

# UCUENCA

## Universidad de Cuenca

Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Carrera de Administración de Empresas

### **Construcción de un portafolio de inversión con instrumentos de renta variable en mercado de valores estadounidense**

Trabajo de titulación previo a la  
obtención del título de  
Licenciado en Administración de  
Empresas


#### **Autores:**

Sandra Carolina Lojano Lucero

José Andrés Luna Flores

#### **Director:**

Iván Felipe Orellana Osorio

ORCID:  0000-0001-6279-2734

**Cuenca-Ecuador**

2023-05-11

## Resumen

La construcción de portafolio es un proceso de selección y combinación de activos financieros con el propósito de lograr una meta económica bien definida. Lograr esta meta contextualizando a la construcción de portafolio a través de un modelo cuantitativo es un enfoque válido, sin embargo, la complejidad aumenta rápidamente a medida que se incrementa el número de variables que simulan a los escenarios reales de inversión. En este trabajo se resuelve la construcción de portafolio utilizando teoría clásica de portafolio de un solo período, de modo que se enmarca a este proceso como un problema estático de decisión. Se demuestra que utilizando el supuesto de Log-Normalidad sobre los retornos y asumiendo que un individuo averso al riesgo posee una función de utilidad CRRA, el portafolio óptimo se define al maximizar una función de utilidad esperada que está simplificada en términos de parámetros de Media-Varianza. Con este modelo teórico a mano, el objetivo principal se torna en construir portafolios utilizando datos financieros de 49 instrumentos de renta variable del mercado estadounidense, recolectados del Repositorio de Kenneth French. El proceso de optimización es manejado por dos algoritmos que fueron creados para acelerar cálculos y que también sirven como herramienta para analizar un conjunto de medidas de aversión al riesgo y los efectos de la diversificación.

*Palabras Clave:* construcción de portafolio, problema estático de decisión de portafolio, optimización media-varianza, algoritmos, repositorio de kenneth french

### Abstract

Portfolio construction is the process of selecting and combining financial assets with the aim of achieving a specific economic goal. To achieve such objective, contextualizing portfolio construction through a quantitative model is a valid approach, however, complexity quickly increases as the number of variables that mimic real investment scenarios are accounted for. In this thesis, portfolio construction is solved through classic one-period portfolio theory, such that, this process can be stated as a static portfolio choice problem. It will be shown that by using the assumption of Log-Normality of returns and that a risk averse individual possesses a CRRA utility function, an optimal portfolio is defined by maximizing an expected utility function of M-V parameters. With this theoretical model at hand, the main objective becomes to construct portfolios using financial data of 49 U.S industry-portfolios taken from the Kenneth French Repository. The optimization process is handled by two algorithms that were built in order to fasten calculations and to allow us to analyze a set of risk preferences and the effects of diversification.

*Keywords:* portfolio construction, static portfolio choice problem, mean-variance optimization, algorithms, kenneth french repository

**Índice de contenido**

<b>Notación y Abreviaturas</b>	<b>10</b>
<b>Introducción</b>	<b>12</b>
<b>Problemática</b>	<b>13</b>
<b>Justificación</b>	<b>14</b>
<b>Objetivo General y Objetivos Específicos</b>	<b>16</b>
<b>Marco Teórico</b>	<b>17</b>
La Función de Utilidad Esperada y la Aversión al Riesgo . . . . .	17
La Utilidad Esperada . . . . .	17
La Aversión al Riesgo . . . . .	20
Funciones de Utilidad HARA . . . . .	25
Problema Estático de Decisión de Portafolio . . . . .	28
El Problema Estático General . . . . .	28
Una Aproximación para un Riesgo-Pequeño . . . . .	30
Formulación CARA . . . . .	31
Formulación CRRA-Log . . . . .	34
Optimización Media-Varianza . . . . .	40
Optimización para n-activos-riesgosos . . . . .	41
Oportunidades Factibles y Eficientes . . . . .	44
Fondos Mutuos . . . . .	46
Agregando el Activo-sin-Riesgo . . . . .	49
Oportunidades Factibles y Eficientes de n+1 . . . . .	51
Proceso para Soluciones de Forma Cerrada al Problema Estático . . . . .	54
Maximización de la Utilidad Esperada con n-activos-riesgosos . . . . .	55
Maximización de la Utilidad Esperada con n+1 Activos . . . . .	56
Resumen . . . . .	57
<b>Diseño Metodológico</b>	<b>59</b>
Recolección de Datos . . . . .	59

Manipulación de Datos . . . . .	63
<b>Desarrollo y Resultados</b>	<b>68</b>
Resultados y Análisis: Ejemplo 1 . . . . .	68
Resultados y Análisis: Ejemplo 2 . . . . .	75
<b>Conclusiones y Limitaciones</b>	<b>80</b>
<b>Referencias</b>	<b>82</b>
<b>Anexo de Metodología</b>	<b>84</b>
<b>Anexo de Desarrollo y Resultados</b>	<b>91</b>

**Índice de figuras**

1.	Distribuciones de Retornos Compuestos Continuos Históricos . . . . .	62
2.	Portafolios Óptimos en el Espacio V-M y la Variación en el Pesaje, el Caso $n = 49$	72
3.	Portafolios Óptimos en el Espacio DS-M y la Variación en el Pesaje, el Caso $n = 49 + rf$ . . . . .	73
4.	Representación de los Parámetros M-V en Función de $\gamma$ . . . . .	74
5.	El Efecto de la Diversificación en la Frontera Eficiente y en la Función de Utilidad Esperada Caso $n$ -activos . . . . .	78
6.	El Efecto de la Diversificación en la Frontera CML y en la Función de Utilidad Esperada Caso $n + 1$ . . . . .	79
A1.	Mapa de Calor de los Coeficientes de Correlación . . . . .	90

**Índice de tablas**

1.	Instrumentos de Renta Variable/Alternativas de Inversión y $r_f$ . . . . .	60
2.	Estadística Descriptiva . . . . .	61
3.	Resultados del Ejemplo 1 y la Construcción de Portafolio para el Conjunto $\gamma$ . . . . .	68
4.	Resultados del Ejemplo 2 y los Efectos de Diversificación . . . . .	75
A1.	Descripción de los Datos de Sesgo y Curtosis . . . . .	84
A2.	Extracción de Datos del Repositorio de Kenneth French . . . . .	85
A3.	El Algoritmo 1 en R . . . . .	86
A4.	El Algoritmo 1 en R continuación . . . . .	87
A5.	El Algoritmo 2 en R . . . . .	88
A6.	El Algoritmo 2 en R continuación . . . . .	89
B1.	Resultados Completos del Ejemplo 1 . . . . .	91
B2.	Resultados Completos del Ejemplo 2 . . . . .	92

### Agradecimientos

Queremos extender un agradecimiento a las personas que hicieron posible la realización de este trabajo. Al Ing. Iván Orellana, docente de excelencia y nuestro tutor de tesis, por brindarnos valiosas recomendaciones que continuamente ayudaron a mejorar nuestro trabajo. Una mención especial de agradecimiento al Ing. Freddy Naula, por su gentileza al compartirnos ideas y conocimientos sobre este tema y habernos dirigido a la bibliografía adecuada. Agradecemos también a nuestros docentes de la cátedra de Finanzas, Ing. Ximena Peralta, Ing. Gustavo Flores, Ing. Fernando Saquicela, Eco. Luis Pinos, por incentivar en nosotros la inclinación a realizar un trabajo en el fascinante campo de las finanzas y a todos nuestros docentes de la Carrera de Administración de Empresas, ha sido un privilegio ser parte de su salón de clases. Expresamos inmensa gratitud a nuestra Alma Máter, la Universidad de Cuenca, por acogernos como estudiantes y guiarnos en nuestra formación académica y profesional.

Quiero extender un agradecimiento a mi familia por estar siempre presente, a mis amigos por hacer que mi estadía en la universidad sea una experiencia inolvidable. A mi compañero de tesis por la paciencia y la dedicación durante este proceso; gracias totales.

Sandra Lojano

Un cálido agradecimiento a mi querida familia, mis amigos y compañeros de la Universidad de Cuenca. Agradezco a mis compañeros de HFC, por las palabras de apoyo y motivación, por su honesta empatía, gracias muchachos.

Andrés Luna



## Dedicatorias

A mis padres Margarita y Antonio, por su apoyo incondicional durante toda mi carrera universitaria. Por enseñarme que la dedicación, el esfuerzo, el sacrificio traen consigo una recompensa. A mis hermanas Monica y Maribel, por ser mis compañeras de vida y compartir conmigo este gran sueño universitario; y hoy puedo decir que sin ustedes este logro no sería posible.

Sandra Lojano

Con todo el amor, para esa mujer que en mi memoria está sentada en ese banquito de manera desgastada, con delantal, pollera y sombrero, mostrándome que el amor más puro puede expresarse de forma tan sencilla como darme una naranja pelada, sentarme en su regazo y cantarme algún Sanjuanito. Para mi blanca azucena, mi abuela Carmen.

Andrés Luna

## Notación y Abreviaturas

## Simbología y Funciones Matemáticas

$E[x]$	Operador de Valor Esperado sobre la variable $x$
$\max f(\cdot)$	Operador de Maximización sobre la función $f$
$\min f(\cdot)$	Operador de Minimización sobre la función $f$
$\hat{x}$	Operador de optimalidad para la variable $x$
$\dot{x}$	Operador del Logaritmo Natural sobre la variable $x$
$\bar{\omega}_0$	Riqueza inicial
$\bar{\omega}$	Riqueza final
$\gamma$	Medida de aversión relativa al riesgo constante
$r_f$	Retorno simple del activo-sin-riesgo
$r_i$	Retorno simple aleatorio del activo-riesgoso $i$
$\sigma_i^2$	Varianza del retorno simple aleatorio del activo-riesgoso $i$
$\sigma_{i,j}$	Covarianza de retornos simples aleatorios de dos activos-riesgosos $i, j$
$\phi$	Matriz de covarianza de retornos aleatorios de $n$ -activos
$\mu$	Retorno simple esperado del portafolio
$\sigma_p^2$	Varianza del retorno simple del portafolio
$\mu_{min}$	Retorno simple del GMV
$\sigma_{min}^2$	Varianza del GMV
$\mu_{mk}$	Retorno simple del Portafolio de Mercado
$\mu_{mk+1}$	Retorno simple del Portafolio de Mercado cuando existe $r_f$
$\sigma_{mk+1}^2$	Varianza del Portafolio de Mercado cuando existe $r_f$
$r_f$	Retorno compuesto continuo de $r_f$
$\hat{R}_i$	Retorno compuesto continuo aleatorio de $i$
$\dot{\mu}_i$	Logaritmo del retorno bruto esperado de $i$
$\dot{\sigma}_i^2$	Varianza del retorno compuesto continuo de $i$
$\dot{\mu}$	Logaritmo del retorno bruto esperado del portafolio
$\dot{\sigma}_p^2$	Varianza del retorno compuesto continuo del portafolio
$\omega$	Vector de portafolio
$\hat{\omega}$	Vector de portafolio óptimo
$\omega_i$	Proporción de inversión en el activo $i$
$\alpha_{mk}$	Proporción de inversión en el Fondo o Portafolio de Mercado
$\alpha_{mk+1}$	Proporción de inversión en el Fondo o Portafolio de Mercado cuando existe $r_f$
$C$	Conjunto de Portafolios M-V Factibles
$\Phi$	Conjunto de Portafolios M-V Eficientes
$\bar{C}$	Conjunto de Oportunidades M-V Factibles o Frontera Factible
$\bar{\Phi}$	Conjunto de Oportunidades M-V Eficientes o Frontera Eficiente
$E[U(\cdot)]$	Función de utilidad esperada
$E[U(\bar{\omega})]$	Función del problema estático de decisión de portafolio
$E[U(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)]$	Función del problema estático en su formulación CRRA-Log
$E[U(\dot{\mu})]$	Función simplificada del problema estático CRRA-Log por el programa $\mathcal{M}$
$\hat{f}(\cdot)$	Función vectorial de portafolio óptimos
$\mathcal{V}(\cdot)$	Función de la varianza de portafolio para el caso de $n$ -activos
$\alpha_{mk}(\cdot)$	Función de la proporción óptima invertida en el Portafolio de Mercado
$\dot{\mu}(\cdot)$	Función del parámetro de retorno esperado óptimo del portafolio

**Abreviaturas**

CRRRA	Función de Utilidad de Aversión Relativa al Riesgo Constante
M-V	Media-Varianza
$mk$	Fondo o Portafolio de Mercado
GMV	Fondo o Portafolio Global de Mínima Varianza
CML	Línea o Frontera del Mercado de Capitales
DS	Desviación Estándar
$t$	Comienzo de horizonte de inversión
$T$	Fin de horizonte de inversión
$i$	Instrumento de renta variable o el activo-riesgoso
$rf$	Activo-sin-riesgo
$n$	Número de alternativas riesgosas de inversión
$n + 1$	Número de alternativas riesgosas más un activo-sin-riesgo
$\mathcal{M}$	Programa de Optimización M-V para el caso $n$ -activos
$\mathcal{N}$	Programa de Optimización M-V para el caso $n + 1$ activos
$\mathcal{Z}$	Programa de Optimización de la Utilidad Esperada

## Introducción

En este trabajo se aborda la construcción de portafolio, un tema integral de la teoría financiera que sin duda despierta notable interés en el campo teórico y práctico de las finanzas y economía. Se explorará este tema desde una perspectiva netamente teórica, centrándose en un problema de decisión estática que proporcionará soluciones relativamente sencillas sobre todo en comparación con modelos dinámicos. En resumen a la problemática, lo que se intenta resolver es la asignación óptima de activos que forman parte del portafolio de inversión de un individuo, un proceso cuya finalidad está direccionada a cumplir con una meta económica bien definida. En este trabajo aquella meta implica maximizar la utilidad esperada de la riqueza final dentro de un horizonte de inversión de un solo período. Resolver esta contextualización de la decisión de portafolio permitirá extraer lecciones y herramientas útiles para comprender a la construcción de portafolio desde el enfoque del comportamiento racional.

Precisamente porque el enfoque del trabajo se sitúa completamente sobre lo cuantitativo y teórico, es claro que el capítulo con mayor extensidad será el Marco Teórico, aquí se han dedicado varias secciones para formalizar el problema estático de decisión de portafolio y consecuentemente para derivar soluciones. Se mostrará que el portafolio óptimo que maximiza la utilidad esperada para un individuo con medida de aversión relativa al riesgo constante, también es un portafolio eficiente en términos de Media-Varianza. Como se verá, esta característica se sostiene para cualquier solución óptima cuando se asume el supuesto de Log-Normalidad sobre los retornos y al asumir que el individuo posee una función de utilidad CRRA.

La aplicación de este modelo se realizará utilizando 49 instrumentos de renta variable del mercado estadounidense, la obtención de información financiera y el proceso de manipulación de datos se detalla a profundidad en el capítulo de Diseño Metodológico. Con respecto a lo manipulación de datos, se crearon dos algoritmos para resolver dos ejemplos hipotéticos que se plantearon para la construcción de portafolio. El capítulo del Desarrollo y Resultados es el más conciso, un resultado de haber delegado el proceso de cálculo a los algoritmos y de haber establecido interpretaciones analíticas previamente en el Marco Teórico. Al resolver los ejemplos hipotéticos se comprobará que incluso el individuo con una medida grande de aversión al riesgo siempre estará dispuesto a invertir una proporción positiva en el Portafolio de Mercado y que la diversificación tiene un efecto positivo sobre la utilidad esperada.

### Problemática

En toda la generalidad el problema de decisión de portafolio establece que los individuos participantes de la economía tienen la tarea de destinar recursos monetarios para la inversión a través de un portafolio compuesto de  $n$ -activos, con el propósito de alcanzar una meta económica-financiera bien definida. Llevar a cabo esta tarea implica que se tendrá que resolver restricciones con respecto al retorno y riesgo objetivo, el horizonte de tiempo de la inversión, consumo y ahorro, impuestos, costos, rebalanceo de portafolio y así se podría continuar agregando cada vez más variables que afectarán la decisión final de portafolio. No obstante, describir el problema de esta manera es complejo y no es factible, si lo que se quiere es determinar soluciones a través de herramientas cuantitativas.

Aquí particularmente, se enmarca a la construcción de portafolio como un objeto estático de decisión en forma de un vector  $\omega$  compuesto por  $i = 1, \dots, n$  activos. Se supondrá que el individuo toma esta decisión no redimible en el momento  $(t)$  que inmediatamente inicia un camino que terminará en la realización de una consecuencia en el momento  $(T)$ . Se llamará a este marco temporal, el horizonte de inversión de un solo período y se llamará a la consecuencia, la riqueza al final del periodo de inversión  $\bar{\omega}$ . Si el escenario de inversión fuese determinístico se establece que la motivación del individuo para ordenar  $\omega$  se basa en poder alcanzar el mayor nivel de utilidad proporcionada por el consumo de  $\bar{\omega}$  y que existe una relación positiva entre más riqueza final y mayor utilidad. Por otro lado, si el escenario de inversión es estocástico, entonces la decisión óptima de portafolio implicará que el individuo debe ordenar  $\omega$  en base al mayor valor de utilidad esperada que está condicionada en  $(t)$  y es posible en  $(T)$  y que además, la máxima utilidad esperada es dependiente de la distribución de probabilidades de una riqueza final aleatoria. Se procede con la afirmación de que el escenario de inversión es estocástico por naturaleza y que por lo tanto, el problema estático de decisión de portafolio del individuo se resume formalmente por  $\max_{\omega} E[U(\bar{\omega})]$ .

### Justificación

Una de las premisas de la teoría económica propone que el objetivo de un individuo racional es poder optimizar el uso de sus recursos para mejorar su bienestar. Utilizando este argumento económico se puede plantear que buscar la solución al problema de decisión de portafolio  $\max_{\omega} E[U(\bar{\omega})]$ , está económicamente justificado y es un acto necesario para garantizar el bienestar del individuo. Por medio de esta justificación se está sugiriendo que el comportamiento del individuo sea normativo, esto significa que las soluciones que se obtendrán serán una “prescripción”, no obstante, el objetivo no se trata de convencer a los lectores de llevar estos resultados a la práctica mecánicamente o que se denomine a esta teoría como la definitiva, al contrario, se está en conocimiento pleno que la simplificada formulación del problema estático trae consigo significativas limitaciones, por lo cual, se espera que si el interés del lector viene desde lo práctico, se utilice el mecanismo teórico de aquí como “una herramienta más” para la construcción de portafolio y si el interés del lector viene desde lo teórico, se espera que este trabajo funcione como una introducción concisa a la extensa teoría de portafolio que sigue.

Con respecto a este último punto, es necesario aclarar que el modelo de decisión de portafolio que se tratará aquí forma parte de la literatura clásica, la cual ha existido por más de 50 años. No obstante, se considera que este trabajo no es redundante y a continuación se proponen las justificaciones. Primero, se argumenta que este trabajo es relevante tanto en lo académico, como en lo práctico. En lo académico, el modelo estático es el pilar de la teoría de portafolio y sus lecciones se extienden a través de las finanzas cuantitativas, este trabajo podría ser utilizado en los cursos de finanzas de la facultad, como una ayuda que detalla paso a paso la construcción de portafolio. En lo práctico, probablemente en algún momento se tendrá que enfrentar a una situación real de inversión, donde se requiera tomar una decisión de portafolio, tener conocimiento sobre el principio de la aversión al riesgo, la diversificación y en general el complemento de estas teorías tal como se presentarán aquí, sin duda alguna serán lecciones útiles para tomar decisiones más informadas que nos coloquen sobre un camino adecuado para cumplir con nuestros propios objetivos de inversión. Históricamente, estos mismos principios también han tenido un uso práctico sobre la creación de productos financieros, por ejemplo, el principio de la Separación de Fondos que se derivará en la sección 3 del Marco Teórico, ha proporcionado el esquema para la creación de fondos de inversión. Este principio puede interesar y ser útil para las instituciones financieras de la localidad. Se-

gundo, a pesar de que este trabajo es en cierto grado una revisión de teoría de portafolio que se ha conocido por décadas, la facultad ha tenido poca participación en la investigación sobre la construcción de portafolio. Esta situación es una oportunidad para que este trabajo cubra el vacío de investigación existente y también, es una oportunidad para actualizar sobre el último aporte, mostrando aplicaciones prácticas de la teoría por medio de algoritmos ejecutados por tecnología que permite manejar bases de datos con miles de observaciones y procesar cientos de miles de cálculos en prácticamente milésimas de segundo. Tercero, el tema implica la utilización de información financiera internacional, se espera que esto sirva para persuadir a los estudiantes de la facultad interesados en realizar investigaciones en el área de las finanzas, a formular temas de investigación con alcances diferentes al de nuestro propio país, no se pretende argumentar en contra o ignorar la realidad local, únicamente se invita a que se considere y cuestionen los beneficios de estudiar a las finanzas desde un contexto distinto.

## Objetivo General y Objetivos Específicos

### **Objetivo General**

El objetivo general del trabajo es *construir portafolios de inversión con instrumentos de renta variable en el mercado de valores estadounidense*. El primer proceso para conseguir este objetivo se logra dentro del Marcó Teórico, donde se proporciona el mecanismo para la resolución del problema estático CRRA-log,  $\max_{\omega} E[U(\mu, \sigma_p^2)]$ . El siguiente proceso se encontrará en el capítulo de Diseño Metodológico y de Desarrollo y Resultados, que consta de la construcción de portafolios utilizando 49 portafolios de varias industrias del mercado estadounidense.

### **Objetivos Específicos**

Cualquier modelo para la decisión de portafolio que se pueda considerar útil, debe estar fundamentado por una base teórica sólida, por lo tanto, el primer objetivo específico que se plantea es *desarrollar un marco teórico que proporcione principios y reglas para el análisis racional de decisiones de inversión*.

