recomendaciones

La modelización matemática, como recurso didáctico, es sin duda la forma de generar cambios en los estudiantes, un aprendizaje que conecte a la asignatura con la realidad, hará que el alumno se motive y despierte el interés por aprender. Es importante incluir este tipo de actividades, no solo para analizar el proceso analítico, también para comprender la importancia de la matemática y su aplicación en situaciones de la vida diaria.

Estas actividades pueden ser abarcadas con ayuda de la tecnología, o de otro modo, la incorporación de la tecnología en la modelización matemática proporciona a los estudiantes herramientas poderosas para visualizar, analizar y manipular datos de manera eficiente. Al utilizar diferentes softwares y herramientas digitales, los estudiantes pueden experimentar con diferentes escenarios, obtener gráficas que ayuden al entendimiento, realizar simulaciones y explorar relaciones matemáticas de una manera más interactiva y dinámica. El trabajo de la de modelización matemática con ayuda de la tecnología ofrece a los estudiantes una experiencia de aprendizaje más significativa y relevante, preparándolos para enfrentar problemas de la sociedad moderna.

Al evidenciar que no se presentan actividades de modelización en el aula, es crucial fomentar la inclusión de contenidos relacionados con la modelización en los planes de estudio de las carreras de formación docente, para que los futuros profesores adquieran una sólida base teórica y práctica en esta área. Además, se deben brindar oportunidades de formación continua mediante cursos y talleres que permitan a los docentes profundizar sus conocimientos y habilidades en modelización. Esto les permitirá utilizar estratégicamente modelos y simulaciones en el aula, fomentando el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el aprendizaje activo de los estudiantes.

Los profesores deberían diseñar actividades de modelización matemática teniendo en cuenta el interés de los alumnos. Cuando se involucran en la modelización, aplican conceptos matemáticos en situaciones reales y contextualizadas, lo cual les permite comprender la relevancia y utilidad de las matemáticas en su vida cotidiana. Al diseñar actividades de modelización que reflejen los intereses y experiencias de los alumnos, se crea un ambiente de aprendizaje en el que se fomenta su participación y su curiosidad. Además, al utilizar ejemplos y situaciones que sean relevantes para los estudiantes, se establece una conexión emocional con los contenidos matemáticos, lo que facilita su comprensión y retención.

Referencias

Aguilar, R. (2004). La guía didáctica, un material educativo para promover el aprendizaje autónomo. Evaluación y mejoramiento de su calidad en la modalidad abierta y a distancia de la UTPL. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia ,7*(1y2), 45-53. https://doi.org/10.5944/ried.7.1-2.1082

Agra, G., Soares, N., De Oliveira, P., Lopes, M., Melo, M. y Lima, M. (2019). Analysis of the concept of Meaningful Learning in light of the Ausubel's Theory. *REBEn, 72*(1), 248-255. https://doi.org/10.1590/0034-7167-2017-0691

Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización: qué sabemos y qué más deberíamos saber. M*odelling in Science Education and Learning,10* (2), 117-135. http://dx.doi.org/10.4995/msel.2017.7707

Albarracín, L., López, V. y Ärlebäck, J. (2021). Repensando los problemas de fermi para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. *Investigações Em Ensino De Ciências, 26*(3), 56–68. https://doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2021v26n3p56

Alsina, C., García, L., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in Science Education and Learning. *Suma,* (54), 51-53. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/54/051-053.pdf

Aparisi, L. y Pochulu, M. (2013). *Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización*. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 1387-1397. http://funes.uniandes.edu.co/4368/

Arias, L. y Deulofeu, J. (2019). Construcción de conocimiento en alumnos universitarios a partir de la modelización matemática. *Scientia Et Technica, 24*(2), 240-249. https://www.redalyc.org/journal/849/84961237010/html/

Ärlebäck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Ärlebäck, J. (2011). Exploring the solving process of group solving realistic Fermi problems from the perspective of the Anthropological Theory of Didactics [conferencia]. *Seventh Conference of European Research in Mathematics Education,* Rzeszów, Polonia. https://www.researchgate.net/publication/337243663_Exploring_the_solving_process _of_group_solving_realistic_Fermi_problems_from_the_perspective_of_the_Anthropological_Theory_of_Didactics

Aymerich, A. y Albarracín, L. (2022). Mathematical Modeling in Statistical Activities: Key Episodes for Model Generation. *Uniciencia, 36*(1), 1-16. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.16

Baque, G. y Portilla, G. (2021). El aprendizaje significativo como estrategia didáctica para la enseñanza – aprendizaje. *Polo del Conocimiento, 6*(5), 75-86. https://polodelconocimiento.com/ojs/index.php/es/article/view/2632

Bejarano, N. (2018). *Guía didáctica sobre la modelización matemática del bloque de números y funciones que ayude en el desarrollo del eje curricular integrador de la asignatura de matemática para el segundo año de bachillerato general unificado del Colegio "San Francisco" en el periodo lectivo 2014-2015* [Tesis de pregrado, Universidad Técnica del Norte]. http://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/8379