A partir de los resultados del Marcó Teórico, el siguiente objetivo específico se puede encontrar en el capítulo de Diseño Metodológico y trata sobre *crear un proceso para la construcción de portafolio sistematizado y replicable*. Esta meta considera dos esfuerzos, por un lado un proceso sistematizado de construcción de portafolio requiere establecer las instrucciones cronológicas desde la obtención de la información financiera hasta su transformación en resultados en un orden lógico. La replicabilidad en cambio se refiere a la aplicación del mismo proceso sistemático cuando se tiene variación en algún parámetro de optimización, se quiere que este proceso sirva para más de un caso específico. Como se mostrará más adelante, un proceso sistemático y replicable se condensará simplemente en dos tablas de algoritmos.



## Marco Teórico

En este capítulo establecemos el problema estático de decisión de portafolio formalmente y se proporcionarán soluciones mediante el uso de suposiciones y aproximaciones. Para poder empezar, se establece como se han dividido las diferentes secciones de este Marco Teórico. Durante la primera sección se darán definiciones breves y semi-formales sobre la toma de decisiones racionales bajo incertidumbre a través de una función de utilidad esperada, se planteará el marco de la aversión al riesgo y se finaliza la sección revisando propiedades de funciones de utilidad de la familia HARA. En la sección 2 se planteará el problema estático de decisión de portafolio, primero en su forma general, luego se mostrará la formulación en CARA y la formulación definitiva en CRRA-Log, en el transcurso de esta sección únicamente se indicarán soluciones analíticas parciales. En la sección 3 se cambiará el enfoque momentáneamente para realizar un análisis profundo de la optimización M-V. A partir de estos resultados, en la sección 4 se retomará el problema estático CRRA-Log y se definirán soluciones concretas.

### La Función de Utilidad Esperada y la Aversión al Riesgo

En el planteamiento de la problemática se había denotado que la motivación para que el individuo tome decisiones de portafolio tenía que ver con la maximización de la utilidad esperada y también se había establecido que esta iba a depender de la variable aleatoria de riqueza final  $\bar{\omega}$ . Para poder capturar este argumento formalmente, vamos a comenzar con el planteamiento de una función de utilidad esperada, la cual tiene un mecanismo apropiado para valorar a la variable aleatoria por medio de su distribución de probabilidades, más adelante se definirá una propiedad de concavidad sobre esta función para capturar el comportamiento y las preferencias de un individuo averso al riesgo.

#### La Utilidad Esperada

Para entender el concepto y la forma de la utilidad esperada consideremos primero una representación ordinal de la función de utilidad. Vamos a suponer que el individuo dispone de un número finito de alternativas para la toma de decisiones en el conjunto  $X$ , donde podemos relacionar dos elementos cualquiera de este conjunto mediante una relación binaria, tal que  $(x, y) \in X^2$  para todo  $x, y \in X$ . Además, vamos a establecer que la relación entre cualquier par binario es una relación de preferencia de Orden-Débil  $x \succsim y$ , donde  $\succsim$  significa “tan preferible como” y asumiremos que sirve para denotar comportamientos económico racionales, si

y sólo si, posee las siguientes propiedades (Mas-Colell, Whinston, Green, y cols., 1995),

i) Completitud:  $\forall x, y \in \mathbf{X} \mid x \succsim y \text{ o } y \succsim x$

ii) Transitividad:  $\forall x, y, z \in \mathbf{X} \mid x \succsim y \ \& \ y \succsim z \implies x \succsim z$

Como consecuencia de estas propiedades<sup>1</sup>, la preferencia de Orden-Débil  $\succsim$  pueden también ser expresada por medio de una función de utilidad de manera que,

$$U : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \succsim y \iff U(x) \geq U(y) \ \forall x, y \in \mathbf{X} \quad (1)$$

Aquí, la función real  $U(\cdot)$  clasifica todos los elementos en el conjunto de oportunidades  $\mathbf{X}$  preservando toda la información de los ordenamientos  $(x, y) \in \mathbf{X}^2$  y definidos por la relación de Orden-Débil  $\succsim$ . Observar que cualquier transformación monótona de  $U(\cdot)$  por una función estrictamente creciente  $f$  implica que  $f \circ U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , por lo tanto,  $f$  preserva las mismas ordenaciones de preferencia que la función original  $U(\cdot)$ . Por último, la definición en (1) implica una representación ordinal de utilidad, con esto decimos que los valores numéricos sólo tienen significado en medida que representan las preferencias en el orden correcto y mas no que el valor de utilidad entre  $U(x)$  y  $U(y)$  tiene algún significado para formar comparaciones numéricas (Mas-Colell y cols., 1995).

La función de utilidad ordinal nos sirve cuando las alternativas ocurren en un escenario determinístico, para valorar alternativas con incertidumbre vamos a tener que ampliar las propiedades sobre  $\succsim$ , aparte de la completitud y transitividad. Antes de eso, necesitamos conceptualizar un escenario con incertidumbre, denotemos a  $\mathbf{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  como el conjunto finito indexado de todos los posibles estados del mundo, donde  $s_i$  denota un particular estado del mundo aleatorio y mutuamente excluyente, además este estado está vinculado a una probabilidad de ocurrencia  $\pi(s_i)$ . También supongamos que antes de que se realice cualquier  $s_i$ , el individuo puede decidir un arreglo para el consumo de sus recursos, por ejemplo, en el contexto del problema estático de decisión de portafolio<sup>2</sup> establezcamos que el recurso de

<sup>1</sup> El supuesto de completitud establece que el individuo siempre podrá tomar decisiones con respecto a los elementos del conjunto de alternativas  $\mathbf{X}$ , de forma que no existe ningún elemento que no pueda relacionarse con otro a través de  $\succsim$ . La transitividad garantiza que las preferencias se ordenen linealmente para que no haya contradicciones. Por ejemplo, si  $x \succsim y$ ,  $y \succsim z$ ,  $z \succ y$ , entonces  $z \succ y$  implica una contradicción y no se puede definir ninguna preferencia racional.

<sup>2</sup> Se entiende que el individuo no se preocupa por el ordenamiento específico de este vector, si no por la distribución de probabilidades y pagos que este proporciona.

riqueza inicial  $\bar{\omega}_0$  se distribuye en un portafolio de inversión  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ . Es claro que el individuo puede ordenar este vector en distintas maneras, pero para simplificar vamos a suponer que únicamente hay dos opciones, el arreglo  $\omega^{(a)}$  y el arreglo  $\omega^{(b)}$ . Si expandimos  $\omega^{(a)}$  y  $\omega^{(b)}$  a lo largo de los estados del mundo vamos a observar que se generan las siguientes distribuciones,

$$\begin{pmatrix} & s_1 & s_2 & \dots & s_N \\ \omega^{(a)}(\mathbf{S}) & \bar{\omega}_1^{(a)}, \pi(s_1) & \bar{\omega}_2^{(a)}, \pi(s_2) & \dots & \bar{\omega}_3^{(a)}, \pi(s_N) \\ \omega^{(b)}(\mathbf{S}) & \bar{\omega}_1^{(b)}, \pi(s_1) & \bar{\omega}_2^{(b)}, \pi(s_2) & \dots & \bar{\omega}_3^{(b)}, \pi(s_N) \end{pmatrix}$$

Las filas a la derecha de cada  $\omega$  representan distribuciones de riquezas finales y distribuciones de probabilidades, donde cada  $\bar{\omega}_i$  es un valor particular de riqueza final del arreglo  $\omega$  sujeta al estado del mundo  $s_i$  y con una correspondiente probabilidad de ocurrencia  $\pi(s_i)$ .

Dejemos de lado este ejemplo específico para resumir que cada una de nuestras alternativas riesgosas son mejor representadas en forma de una lotería  $L = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N; p_1, p_2, \dots, p_N)$ , donde  $\varepsilon_i$  denota los pagos en cada estado y  $p_i$  denota la probabilidad correspondiente, donde además  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Adicionalmente, todas las loterías disponibles se encuentran en un conjunto de alternativas riesgosas  $\mathbf{A}$ . Es lógico establecer que a pesar de que nuestro escenario conlleve incertidumbre, los individuos están igual de dispuestos a tomar decisiones y también es lógico establecer que estas decisiones se toman en base a preferencias. Ahora, idealmente nos gustaría poder relacionar dos alternativas en  $\mathbf{A}$  como  $L^{(a)} \succsim L^{(b)}$ , de forma que también pudiéramos clasificarlas mediante alguna función de utilidad  $U(\cdot)$ . Para lograr esto, tendremos que añadir las siguientes propiedades a la relación de preferencia de Orden-Débil,

i) Continuidad:  $\forall L^{(a)}, L^{(b)}, L^{(c)} \in \mathbf{A} \mid L^{(a)} \succsim L^{(b)} \succsim L^{(c)} \iff L^{(b)} \sim \lambda L^{(a)} + (1 - \lambda)L^{(c)}, \lambda \in [0, 1]$

ii) Independencia:  $\forall L^{(a)}, L^{(b)} \in \mathbf{A} \mid L^{(a)} \succsim L^{(b)} \iff \lambda L^{(a)} + (1 - \lambda)L^{(c)} \succsim \lambda L^{(b)} + (1 - \lambda)L^{(c)}, \lambda \in (0, 1)$

Finalmente, decimos que si la preferencia de Orden-Débil  $\succsim$  sobre el espacio de loterías  $\mathbf{A}$  satisface los supuestos<sup>3</sup> anteriores, más los axiomas de completitud y transitividad, entonces

<sup>3</sup> Aquí, la propiedad de continuidad denota que dadas tres loterías existe una lotería compuesta, una mezcla de  $L^{(a)}$  con  $L^{(c)}$  para algún escalar  $\lambda$  que produce la misma distribución que la lotería  $L^{(b)}$ , por lo que el individuo es indiferente entre la única alternativa  $L^{(b)}$  o la lotería compuesta  $\lambda L^{(a)} + (1 - \lambda)L^{(c)}$ . La independencia por su parte establece que la mezcla de dos loterías distintas con una tercera  $\lambda L^{(a)} + (1 - \lambda)L^{(c)}$  y  $\lambda L^{(b)} + (1 - \lambda)L^{(c)}$  no cambia la ordenación inicial  $L^{(a)} \succsim L^{(b)}$ . En otras palabras, implica que el funcional de preferencia es lineal en

$\succsim$  representa preferencias racionales sobre alternativas riesgosas, además podemos clasificar estas preferencias a través de una función de utilidad esperada “v.N-M”  $E[U(\cdot)]$ , tal que  $E[U] : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta proposición implica que para dos loterías cualquiera  $L^{(a)}$  y  $L^{(b)}$  tendríamos,

$$\begin{aligned}
 L^{(a)} \succsim L^{(b)} &\iff \sum_{i=1}^N U_i p_i^{(a)} \geq \sum_{i=1}^N U_i p_i^{(b)} \\
 L^{(a)} \succsim L^{(b)} &\iff E[U(L^{(a)})] \geq E[U(L^{(b)})]
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Esta representación de la utilidad esperada nos está diciendo que por cada pago  $\varepsilon_i$  existe un valor de utilidad  $U(\varepsilon_i)$  y que la utilidad total de la lotería es la suma pondera del vector de todos los  $U(\varepsilon_i)$  y el vector de probabilidades de todos los  $p_i$ . Notar que a diferencia de la función de utilidad ordinal en (1), la función de utilidad v.N-M se conserva sólo bajo transformaciones afinas crecientes, es decir,  $f$  es otra función de utilidad esperada v.N-M, si y sólo si, es de la forma  $f(U(L)) = \beta U(L) + \gamma$ . También, decimos que la función de utilidad esperada es cardinal<sup>4</sup>, donde los valores numéricos si son significativos.

**La Aversión al Riesgo**

La aversión al riesgo se define como la falta de disposición de un individuo a participar en una lotería de riesgo puro, es decir, una lotería cuyo pago esperado es nulo  $E[\varepsilon_i] = 0$ . El individuo rechaza este tipo de lotería porque hacerlo le proporciona más utilidad que la de aceptar participar en ella. Matemáticamente esta afirmación sólo puede ser cierta, si y sólo si, la función de utilidad  $U(\cdot)$  es cóncava. Para demostrarlo imaginemos primero una lotería de riesgo puro con una estructura simple de dos pagos tal que,  $E[\varepsilon_i] = p_1(\varepsilon_1) + (1 - p_1)(\varepsilon_2) = 0$  y definamos  $U(\cdot)$  como una función de la riqueza inicial  $U(\bar{\omega}_0) \mid \bar{\omega}_0 \in \mathbb{R}_+$ . Si la decisión del individuo es rechazar la alternativa riesgosa entonces,

$$U(\bar{\omega}_0) > E[U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_i)] = p_1 U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_1) + (1 - p_1) U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_2)
 \tag{3}$$

probabilidades y por esta razón esta propiedad dará casi toda la estructura a la función de utilidad esperada.

<sup>4</sup> Esta fundamentación sobre la función de utilidad esperada se ha basado en la bibliografía de Pennacchi (2008) capítulo 1 y Campbell (2018) capítulo 1.

El lado izquierdo de esta última expresión puede escribirse en términos de  $U(\bar{\omega}_0 + E[\varepsilon_i])$ , por lo tanto,

$$U[\bar{\omega}_0 + p_1(\varepsilon_1) + (1 - p_1)(\varepsilon_2)] > E[U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_i)] = p_1U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_1) + (1 - p_1)U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_2) \quad (4)$$

Esta expresión muestra que si introducimos los valores de la estructura de pago de la lotería, el valor de la utilidad esperada resultante de rechazar la lotería sería mayor que la utilidad esperada de aceptar la lotería, si y sólo si,  $U(\bar{\omega}_0)$  es una función estrictamente cóncava<sup>5</sup>. El resultado se mantiene formalmente para todas las loterías  $E[\varepsilon_i]$ , donde  $i = 2$ . Sin embargo, nos gustaría generalizar la aversión al riesgo de tal manera que el supuesto de concavidad se pueda extender para el caso  $E[\varepsilon_i] = 0$ , donde  $i > 2$ . Para tal escenario podemos utilizar la desigualdad de Jensen para demostrar que la aversión al riesgo siempre implica que el individuo tiene una función de utilidad cóncava. La desigualdad de Jensen establece,

$$f(E\tilde{z}) > Ef(\tilde{z}) \iff f \text{ es estrictamente cóncava} \quad (5)$$

El valor esperado de la variable aleatoria  $E\tilde{z}$  valorada por la función  $f$ , es siempre mayor que la expectativa de la valoración de la variable aleatoria  $\tilde{z}$  valorada por la función  $f$ , si y sólo si,  $f$  es una función estrictamente cóncava. Aplicando este resultado al caso  $i > 2$  y suponiendo que nuestra variable aleatoria es  $\tilde{z} = \bar{\omega}_0 + \varepsilon_i$ , entonces simplemente vamos a reescribir (4) como,

$$U(E\tilde{z}) > E[U(\tilde{z})] \quad (6)$$

Por lo tanto, por definición el individuo con aversión al riesgo no aceptará ninguna alternativa de riesgo puro, ya que sus preferencias por  $\varepsilon_i$  son mapeadas por una función de utilidad estrictamente cóncava significando que la utilidad esperada de aceptar la alternativa riesgosa es siempre menor que la utilidad esperada de rechazarla<sup>6</sup>.

Dado que  $U(\bar{\omega}_0)$  es estrictamente cóncava, podemos afirmar que la primera derivada de la

<sup>5</sup> Una función  $f$  es estrictamente cóncava, si y sólo si,

$$\forall \gamma \in (0, 1) \wedge a, b \implies f(\gamma a + (1 - \gamma)b) > \gamma f(a) + (1 - \gamma)f(b)$$

<sup>6</sup> Hemos planteado nuestro marco de aversión al riesgo en base a la literatura por Back (2017) capítulo 1 y Campbell (2018) capítulo 1.

función de utilidad de un individuo con aversión al riesgo es  $U' > 0$ , una función no creciente y por lo tanto para una  $U(\bar{\omega}_0)$  dos veces diferenciable, la segunda derivada tiene la propiedad  $U'' < 0$ .

### *Medidas de Aversión al Riesgo*

Aunque todos los individuos aversos al riesgo rechazan alternativas de riesgo puro, precisamente porque su función de utilidad es cóncava, no sería pertinente suponer que nunca estarían dispuestos a aceptar alguna alternativa riesgosa. Para determinar las alternativas riesgosas que un individuo averso al riesgo si estaría dispuesto a aceptar, necesitamos entender su medida de aversión al riesgo, un concepto que se volverá indispensable para determinar las decisiones de portafolio más adelante.

Para derivar estas medidas, una forma es analizar cómo reaccionaría el individuo cuando el riesgo es inevitable. Recordemos la expresión,  $U(\bar{\omega}_0) > E[U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_i)]$ , una observación que se desprende de esta desigualdad es que si fuera posible, el individuo estaría dispuesto<sup>7</sup> a asegurar parte de su riqueza pagando un valor monetario que llamaremos prima-de-riesgo  $\Omega$ . Ahora, en el nivel en el que aceptar la alternativa riesgosa o pagar la prima da la igualdad,

$$U(\bar{\omega}_0 - \Omega) = E[U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_i)] \quad (7)$$

se dice que el individuo es indiferente entre pagar un monto  $\Omega$  o aceptar la alternativa riesgosa  $\varepsilon_i$ . Si, por ejemplo, la aseguradora exigiera una prima más alta  $\Omega^{(a)} > \Omega$  que modificara la igualdad de arriba, el individuo preferiría aceptar la alternativa riesgosa porque le proporcionaría una mayor utilidad esperada que un valor deducido su riqueza inicial,  $U(\bar{\omega}_0 - \Omega^{(a)}) < E[U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_i)]$ .

### *Medida de Aversión Absoluta al Riesgo*

Sería interesante poder cuantificar el valor de  $\Omega$  en función de la riqueza inicial  $\bar{\omega}_0$  y de los pagos  $\varepsilon_i$ , afortunadamente podemos derivar una relación numérica entre estas variables mediante una Serie de Taylor<sup>8</sup> Kim y Francis (2013). Aproximando el lado izquierdo de (7) alre-

<sup>7</sup> Se dice que esta acción es un comportamiento racional del individuo, porque después de pagar una prima de riesgo barata el individuo aún podría conservar una cantidad segura de riqueza que le representa más utilidad que aceptar la alternativa riesgosa.

<sup>8</sup> Para que la aproximación sea precisa, se asume que los riesgos son pequeños, de modo que los valores

dedor de  $\bar{\omega}_0$  da lo siguiente,

$$U(\bar{\omega}_0 - \Omega) \approx U(\bar{\omega}_0) - \Omega \cdot U'(\bar{\omega}_0) + h_{n+2} \quad (8)$$

Al asumir riesgos-pequeños los demás términos de la serie se aproximan a 0 y se ignoran. Continuando, el lado derecho de la equivalencia inicial se aproxima en torno a  $\varepsilon_i$  y tenemos,

$$U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_i) \approx U(\bar{\omega}_0) + \varepsilon_i \cdot U'(\bar{\omega}_0) + \frac{\varepsilon_i^2 U''(\bar{\omega}_0)}{2} + h_{n+2} \quad (9)$$

una vez más, se ignoran otros términos  $h_{n+2}$ . Aplicando el operador de expectativas a la expresión anterior tenemos,

$$E[U(\bar{\omega}_0 + \varepsilon_i)] \approx U(\bar{\omega}_0) + \frac{\sigma_{\varepsilon_i}^2 U''(\bar{\omega}_0)}{2} \quad (10)$$

donde  $E[\varepsilon_i] = 0$  elimina el segundo término y la expresión se simplifica en,  $E[\varepsilon_i]^2 = \sigma_{\varepsilon_i}^2$ . Por último, igualando las aproximaciones del lado izquierdo y derecho para resolver en términos de la prima de riesgo  $\Omega$  nos da,

$$\Omega \approx \frac{\sigma_{\varepsilon_i}^2}{2} \cdot \left( - \frac{U''(\bar{\omega}_0)}{U'(\bar{\omega}_0)} \right) \quad (11)$$

De esta ecuación dejamos que la medida de aversión absoluta al riesgo sea,

$$A(\bar{\omega}_0) = \left( - \frac{U''(\bar{\omega}_0)}{U'(\bar{\omega}_0)} \right) \quad (12)$$

Si al diferenciar  $A(\bar{\omega}_0)$  obtenemos  $A'(\bar{\omega}_0) > 0$ , decimos que el individuo tiene aversión absoluta al riesgo creciente. Observar que si mantenemos constante la varianza de los pagos, la derivada implica que a medida que aumenta la riqueza inicial, también debe aumentar la prima-de-riesgo. En otras palabras, a medida que el individuo se enriquece, se vuelve menos tolerante al riesgo,  $A(\bar{\omega}_0 \uparrow) \uparrow$ , por lo tanto, el individuo está dispuesto a pagar una prima de riesgo más cara para conservar parte de un valor de riqueza seguro. Este argumento a favor del comportamiento racional es más bien débil, porque uno esperaría que ocurra lo opuesto, esto es que el individuo estuviera dispuesto a aceptar alternativas más riesgosas a medida

aproximados pueden ser capturados por los primeros términos de la Serie de Taylor.

que se enriquece.

En contraste, cuando  $A'(\bar{\omega}_0) < 0$  entonces a medida que el individuo se enriquece se vuelve más tolerante al riesgo  $A(\bar{\omega}_0 \uparrow) \downarrow$ , esta característica se conoce como aversión absoluta al riesgo decreciente. En general esta propiedad es atractiva por los argumentos racionales que plantea, por ejemplo, si queremos modelar el comportamiento de dos individuos, uno rico y otro pobre, una función de utilidad con aversión absoluta al riesgo decreciente establece que bajo las mismas condiciones exógenas, el individuo pobre siempre está dispuesto a pagar una prima de riesgo más cara que el individuo rico. Este resultado implica que en el caso de pérdida el más afectado es el individuo pobre por lo que tener que pagar una prima más cara está justificado. En el caso del individuo rico, no tiene sentido pagar el mismo valor de prima de riesgo, si su bienestar frente a una posible pérdida no se afecta negativamente en un mismo grado que el individuo pobre.

#### *Medida de Aversión Relativa al Riesgo*

Alternativamente, el valor de la prima de riesgo  $\Omega$ , también puede derivarse desde la perspectiva de que su valor es una cierta proporción de la riqueza inicial, tal que  $\Omega = \alpha \bar{\omega}_0$ . Supongamos también que los pagos se definen como  $\varepsilon_i = r_i \bar{\omega}_0$ , donde  $r_i$  denota el retorno de la alternativa riesgosa. Redefiniendo la expresión (8) da,

$$U(\bar{\omega}_0 - \alpha \bar{\omega}_0) = E[U(\bar{\omega}_0 + r_i \bar{\omega}_0)] \quad (13)$$

Siguiendo el mismo procedimiento<sup>9</sup> como en (9) se aproximan los términos laterales por un Serie de Taylor para obtener,

$$\alpha \approx \frac{\sigma_i^2}{2} \left[ -\bar{\omega}_0 \cdot \frac{U''(\bar{\omega}_0)}{U'(\bar{\omega}_0)} \right] \quad (14)$$

Aquí definimos la medida de aversión relativa al riesgo,  $R(\bar{\omega}_0) = \bar{\omega}_0 \cdot A(\bar{\omega}_0)$ . Es habitual suponer que un individuo con una medida de aversión absoluta al riesgo decreciente, también mostrará aversión al riesgo relativa constante. Esto significa que a medida aumenta la riqueza, el individuo estará más dispuesto a aceptar alternativas cada vez más riesgosas, pero la proporción de recursos invertidos en la alternativa riesgosa en relación con la riqueza inicial

<sup>9</sup> Tenemos el término del lado izquierdo  $U(\bar{\omega}_0 - \alpha \bar{\omega}_0) \approx U(\bar{\omega}_0) - (\alpha \bar{\omega}_0)U'(\bar{\omega}_0)$ , y el término del lado derecho  $E[U(\bar{\omega}_0 + r_i \bar{\omega}_0)] \approx U(\bar{\omega}_0) + \frac{U''(\bar{\omega}_0)\bar{\omega}_0^2 \sigma_i^2}{2}$ . Luego, igualamos ambas expresiones para obtener  $\alpha$ .



se mantiene igual.

### *Tamaño del Riesgo*

A partir de (11), se analiza también el efecto del término de la varianza, al cual también se refiere como al efecto de tamaño del riesgo. Observar que a medida que la varianza de los pagos incrementa  $\sigma_{\varepsilon_i}^2 \uparrow$ , la prima de riesgo también incrementa  $\Omega \uparrow$ , es claro que sin importar la medida específica de aversión al riesgo todos los individuos están dispuestos a pagar una prima más cara conforme la alternativa se vuelve más riesgosa.

Por el contrario ¿qué podríamos decir conforme el tamaño del riesgo disminuye? Un análisis general nos dice que todos los individuos independientemente de su medida de aversión al riesgo se acercan a ser neutrales al riesgo a medida que el tamaño del riesgo disminuye  $\sigma_{\varepsilon_i}^2 \downarrow$ . Para ver esto más claramente digamos que  $\mathcal{K}$  representa el tamaño de un riesgo arbitrario,  $z = \mathcal{K} \cdot \varepsilon_i$  y supongamos también que  $\varepsilon_i$  es relativamente pequeño, con  $E(\varepsilon_i) = 0$ . La prima de riesgo de (11) puede reescribirse como <sup>10</sup>,

$$\Omega(\mathcal{K}) \approx \frac{1}{2} \mathcal{K}^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 \cdot \left( - \frac{U''(\bar{\omega}_0)}{U'(\bar{\omega}_0)} \right) \quad (15)$$

Dado que  $\mathcal{K} \rightarrow 0$  también debe ser el caso que  $\Omega \rightarrow 0$ , por lo tanto, en lo “pequeño” la prima-de-riesgo no tiene un efecto significativo sobre la utilidad esperada del individuo<sup>11</sup>.

### **Funciones de Utilidad HARA**

Habiendo derivado las medidas de aversión al riesgo, ahora se revisará las funciones de utilidad de la clase HARA. Esta familia de funciones de utilidad adquieren las propiedades (creciente, decreciente o constante) de aversión al riesgo relativa y absoluta, tan solo cambiando los parámetros  $\delta, \beta$ <sup>12</sup>, ver Campbell (2018). Sea  $W$  cualquier nivel de riqueza, la utilidad HARA puede resumirse como,

$$U(W) = \delta + \beta \left( \eta + \frac{W}{\gamma} \right)^{1-\gamma} \quad (16)$$

<sup>10</sup> Donde  $\mathcal{K}$  es una constante y  $\sigma_z^2 = \mathcal{K}^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2$

<sup>11</sup> En la vecindad de lo pequeño, la curvatura de una función de utilidad cóncava se aproxima a un segmento lineal, por lo tanto, las preferencias hacia el riesgo están bien aproximadas como neutrales. Para una demostración completa ver Eeckhoudt, Gollier, y Schlesinger (2005).

<sup>12</sup> Dado que los parámetros  $\delta, \beta$  representan transformaciones monótonas, no cambiarán los ordenamientos de preferencia originales.

Debe cumplirse que  $\eta + \frac{W}{\gamma} > 0$ . Vamos a discutir algunas funciones específicas de inmediato, en primer lugar establecemos la aversión al riesgo absoluta y relativa de HARA,

$$A(W) = \left( \eta + \frac{W}{\gamma} \right)^{-1} \quad (17)$$

y la aversión al riesgo relativa,

$$R(W) = W \left( \eta + \frac{W}{\gamma} \right)^{-1} \quad (18)$$

### *Utilidad Cuadrática*

Ajustando el parámetro  $\gamma = -1$  llegamos a la función de utilidad cuadrática. Recalcamos dos propiedades generalmente desfavorables, primero la utilidad cuadrática tiene la propiedad de aversión al riesgo absoluta creciente, como establecimos antes, esto implica que un individuo preferiría invertir menos en alternativas-riesgosas a medida que se hace más rico. Segundo, la función de utilidad cuadrática tiene un nivel de máximo de utilidad en  $U'(W_k) = 0$ , donde  $W_k > W_j$ , esto significa que las ganancias adicionales de riqueza producirán una utilidad marginal negativa. No obstante, el beneficio de utilizar esta función, es que su forma en utilidad esperada, es una función exacta en términos de media y varianza de  $W$ , lo que justifica la formación de portafolios por el criterio M-V sin requerir del supuesto de normalidad, que más adelante se verá que es esencial para simplificar el problema estático. Para ver esta característica vamos plantear una función de utilidad cuadrática e inmediatamente aplicamos el operador de expectativa de manera que tendremos,

$$\begin{aligned} U(W) &= \eta W - W^2 \\ E[U(W)] &= \eta EW - EW^2 \\ &= \eta EW - \{[E(W)]^2 + \sigma_W^2\} \end{aligned} \quad (19)$$

Por lo tanto, un problema de decisión de portafolio con una función de utilidad cuadrática, únicamente considera los parámetros M-V del portafolio y una medida de aversión al riesgo, ver Kim y Francis (2013) y ver también la aproximación al criterio M-V por una Serie de Taylor en la nota 19.

### *Función de Utilidad CARA*

La función de utilidad exponencial negativa o CARA (Constant Absolute Risk-Aversión), es otra representación de HARA, ver lo que ocurre en (17) a medida que  $\gamma \rightarrow -\infty$ ,

$$A(W) = \lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \left( \eta + \frac{W}{\gamma} \right)^{-1} = \frac{1}{\eta} \quad (20)$$

donde  $A(W) = \frac{1}{\eta}$  es una constante y notar que  $A(W) = -U''(W)/U'(W)$ . Ahora, para recuperar la función de utilidad correspondiente resolvemos la diferencial  $U''(W) = AU'(W)$  obtenemos,

$$U(W) = e^{-AW} \quad (21)$$

Esta función de utilidad no tiene un punto máximo de utilidad como la función de utilidad cuadrática, aunque desafortunadamente la utilidad si se aproxima a 0, a medida que aumenta la riqueza. Otra cualidad de CARA que demostraremos con más ímpetu en las secciones a continuación, es que esta función permite una solución de forma cerrada del problema estático de decisión de portafolio cuando se utiliza el supuesto de normalidad, donde además la decisión de portafolio se simplifica nuevamente hacia una expresión de preferencias entre los parámetros M-V y una medida de aversión al riesgo.

### *Función de Utilidad CRRA*

La función de utilidad de aversión al riesgo relativa constante, CRRA, se obtiene estableciendo  $\eta = 0$  y  $\gamma > 0$ ,

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (22)$$

La constante  $R(W) = \gamma$  es una característica atractiva, porque no sólo implica que el individuo posee una aversión absoluta al riesgo decreciente, sino que también permite la separabilidad de los niveles de riqueza,

$$\begin{aligned} U(\bar{w}) &= \bar{w}^{1-\gamma} \\ &= [\bar{w}_0(1 + R_p)]^{1-\gamma} \\ &= \bar{w}_0^{1-\gamma}(1 + r_p)^{1-\gamma} \end{aligned} \quad (23)$$

Como resultado, el problema de decisión de portafolio en (25) puede resolverse como una función de la variable de retorno, en lugar de la necesidad de considerar la riqueza inicial.

Por último, ver lo que sucede cuando  $\gamma \rightarrow 1$  y utilizamos la regla de L'Hopital sobre el límite,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{W^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{-W^{1-\gamma} \ln(W)}{-1} = \ln(W) \quad (24)$$

llegamos a una función de utilidad logarítmica.

### Problema Estático de Decisión de Portafolio

En las secciones anteriores se centró en establecer los fundamentos de la decisión bajo incertidumbre, la aversión al riesgo y también revisamos algunas funciones de utilidad HARA, con estas herramientas a disposición lo que haremos por el resto del capítulo es establecer formalmente al problema estático de decisión de portafolio y proporcionar soluciones mediante el uso de supuestos y aproximaciones.

#### *El Problema Estático General*

Se comienza suponiendo que sólo hay dos tipos de activos de inversión en la economía, un activo-sin-riesgo con retorno simple y seguro  $rf$  y un activo-riesgoso con retorno-simple aleatorio  $r_i$ <sup>13</sup>. También supondremos que el individuo invierte toda su riqueza inicial  $\bar{\omega}_0$  en estos dos activos sobre un horizonte de inversión de un solo periodo  $t \rightarrow T$ , donde  $t$  denota el comienzo del horizonte de inversión y finaliza en  $T$ , momento en el cual el individuo llegará a consumir toda la riqueza final  $\bar{\omega}$ <sup>14</sup>. A través de estos supuestos el problema estático de decisión de portafolio<sup>15</sup> se establece como,

$$\max_a E[U(\bar{\omega})] = \max_a E[U(\bar{\omega}_0 Rf + a(R - Rf))] \quad (25)$$

donde  $U(\bar{\omega})$  es una función cóncava y dos veces diferenciable. Por la notación  $\max_a$  la preocupación del individuo se convierte en maximizar la utilidad esperada mediante la asignación

<sup>13</sup> Por ahora dejemos que el activo-riesgoso sea un fondo de inversión que contiene todos los activos-riesgosos disponibles en el mercado. Más adelante en el capítulo mostramos que bajo los principios de optimización M-V este activo es equivalente a un fondo perfectamente diversificado de  $n$ -activos-riesgosos.

<sup>14</sup> Para simplificar más adelante escribiremos el retorno bruto del activo-sin-riesgo como  $(1 + rf) = Rf$  y el retorno-bruto del activo-riesgoso como  $(1 + r_i) = R$ . La riqueza final puede estar en cualquiera de las formas,  $\bar{\omega} = (1 + rf)(\bar{\omega}_0 - a) + a(1 + r_i) = \bar{\omega}_0 Rf + a(R - Rf)$ .

<sup>15</sup> El problema estático es el tema introductorio más común en la literatura de teoría de portafolio, nuestra formulación del tema se basa principalmente en la bibliografía de Campbell (2018); Pennacchi (2008) y en menor medida en los demás autores que se encontrarán a lo largo del capítulo. Tener en cuenta que esta formulación no considera niveles de consumo-ahorros óptimos, tampoco considera o menciona el escenario multi-periodo, por lo tanto, la función objetivo en (25) simplifica en gran medida el problema de portafolio que el individuo tiene que resolver.

óptima de  $\bar{\omega}_0$  entre el activo-riesgoso  $\hat{a}$  y el activo-sin-riesgo ( $\bar{\omega}_0 - \hat{a}$ ).

En base a lo anterior, vamos a deducir que la condición de primer orden para optimalidad con respecto a “ $a$ ” en (25) debe ser,

$$\frac{dE[U]}{da} : E[U'(\bar{\omega})(R - Rf)] = 0 \iff \hat{a} \text{ es óptima} \quad (26)$$

Para analizar mejor este resultado se puede replantear (25) a través de una función  $f(a)$ , tal que,

$$\begin{aligned} f(a) &= E[U'(\bar{\omega}_0 Rf + a(R - Rf))(R - Rf)] \\ f(\hat{a}) &= E[U'(\bar{\omega}_0 Rf + \hat{a}(R - Rf))(R - Rf)] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Debido a que la primera derivada de la función de utilidad de un individuo averso al riesgo es estrictamente decreciente en  $\bar{\omega}$ , entonces  $U'(\bar{\omega}) > 0$  y  $U''(\bar{\omega}) < 0$  implicará que  $f(a)$  es también una función estrictamente decreciente en  $a$  y por lo tanto,

$$f'(a) = E[U''(\bar{\omega}_0 Rf + a(R - Rf))(R - Rf)^2] < 0 \quad (28)$$

Esta expresión debería ayudar como una primera aproximación para la determinación del valor de  $\hat{a}$ . Para ver esto se va implicar el caso cuando no existe valor monetario invertido en el activo-riesgoso  $a = 0$ , la expresión en (27) se reduce a

$$f(0) = U'(\bar{\omega}_0 Rf)E(R - Rf) \quad (29)$$

un componente no aleatorio en  $U'(\bar{\omega}_0 Rf)$  multiplicado por la prima de inversión  $E(R - Rf)$ <sup>16</sup>. Es fácil ver que  $\hat{a} = 0$  es una solución de asignación óptima, si y sólo si, el mercado ofrece una prima de inversión nula, es decir  $E(R - Rf) = 0$ . De esto se deduce inmediatamente que si  $E(R - Rf) > 0$ , entonces el individuo asigna una cantidad positiva al activo-riesgoso  $\hat{a} \in \mathbb{R}_+$ , porque la propiedad  $f'(a) < 0$  obliga a que el máximo de la función  $f(a)$  sólo pueda ocurrir en un valor hacia la derecha del punto<sup>17</sup>  $a = 0$ . Notar que esta conclusión aplicará para todos los individuos aversos al riesgo independientemente de su función de utilidad específica.

<sup>16</sup> Este valor también suele ser llamado el retorno esperado en exceso.

<sup>17</sup> La regla general es,  $\hat{a} = 0 \iff E(R - rf) = 0$ ;  $\hat{a} > 0 \iff E(R - Rf) > 0$ ;  $\hat{a} < 0 \iff E(R - Rf) < 0$ .

A pesar de haber llegado a esta importante conclusión, aun estamos cortos de una solución concreta porque no se sabe la magnitud exacta en valor monetario que debe asignarse al activo-riesgoso y después de todo la recuperación de un valor numérico es lo que más le interesa al individuo.

### **Una Aproximación para un Riesgo-Pequeño**

Por ahora se utilizará una vez más el supuesto de un riesgo-pequeño para aproximarnos a una solución numérica de  $\hat{a}^{18}$ . Definamos la variable de la prima de inversión aleatoria como  $\tilde{x} = (R - Rf) = \mathcal{K}u + \tilde{y}$ , de tal forma que el tamaño del riesgo se aproxima  $\mathcal{K} \rightarrow 0$  y mientras lo hace reduce el tamaño de la media  $u > 0$ . También dejemos que  $\tilde{y}$  sea el componente neto aleatorio con  $E(\tilde{y}) = 0$ . Para simplificar aún más, se denotará el término  $\bar{\omega}_0 Rf = \bar{\omega}_{Rf}$ . Con esto la condición de primer orden en (25) se puede reescribir como,

$$E[U'(\bar{\omega}_{Rf} + \hat{a}(\mathcal{K})(\mathcal{K}u + \tilde{y}))(\mathcal{K}u + \tilde{y})] = 0 \quad (30)$$

donde  $\hat{a}$  se define en función de  $\mathcal{K}$ . Tomando la derivada de esta función con respecto a  $\mathcal{K}$  se obtiene,

$$uE[U'(\bar{\omega})] + \hat{a}(\mathcal{K})uE[(\mathcal{K}u + \tilde{y})U''(\bar{\omega})] + \hat{a}'(\mathcal{K})E[(\mathcal{K}u + \tilde{y})^2U''(\bar{\omega})] = 0 \quad (31)$$

Si se evalúa la expresión en  $\mathcal{K} = 0$  y se utiliza el resultado  $\hat{a}(0) = 0$  se obtiene,

$$\hat{a}'(0) = \frac{u}{E(\tilde{y})^2} \frac{1}{A(\bar{\omega}_{Rf})} \quad (32)$$

Aproximando para el valor monetario óptimo del activo-riesgoso  $\hat{a}(\mathcal{K})$  con una Serie de Taylor de primer orden  $\hat{a}(k) \approx \hat{a}(0) + \hat{a}'(0)\mathcal{K}$  alrededor de  $\mathcal{K} = 0$  se debería obtener,

$$\hat{a}(\mathcal{K}) \approx \frac{E(\tilde{x})}{A(\bar{\omega}_{Rf})E[\tilde{x} - E(\tilde{x})]^2} \quad (33)$$

Esta expresión establece que la cantidad óptima del valor monetario que el individuo tiene que invertir en el activo-riesgoso  $\hat{a}$ , es aproximadamente la relación proporcional M-V de la prima de inversión sobre la medida de aversión absoluta al riesgo  $A(\bar{\omega}_{Rf})$ .

Alternativamente, se quiere conocer la proporción de riqueza óptima que se debe invertir en

<sup>18</sup> Este análisis está basado en el procedimiento de Gollier (2001), ver el capítulo 4.

el activo-riesgoso  $\hat{\alpha} = \hat{a}/\bar{\omega}_0$ , entonces se obtendría,

$$\hat{\alpha}(\mathcal{K}) \approx \frac{E\tilde{x}}{R(\bar{\omega}_{Rf})E(\tilde{x} - E(\tilde{x}))^2} \quad (34)$$

Del mismo modo, esta expresión explica que la proporción óptima de riqueza inicial  $\hat{\alpha}$  invertida en el activo-riesgoso es aproximadamente la relación proporcional M-V de la prima de inversión sobre la medida de aversión relativa al riesgo  $R(\bar{\omega}_{Rf})$ .

Hasta este punto el supuesto de riesgo-pequeño ha llevado nuestro análisis relativamente lejos. Sin embargo, por el resto de la sección se explorarán los casos en los que mediante la adición de supuestos a la distribución de los retornos, la solución al problema estático como en (34) se mantiene como una expresión exacta<sup>19</sup> de la relación entre parámetros M-V y una medida de aversión al riesgo del individuo.

### Formulación CARA

Se demostrará que al asumir una función de utilidad CARA y el supuesto de normalidad sobre la variable de retorno simple  $r_i \sim N(u, \sigma^2)$ , la función objetivo del problema estático se traduce a una relación de los parámetros M-V del portafolio y una medida de aversión riesgo. A partir de esta formulación se deriva soluciones en forma cerrada considerando que existen  $n$ -activos-riesgosos<sup>20</sup> y un activo-sin-riesgo.

Se comienza reescribiendo la función objetivo del problema de portafolio en términos de CARA,  $U(\bar{\omega}) = e^{-RW}$ , donde se a cambiado la medida de aversión absoluta al riesgo por la

<sup>19</sup> Bajo el supuesto de normalidad o si el individuo posee una función de utilidad cuadrática, la función de utilidad esperada se expresará exactamente en términos de media y varianza, ver Kim y Francis (2013) Apéndice A4.3. Para probar esto, utilizamos una Serie de Taylor para aproximar  $U(W)$  en torno a  $E(W)$ , por lo tanto se tiene,

$$U(W) \approx U[E(W)] + U'[E(W)][W - E(W)] + \frac{U''[E(W)][W - E(W)]^2}{2!} + \dots + \frac{U^n[E(W)][W - E(W)]^n}{n!}$$

Si se introduce el operador del valor esperado a ambos lados de la expresión se obtiene,

$$E[U(W)] \approx \underbrace{U[E(W)] + \frac{U''[E(W)]\sigma_W^2}{2!}}_{\text{Relación M-V}} + \frac{U'''[E(W)]E[W - E(W)]^3}{3!} + \frac{U''''[E(W)]E[W - E(W)]^4}{4!} + n_\infty$$

En primer lugar, si la función de utilidad del individuo es cuadrática la serie de terminará después de la segunda derivada, incluso si la variable aleatoria no tiene una distribución normal. En segundo lugar, si la distribución de la variable aleatoria (riqueza o retornos) sigue una distribución normal,  $x \sim N(u, \sigma^2)$ , los momentos pares e impares de la serie luego del segundo término pueden ignorarse por completo.