Blomhøj, M. (2008). Modelización Matemática-Una Teoría para la Práctica (trad. María Mina). *Revista de educación matemática 23*(2), 20-35. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419/11120

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt for Didaktik der Mathematik, 38* (2), 86-95. https://www.emis.de/journals/ZDM/zdm062a.html

Borromeo, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Brito, M., Alemán, I., Fraga, E., Para, J. y Arias, R. (2011). Papel de la modelización matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica, 14*(2), 129-139. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-59442011000200005

Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny, J. (2015). Modelización matemática en la educación matemática realista: Una propuesta para contribuir a la construcción formal de álgebra lineal [conferencia]. *XVII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas,* Cartagena, Colombia. https://17jaem.semrm.com/aportaciones/n84.pdf

Carretero, M. (2005). *Constructivismo y Educación.* Editorial Progreso, S.A. de C.V.

Cervantes, L. (2015) *Modelización Matemática. Principios y Aplicaciones.* Puebla, México: Fomento Editorial.

Dirección Nacional de Análisis e Información Educativa (DNAIE),Coordinación General de Planificación (CGP) y Ministerio de Educación (MinEduc). (2022-2023). *Registros administrativos, periodo 2022-2023 Inicio.* Ministerio de Educación. https://educacion.gob.ec/base-de-datos/

Efthimiou, C. y Llewellyn, R.(2006). Avatars of Hollywood in physical science. T*he Physics Teacher*, *44*(1), 28–33. https://doi.org/10.1119/1.2150756

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2019). *Funciones.* Santa Fe: Ediciones UNL. https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/handle/11185/2308?show=full

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García, L. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi. *Bolema,31*(57). https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. Muñoz y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 43-64). Valladolid: SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7299280

Gallart, C., Ferrando I., y García, L. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números 88*, 93-103. https://core.ac.uk/download/pdf/71040717.pdf

Gallart, C. (2016). *La Modelización como herramienta de evaluación competencial* [Tesis doctoral, Universitat Politècnica de València]. https://doi.org/10.4995/Thesis/10251/68492

Gallart, C., Ferrando, I. y García, L. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning, 12*(1), 71-85. https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955

García, I. y De la Cruz, G. (2014). Las guías didácticas: recursos necesarios para el aprendizaje autónomo. *EDUMECENTRO, 6*(3), 162-175. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-28742014000300012

García, L. (2014). *La Guía Didáctica*. Contextos Universitarios Mediados. https://aretio.hypotheses.org/1144

González, D. (2021). La modelación, un recurso pedagógico para el pensamiento numérico y el aprendizaje significativo. *Revista Scientific,* 6(19), 102-121. https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2021.6.19.5.102-121

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning.1*(2), 155-177. http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. (2007). *Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_12

Guerra, J. (2020). El constructivismo en la educación y el aporte de la teoría sociocultural de Vygotsky para comprender la construcción del conocimiento en el ser humano. *Revista Dilemas Contemporáneos: Educación, Políticas y Valores, 7*(2). https://doi.org/10.46377/dilemas.v32i1.2033

Huillca, A. (2008). *Adaptación social de niños con discapacidad intelectual incluidos en las instituciones educativas del nivel primario de la ciudad de Huancayo* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Centro de Perú] https://repositorio.uncp.edu.pe/handle/20.500.12894/2752

Huang H., Rauch U. y Liaw, S. (2010) Investigating learners' attitudes toward virtual reality learning environments: Based on a constructivist approach. *Computers&Education, 55*(3),1171-1182. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.05.014

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización [conferencia]. *XXIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* Valencia. España. https://www.researchgate.net/publication/355209669_Un_analisis_onto-semiotico_de_la_actividad_matematica_del_proceso_modelizacion

Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2), 157-189. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998

Linares, A. (2007). *Desarrollo Cognitivo: Las Teorías de Piaget y de Vigotsky.* Paidopsiquiatria. http://www.paidopsiquiatria.cat/FILES/TEORIAS_DESARROLLO_COGNITIVO_0.PDF

Lizarralde, F. y Huapaya, C. (2012). Análisis de una Plataforma Virtual 3-D Descentralizada para el Desarrollo de Simulaciones Educativas. *Formación universitaria, 5*(6), 3-12. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062012000600002

Ministerio de Educación. (2019) *Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria. Nivel Bachillerato.* Tomo 2. Quito, Ecuador: Ministerio de Educación. https://educacion.gob.ec/curriculo-bgu/

Ministerio de Educación. (2021). *Texto integrado: Lengua y Literatura. Matemática. Emprendimiento y Gestión (1 BGU).* Maya Ediciones CÍA. LTDA. https://recursos.educacion.gob.ec/red/textos-primerobg/

Ministerio de Educación. (2021). *Matemática. Texto del alumno (1 BGU).* Maya Ediciones CÍA. LTDA. https://recursos.educacion.gob.ec/red/textos-primerobg/