<sup>20</sup> Cuando consideramos el caso de múltiples activos riesgosos se dice que las variables de retornos aleatorios siguen una distribución normal multivariante  $\mathbf{r} \sim N(u, \sigma^2)$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector de retornos aleatorios simples de longitud  $n$ .

aversión relativa al riesgo,  $R(\bar{\omega}_0) = \bar{\omega}_0 A(\bar{\omega}_0)$ . La función objetivo se convierte en,

$$\max_a E[U(\bar{\omega})] = \max_a E \left[ - \exp \left\{ - \bar{\omega}_0 A(\bar{\omega}_0) \cdot \frac{\bar{\omega}_0 Rf + a(R - Rf)}{\bar{\omega}_0} \right\} \right] \quad (35)$$

Para familiarizarnos con el escenario de múltiples activos-riesgosos se supone que  $\bar{\omega}_0$  puede distribuirse entre  $rf$  y  $n$ -activos-riesgosos. En base a esto,  $\mathbf{r}$  será el vector<sup>21</sup> de retornos aleatorios normalmente distribuidos de los  $n$ -activos-riesgosos y se dejará que  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  sea el vector de proporciones de inversión en los activos-riesgosos, tal que,  $w_i = a_i/\bar{\omega}_0$ . Con estas definiciones el retorno del portafolio se establece como  $R_p = rf + \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{r} - rfe)$ , donde  $e$  es un vector de unos con longitud  $n$ . Aplicando estos nuevos componentes a la función objetivo da como resultado,

$$\max_{\boldsymbol{\omega}} E[U(\bar{\omega})] = \max_{\boldsymbol{\omega}} E \left[ - \exp \left\{ - R(\bar{\omega}_0) \cdot rf + \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{r} - rfe) \right\} \right] \quad (36)$$

Consecuentemente, el primer paso para resolver esta función es observar que la normalidad de la variable aleatoria entre paréntesis,  $\{-R(\bar{\omega}_0) \cdot \mu\}$ , hace que el término entre corchetes sea Log-Normalmente distribuido. Luego, una de las propiedades más importantes para variables Log-Normalmente distribuidas establece que si  $\tilde{z}$  es Log-Normal entonces se la puede relacionar con la variable normalmente distribuida  $x$  mediante,

$$\begin{aligned} \log E(\tilde{z}) &= E \log(\tilde{z}) + \frac{1}{2} \sigma_{\log(\tilde{z})}^2 \\ \log E(\tilde{z}) &= Ex + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \mid \tilde{z} = e^x \end{aligned} \quad (37)$$

Aplicando esta propiedad a la expresión en (36) y definiendo el retorno esperado del portafolio como  $\mu = rf + \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{m} - rfe)$ , donde  $\mathbf{m} = E(\mathbf{r})$  es el vector de retornos esperados y definiendo a la varianza del portafolio como  $\sigma_p^2 = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\omega}$ , donde  $\boldsymbol{\phi}$  es la matriz  $n \times n$  de covarianza, reescribimos la función objetivo una vez más,

$$\max_{\boldsymbol{\omega}} E[U(\mu, \sigma_p^2)] = \max_{\boldsymbol{\omega}} R(\bar{\omega}_0)(rf + \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{m} - rfe)) - \frac{1}{2} R(\bar{\omega}_0)^2 \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\omega} \quad (38)$$

Como se menciona al inicio, la función objetivo del problema estático se resume en la relación del retorno esperado del portafolio, la varianza y una medida de aversión al riesgo, también es

<sup>21</sup> Los vectores y matrices se representan principalmente con un formato en negrita.



claro que el individuo prefiere que el retorno esperado incremente y que la varianza disminuya. Continuando, la condición de primer orden para un óptimo establece que,

$$\frac{dE[U]}{d\omega} : \mathbf{m} - rfe - R(\bar{\omega}_0)\phi\omega = 0 \quad (39)$$

Resolviendo para el vector óptimo de proporciones de inversión de  $n$ -activos riesgosos  $\hat{\omega}$ , obtenemos,

$$\hat{\omega} = \frac{(\mathbf{m} - rfe)}{R(\bar{\omega}_0)} \cdot \phi^{-1} \quad (40)$$

Esta expresión<sup>22</sup> establece que la solución en forma cerrada de  $\hat{\omega}$  depende del vector de primas de inversión  $(\mathbf{m} - rfe)$ , dividido por la medida de aversión relativa al riesgo del individuo  $R(\bar{\omega}_0)$  y multiplicado por la matriz de covarianza invertida  $\phi^{-1}$ . Por último, notar que (38) puede cambiarse fácilmente de nuevo a una función objetivo de dos activos<sup>23</sup>, un activo-riesgoso  $i$  y un activo-sin-riesgo  $rf$ , tendremos una solución de la forma,

$$\hat{\alpha} = \frac{E(r - rf)}{R(\bar{\omega}_0)\sigma_i^2} \quad (41)$$

Esta expresión establece que la proporción óptima de riqueza invertida en el activo-riesgoso es la prima de inversión  $E(r - rf)$ , sobre el producto de la medida de aversión al riesgo relativa  $R(\bar{\omega}_0)$  y la varianza del único activo-riesgoso  $\sigma_i^2$ .

### *Conclusión sobre CARA*

Luego de este sencillo análisis hemos proporcionado una solución de forma cerrada al problema estático suponiendo que el individuo tiene una función de utilidad CARA y que los retornos aleatorios se distribuyen normalmente. Al igual que en el caso de riesgo-pequeño, la asignación óptima del portafolio que maximizará la utilidad esperada del individuo dependerá de la relación M-V y de la medida de aversión al riesgo. Sin embargo, a diferencia de (34), (41) no nos está condicionando al supuesto de riesgo-pequeño, por lo tanto, podemos extrapolar esta estrategia y aplicarla en escenarios de riesgos-grandes.

<sup>22</sup> En la siguiente sección veremos como podemos arribar al mismo resultado utilizando optimización M-V

<sup>23</sup> La función objetivo para el caso de dos activos está dada por,

$$\max_{\alpha} E[U(\mu, \sigma_r^2)] = \max_{\alpha} R(\bar{\omega}_0)(rf + \alpha E(r - rf)) - \frac{1}{2} R(\bar{\omega}_0)^2 \alpha^2 \sigma_r^2$$

Uno de los principales inconvenientes de este marco es que la medida de aversión al riesgo relativa de CARA afecta la proporción óptima de riqueza asignada al activo-riesgoso en el sentido,  $R(\bar{\omega}_0 \uparrow) \uparrow = \hat{\alpha} \downarrow$ <sup>24</sup>. Esta propiedad genera dificultades al modelar el comportamiento racional del individuo, porque significa que él disminuirá su participación en el activo-riesgoso a medida que aumenta su riqueza. Si por otro lado, decidimos volver a la medida de aversión al riesgo absoluta, veremos que la cantidad en el valor monetario asignado al activo-riesgoso es independiente de cualquier nivel de riqueza, lo que otra vez es una característica desfavorable porque implica que un mismo valor monetario óptimo  $\hat{\alpha}$  que debe ser invertido por individuos pobres y ricos de igual manera. Intentaremos abordar esta dificultad y otras en la siguiente formulación del problema estático.

### **Formulación CRRA-Log**

Cuando el individuo tiene una función de utilidad CRRA y los retornos aleatorios brutos de  $n$ -activos  $(1 + r_i)$  se distribuyen Log-Normalmente y los retornos aleatorios compuestos continuos se distribuyen normalmente  $\hat{R}_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , entonces la función objetivo del problema estático se traducirá nuevamente en una relación M-V de los parámetros de portafolio y una medida de aversión al riesgo del individuo. A partir de esta formulación se obtendrá expresiones para soluciones en forma cerrada que son muy similares al modelo CARA, sin embargo, se considera que las soluciones del modelo CRRA-Log tienen propiedades más atractivas para modelar decisiones de portafolio, al final de la sección se analiza una comparación entre estas dos formulaciones.

Como se hizo anteriormente, se pretende derivar primero la función objetivo del problema estático para luego resolver su condición de primer orden. Si se va a lograr esto primero se tiene que definir algunas propiedades de los retornos compuestos continuos y también proporcionar una nueva definición del retorno esperado del portafolio.

### *Retornos Compuestos Continuos*

Iniciemos con una definición breve del retorno compuesto continuo, suponiendo que una riqueza final  $\bar{\omega}^{(a)}$  es una variable completamente aleatoria y que puede ser explicada mediante el retorno bruto aleatorio de tal manera que  $\bar{\omega}^{(a)} = \bar{\omega}_0(1 + r_i)$ . Aquí se tendrá en cuenta que a lo largo del horizonte de inversión de un solo período  $t \rightarrow T$ ,  $(1 + r_i)$  se capitalizará única-

<sup>24</sup> Y en el caso de  $n$ -activos riesgosos,  $R(\bar{\omega}_0 \uparrow) \uparrow = (\hat{\omega}^T e) \downarrow$ .

mente por una vez. Por el supuesto de retorno compuesto continuo se implica que  $\bar{\omega}^{(a)}$  puede explicarse por un proceso de generación infinita a través de intervalos infinitos en  $t \rightarrow T$  tal que,  $\bar{\omega}^{(a)} = \bar{\omega}_0(1 + r_i) = \bar{\omega}_0(\infty \text{Capitalizaciones})$ . Ahora, para poder hallar la expresión del retorno compuesto continuo se relaciona ambos paréntesis de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} (\infty \text{Capitalizaciones}) &= (1 + r_i) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\dot{\mathcal{R}}_i}{k}\right)^k &= (1 + r_i) \\ \dot{\mathcal{R}}_i &= \log(1 + r_i) \end{aligned} \tag{42}$$

Este resultado implica que bajo el supuesto de retornos compuestos continuos la variable<sup>25</sup> aleatoria de riqueza final es  $\bar{\omega}^{(a)} = \bar{\omega}_0 e^{\dot{\mathcal{R}}_i}$ . A partir de esto se relacionar los retornos compuestos continuos esperados y los retornos brutos esperados utilizando la propiedad de Log-Normalidad en (37) de tal manera que tenemos,

$$\log E(1 + r_i) = E(\dot{\mathcal{R}}_i) + \frac{\dot{\sigma}_i^2}{2} = \dot{\mu}_i \tag{43}$$

donde  $E(\dot{\mathcal{R}}_i)$  es el retorno compuesto continuo esperado de  $i$  y  $\dot{\sigma}_i^2$  es la varianza de los retornos compuestos continuos de  $i$ . Por cuestiones de conveniencia establecemos que esta expresión se resume en  $\dot{\mu}_i$  y que denota el logaritmo del retorno bruto esperado de  $i$  o el retorno compuesto continuo esperado de  $i$  más la mitad de su varianza.

### Retorno del Portafolio

Con estos componentes se procederá con una declaración sobre el retorno compuesto continuo del portafolio  $\dot{\mathcal{R}}_p$ . Recordemos que el retorno-bruto del portafolio<sup>26</sup> no es más que una suma ponderada del vector de retornos brutos de  $n$ -activos y el vector de pesaje  $R_p = 1 + \omega^T \mathbf{r}$ . Sin embargo, este mismo procedimiento no es válido cuando se quiera calcular el retorno compuesto continuo del portafolio, porque el logaritmo de una suma no es igual a la suma de los logaritmos. Por lo tanto,  $\dot{\mathcal{R}}_p$  no puede calcularse simplemente como una suma ponderada.

<sup>25</sup> Hasta ahora no se a puesto mucho énfasis en los subíndices de tiempo debido a la naturaleza de la configuración simplificada del problema estático, sin embargo, dada la estrecha relación entre el tiempo y el proceso de generación de  $\dot{\mathcal{R}}_i$ , es importante no olvidar que  $\dot{\mathcal{R}}_i$  es una variable de fin de período,  $\dot{\mathcal{R}}_i = \dot{\mathcal{R}}_{i,T}$ . Así mismo, todos los parámetros de media y varianza de  $T$  son están condicionados al tiempo  $t$ , por ejemplo,  $\dot{\mu}_{i,T|t}$  y  $\dot{\sigma}_i^2 = \dot{\sigma}_{i,T|t}^2$ .

<sup>26</sup> Para simplificar la exposición, en esta expresión omitimos el activo-sin-riesgo.

Una solución a esta cuestión se muestra en Campbell y Viceira (2002), en donde requiere que se utilice el resultado de una Serie de Taylor cuya aproximación al retorno compuesto continuo del portafolio es,

$$\dot{\mathcal{R}}_p \approx \sum_{i=1}^n w_i \dot{\mathcal{R}}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \dot{\sigma}_i^2 - \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \quad (44)$$

Aquí, el retorno compuesto continuo del portafolio es aproximadamente igual a la suma ponderada de los retornos compuestos continuos de  $n$ -activos, más un primer ajuste de volatilidad que implica el valor de la mitad de la suma ponderada de las varianzas individuales de los  $n$ -activos y menos un segundo ajuste de volatilidad que implica el valor de la mitad de la varianza del retorno compuesto continuo del portafolio<sup>27</sup>.

A partir de esta expresión se utiliza el operador de expectativa en ambos lados para obtener,

$$E(\dot{\mathcal{R}}_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(\dot{\mathcal{R}}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \dot{\sigma}_i^2 - \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \quad (45)$$

y reuniendo los términos similares  $\sum$  y  $w_i$ , se puede reescribir la expresión como,

$$\begin{aligned} E(\dot{\mathcal{R}}_p) &= \sum_{i=1}^n w_i \dot{\mu}_i - \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \\ &= \dot{\mu} - \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \end{aligned} \quad (46)$$

Por lo tanto, el retorno compuesto continuo esperado del portafolio se define por el termino  $\dot{\mu} = \sum_{i=1}^n w_i \dot{\mu}_i$  que es igual a suma ponderada del logaritmo del retorno-bruto esperado de los  $n$ -activos y menos el término  $\dot{\sigma}_p^2/2$  que representa la mitad de la varianza del retorno compuesto continuo del portafolio.

#### *Función Objetivo del Problema Estático CRRA-Log*

Para definir la función objetivo del problema estático se va recurrir a la función de utilidad CRRA,

$$\text{máx } E[U(\bar{\omega})] = \text{máx } E\left(\frac{\bar{\omega}_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \quad (47)$$

donde  $\gamma > 1$ <sup>28</sup> representa la medida de aversión relativa al riesgo constante del individuo. Se

<sup>27</sup> Esta interpretación y formulación también se puede encontrar en Stewart, Piros, y Heisler (2019). Adicionalmente, estos autores plantean a la formulación CRRA-Log como un modelo para un horizonte de inversión  $T + K$ .

<sup>28</sup> El modelo CRRA-Log utiliza una la medida de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma > 1$  para evitar la

podrá simplificar la función de arriba utilizando la propiedad de separabilidad que mostrará en (23) para obtener,

$$\max_{\bar{\omega}} E[U(\bar{\omega})] = \max_{\bar{\omega}} E\left[\frac{1}{1-\gamma} (\bar{\omega}_0 \cdot e^{\dot{\mathcal{R}}_p})^{1-\gamma}\right] \quad (48)$$

Dado que  $\bar{\omega}_0$  es una constante y las constantes representan transformaciones monótonas, podemos sacarla del operador de expectativa para obtener,

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\omega}} E[U(\bar{\omega})] &= \frac{\bar{\omega}_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \max_{\bar{\omega}} E[\exp \dot{\mathcal{R}}_p (1-\gamma)] \\ &= \max_{\bar{\omega}} E[\exp \dot{\mathcal{R}}_p (1-\gamma)] \end{aligned} \quad (49)$$

Ahora, maximizar el término  $e^x$  es lo mismo que maximizar  $x$  aisladamente, por lo tanto, nos concentramos únicamente en el término entre paréntesis. Luego, si aplicamos la propiedad de Log-Normalidad de (37) una vez más se obtendrá,

$$\max_{\bar{\omega}} E[U(\bar{\omega})] = \max_{\bar{\omega}} \left( (1-\gamma) E(\dot{\mathcal{R}}_p) + (1-\gamma)^2 \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \right) \quad (50)$$

Recordando el resultado de (46) y dividiendo todo por  $(1-\gamma)$ ,

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\omega}} E[U(\bar{\omega})] &= \max_{\bar{\omega}} \left( \bar{\mu} - \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} + (1-\gamma) \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \right) \\ &= \max_{\bar{\omega}} \left( \bar{\mu} - \gamma \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

Con este resultado nuevamente se ha llegado a una función objetivo del problema estático, tal que, la asignación óptima de portafolio  $\hat{\omega}$  dependerá únicamente de la relación de los parámetros M-V en este caso  $(\bar{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)$  y la medida de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma > 1$ .

transformación de CRRA en una función de utilidad logarítmica. Tomar en cuenta también que sin una aproximación al límite como en (24), CRRA para  $\gamma = 1$  es una función no definida

Alternativamente, para nuestro escenario de dos activos<sup>29</sup> la función objetivo se convierte en,

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} E[U(\dot{\boldsymbol{\mu}}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p^2)] &= \max_{\alpha} \left( (1 - \gamma)\alpha E(\dot{\mathcal{R}}_p - \mathbf{r}\mathbf{f}) + (1 - \gamma)^2 \frac{\alpha^2 \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2}{2} \right) \\ &= \max_{\alpha} \left( \alpha \dot{\boldsymbol{\mu}}_{exceso} - \gamma \frac{\alpha^2 \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

Resolviendo la condición de primer orden para la optimalidad da,

$$\hat{\alpha} = \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_{exceso}}{\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2} = \frac{E(\dot{\mathcal{R}}_i - \mathbf{r}\mathbf{f}) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2/2}{\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2} \quad (53)$$

### Relación M-V

En (51) y (52) si  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_p^2$  y  $\gamma$  permanecen constantes y  $\dot{\boldsymbol{\mu}} \uparrow$ , entonces  $E[U] \uparrow$ , por lo tanto, el individuo prefiere un mayor valor del logaritmo del retorno bruto esperado del portafolio. Si  $\dot{\boldsymbol{\mu}}$  y  $\gamma$  son constantes y  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_p^2 \uparrow$ , entonces  $E[U] \downarrow$ , por lo tanto, el individuo prefiere un menor valor de la varianza del portafolio. Es evidente entonces que una vez definida la medida de aversión al riesgo, la utilidad esperada del individuo aumente al relajar los parámetros de la siguiente manera  $E[U(\dot{\boldsymbol{\mu}} \uparrow, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p^2 \downarrow)] \uparrow$ . A partir de esta generalidad podemos establecer que cualquier individuo con función de utilidad CRRA y una medida de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma > 1$ , buscará la configuración óptima de  $\hat{\omega}$  que maximice el parámetro del retorno esperado del portafolio, mientras se minimice el parámetro de la varianza del portafolio,  $\max_{\omega} E[U(\max \dot{\boldsymbol{\mu}}, \min \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p^2)] \mid \gamma > 1$ . Notar que esta última expresión sigue siendo una representación del problema estático CRRA-Log, lo único que hemos hecho es agregar los principios de optimización que se deben cumplir. En base a esto vamos a plantear el problema estático como un programa de optimización,

$$\max_{\omega} E[U(\dot{\boldsymbol{\mu}}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p^2)] = \dot{\boldsymbol{\mu}} - \gamma \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_p^2}{2} \quad s.a.: \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e} = 1 \quad (54)$$

Para establecer concretamente expresiones de  $\hat{\omega}$  que nos conducen a soluciones de forma cerrada y resuelven (54), nuestro plan para las dos siguientes secciones será el siguiente.

<sup>29</sup> La aproximación a la prima de inversión del portafolio para el caso de dos activos con retornos compuestos continuos viene dada por,  $\dot{\mathcal{R}}_p - \mathbf{r}\mathbf{f} = \alpha(\dot{\mathcal{R}}_i - \mathbf{r}\mathbf{f}) + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2$ . Tomando la expectativa da,  $E(\dot{\mathcal{R}}_p - \mathbf{r}\mathbf{f}) = \alpha(E(\dot{\mathcal{R}}_i - \mathbf{r}\mathbf{f}) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2/2) - \alpha^2 \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2/2$ . Una simplificación adicional conduce a,  $E(\dot{\mathcal{R}}_p - \mathbf{r}\mathbf{f}) = \alpha \dot{\boldsymbol{\mu}}_{exceso} - \alpha^2 \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^2/2$ . Tener en cuenta que por  $\mathbf{r}\mathbf{f}$  nos estamos refiriendo al retorno compuesto continuo del activo-sin-riesgo.

Primero, nos enfocaremos en desarrollar un proceso analítico sobre la optimización M-V donde vamos a ignorar la maximización de la utilidad esperada como el objetivo explícito. Luego, en la última sección utilizaremos los resultados obtenidos del análisis de optimización M-V y los aplicaremos al problema estático.

### *CRRRA vs. HARA*

Una dificultad de trabajar bajo el supuesto de retornos aleatorios simples normalmente distribuidos como se plantea en la formulación del problema estático CARA, es que no se permite el principio de la responsabilidad limitada, esto significa que existe una probabilidad (aunque pequeña) de que un individuo finalice el período de inversión con un valor de riqueza final negativa. No obstante, el escenario más acercado a la realidad para la mayoría de individuos sería que al final del periodo de inversión lo máximo que se pueda haber perdido sea el valor total de riqueza inicial, mas no, quedar endeudado. Por lo tanto, la formulación del problema estático que permita la propiedad de responsabilidad limitada es preferible. Afortunadamente, en la formulación del problema estático CRRRA-Log, la probabilidad de riqueza final negativa desaparece porque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\omega}_0 e^x \geq 0$ .

La decisión del portafolio óptimo en el marco CARA significaba que el individuo estaría menos dispuesto a invertir en activos-riesgosos a medida que se hace más rico, o más bien, que invertiría una cantidad fija en dólares independientemente de su riqueza. Por otra parte, hemos demostrado que cuando el individuo tiene una función de utilidad CRRRA, la proporción óptima de inversión en los activos-riesgosos es independiente de cualquier nivel de riqueza, por lo tanto, el valor monetario invertido en los activos-riesgosos está positivamente relacionado con el nivel de riqueza inicial. Como hemos afirmado anteriormente, preferimos esta propiedad porque implica que el individuo tiene aversión relativa al riesgo decreciente.

Estas características hacen que el problema estático en su formulación CRRRA-Log, sea un modelo atractivo para tomar decisiones de portafolio en un horizonte de inversión de un único período. Sin embargo, para complementar aun más, si añadimos el supuesto de que las distribuciones de retornos son i.i.d.<sup>30</sup> a lo largo del tiempo, también podemos construir un ar-

---

<sup>30</sup> Es decir, los retornos compuesto continuos aleatorios de  $n$ -activos-riesgosos son independientes e idénticamente distribuidos.

gumento para justificar el uso de la formulación CRRA-Log<sup>31</sup> como el mecanismo para la toma de decisiones de portafolio en un escenario de  $T + K$  períodos de inversión. Este argumento se resume con los siguientes supuestos,

- i. El individuo tiene una función de utilidad estrictamente cóncava,  $U'(W) > 0, U''(W) < 0$ .
- ii. Los retornos aleatorios brutos de  $n$ -activos tienen una distribución conjunta Log-Normal.
- iii. El individuo tiene una función de utilidad con la propiedad de separabilidad como es el caso de CRRA y la función de utilidad Logarítmica. Esto permite las decisiones de portafolio se puedan hacer sin tener en cuenta los niveles iniciales de riqueza.
- iiii. La distribución del retorno es i.i.d a lo largo del horizonte de inversión  $T + K$ . Por lo tanto, las oportunidades de inversión del activo-sin-riesgo y de los  $n$ -activos-riesgosos no cambian en el futuro. Por este supuesto luego de  $K$  períodos los parámetros de media y varianza simplemente se escalan como  $K\mu, K\sigma_p^2$  y el retorno del activo-sin-riesgo  $Kr_f$ .

Cuando un individuo toma decisiones de portafolio utilizando las soluciones del problema estático, se le considera como un individuo con comportamiento miope, ya que no le importan las consecuencias futuras de inversión en  $(T + K)$  periodos. Cuando se cumplen todos los supuestos de arriba se dice que las decisiones miopes que son óptimas para nuestro problema estático, también son decisiones óptimas de portafolio para  $(T + K)$ . Los argumentos anteriores se encuentran en Danthine y Donaldson (2015) en el capítulo 16 y Campbell y Viceira (2002) en los capítulos 1 y 2, también hemos resumido de Brandt (2010) capítulo 5.

### Optimización Media-Varianza

El concepto clave en la optimización de portafolios M-V consiste en resolver el dilema que planteamos en la sección anterior, obtener la asignación óptima del vector de pesaje  $\omega$  que maximiza el retorno esperado del portafolio y minimiza su varianza. Este argumento<sup>32</sup> se formuló y resolvió en el trabajo seminal "Portfolio Analysis" de Harry Markowitz. Nosotros vamos a desarrollar el análisis de optimización M-V similar a Merton (1972), donde en todo momento

<sup>31</sup> El argumento contrario sería que el marco estático no es relevante para la toma de decisiones, porque los individuos también deben considerar las oportunidades de inversión a lo largo del tiempo.

<sup>32</sup> En Markowitz (1952) se estableció la idea de que la optimización del portafolio debe centrarse en maximizar la utilidad esperada del individuo, sin embargo, Markowitz aquí precisamente no formuló este argumento de manera formal. No obstante, en este trabajo el objetivo principal sigue siendo la optimización de parámetros que representan variables de preferencias para tomar decisiones bajo riesgo, donde la diversificación de activos es una conclusión analítica y no una premisa.



consideraremos dos escenarios para la optimización, uno que involucra  $n$ -activos-riesgosos y el escenario  $n+1$  que involucra a  $n$ -activos-riesgosos más un único activo-sin-riesgo  $rf$ . Tener en cuenta que para este análisis vamos a volver a utilizar retornos simples, solamente al final de la sección se muestra cómo extender los resultados de la optimización M-V “pura” cuando los parámetros son  $(\mu, \sigma_p^2)$ .

**Optimización para  $n$ -activos-riesgosos**

Para configurar el programa de optimización M-V lo primero que haremos será especificar las expresiones de los componentes  $(\mu, \sigma_p^2)$ <sup>33</sup>. Ambos se derivan del retorno aleatorio del portafolio  $r_p = \omega^T \mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector de retornos aleatorios simples de  $n$ -activos-riesgosos y  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  es el vector de  $n$  proporciones individuales de inversión. De esto vamos a deducir que el retorno esperado del portafolio es simplemente  $\mu = E(r_p) = \omega^T \mathbf{m}$ , donde  $\mathbf{m} = E(\mathbf{r})$ <sup>34</sup>. Para determinar la varianza del portafolio resolvemos  $\sigma_p^2 = E(r_p - \mu)^2$  de forma que tendremos,

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= E[(\omega^T \mathbf{r} - \omega^T \mathbf{m})(\omega^T \mathbf{r} - \omega^T \mathbf{m})] \\ &= E[\omega^T (\mathbf{r} - \mathbf{m})(\mathbf{r} - \mathbf{m})^T \omega] \\ &= \omega^T [E(\mathbf{r} - \mathbf{m})(\mathbf{r} - \mathbf{m})^T] \omega \\ &= \omega^T \phi \omega \end{aligned} \tag{55}$$

Aquí  $\phi$  es la matriz de covarianza de tamaño  $n \times n$  y asumimos que es una matriz positiva definida, tal que  $\sigma_p^2 > 0 \forall \omega \neq 0$ .

Consecuentemente, el objetivo del individuo es encontrar la asignación óptima de  $n$ -activos  $\hat{\omega}$  que proporcionen la relación M-V óptima  $(\mu_{\max}, \sigma_p^2_{\min})$ . Este argumento equivale al programa<sup>35</sup> de optimización,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \quad \min_{\omega} \sigma_p^2 &= \frac{1}{2} \omega^T \phi \omega \\ \text{s.a.} : \omega^T \mathbf{m} &= \mu, \quad \omega^T \mathbf{e} = 1 \end{aligned} \tag{56}$$

Observar que la función objetivo de  $\mathcal{M}$  es la varianza del portafolio y buscamos el vector de

<sup>33</sup> Por naturaleza la optimización M-V es un modelo estático de un solo periodo  $t \rightarrow T$ , por lo tanto, los subíndices de tiempo son  $\mu_{T|t}$  y  $\sigma_{p,T|t}^2$ . Sin embargo, ignorar esta notación no hará daño así que por conveniencia mantendremos el uso de  $(\mu, \sigma_p^2)$ .

<sup>34</sup> Supondremos que no existen activos con retornos esperados redundantes, es decir, que ningún  $E(r_i) \neq E(r_j) \forall i, j$ , con la finalidad de asegurar independencia lineal en los **QP** de más adelante.

<sup>35</sup> Permitimos la venta en corto que para un caso de dos activos-riesgosos significa financiar  $\omega_i$  con  $\omega_j$ , de modo que  $\omega_j \leq 0$ .

pesos óptimo  $\hat{\omega}$  que la minimice, mientras que además deben satisfacerse dos restricciones lineales  $\omega^T m = \mu$ , donde  $\mu$  representa el retorno esperado objetivo<sup>36</sup> y  $\omega^T e = 1$  que implica la condición de inversión completa. La fracción 1/2 es simplemente una convención general para poder simplificar.

Una forma de resolver  $\mathcal{M}$  analíticamente es notar que el programa coincide con la forma de un programa de optimización convexo cuadrático con restricciones lineales de igualdad,

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x) &= x^T Q x \\ \text{s.a. } Ax &= b \end{aligned} \tag{57}$$

donde por definición  $f(x)$  es una función convexa dos veces diferenciable y  $\mathbf{A}$  es un vector de rango completo de  $k$  restricciones lineales de igualdad. Dada esta representación, el programa de optimización tendrá una solución óptima, si y sólo si, existe un  $\hat{\lambda}_k$  tal que,

$$\begin{aligned} A\hat{x} &= b, \quad \nabla f(\hat{x}) + A^T \hat{\lambda}_k = 0 \\ A\hat{x} &= b, \quad Q\hat{x} + A^T \hat{\lambda}_k = 0 \end{aligned} \tag{58}$$

Resolver las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden de esta expresión es equivalente a resolver el programa convexo en (57). Consecuentemente, para encontrar simultáneamente las soluciones a la ecuaciones resultantes podemos formar un sistema de matrices de la forma,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{Bmatrix}_Z \begin{Bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b \end{Bmatrix} \tag{59}$$

Dado que  $\mathbf{A}$  es de rango completo y  $\mathbf{Q}$  es una matriz positiva definida implica que  $\mathbf{Z}$  es invertible y por lo tanto,  $\hat{x}$  es una solución única y un óptimo global<sup>37</sup>.

<sup>36</sup> El retorno esperado objetivo es el elemento de mayor valor que pertenece a un conjunto de retornos esperados. Esto significa que  $\mu$  puede definirse como  $\mu = \max_x(\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\})$ . Observar que existen infinitos subconjuntos de retornos esperados en el conjunto de los números reales, por lo que cualquier valor  $\mu$  puede considerarse como un máximo de algún conjunto implícito. Así mismo, podemos definir una varianza objetiva como  $\sigma_p^2 = \min_x(\{x \in \mathbb{R}_+ | a \leq x \leq b\})$ , aquí el valor objetivo es la varianza más baja de este conjunto de riesgos. Es importante notar que a diferencia de nuestro  $\mu$  objetivo,  $\sigma_p^2$  objetivo solamente puede definirse para valores positivos, además ningún conjunto de riesgo puede configurar un limite inferior con un valor menor a  $a_{min} \in \mathbb{R}_+$ . Esta restricción ocurre porque  $\phi$  es una matriz positiva definida  $\omega^T \phi \omega > 0 \forall \omega$  y  $\omega^T \phi \omega \iff \omega = 0$ , por lo tanto, cualquier inversión que no sea nula e implique a  $n$ -activos conlleva riesgo y por lo menos este riesgo tiene que tener un valor de  $a_{min}$ .

<sup>37</sup> Un ejemplo similar se encuentra en Boyd, Boyd, y Vandenberghe (2004) capítulo 5.

Ahora que tenemos un proceso formal para resolver nuestro **QP** podemos utilizar el método de multiplicadores Lagrangianos para encontrar y resolver las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden de (58) equivalente a  $\mathcal{M}$ . En primer lugar, vamos escribir la función Lagrangiana,

$$\text{máx } \mathcal{L}(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \text{máx } \frac{1}{2} \cdot \omega^T \phi \omega + \lambda_1(\mu - \omega^T m) + \lambda_2(1 - \omega^T e) \quad (60)$$

Con condiciones de primer orden,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} &= \phi \omega - \lambda_1 m - \lambda_2 e = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} &= \mu - \omega^T m = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} &= 1 - \omega^T e = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Con el supuesto de que  $\phi$  es positiva definida y  $m$  y  $e$  son vectores linealmente independientes para que  $\mathbf{A}$  sea de rango completo, nos asegurará que existe un  $\hat{\omega}$  que satisface todas las condiciones de primer orden y que esta solución es única y es el óptimo global de  $\mathcal{M}$ .

Continuando, para encontrar la expresión analítica de  $\hat{\omega}$  reordenamos la primera expresión de modo que tenemos,

$$\hat{\omega} = \lambda_1 \phi^{-1} m + \lambda_2 \phi^{-1} e \quad (62)$$

A continuación sustituimos esta expresión en la segunda y tercera ecuación de nuestras condiciones de primer orden para obtener,

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda_1 (m^T \phi^{-1} m) + \lambda_2 (m^T \phi^{-1} e) \\ 1 &= \lambda_1 (e^T \phi^{-1} m) + \lambda_2 (e^T \phi^{-1} e) \end{aligned} \quad (63)$$

Encontrar  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  simultáneamente implica que necesitamos resolver el sistema matricial,

$$\begin{Bmatrix} (m^T \times \phi^{-1} \times m) & (m^T \times \phi^{-1} \times e) \\ (m^T \times \phi^{-1} \times e) & (e^T \times \phi^{-1} \times e) \end{Bmatrix}_Z \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \mu \\ 1 \end{Bmatrix}_I \quad (64)$$

Donde tenemos la operación matricial  $Z \cdot G = I$  que implica  $G = Z^{-1} \cdot I$ . Lo importante aquí es tener en cuenta que siempre existirá una solución para este sistema del programa  $\mathcal{M}$ , si y

sólo si, el determinante de  $Z$  cumple con la desigualdad,

$$\mathcal{D}_Z = (\mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{m})(\mathbf{e}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e}) - (\mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e})^2 > 0 \quad (65)$$

Una vez más este resultado siempre se va a cumplir porque  $\phi$  es positiva definida y  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{e}$  son linealmente independientes. Por esta conclusión, aplicando un poco de álgebra en (64) podemos encontrar las expresiones de los multiplicadores tal que,

$$\lambda_1 = \frac{\mathcal{C}\mu - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} \quad \lambda_2 = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}\mu}{\mathcal{D}} \quad (66)$$

donde los escalares son equivalentes a,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e} & \mathcal{B} &= \mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{m} \\ \mathcal{C} &= \mathbf{e}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e} & \mathcal{D} &= \mathcal{B} \times \mathcal{C} - \mathcal{A}^2 \end{aligned} \quad (67)$$

Finalmente, sustituyendo de nuevo los multiplicadores en (62) obtenemos,

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \left[ \frac{\mathcal{C}\mu - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} \right] \phi^{-1} \mathbf{m} + \left[ \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}\mu}{\mathcal{D}} \right] \phi^{-1} \mathbf{e} \\ &= g + h \cdot \mu \end{aligned} \quad (68)$$

donde  $g = \frac{1}{\mathcal{D}}(\mathcal{B}\phi^{-1}\mathbf{e} - \mathcal{A}\phi^{-1}\mathbf{m})$  y  $h = \frac{1}{\mathcal{D}}(\mathcal{C}\phi^{-1}\mathbf{m} - \mathcal{A}\phi^{-1}\mathbf{e})$ . El resultado de esta ecuación (68) para un determinado retorno esperado objetivo  $\mu$  dará una solución tanto a (56) y (61), por lo tanto, estaremos asignando de manera óptima todos los activos-riesgosos para lograr maximizar el retorno esperado del portafolio mientras minimizamos la varianza.

### **Oportunidades Factibles y Eficientes**

De (68) vemos que cuando no se define un retorno esperado objetivo,  $\hat{\omega}$  está en función de  $\mu$  tal que siempre existe algún  $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^n$  que satisface las condiciones Kuhn-Tucker de  $\mathcal{M}$  mientras  $\mu \in \mathbb{R}$  se desplaza a través de  $(\infty^- \rightarrow \infty^+)$ . Para no causar confusión con la notación anterior denotemos  $\vec{f}(\mu)$  como una función vectorial que representa cualquier vector de pesaje óptimo para cualquier  $\mu \in \mathbb{R}$ . Ahora, veamos cómo deberíamos interpretar los infinitos  $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^n$  generado por  $\vec{f}(\mu)$ .

### **Portafolios Factibles y Eficientes**

Digamos que cualquier vector óptimo  $\hat{\omega}$  generado por  $\vec{f}(\mu)$  pertenece al conjunto  $C$  y lo llamaremos como el conjunto de todos los portafolios factibles. De esto generamos las dos siguientes definiciones formales,

i. *Portafolios Factibles*:  $C = \{\vec{f}(\mu) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{f}(\mu) = g + h \cdot \mu, \mu \in \mathbb{R}\}$

ii. *Portafolios Eficientes*:  $\Phi = \{\vec{f}(\mu) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{f}(\mu) = g + h \cdot \mu, \mu \geq \mu_{min}, \mu \in \mathbb{R}\}$

Analicemos a detalle estas definiciones. Dado que el individuo es averso al riesgo tiene una preferencia definida por menos riesgo frente a más riesgo, por lo que no todos los portafolios factibles representan a alternativas racionales. Por esta razón el conjunto eficiente  $\Phi \subset C$  únicamente contiene los portafolios factibles con el mayor retorno esperado de todos los pares de portafolios factibles que tienen la misma varianza. Cabe decir que estos emparejamientos se producen porque existe un portafolio particular  $\hat{\omega}_{min} \in C$  con la característica de tener el menor valor de varianza. La existencia de este portafolio al cual llamamos GMV<sup>38</sup> implica que si nos desviamos de su retorno esperado objetivo  $\mu_{min} \uparrow \downarrow$ , entonces para ambas direcciones, la varianza del portafolio  $\sigma_p^2$  aumentará para cualquier  $\hat{\omega}$  que no sea el GMV, por tanto, obtenemos emparejamientos  $\hat{\omega}^{(a)}, \hat{\omega}^{(b)} \in C$  que tendrán el mismo valor de varianza de portafolio  $\sigma_a^2 = \sigma_b^2$ , pero uno de estos dos portafolios genera una mayor retorno esperado  $\mu^{(a)} > \mu^{(b)}$ . Además, como no existe ningún otro portafolio factible con retorno esperado y varianza  $(\mu_{min}, \sigma_{min}^2)$ , el GMV es también un portafolio eficiente  $\hat{\omega}_{min} \in \Phi$ .

### *Frontera Factible y Eficiente*

Un principio que se planteó en el en marco de decisiones bajo incertidumbre fue que el individuo no está especialmente interesado en el arreglo<sup>39</sup> del vector de asignación de recursos  $\hat{\omega}$ , sino mas bien, el individuo está interesado en la distribución de probabilidades que se ge-

<sup>38</sup> Hay diferentes maneras de derivar el portafolio Global de Mínima Varianza GMV, mostramos una de estas maneras mediante el uso de la condición de primer orden para  $\hat{\omega}$  y estableciendo el multiplicador  $\lambda_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{min} &= 0(\phi^{-1}\mathbf{m}) + \lambda_2(\phi^{-1}\mathbf{e}) \\ &= \lambda_2(\phi^{-1}\mathbf{e})\end{aligned}$$

Si multiplicamos ambos lados por  $\mathbf{e}^T$ , tal que,  $1 = \mathbf{e}^T \hat{\omega}_{min} = \lambda_2(\mathbf{e}^T \phi^{-1} \mathbf{e})$ , entonces,  $\lambda_2 = 1/\mathbf{e}^T \phi^{-1} \mathbf{e}$ . Finalmente, introduciendo este valor en la ecuación anterior obtenemos el vector de pesos óptimo del portafolio GMV,

$$\hat{\omega}_{min} = \frac{\phi^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \phi^{-1} \mathbf{e}}$$

<sup>39</sup> Podemos suponer que el individuo será indiferente acerca de si  $\hat{\omega}_i > \hat{\omega}_j \in \hat{\omega}$  o viceversa.

nera a través de este vector. Por lo tanto, mientras que los conjuntos  $C$  y  $\Phi$  proporcionan toda la información con respecto al ordenamiento de portafolios factibles y eficientes, al individuo sólo le importan estos vectores en la medida en que conducen a oportunidades de inversión  $(\mu, \sigma_p^2)$ . Este principio requiere entonces representemos a los elementos de  $C$  y  $\Phi$  por aquellos conjuntos que contengan toda la información sobre las oportunidades de inversión M-V factibles y M-V eficientes. Llamemos  $\bar{C}$  al conjunto de todas las oportunidades M-V factibles y  $\bar{\Phi}$  al conjunto de todas las oportunidades M-V eficientes,

i. Front-Fact:  $\bar{C} = \{(\mu, \mathcal{V}(\mu)) : | \mathcal{V}(\mu) = [g + h \cdot \mu]^T \phi [g + h \cdot \mu], \mu \in \mathbb{R}\}$

ii. Front-Eff:  $\bar{\Phi} = \{(\mu, \mathcal{V}(\mu)) : | \mathcal{V}(\mu) = [g + h \cdot \mu]^T \phi [g + h \cdot \mu], \mu \geq \mu_{min}, \mu \in \mathbb{R}\}$

El conjunto de oportunidades M-V factibles  $\bar{C}$  contiene la colección infinita de pares ordenados  $(\mu, \sigma_p^2)$ , generados por el mapeo<sup>40</sup>  $\mathcal{V} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}_p$ , donde  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  es el conjunto de  $\mu$  factibles y  $\mathcal{V}_p \subset \mathbb{R}_+$  es el conjunto de varianzas de portafolios factibles. Por otra parte, el conjunto eficiente de oportunidades  $\bar{\Phi}$  se define por el mapeo  $\mathcal{V} : \mathcal{U}_{ef} \rightarrow \mathcal{V}_p$ , donde  $\mathcal{U}_{ef} = \{\mu \in \mathbb{R} | \mu > \mu_{min}\}$ .

Estos mapas  $\bar{C}$ ,  $\bar{\Phi}$  generan la famosa parábola de oportunidades M-V factibles que mejor conocemos como la frontera factible M-V y el segmento superior de dicha parábola correspondiente a todas las oportunidades M-V eficientes que conocemos como la frontera eficiente M-V. Si el lector compara los mapas aquí descritos y su representación común, se dará cuenta que esta última describe a la varianza del portafolio por el eje-x y el retorno esperado del portafolio por el eje-y.

**Fondos Mutuos**

Uno de los resultados más destacados de la optimización M-V es que el conjunto completo de portafolios eficientes  $\Phi$  y por lo tanto, el conjunto completo de oportunidades M-V eficientes

<sup>40</sup>  $\mathcal{V}(\mu)$  es una función compuesta de  $(v \circ f)$ , donde  $\vec{f}(\mu)$  es la función vectorial y  $v(\hat{\omega}) = \hat{\omega}^T \phi \hat{\omega}$  es la varianza de portafolio en función de cualquier  $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^n$ . Para derivar la función concisa  $\mathcal{V}(\mu)$  resolvemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mu) &= (v \circ f)\mu \\ &= [g + h \cdot \mu]^T \phi [g + h \cdot \mu] \\ &= \frac{C}{D} \left[ \mu - \frac{A}{C} \right]^2 + \frac{1}{C} \end{aligned}$$

Esta función resulta muy útil cuando lo que queremos es acelerar el cálculo de las fronteras factibles y eficientes o acelerar el cálculo de algún par o pares  $(\mu, \sigma_p^2)$  que optimizan a  $\mathcal{M}$ .

$\bar{\Phi}$ , se puede obtener a partir de la información dada por sólo dos portafolios eficientes<sup>41</sup>.