Ministerio de Educación. (2021). *Texto integrado: Lengua y Literatura. Matemática. Emprendimiento y Gestión (2 BGU).* Maya Ediciones CÍA. LTDA. https://recursos.educacion.gob.ec/red/textos-segundo-bgu/

Ministerio de Educación. (2021). *Matemática. Texto del alumno (2 BGU).* Maya Ediciones CÍA. LTDA. https://recursos.educacion.gob.ec/red/textos-segundo-bgu/

Ministerio de Educación. (2021). *Texto integrado: Lengua y Literatura. Matemática. Emprendimiento y Gestión. Historia (3 BGU).* Maya Ediciones CÍA. LTDA. https://recursos.educacion.gob.ec/red/textos-tercero-bgu/

Ministerio de Educación. (2021). *Matemática. Texto del alumno (3 BGU).* Maya Ediciones CÍA. LTDA. https://recursos.educacion.gob.ec/red/textos-tercero-bgu/

Moreira, M. (2012). ¿Al final, qué es aprendizaje significativo? *Qurriculum,* 29-56. http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/10652

Pavón, P. (2021). *La Modelización Matemática como estrategia didáctica aplicada al proceso de enseñanza-aprendizaje de Álgebra Lineal* [Tesis de pregrado, Universidad Central del Ecuador]. http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/24181

Porras, K., y Fonseca, J. (2015). Application of Mathematical Modeling Activities in Costarican High School Education. *Uniciencia, 29*(1), 42-57. http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.3

Presidencia de la República. (2023). *Reglamento General a la Ley Orgánica de Educación Intercultural.* https://www.fielweb.com/App_Themes/InformacionInteres/dct675.pdf

Roa, J. (2021). Importancia del aprendizaje significativo en la construcción de conocimientos. *Revista Científica De FAREM-Estelí*, 63-75. https://doi.org/10.5377/farem.v0i0.11608

Rodríguez, L. (2004) La teoría del aprendizaje significativo. En: A. Cañas, J. Novak, F. M. González (Eds.). *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology* (pp. 535-544). Dirección de Publicaciones de la Universidad Pública de Navarra. https://cmc.ihmc.us/cmc2004proceedings/cmc2004%20-%20vol%201.pdf

Sala, G., Font, V., y Ledezma, C. (2021). Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. *Quadrante, 30*(1), 116–139. https://doi.org/10.48489/quadrante.23590

Sampieri, R., Fernández, C. y Babptista, M (2014). *Metodología de la investigación (5ta ed.).* McGraw-Hill.

Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill.

Sanfeliciano, A. (2022). *Aprendizaje significativo, definición y características*. La mente es maravillosa. https://lamenteesmaravillosa.com/aprendizaje-significativo-definicion-caracteristicas/

Serulnikov, A. y Suárez, R. (2001). *Piaget para principiantes.* Era Naciente SRI.

Sierra, L., Blanco, M., García, L. y Gómez, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria [conferencia]. *XV Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas,* Gijón, España. https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia_XVJAEM_v2.pdf

Solano, N. (2011). *Importancia del Aprendizaje Significativo.* Blogger. http://neisolano.blogspot.com/

Toalongo, X., Trelles, C. y Alsina, A. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics, 10*(24), 1-19. https://doi.org/10.3390/math10244662

Trelles, C., Bravo, F. y Barrazueta, J. (2017). ¿Cómo evaluar los aprendizajes en matemáticas? *Innova, 2*(6), 35-51. https://doi.org/10.33890/innova.v2.n6.2017.183

Trelles, C., Toalongo, X., Alsina, A. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon, 2*(102), 43-59. https://www.researchgate.net/publication/337325623_La_modelizacion_matematica_a_traves_de_las_actividades_generadoras_de_modelos_una_propuesta_para_el_aula_de_secundaria_The_Mathematical_Modelling_through_Model_Eliciting_Activities_A_proposal_for_the

Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, A. (2022). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto. *Innova, 7*(2), 97-116. https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076

Valencia, A. y Valenzuela, J. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación Matemática, 29*(3), 51-78. https://doi.org/10.24844/em2903.02

Vega, M. y Ramírez, D. (2022) *Concepciones sobre modelización matemática que manifiesta un grupo de docentes de educación secundaria del circuito 07 de la Dirección Regional de Educación de Heredia, Costa Rica.* [Tesis de Grado, Universidad Nacional de Costa Rica]. https://repositorio.una.ac.cr/handle/11056/22648

Villa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *TecnoLógicas*, *19*, 63-85. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=344234312004

Villa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A. y Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 a os de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos [conferencia]. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa,* Bogotá, Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/936/1/4Cursos.pdf

Zawojewski, J., Lesh, R. y English, L. (2003). A Models and Modeling Perspective on the Role of Small Group Learning Activities. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.). *Beyond Constructivism* (pp. 337-359). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Zolkower, B., Bressan, A. y Gallego, F. (2006). La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores. *Yupana, 1*(3), 11-33. https://doi.org/10.14409/yu.v1i3.247