Para demostrar esta afirmación vamos a escribir un programa de optimización modificado que llamaremos  $\mathcal{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \quad \min_{\omega} \sigma_{\lambda}^2 &= \frac{1}{2} \omega^T \phi \omega - \lambda_1 (\mathbf{m}^T \omega) \\ \text{s.a.} \quad \omega^T \mathbf{e} &= 1 \end{aligned} \tag{69}$$

En esta formulación<sup>42</sup> del programa de optimización se está tratando de equilibrar en la función objetivo la maximización del retorno esperado del portafolio minimizando al mismo tiempo la varianza. Ver que la adición del término  $\lambda_1 (\mathbf{m}^T \omega)$  nos permite modificar  $\lambda_1 \rightarrow \infty^+$  de modo que esta escala actúa como el factor de tamaño del efecto  $\mathbf{m}^T \omega$  y que este último término a su vez actúa en sentido contrario al efecto de la varianza. Las condiciones Kuhn-Tucker de  $\mathcal{Z}$  son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} &= \phi \omega - \lambda_1 \mathbf{m} - \lambda_2 \mathbf{e} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} &= 1 - \omega^T \mathbf{e} = 0 \end{aligned} \tag{70}$$

Si despejamos la primera condición de primer orden para el peso óptimo  $\hat{\omega}_{\lambda}$  tendremos una expresión,

$$\hat{\omega}_{\lambda} = \lambda_1 \phi^{-1} \mathbf{m} + \lambda_2 \phi^{-1} \mathbf{e} = \hat{\omega} \tag{71}$$

Lo primero que notamos aquí es que esta ecuación para un óptimo  $\hat{\omega}$  es la misma en los programas  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{M}$ . Esto implica que si  $\hat{\omega}_{\lambda}$  satisface y optimiza  $\mathcal{Z}$ , entonces también debe ser que  $\hat{\omega}_{\lambda}$  satisface y optimiza  $\mathcal{M}$ . Por lo tanto, por definición  $\hat{\omega}_{\lambda}$  llenará todo el conjunto eficiente  $\bar{\Phi}$  mientras  $\lambda_1 \rightarrow \infty^+$ .

<sup>41</sup> Las implicaciones de este resultado no sólo deben considerarse en el sentido analítico sino que también debemos pensar en las implicaciones económicas de poder resumir todas las oportunidades M-V eficientes de inversión por únicamente dos portafolios. Para ilustrar esta idea digamos que existen dos fondos disponibles para el individuo K, el Fondo de Inversión  $\hat{\omega}^{(A)}$  disponible en el Banco A y el Fondo  $\hat{\omega}^{(B)}$  disponible en el Banco B. Estos dos fondos son eficientes en términos de M-V y ambos están compuestos por los mismos  $n$ -activos-riesgosos, sin embargo,  $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$  y  $\mu^{(A)} > \mu^{(B)}$ . Como es habitual en los productos de Inversión, supondremos que cada uno de estos fondos está dirigido a un perfil de riesgo diferente. Por lo tanto,  $\hat{\omega}^{(A)}$  maximiza  $E[U]$  del individuo A y  $\hat{\omega}^{(B)}$  maximiza  $E[U]$  del individuo B. El Teorema de la Separación de Fondos establece que si ninguno de estos dos fondos eficientes maximiza  $E[U]$  del individuo K, existe una asignación óptima entre el Fondo A y el Fondo B que generará máxima utilidad esperada para el individuo K, tal que, este individuo le es indiferente mantener una combinación de los Fondos A y B o invertir por su propia cuenta en  $\hat{\omega}^{(C)}$ . Asimismo, cualquier combinación distinta de los Fondos A y B representarán todas las oportunidades eficientes M-V.

<sup>42</sup> Esta formulación es parecida la formulación del problema estático CRRA-Log en (54). De hecho, si dividimos  $\lambda_1$  y cambiamos la función objetivo para reflejar un programa de maximización, entonces ambas son equivalentes para  $\lambda_1 = 1/\gamma$ .

A continuación, resolviendo para el coeficiente  $\lambda_1$  y el multiplicador  $\lambda_2$  tenemos,

$$\lambda_1 = \frac{1 - \lambda_2 e^T \phi^{-1} e}{e^T \phi^{-1} m} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \lambda_1 e^T \phi^{-1} m}{e^T \phi^{-1} e} \quad (72)$$

Utilizando estas expresiones resolvemos para  $\hat{\omega}_\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_\lambda &= \frac{\phi^{-1} e}{e^T \phi^{-1} e} + \alpha \left[ \frac{\phi^{-1} m}{m^T \phi^{-1} e} - \frac{\phi^{-1} e}{e^T \phi^{-1} e} \right] \\ &= (1 - \alpha) \frac{\phi^{-1} e}{e^T \phi^{-1} e} + \alpha \frac{\phi^{-1} m}{m^T \phi^{-1} e} \\ &= (1 - \alpha_{mk}) \omega_{\min} + \alpha_{mk} \omega_{mk} \end{aligned} \quad (73)$$

donde  $\alpha = \alpha_{mk} = \lambda_1 (m^T \phi e)$ . Este resultado es particularmente fascinante <sup>43</sup> porque establece que cualquier  $\hat{\omega}_\lambda$  es siempre una composición únicamente de dos distintos portafolios  $\hat{\omega}_{\min}$  y  $\hat{\omega}_{mk}$ . Sabemos que uno de estos portafolios es el GMV y llamaremos a  $\hat{\omega}_{mk}$  como el Portafolio de Mercado.

También resulta que  $\hat{\omega}_\lambda$  se define de la relación lineal entre los  $\hat{\omega}_{\min}$ ,  $\hat{\omega}_{mk}$ . Para probar esto vamos a multiplicar ambos lados de la expresión de arriba por  $m^T$ , tal que obtenemos el retorno esperado de los portafolios en ambos lados,

$$\begin{aligned} m^T \hat{\omega}_\lambda &= m^T ((1 - \alpha_{mk}) \omega_{\min} + \alpha_{mk} \omega_{mk}) \\ \mu_\lambda &= (1 - \alpha_{mk}) \mu_{\min} + \alpha_{mk} \mu_{mk} \\ \alpha_{mk} &= \frac{\mu_\lambda - \mu_{\min}}{\mu_{mk} - \mu_{\min}} \end{aligned} \quad (74)$$

Ya que conocemos los valores de  $\mu_{\min}$  y  $\mu_{mk}$  <sup>44</sup>,  $\alpha_{mk}$  se define linealmente, por lo tanto, cualquier  $\hat{\omega}_\lambda$  no es más que una suma ponderada del portafolio GMV y el Portafolio de Mercado. No obstante, se debe tener en cuenta que una condición que debe cumplirse siempre es  $\mu_{mk} \neq \mu_{\min}$ , de lo contrario no tendríamos suficiente información para determinar oportuna-

<sup>43</sup> A partir de nuestro ejemplo anterior, imaginemos que trabajamos para un Banco C. Supongamos que nos encargan comercializar productos financieros a los individuos de la localidad. Si se tiene acceso a todos los  $n$ -activos-riesgosos ¿Cómo podríamos ofrecer productos de inversión atractivos para todos los individuos? El Teorema de Separación ofrece una solución bastante interesante. En primer lugar, vamos a suponer que todos los individuos son aversos al riesgo pero diferente medida. Del resultado (73) se deduce que no se necesitan más de dos fondos para cubrir toda la demanda por activos-riesgosos. Así, en lugar de agotar recursos en configurar de fondos para cada individuo, se dispondría de un número infinito de productos financieros de sólo dos fondos eficientes  $\hat{\omega}_\lambda = ((1 - \alpha_{mk}) \omega_{\min} + \alpha_{mk} \omega_{mk})$ .

<sup>44</sup> Si realizamos cálculos adicionales en (78), podremos definir a  $\mu_{\min} = A/C$  y  $\mu_{mk} = B/A$ .



des eficientes. Además,  $\mu_\lambda$  no tiene por qué ser necesariamente mayor que  $\mu_{min}$ , en tal caso llenaríamos también el conjunto  $C$ , sin embargo, como hemos mencionado antes, el individuo racional sólo se considerará decisiones dentro del conjunto de los portafolios eficientes.

### **Agregando el Activo-sin-Riesgo**

Cuando existe un activo-sin-riesgo las oportunidades de inversión se amplían a  $n + 1$ , donde  $n$  representa a los activos-riesgosos y el activo adicional es el activo-sin-riesgo  $rf$ . Para establecer el programa de optimización M-V primero vamos a definir al retorno esperado del portafolio como  $\mu = rf + \omega^T(\mathbf{m} - rfe)$ , donde  $\omega$ <sup>45</sup> sigue siendo el vector de pesaje de  $n$ -activos-riesgosos. Para establecer la varianza del portafolio hacemos la observación de que  $\sigma_{rf}^2 = 0$  y por lo tanto  $\sigma_{(rf,i)} = 0 \forall i$ , lo que implica que la varianza del portafolio para el caso  $n + 1$  continua<sup>46</sup> siendo  $\sigma_p^2 = \omega^T \phi \omega$ . Ahora, con estos dos componentes llamaremos  $\mathcal{N}$  al programa de optimización M-V para  $n + 1$  activos y tiene la siguiente formulación,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \quad \min_{\omega} \sigma_p^2 &= \frac{1}{2} \omega^T \phi \omega \\ \text{s.a.} \quad rf + \omega^T(\mathbf{m} - rfe) &= \mu \end{aligned} \tag{75}$$

Afortunadamente, este **QP** sigue siendo convexo y con una restricción de igualdad, por lo tanto, podemos utilizar la misma técnica analítica anterior para resolverlo. Escribiendo la función Lagrangiana de  $\mathcal{N}$  tenemos,

$$\max_{\omega, \lambda} \mathcal{L}(\omega, \lambda) = \max_{\omega} \frac{1}{2} \cdot \omega^T \phi \omega + \lambda(\mu - rf - \omega^T(\mathbf{m} - rfe)) \tag{76}$$

<sup>45</sup> Notar que en esta representación del retorno esperado del portafolio implícitamente estaremos cumpliendo con la restricción de inversión completa, esto debido a que  $\mu = (1 - \omega^T e)rf + \omega^T \mathbf{m}$ . Esto también significa que ¡no necesariamente! se va a cumplir con una proporción total de riqueza inicial invertida en activos-riesgosos  $\omega^T e = 1$  todo el tiempo, pero al sumar la proporción de riqueza inicial invertida en el activo-sin-riesgo  $(1 - \omega^T e)$  siempre alcanzaremos una equivalencia de 1.

<sup>46</sup> La varianza de  $rf$  es 0 y la covarianza de  $rf$  con cualquier activo-riesgoso  $i$  también es 0. La matriz de covarianza de  $n + 1$  activos se convierte en,

$$\phi_{n+1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi \end{Bmatrix}$$

Este resultado nos conduce a una varianza del portafolio igual  $\sigma_p^2 = \omega^T \phi \omega$ . Por lo tanto, las funciones objetivo de los programas  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{M}$  son las mismas.

Las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden son,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\omega} - \lambda (\mathbf{m} - r f \mathbf{e}) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \mu - r f - \boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{m} - r f \mathbf{e}) = 0\end{aligned}\tag{77}$$

Despejando la condición de primer orden para el vector óptimo  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  nos da,

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\phi}^{-1} \lambda (\mathbf{m} - r f \mathbf{e})\tag{78}$$

Podemos encontrar el valor del multiplicador  $\lambda$  si sustituimos el lado derecho de esta expresión en la segunda condición de primer orden para obtener,

$$\mu = \mathbf{m}^T (\lambda \boldsymbol{\phi}^{-1} (\mathbf{m} - r f \mathbf{e})) + (1 - \mathbf{e}^T (\lambda \boldsymbol{\phi}^{-1} (\mathbf{m} - r f \mathbf{e}) r f))\tag{79}$$

luego, resolvemos para el multiplicador  $\lambda$  tal que,

$$\lambda = \frac{\mu - r f}{\mathcal{H}}\tag{80}$$

donde  $\mathcal{H}$  es equivalente a,

$$\mathcal{H} = (\mathbf{m} - r f \mathbf{e})^T \boldsymbol{\phi}^{-1} (\mathbf{m} - r f \mathbf{e}) = \mathcal{B} - 2 r f \mathcal{A} + r f^2 + \mathcal{C}\tag{81}$$

Continuamos volviendo a introducir  $\lambda$  en la expresión (78) que finalmente dará,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\phi}^{-1} (\mathbf{m} - r f \mathbf{e}) \left( \frac{\mu - r f}{\mathcal{H}} \right) \\ &= \underbrace{-\boldsymbol{\phi}^{-1} (\mathbf{m} - r f \mathbf{e}) \left( \frac{r f}{\mathcal{H}} \right)}_{g_{n+1}} + \underbrace{\boldsymbol{\phi}^{-1} (\mathbf{m} - r f \mathbf{e}) \left( \frac{1}{\mathcal{H}} \right)}_{h_{n+1}} \mu \\ &= g_{n+1} + h_{n+1} \cdot \mu\end{aligned}\tag{82}$$

Esta ecuación nos permite conocer el vector óptimo de activos-riesgosos para un  $\mu$  objetivo. Para hallar la proporción óptima invertida en el activo-sin-riesgo basta con calcular,

$$rf = 1 - \alpha = 1 - \omega^T e \quad (83)$$

### **Oportunidades Factibles y Eficientes de $n+1$**

A partir de (82) obtenemos una ecuación que para generar un resultado requiere que especifiquemos el retorno esperado objetivo del portafolio. Al igual que en el caso anterior podemos definir  $\hat{\omega}$  en función de  $\mu$  de manera que la función vectorial  $\vec{f}_{(n+1)}(\mu)$  produce vectores de pesaje óptimos que satisfacen todas las condiciones Kuhn-Tucker de  $\mathcal{N}$  a medida que  $\mu \in \mathbb{R}$  se desplaza a través de  $(\infty^- \rightarrow \infty^+)$ .

#### *Portafolios Factibles y Eficientes para el caso $n + 1$*

Para especificar el conjunto factible y eficiente de portafolios para el caso  $n + 1$  adoptaremos un enfoque diferente. Vamos a utilizar los principios<sup>47</sup> del Teorema de Separación de Fondos para definir a todos los portafolios factibles y eficientes como vectores  $\hat{\omega}_{(n+1)} \in \mathbb{R}^2$ , que contienen los mismos dos fondos eficientes en proporciones  $\hat{\omega}_{(n+1)} = (\alpha_{rf}, \alpha_{mk+1}) = ((1 - \alpha_{mk+1}(\mu)), \alpha_{mk+1}(\mu))$ , donde  $\alpha_{mk+1} = \alpha_{mk+1}(\mu)$  es,

$$\alpha_{mk+1} = \frac{\mu - rf}{\mu_{mk+1} - rf} \quad (84)$$

y denota la proporción de riqueza inicial invertida en el Fondo o Portafolio de Mercado en función del retorno esperado objetivo  $\mu$ . A partir de esto podemos definir el conjunto factible y eficiente de portafolios simplemente como,

- i.  $C_{n+1} = \{(\alpha_{mk+1}, (1 - \alpha_{mk+1})) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_{mk+1} = (\mu - rf)/(\mu_{mk+1} - rf), \mu \in \mathbb{R}\}$
- ii.  $\Phi_{n+1} = \{(\alpha_{mk+1}, (1 - \alpha_{mk+1})) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_{mk+1} = (\mu - rf)/(\mu_{mk+1} - rf), \mu \geq rf, \mu \in \mathbb{R}\}$

Esta formulación simplifica significativamente las decisiones de portafolio solamente si se conoce la composición exacta del Portafolio de Mercado  $\hat{\omega}_{mk+1}$  de manera que nos ayuda a determinar  $\mu_{mk+1} = \hat{\omega}_{mk+1}^T \mathbf{m}$ , de lo contrario no es posible definir correctamente a los porta-

<sup>47</sup> Tener en cuenta que la notación  $mk + 1$  implica que el Fondo de Mercado incorpora toda la información de  $n$ -activos-riesgosos más el activo-sin-riesgo, por lo tanto, es importante considerar que el resultado específico en (73) para calcular  $mk$  no es equivalente para calcular  $mk + 1$ .

folios factibles y eficientes.

Para derivar el Portafolio de Mercado<sup>48</sup> basta con establecer  $\mu_{mk+1}$  como el retorno esperado objetivo en (83) lo que implícitamente requiere que  $\hat{\omega}^T e = 1$ , vamos a obtener,

$$\hat{\omega}_{mk+1} = \phi^{-1}(\mathbf{m} - r f e) \left( \frac{\mu_{mk+1} - r f}{\mathcal{H}} \right) \quad (85)$$

Multiplicando ambos lados por  $e^T$  para forzar que el lado derecho sea igual a 1 y dejando también que  $\mathcal{K}_{mk+1} = ((\mu_{mk+1} - r f)/\mathcal{H})$  nos da,

$$\begin{aligned} e^T \hat{\omega}_{mk+1} &= e^T \phi^{-1}(\mathbf{m} - r f e) \mathcal{K}_{mk+1} \\ \mathcal{K}_{mk+1} &= \frac{1}{(\mathcal{A} - r f \mathcal{C})} \end{aligned} \quad (86)$$

Introduciendo  $\mathcal{K}_{mk+1}$  en (85) obtenemos la ecuación para la composición del Portafolio de Mercado,

$$\hat{\omega}_{mk+1} = \frac{\phi(\mathbf{m} - r f e)}{(\mathcal{A} - r f \mathcal{C})} \quad (87)$$

Con el conociendo de este portafolio los conjuntos  $C_{n+1}$  y  $\Phi_{n+1}$  se pueden rellenar completamente utilizando el Teorema de Separación<sup>49</sup>.

### *Frontera Factible y Eficiente de $n+1$*

A continuación, las oportunidades factibles y eficientes M-V para el caso  $n + 1$  se generarán mediante el mapeo  $\mathcal{V}_{n+1} : \mathcal{U}_{n+1} \rightarrow \mathcal{V}_{p,n+1}$ , donde la función  $\mathcal{V}_{n+1}(\mu)$  se deriva de las expresio-

<sup>48</sup> Veamos cómo se comporta  $\sigma_p^2$  de  $\mathcal{N}$  a medida que fijamos  $\alpha_{mk+1} = 1$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \alpha_{mk+1}^2 \sigma_{mk+1}^2 \\ &= \sigma_{mk+1}^2 \mid \alpha_{mk+1} = 1 \\ \sigma_{mk+1}^2 &= \hat{\omega}_{mk+1}^T \phi \hat{\omega}_{mk+1} \mid \hat{\omega}_{mk+1}^T e = 1 \end{aligned}$$

Está claro que en  $\alpha_{mk+1} = 1$ ,  $\sigma_{mk+1}^2$  de  $\mathcal{N}$  coincidirá con un portafolio óptimo de  $\mathcal{M}$ , esto es porque  $\hat{\omega}_{mk+1}^T e = 1$ . Por lo tanto,  $\Phi \cap \Phi_{n+1} = \{\hat{\omega}_{mk+1}\}$ , lo que significa que sólo  $\hat{\omega}_{mk+1}$  satisface ambos programas, cualquier otro  $\hat{\omega}^{(b)}$  en la expresión de arriba que no sea  $\hat{\omega}_{mk+1}$  no cumplirá con la restricción de inversión completa en  $\mathcal{M}$ , es decir,  $\hat{\omega}^T e \neq 1 \forall \hat{\omega}_{mk+1}$ .

<sup>49</sup> Esta misma técnica se extiende para el caso de  $n$ -activos, en donde todos los portafolios factibles y eficientes de  $C$  y  $\Phi$  pueden representarse como  $\hat{\omega} = (\alpha_{min}, \alpha_{mk}) = ((1 - \alpha_{mk}), \alpha_{mk})$ .

nes en la nota 48 y de la expresión en (74) y da como resultado<sup>50</sup>,

$$\mathcal{V}_{n+1}(\mu) = \frac{(\mu - rf)^2}{\text{máx} \mathcal{SR}^2} = \frac{(\mu - rf)^2}{\mathcal{H}} \quad (88)$$

Esta función nos permite definir los conjuntos factibles y eficientes de oportunidades M-V como,

- i.  $\bar{\mathcal{C}}_{n+1} = \{(\mu, \mathcal{V}_{n+1}(\mu)) \mid \mathcal{V}_{n+1}(\mu) = (\mu - rf)^2 / \text{máx} \mathcal{SR}^2, \mu \in \mathbb{R}\}$
- ii.  $\bar{\Phi}_{n+1} = \{(\mu, \mathcal{V}_{n+1}(\mu)) \mid \mathcal{V}_{n+1}(\mu) = (\mu - rf)^2 / \text{máx} \mathcal{SR}^2, \mu \geq rf, \mu \in \mathbb{R}\}$

Ambos mapas, generarán todas las oportunidades M-V factibles y eficientes para el caso ( $n + 1$ ).

Cuando tomamos la raíz cuadrada de  $\mathcal{V}_{n+1}(\mu)$  y resolvemos para  $\mu$ , se genera un segmento,  $\overline{rfmk}$ , en el espacio  $DS_x$ - $M_y$ . Este segmento se conoce como la Línea de Mercado y siempre se define por las coordenadas  $rf = (0, rf)$  y  $mk = (\sigma_{mk+1}, \mu_{mk+1})$ . Una propiedad fundamental de  $\overline{rfmk}$  es que su pendiente es,

$$\text{máx} \mathcal{SR} = \frac{\mu_{mk+1} - rf}{\sigma_{mk+1}} \quad (89)$$

Esta pendiente define el punto de tangencia entre las fronteras eficientes  $\bar{\Phi}$  y  $\bar{\Phi}_{n+1}$ , por lo tanto, el Portafolio de Mercado también se lo conoce como el Portafolio Tangente. Tener en cuenta que todas las oportunidades M-V eficientes  $\hat{\omega} \in C$  el Portafolio de Mercado  $\hat{\omega}_{mk}$  siempre tendrá el valor máximo de  $\mathcal{SR}^{51}$ , por esta razón mejor definimos la pendiente como  $\text{máx} \mathcal{SR}$ .

<sup>50</sup> De la ecuación en la nota 48 obtenemos un valor  $\alpha_{mk+1}^2 = \sigma_p^2 / \sigma_{mk+1}^2$ , de esta expresión tomamos su raíz tal que la proporción de riqueza invertida en el Portafolio de Mercado es  $\alpha_{mk+1} = \sigma_p / \sigma_{mk+1}$  la relación de la desviación estándar del portafolio sobre la desviación estándar del Portafolio de Mercado. Luego, al sustituir este valor en la segunda expresión de (74) obtenemos,

$$\begin{aligned} \mu &= \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_{mk+1}}\right)rf + \frac{\sigma_p}{\sigma_{mk+1}}\mu_{mk+1} \\ &= rf + \frac{\mu_{mk+1} - rf}{\sigma_{mk+1}}\sigma_p \\ &= rf + \text{máx} \mathcal{SR} \sigma_p \mid \mathcal{SR} = \sqrt{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

En esta etapa obtenemos la función del rendimiento esperado del portafolio  $\mu$ , como una función lineal con una constante  $rf$ , una pendiente  $\text{máx} \mathcal{SR}$  y en función de la desviación estándar del portafolio  $\sigma_p$ . Esta función también se llama la “Línea del Mercado de Capitales”. Aquí, la pendiente  $\text{máx} \mathcal{SR}$  se le conoce formalmente como el máximo Sharpe-Ratio alcanzable.

<sup>51</sup> Fundamentalmente, el ratio de Sharpe es un indicador de rendimiento, sólo tiene sentido que en un entorno de optimización debemos maximizar este valor. Logramos esto implícitamente a través de  $\mathcal{N}$  programa, sin embargo, una formulación para la optimización de M-V es establecer un programa de maximización directa de la

**Proceso para Soluciones de Forma Cerrada al Problema Estático**

Durante el análisis de optimización M-V en la sección anterior no se estableció una conexión explícita entre los resultados que obtuvimos y su relación y aplicación en el problema estático CRRA-Log. Para establecer esta conexión lo primero es notar que maximizar una variable de retorno esperado de portafolio  $\mu$  o  $\dot{\mu}$  y minimizar una variable de varianza del portafolio  $\sigma_p^2$  o  $\dot{\sigma}_p^2$  son objetivos compartidos por el marco de la optimización M-V y del problema estático como había quedado planteado en (54). Por lo tanto, los resultados que derivamos de los programas  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{N}$  son los mismos utilizando parámetros  $(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)$  solamente si redefinimos al vector  $m$  y a la matriz  $n \times n$  positiva definida  $\phi$ . Consecuentemente, el vector  $m$  se convierte en,

$$m = (\dot{\mu}_1, \dots, \dot{\mu}_n)$$

$$m = \left( E(\dot{\mathcal{R}}_1) + \frac{\dot{\sigma}_1^2}{2}, \dots, E(\dot{\mathcal{R}}_n) + \frac{\dot{\sigma}_n^2}{2} \right) \tag{92}$$

donde  $\dot{\mu}_i$  es el log del retorno bruto esperado del activo  $i$  o alternativamente, es el retorno compuesto continuo esperado de  $i$  más la mitad de su varianza. De esta forma  $\dot{\mu} = \omega^T m$  es el log del retorno bruto esperado del portafolio. Por otro lado, la matriz  $\phi$  es,

$$\phi = [E(\dot{\mathbf{r}} - E(\dot{\mathbf{r}}))(\dot{\mathbf{r}} - E(\dot{\mathbf{r}}))^T] \tag{93}$$

donde  $\dot{\mathbf{r}}$  es el vector de retorno aleatorio compuesto continuo de  $n$ -activos. Sigue entonces que la varianza del retorno compuesto continuo del portafolio es  $\dot{\sigma}_p^2 = \omega^T \phi \omega$ . Luego de realizar estas modificaciones, el proceso de optimización M-V no cambia para los parámetros  $(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)$ . Nuestro siguiente paso será utilizar los resultados de los programas  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{N}$  para resolver el problema estático CRRA-Log.

Sharpe-Ratio, tal que,

$$SR \underset{\omega}{\text{máx}} : \frac{1}{2} \frac{\omega^T m - rf}{\sqrt{\omega^T \phi \omega}}$$

$$s.a : \omega^T e = 1 \tag{90}$$

Incorporando la restricción de inversión total en la función objetivo se obtiene,

$$SR \underset{\omega}{\text{máx}} : \frac{1}{2} \frac{\omega^T (m - rfe)}{\sqrt{\omega^T \phi \omega}} \tag{91}$$

La solución debe ser exactamente como, (87). Sin embargo, recomendamos al lector para resolver este problema utilizando  $\mathcal{N}$  en su lugar, ya que lo anterior ya no se sostiene para el proceso analítico de (57).

**Maximización de la Utilidad Esperada con  $n$ -activos-riesgosos**

Recordemos el problema estático CRRA-Log como se planteó en (54),

$$\max_{\omega} E[U(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)] = \dot{\mu} - \gamma \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \quad s.a : \omega^T e = 1$$

si nos damos cuenta este programa es una modificación de  $\mathcal{Z}$  que se ha multiplicado por  $-1/\lambda_1$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \quad \min_{\omega} \frac{-1}{\lambda_1} \cdot \sigma_{\lambda}^2 &= \frac{1}{2} \omega^T \phi \omega - \lambda_1 (m^T \omega) \quad s.a : \omega^T e = 1 \\ \mathcal{Z} \quad \max_{\omega} E[U(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)] &= m^T \omega - \frac{1}{2\lambda_1} \omega^T \phi \omega \quad s.a : \omega^T e = 1 \end{aligned} \tag{94}$$

Ambas representaciones de  $\mathcal{Z}$  nos darán la misma expresión de la solución óptima  $\hat{\omega}$ , porque  $-1$  preserva la convexidad de  $-f(x)$  y  $1/\lambda$  es un factor de escala diferente de 0 que no tiene efecto sobre la solución óptima  $\hat{\omega}$ . A partir de esto, para incorporar la medida de aversión relativa al riesgo constante basta con expresar  $\lambda_1 = 1/\gamma$ , donde  $\gamma > 1$ . Ahora, con los resultados que obtuvimos en (71) con respecto al programa  $\mathcal{Z}$  deducimos que la solución cerrada  $\hat{\omega}$  del problema estático CRRA-Log es,

$$\hat{\omega}_{1/\gamma} = (1 - \alpha_{mk}) \omega_{\min} + \alpha_{mk} \omega_{mk} \mid \alpha_{mk} = 1/\gamma (m^T \phi e) \tag{95}$$

Vemos que el principio de la Separación de Fondos se mantiene igual, por lo tanto, podemos utilizar este resultado para calcular la composición del portafolio óptimo relativamente rápido para cualquier valor de  $\gamma > 1$ .

Nos gustaría agregar también que existe otra alternativa para resolver el problema estático, donde incorporamos la función de la frontera factible  $\mathcal{V}(\dot{\mu})$  en la función  $\max_{\omega} E[U(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)]$  del problema estático de forma que podemos expresar a la utilidad esperada completamente en términos de  $\dot{\mu}$  pero manteniendo el efecto de la varianza del portafolio,

$$\begin{aligned} \max_{\omega} E[U(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)] &= \dot{\mu} - \gamma \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \\ \max_{\omega} E[U(\dot{\mu}, \mathcal{V}(\dot{\mu}))] &= \dot{\mu} - \gamma \frac{\mathcal{V}(\dot{\mu})}{2} \\ \max E[U(\dot{\mu})] &= \dot{\mu} - \gamma \frac{\mathcal{C}/\mathcal{D}(\dot{\mu} - \mathcal{A}/\mathcal{C})^2 + 1/\mathcal{C}}{2} \end{aligned} \tag{96}$$

dado que los escalares de  $\mathcal{M}$  cumplen implícitamente con la restricción de inversión completa, podemos directamente encontrar el valor óptimo de  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  que maximiza la utilidad esperada por medio de la condición de primer orden,

$$\frac{dE[U]}{d\hat{\boldsymbol{\mu}}} : \frac{\mathcal{D} - \gamma(\mathcal{C}\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathcal{A})}{\mathcal{D}} = 0 \quad (97)$$

despejando para  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  vamos a tener la expresión,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\mathcal{A}\gamma + \mathcal{D}}{\mathcal{C}\gamma} \quad (98)$$

Notar que en este procedimiento se ha eliminado completamente información con respecto a  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ , para recuperar la composición óptima del portafolio únicamente tenemos que introducir  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  en la función vectorial  $\vec{f}(\hat{\boldsymbol{\mu}})$ . Este proceso tiene el beneficio de agilizar el análisis de la relación entre los pares de oportunidades eficientes  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_p^2)$  y  $\gamma$ . En nuestros capítulos siguientes utilizaremos los resultados de (95) y (98) de manera alternada.

### **Maximización de la Utilidad Esperada con $n+1$ Activos**

Resolver el problema estático utilizando los principios de la optimización M-V cuando agregamos el activo-sin-riesgo es aun más fácil y directo, aquí vamos a recordar a la formulación de CRRA-Log para dos activos en (52),

$$\max_{\alpha} E[U(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_p^2)] = \max_{\alpha} (\boldsymbol{\mu}_{exceso} - \gamma \frac{\alpha \boldsymbol{\sigma}_i^2}{2})$$

ahora vamos aplicar los principios de la Separación de Fondos para expresar a la condición de primer orden como,

$$\hat{\alpha}_{mk+1} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{exceso}}{\gamma \boldsymbol{\sigma}_i^2} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{mk+1} - \boldsymbol{r} \boldsymbol{f}}{\gamma \boldsymbol{\sigma}_{mk+1}^2} \quad (99)$$

a diferencia del resultado en (53), por los resultados del programa  $\mathcal{N}$  tenemos una definición concreta del único activo-riesgo al que hemos llamado el Portafolio de Mercado y sabemos exactamente que su composición es  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{mk+1} = \phi(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{r} \boldsymbol{f} \boldsymbol{e}) / (\mathcal{A} - \boldsymbol{r} \boldsymbol{f} \mathcal{C})$ . Adicionalmente, si estamos interesados en conocer la composición específica de los activos-riesgosos para cual-



quier  $\gamma > 1$  podemos utilizar la expresión en (78) de  $\mathcal{N}$ , vamos a tener entonces,

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= \phi^{-1}\lambda(\mathbf{m} - \mathbf{r}\mathbf{f}e) \\ &= \frac{\phi^{-1}(\mathbf{m} - \mathbf{r}\mathbf{f}e)}{\gamma} \quad | \quad \lambda = \frac{1}{\gamma}\end{aligned}\tag{100}$$

Por último, en el caso  $n + 1$  también podemos incorporar la función de frontera factible  $\mathcal{V}_{n+1}(\mu)$  en la función objetivo del problema estático de forma que vamos a tener,

$$\begin{aligned}\max_{\omega} E[U(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_p^2)] &= \dot{\mu} - \gamma \frac{\dot{\sigma}_p^2}{2} \\ &= \dot{\mu} - \gamma \frac{\mathcal{V}_{n+1}(\dot{\mu})}{2} \\ \max E[U(\dot{\mu})] &= \dot{\mu} - \gamma \frac{(\dot{\mu} - \mathbf{r}\mathbf{f})^2/\mathcal{H}}{2}\end{aligned}\tag{101}$$

para encontrar el  $\hat{\mu}$  que maximiza la función primero establecemos la condición de primer orden,

$$\frac{dE[U]}{d\dot{\mu}} : \frac{\mathcal{H} - \gamma(\dot{\mu} - \mathbf{r}\mathbf{f})}{\mathcal{H}} = 0\tag{102}$$

y despejando tenemos,

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{f}\gamma + \mathcal{H}}{\gamma}\tag{103}$$

Para recuperar el valor de  $\hat{\alpha}_{mk+1}$  únicamente tenemos que ingresar esta solución en la expresión (82) o en (84) para recuperar toda la información de  $\hat{\omega}$ .

### Resumen

En este marco teórico establecimos que un individuo invierte todo el valor de su riqueza inicial  $\bar{\omega}_0$  en un portafolio  $\omega$  compuesto de  $n$  o  $n + 1$  activos durante un horizonte de tiempo de un solo periodo  $t \rightarrow T$  con el objetivo de maximizar su función de utilidad esperada  $\max_{\omega} E[U(\bar{\omega})]$ . Para solucionar este problema mostramos dos procesos que nos condujeron a dos similares pero distintas formulaciones. En la primera formulación asumimos que los retornos aleatorios simples siguen una distribución normal y que el individuo posee una función de utilidad CARA. A pesar de haber derivado una solución sencilla, no quedamos completamente convencidos por las implicaciones, especialmente argumentamos que la propiedad de aversión absoluta al riesgo constante trae consigo dificultades para modelar lo que se ha considerado como los comportamientos económicamente lógicos. En nuestra segunda formulación, a la cual llama-

mos el problema estático CRRA-Log, asumimos que los retornos aleatorios brutos siguen una distribución Log-Normal y que el individuo posee una función de utilidad CRRA con medida de aversión relativa al riesgo constante, utilizando estos supuestos arribamos a una función objetivo del problema estático  $\max_{\omega} E[U(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)]$ , un problema que únicamente depende de la relación de los parámetros M-V del portafolio y la medida de aversión al riesgo  $\gamma > 1$ . Las soluciones óptimas  $\hat{\omega}$  que derivamos fueron obtenidas durante nuestro análisis de optimización M-V, donde además pudimos derivar el principio de la Separación de Fondos y definiciones de conjuntos factibles y eficientes. Por todas las propiedades, resultados y lecciones de la formulación CRRA-Log argumentamos que este modelo captura de mejor manera las decisiones estáticas de portafolio. A continuación, pasaremos a la segunda parte de nuestro trabajo donde utilizaremos este mecanismo teórico para generar dos distintos algoritmos que nos permitirán optimizar 49 portafolios de industrias estadounidenses y analizar que ocurre en un conjunto de diferentes niveles de  $\gamma$  y los efectos de la diversificación.

### Diseño Metodológico

Para empezar este capítulo se va a recordar el objetivo general del trabajo, *construir portafolios de inversión con instrumentos de renta variable en el mercado de valores estadounidense*. La primera parte para lograr este objetivo fue establecer un Marco Teórico inspirado en el problema de decisión estática de portafolio  $\max E[U(\bar{\omega})]$ , que luego de asumir el supuesto de Log-Normalidad y de una función CRRA se redefinió como el problema estático CRRA-Log,  $\max_{\omega} E[U(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_p^2)]$  con soluciones  $\hat{\omega}$  o  $\hat{\omega}_{n+1}$  derivadas en la sección de optimización M-V. El segundo y final paso empieza aquí, donde nos concentraremos en la recolección de datos financieros y en la formulación de estrategias para manipularlos, de forma que en el siguiente capítulo de Desarrollo y Resultados se pueda tener el campo abierto para la construcción de portafolios y así lograr el cumplimiento del objetivo general en su plena totalidad.

### Recolección de Datos

Vamos a formar el universo de alternativas de inversión por medio de 49 portafolios ponderados por valor<sup>52</sup> de industrias americanas como representantes de los instrumentos de renta variable o activos-riesgosos y un Bono del Tesoro al mes, como representante del activo-sin-riesgo  $rf$ , todos los datos con respecto a estas alternativas son rescatadas del repositorio de Kenneth French<sup>53</sup>, ver también la Tabla (1) para una descripción preliminar. La muestra de retornos históricos<sup>54</sup> para estimar medias, varianzas individuales y las covarianzas entre los portafolios de industria está condicionada a 600 meses de datos de retornos simples  $\bar{r}_{i,t}$  que cubren el período desde enero de 1972 hasta enero de 2022.

Durante el proceso de recopilación seguimos procedimientos estándar para verificar errores e inconsistencias en los datos y para encontrar valores atípicos, afortunadamente no se tuvo que enfrentar con ninguno de estos inconvenientes. Consecuentemente, se formó una base de datos de retornos simples organizada en forma de una matriz con dimensiones  $(49 \times 600)$ ,

<sup>52</sup> Los portafolios ponderados por valor asignan pesos a cada activo  $i$  como la proporción de capitalización total de mercado de  $i$  y la suma de capitalizaciones totales de mercado de  $n$  activos. Por ejemplo, supongamos que cualquier activo tiene una capitalización total de  $x_i$  y la suma de capitalizaciones es  $\sum_{i=1}^n x_i$ , entonces el pesaje de  $i$  en un portafolio ponderado por valor es,  $w_i = x_i / \sum_{i=1}^n x_i$ .

<sup>53</sup> El repositorio de Kenneth French ofrece una colección gratuita de información financiera que incluye retornos de acciones, dividendos, capitalización de mercado y otras variables financieras y económicas de compañías que cotizan en las principales bolsas de los Estados Unidos. Cabe recalcar que una de las razones por las que preferimos a este proveedor, es que a diferencia de otras fuentes gratuitas de información financiera, el repositorio de Kenneth French es meticulosamente mantenido para reflejar información relevante y confiable, además de ofrecernos una más amplia colección de datos históricos.

<sup>54</sup> Agregamos la notación “—” para referirnos a retornos históricos.

Tabla 1: Instrumentos de Renta Variable/Alternativas de Inversión y  $r_f$

$i$	Industria	Comp.	$i$	...	...	$i$	...	...	$i$	...	...
1	Agric	15	14	Chems	82	27	Gold	17	40	Boxes	22
2	Food	76	15	Rubbr	40	28	Mines	22	41	Trans	98
3	Soda	11	16	Txtls	37	29	Coal	8	42	Whisl	163
4	Beer	15	17	BldMt	114	30	Oil	184	43	Rtail	232
5	Smoke	6	18	Cnstr	55	31	Util	146	44	Meals	85
6	Toys	40	19	Steel	65	32	Telcm	93	45	Banks	407
7	Fun	60	20	FabPr	19	33	PerSv	48	46	Insur	146
8	Books	42	21	Mach	155	34	BusSv	227	47	RIEst	43
9	Hshld	91	22	ElcEq	69	35	Hardw	119	48	Fin	273
10	Clths	68	23	Autos	65	36	Softw	230	49	Other	177
11	Hlth	73	24	Aero	23	37	Chips	233	50	T-Bill	$t_{600}$
12	MedEq	127	25	Ships	9	38	LabEq	96			
13	Drugs	227	26	Guns	9	39	Paper	51			

Comentario: Esta tabla contiene la codificación “ $i$ ” que utilizamos para denominar a cada portafolio de industria. En la columna “Comp” se muestra el número promedio de compañías que componen a cada portafolio durante la muestra temporal, todas las compañías individuales pertenecen o pertenecieron a las bolsas de NYSE, AMEX o NASDAQ.

donde cada columna es un vector de retornos simples históricos correspondiente a cada portafolio de industria  $i$ . Tuvimos que realizar únicamente una sola modificación sobre esta matriz, con el fin de convertir a todas las observaciones en retornos compuestos continuos históricos, aquí simplemente hemos utilizado la formula  $\hat{R}_{i,t} = \log(1 + \bar{r}_{i,t})$ . Luego de esta conversión se generó una nueva matriz también de dimensiones  $(49 \times 600)$  y está será suficiente para poder estimar los parámetros<sup>55</sup> de medias, varianzas y la matriz de covarianza. En la Tabla (2) mostramos estadística descriptiva con respecto a estas dos bases de datos. El código fuente para replicar este proceso se encuentra en A2.

El reto que se presentó en el proceso de recolección de datos, trata sobre las implicaciones de los resultados empíricos de las distribuciones de los retornos históricos, pues ninguna distribución de  $i$  portafolio de industria pasó la prueba de normalidad **Wilk-Shapiro**, ver los resultados numéricos en la Tabla (2) y ver también que en la figura (1) a pesar de haber convertido los retornos simples en retornos compuestos continuos, las distribuciones aun mantuvieron un grado estadísticamente significativo de sesgo y curtosis. Estos resultados se convierten una contradicción para mantener valido el supuesto de Log-Normalidad, no obstante, dado que en este trabajo se persigue un modelo normativo se tomará la decisión de ignorarlo.

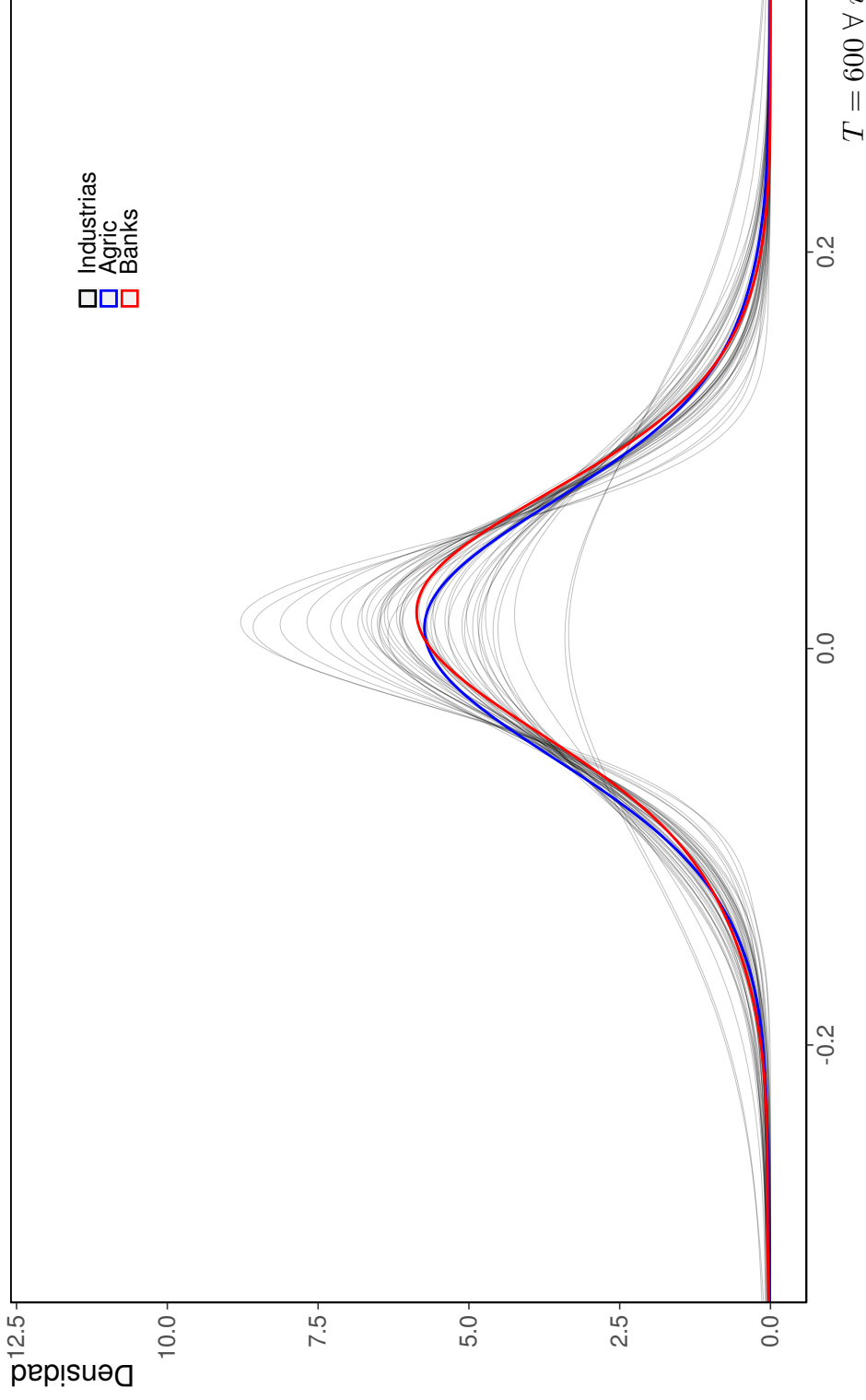
<sup>55</sup> Decidimos mantener la misma notación para los parámetros históricos estimados. Sin embargo, es importante señalar que las estimaciones de los dos momentos se calculan como  $E(\hat{R}_i) = 1/T \sum_{t=1}^T \hat{R}_{i,t}$  y  $\phi_{i,j} = 1/(T - 1) \sum_{t=1}^T [\hat{R}_{i,t} - E(\hat{R}_{i,t})][\hat{R}_{j,t} - E(\hat{R}_{j,t})]$ .

Tabla 2: Estadística Descriptiva

Co	$E(r_i)$	$\sigma_i$	$E(\bar{R}_i)$	$\sigma_i$	$\hat{\mu}_i$	W.S	Co	$E(r_i)$	$\sigma_i$	$E(\bar{R}_i)$	$\sigma_i$	$\hat{\mu}_i$	W.S
1	0,0106	0,0635	0,0085	0,0633	0,0095	0,977***	26	0,0130	0,0633	0,0110	0,0637	0,0120	0,959***
2	0,0109	0,0449	0,0099	0,0445	0,0104	0,976***	27	0,0101	0,1087	0,0044	0,1060	0,0072	0,983***
3	0,0108	0,0652	0,0087	0,0651	0,0098	0,946***	28	0,0114	0,0772	0,0083	0,0783	0,0098	0,96***
4	0,0114	0,0524	0,0100	0,0522	0,0107	0,965***	29	0,0094	0,1121	0,0031	0,1131	0,0063	0,97***
5	0,0135	0,0627	0,0115	0,0626	0,0125	0,964***	30	0,0103	0,0619	0,0083	0,0619	0,0093	0,953***
6	0,0083	0,0727	0,0057	0,0734	0,0070	0,975**	31	0,0093	0,0405	0,0084	0,0405	0,0088	0,98***
7	0,0133	0,0766	0,0103	0,0775	0,0118	0,945***	32	0,0096	0,0473	0,0085	0,0474	0,0091	0,977***
8	0,0094	0,0592	0,0076	0,0590	0,0085	0,971***	33	0,0074	0,0638	0,0053	0,0645	0,0063	0,966***
9	0,0090	0,0466	0,0078	0,0467	0,0083	0,968***	34	0,0105	0,0558	0,0089	0,0563	0,0097	0,958***
10	0,0114	0,0663	0,0092	0,0664	0,0103	0,964***	35	0,0101	0,0721	0,0075	0,0727	0,0088	0,968***
11	0,0111	0,0753	0,0082	0,0752	0,0096	0,977***	36	0,0129	0,0927	0,0086	0,0918	0,0107	0,974***
12	0,0108	0,0528	0,0093	0,0531	0,0100	0,972***	37	0,0126	0,0752	0,0097	0,0762	0,0112	0,96***
13	0,0109	0,0503	0,0097	0,0498	0,0103	0,98***	38	0,0121	0,0682	0,0097	0,0683	0,0109	0,976***
14	0,0105	0,0579	0,0088	0,0580	0,0096	0,964***	39	0,0096	0,0555	0,0081	0,0552	0,0089	0,973***
15	0,0116	0,0597	0,0097	0,0600	0,0106	0,956***	40	0,0103	0,0568	0,0086	0,0574	0,0094	0,965***
16	0,0100	0,0764	0,0071	0,0772	0,0086	0,899***	41	0,0100	0,0576	0,0083	0,0579	0,0091	0,976***
17	0,0109	0,0636	0,0089	0,0641	0,0099	0,939***	42	0,0101	0,0536	0,0086	0,0540	0,0093	0,955***
18	0,0105	0,0723	0,0078	0,0730	0,0091	0,968***	43	0,0111	0,0550	0,0095	0,0551	0,0103	0,972***
19	0,0087	0,0786	0,0055	0,0796	0,0071	0,963***	44	0,0111	0,0598	0,0093	0,0608	0,0102	0,939***
20	0,0082	0,0738	0,0054	0,0745	0,0068	0,971***	45	0,0101	0,0615	0,0082	0,0621	0,0092	0,957***
21	0,0108	0,0640	0,0086	0,0650	0,0097	0,955***	46	0,0109	0,0546	0,0094	0,0548	0,0102	0,966***
22	0,0117	0,0645	0,0096	0,0648	0,0106	0,972***	47	0,0071	0,0763	0,0042	0,0763	0,0057	0,892***
23	0,0111	0,0772	0,0082	0,0758	0,0096	0,936***	48	0,0117	0,0627	0,0097	0,0633	0,0107	0,965***
24	0,0126	0,0680	0,0102	0,0692	0,0114	0,939***	49	0,0065	0,0647	0,0044	0,0658	0,0055	0,96***
25	0,0105	0,0744	0,0077	0,0746	0,0091	0,972***	50	0,0036	0,0029	0,0036	0,0029	0,0036	0,936***

Comentario: La segunda columna denota la estimación del retorno esperado simple mensual de la industria  $i$ , a su lado derecho está la columna que denota el valor estimado de la desviación estándar mensual del retorno simple. La cuarta columna muestra el valor estimado del retorno esperado compuesto continuo, mientras que la columna que sigue denota el valor estimado de su desviación estándar. La sexta columna es la aproximación al logaritmo del retorno bruto esperado,  $\log(1 + E(r_i)) \approx E(\bar{R}_i) + \sigma_i^2$ . La última columna muestra los resultados de la prueba de normalidad Wilkison-Shapiro realizada a cada distribución de 600 meses de retornos compuestos continuos, donde \*\*\*  $p < 0,0001$ , \*\*  $p < 0,001$ , \*  $p < 0,01$ , por lo tanto, todos los valores con asterisco tienen un valor  $p$  menor a un nivel de significancia del 5 % y la hipótesis nula para defender el supuesto de normalidad es rechazada.

**Figura 1:** *Distribuciones de Retornos Compuestos Continuos Históricos*



Comentario: En esta figura se muestran 49 distribuciones empíricas de retornos compuestos continuos de cada industria  $i$ . Cada muestra temporal es equivalente a 600 meses desde enero de 1972 hasta enero de 2022. Es evidente que todas las distribuciones conservan anchuras y sesgos no congruentes con la forma esperada de una distribución normal, para corroborar esta observación ver el Anexo (A1), donde mostramos los resultados individuales de curtosis y asimetría.

## Manipulación de Datos

Con la matriz de datos lista, ahora vamos a establecer los dos ejemplos hipotéticos para realizar la construcción de portafolio y lógicamente tener una idea clara del tipo de estrategia que necesitaremos para manipularla hasta convertirla en  $\hat{\omega}$  o  $\hat{\omega}_{n+1}$ .

### Ejemplo 1: Construcción de Portafolio para el Conjunto $\gamma$

Existen 50 individuos cada uno indexado por  $j \in 1, 2, \dots, 50$ . Cada individuo tiene una medida particular de aversión relativa al riesgo constante representada como un elemento dentro del conjunto indexado  $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{50}\} = \{2, 3, \dots, 51\}$ . Esto significa que el individuo  $j = 1$  tiene una medida de aversión relativa al riesgo constante de  $\gamma_1 = 2$ , el individuo  $j = 2$  tiene una medida de  $\gamma_2 = 3$ , y así sucesivamente. Se requiere resolver el problema estático para todo el conjunto de individuos en  $\gamma$ , considerando el caso de  $n$ -activos-riesgosos y el caso de  $n + 1$  activos por separado.

Alternativas	Individuos	Portafolios	Horizonte
$n = 49$	$ \gamma  = 50$	50	1-Mes
$n + 1 = 49 + rf$	$ \gamma  = 50$	50	1-Mes

### Ejemplo 2: Construcción de Portafolio y la Diversificación

Existe un solo individuo con medida de aversión relativa al riesgo constante,  $\gamma_6 = 7$ . Se requiere resolver el problema estático para este individuo bajo la suposición de que el tamaño de las alternativas de inversión crece un activo riesgoso a la vez, de tal manera que el primer problema estático requiere encontrar la solución óptima cuando las alternativas disponibles<sup>56</sup> se definen por los portafolios de la industria  $\mathbf{V} = \{1, 2\}$ , luego  $\mathbf{V} = \{1, 2, 3\}$ , después  $\mathbf{V} = \{1, 2, 3, 4\}$  y así sucesivamente, hasta resolver el problema estático defino por las alternativas  $\mathbf{V} = \{1, 2, \dots, 49\}$ . Adicionalmente, el caso  $n + 1$  se resolverá al mismo tiempo que cada

<sup>56</sup> La configuración de los conjuntos de alternativas riesgosas se realiza de la siguiente manera. Dejemos que  $\mathbf{V}$  sea un conjunto indexado  $i = 1, \dots, 49$  de los 49 portafolios de industria, por lo tanto su cardinalidad es  $|\mathbf{V}| = 49$ . Dejemos que  $\mathbf{V}^{(1)}$  sea un subconjunto indexado de  $\mathbf{V}$  con cardinalidad  $|\mathbf{V}^{(1)}| = 2$ . En base a esto, nuestra regla para crear conjuntos de alternativas riesgosas es,  $\mathbf{V}^{(1)} \subset \mathbf{V}^{(2)} \subset \mathbf{V}^{(3)} \dots \subset \mathbf{V}^{(47)} \subset \mathbf{V}$ . Las cardinalidades resultantes de los conjuntos tienen que ser  $|\mathbf{V}^{(2)}| = 3$ ,  $|\mathbf{V}^{(3)}| = 4$ , hasta  $|\mathbf{V}^{(47)}| = 48$ . El orden inicial de  $\mathbf{V}$  que determinará la configuración de cada uno de sus subconjuntos tiene importancia, como se ha mostrado nosotros particularmente decidimos indexar este conjunto en orden de menor a mayor  $i$ , si por ejemplo se decide ordenar  $\mathbf{V}$  de mayor a menor  $i$ , los resultados de optimización para cada uno de estos nuevos subconjuntos será diferente al orden inicial con excepción de  $\mathbf{V}$ . Por lo tanto, si se desea replicar exactamente nuestros resultados, es necesario seguir nuestras reglas de configuración. No obstante, el objetivo de este ejemplo en realidad es analizar el efecto de la diversificación y las conclusiones se mantienen iguales sin importar la indexación inicial de  $\mathbf{V}$ , con tal de que se aplique la regla de subconjuntos en cadena.

caso de  $n$ -alternativas-riesgosas.

Alternativas	Individuos	Portafolios	Horizonte
$n \in \{2, 3, \dots, 49\}$	1	48	1-Mes
$n + 1 \in \{2 + rf, 3 + rf, \dots, 49 + rf\}$	1	48	1-Mes

*Manipulación de Datos*

Para resolver estos ejemplos vamos a utilizar la estrategia que hemos propuesto en el objetivo específico; *generar un proceso de construcción de portafolio sistematizado y replicable*. Para nosotros fue claro que esto implicaría la necesidad de desarrollar dos algoritmos. Consecuentemente, en las tablas de **Algoritmos** (1) y (2) establecemos el proceso de construcción de portafolio en forma de pseudo-código, cada algoritmo corresponde a cada ejemplo y detallamos brevemente su estructura.

**Algoritmo 1:** En la sección Definir se establecen las variables que contienen los datos de entrada que son necesarios para que el algoritmo pueda funcionar. La variable **V** es una matriz de  $(n \times 600)$  de los retornos compuestos continuos históricos de los 49 portafolios de industria. El valor del activo-sin-riesgo  $rf$  se establece al mes  $T = 600$ . También, hemos redefinido a  $\gamma$  como un vector con límite inferior, límite superior, un patrón y una condición que fuerza al límite inferior ser mayor a 1. En Requerir establecemos las variables en donde se guardarán nuestros resultados, concretamente  $\Phi_{49}^{(\gamma)}$  y  $\Phi_{49+rf}^{(\gamma)}$  son matrices que deben contener 50 soluciones cada una. Cada solución particular por ejemplo,  $\hat{\omega}^{(\gamma_j)}$  o  $\hat{\omega}_{49+1}^{(\gamma_j)}$  representa el portafolio óptimo<sup>57</sup> que soluciona el problema estático CRRA-Log para cada individuo  $j$  con medida de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma_j$ . El resto de variables en esta línea no son parte de la construcción de portafolio, pero sirven para definir las características M-V de los portafolios óptimos y también sirven para nuestro análisis.<sup>58</sup> La sección Calcular contiene todos los comandos que se deben ejecutar para rellenar nuestras variables en Requerir. La primera serie de comandos antes de la reiteración  $q$ , se encargan de calcular el valor de las expresiones que derivamos en el análisis de optimización M-V en la sección 3 del Marco Teórico. Luego, cada uno de estos resultados nos sirven para que en la reiteración  $q$  podamos definir con-

<sup>57</sup> Alternativamente, podemos calcular portafolios óptimos utilizando el principio de Separación de Fondos, esta representación requiere un cambio en el línea 15, donde la expresión correcta se encuentra en (74).

<sup>58</sup> Optamos por ignorar los valores de máxima utilidad esperada porque sería irrelevante hacer una comparaciones de estos valores cuando cada uno corresponde a un individuo con diferente medida de aversión al riesgo.



cretamente a cada portafolio óptimo para cada individuo  $\gamma_j$ , recordar que las expresiones de estos comandos se detallaron en la sección 4 del Marco Teórico.

---

**Algoritmo 1** Construcción de Portafolio del Ejemplo 1
 

---

**Comenzar****Definir:**

- 1:  $\mathbf{V} \leftarrow [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{49}] \mid \mathbf{r}_i \leftarrow (\log(1 + \bar{r}_{i,1}), \dots, \log(1 + \bar{r}_{i,600}))^T$
- 2:  $rf \leftarrow (rf_{600})$
- 3:  $\gamma \leftarrow \text{sec}(x_{min}, x_{max}, cada = x_{sec} \in \mathbb{R}_+) \mid x_{min} \leftarrow 2, x_{max} \leftarrow 51, x_{sec} \leftarrow 1$

**Requerir:**

- 4:  $\Phi_{49}^{(\gamma)} \leftarrow [ \ ]$ ,  $\Phi_{49+rf}^{(\gamma)} \leftarrow [ \ ]$
- 5:  $\mathcal{U}_{49}^{(\gamma)} \leftarrow ( )$ ,  $\mathcal{U}_{49+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ( )$ ,  $\mathcal{V}_{49}^{(\gamma)} \leftarrow ( )$ ,  $\mathcal{V}_{49+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ( )$

**Calcular:**

- 6:  $\mathbf{m} \leftarrow (\text{col.promedio } \mathbf{V} + \frac{1}{2} \text{col.var } \mathbf{V})$ ,  $\mathbf{e} \leftarrow \text{rep}(1, \text{veces} = 49)$  Ver Sección 4 del Marco Teórico.
- 7:  $\phi \leftarrow [\text{cov } \mathbf{V}]$ ,  $\phi^{-1} \leftarrow [\text{solve } \phi]$
- 8:  $\mathcal{A} \leftarrow (\mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e})$ ,  $\mathcal{B} \leftarrow (\mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{m})$ ,  $\mathcal{C} \leftarrow (\mathbf{e}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e})$ ,  $\mathcal{D} \leftarrow (\mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{A}^2)$
- 9:  $\mathcal{H} \leftarrow (\mathcal{B} - 2rf\mathcal{A} + rf^2\mathcal{C})$
- 10:  $g \leftarrow (1/\mathcal{D})(\mathcal{B}\phi^{-1} \times \mathbf{e} - \mathcal{A}\phi^{-1} \times \mathbf{m})$ ,  $h \leftarrow (1/\mathcal{D})(\mathcal{C}\phi^{-1} \times \mathbf{m} - \mathcal{A}\phi^{-1} \times \mathbf{e})$
- 11:  $g_{n+1} \leftarrow (-\phi^{-1} \times (\mathbf{m} - rfe)(rf/\mathcal{H}))$   $h_{n+1} \leftarrow (\phi^{-1} \times (\mathbf{m} - rfe)(1/\mathcal{H}))$
- 12: **for** ( $q$  in  $\gamma$ ) **do**
- 13:  $\mathcal{U}_{49}^{(\gamma)} \leftarrow ((\mathcal{A} \cdot q + \mathcal{D})/\mathcal{C} \cdot q)$ ,  $\mathcal{U}_{49+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ((rf \cdot q + \mathcal{H})/q)$
- 14:  $\mathcal{V}_{49} \leftarrow (\mathcal{C}/\mathcal{D})(\mathcal{U}_{49}^{(\gamma)} - \mathcal{A}/\mathcal{C})^2 + 1/\mathcal{C}$
- 15:  $\Phi_{49}^{(\gamma)} \leftarrow (g + h \times \mathcal{U}_{49}^{(\gamma)})$ ,  $*\Phi_{49}^{(\gamma)} \leftarrow ((1 - \alpha_{mk}), \alpha_{mk})$
- 16:  $\mathcal{V}_{49+rf} \leftarrow ((\mathcal{U}_{49+rf}^{(\gamma)} - rf)^2/\mathcal{H})$
- 17:  $\Phi_{49+rf}^{(\gamma)} \leftarrow (g_{n+1} + h_{n+1} \times \mathcal{U}_{49+rf}^{(\gamma)})$ ,  $*\Phi_{49+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ((1 - \alpha_{mk+rf}), \alpha_{mk+rf})$
- 18: **end for**
- 19: Print ( $\Phi_{49}^{(\gamma)}$ ,  $\Phi_{49+rf}^{(\gamma)}$ )

**Terminar**


---

**Algoritmo 2:** La sección Definir es similar a nuestro algoritmo anterior la única diferencia aquí es que hemos cambiado a la variable  $\gamma$  por  $\gamma$ , que es un valor constante y representa a la medida de aversión relativa al riesgo constante del individuo  $\gamma_6$ . En Requerir establecemos  $\Phi_n^{(\gamma)}$  y  $\Phi_{n+rf}^{(\gamma)}$  como las matrices que contienen 48 soluciones cada una. Cada solución particular  $\hat{\omega}_n^{(\gamma=7)}$  o  $\hat{\omega}_{n+rf}^{(\gamma=7)}$  corresponde al portafolio óptimo compuesto por  $n$ -activos-riesgos o  $n + 1$  ac-

---

tivos, que soluciona el problema estático CRRA-Log del individuo. En calcular la primera línea define un proceso de 48 reiteraciones donde todos los comandos que siguen deben realizarse primero considerando a las alternativas riesgosas en  $\mathbf{V}^{(1)} = \{1, 2\}$ , luego  $\mathbf{V}^{(2)} = \{1, 2, 3\}$  y así, hasta resolver todas las operaciones para alternativas riesgosas disponibles definas por  $\mathbf{V} = \{1, 2, \dots, 49\}$ .

---

### Algoritmo 2 Construcción de Portafolio del Ejemplo 2

---

#### Comenzar

#### Definir:

$$1: \mathbf{V} \leftarrow [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{49}] \mid \mathbf{r}_i \leftarrow (\log(1 + \bar{r}_{i,1}), \dots, \log(1 + \bar{r}_{i,600}))^T$$

$$2: rf \leftarrow (rf_{600})$$

$$3: \gamma \leftarrow (x > 1) \mid x \leftarrow 7$$

#### Requerir:

$$4: \Phi_n^{(\gamma)} \leftarrow [ \mathbf{I}, \Phi_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow [ \mathbf{I} ]$$

$$5: \mathcal{U}_n^{(\gamma)} \leftarrow ( ), \mathcal{U}_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ( ), \mathcal{V}_n^{(\gamma)} \leftarrow ( ), \mathcal{V}_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ( ), \max E[U]_n^{(\gamma)} \leftarrow ( ), \max E[U]_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ( )$$

#### Calcular:

6: **for** ( $s$  in 2 : 49) **do**

$$7: \mathbf{m} \leftarrow (\text{col.average } \mathbf{V}_{[1:s,]}, \frac{1}{2} \text{col.var } \mathbf{V}_{[1:s,]}), \mathbf{e} \leftarrow \text{rep}(1, \text{veces} = s)$$

$$8: \phi \leftarrow [\text{cov } \mathbf{V}_{[1:s,]}], \phi^{-1} \leftarrow [\text{solve } \phi]$$

$$9: \mathbf{A} \leftarrow (\mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e}), \mathbf{B} \leftarrow (\mathbf{m}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{m}), \mathbf{C} \leftarrow (\mathbf{e}^T \times \phi^{-1} \times \mathbf{e}), \mathbf{D} \leftarrow (\mathbf{B}\mathbf{C} - \mathbf{A}^2)$$

$$10: \mathcal{H} \leftarrow (\mathbf{B} - 2rf\mathbf{A} + rf^2\mathbf{C})$$

$$11: g \leftarrow (1/\mathcal{D}(\mathbf{B}\phi^{-1} \times \mathbf{e} - \mathbf{A}\phi^{-1} \times \mathbf{m})), h \leftarrow (1/\mathcal{D}(\mathbf{C}\phi^{-1} \times \mathbf{m} - \mathbf{A}\phi^{-1} \times \mathbf{e}))$$

$$12: g_{n+1} \leftarrow (-\phi^{-1} \times (\mathbf{m} - rfe)(rf/\mathcal{H})) \quad h_{n+1} \leftarrow (\phi^{-1} \times (\mathbf{m} - rfe)(1/\mathcal{H}))$$

13: **end for**

14: **for** ( $q$  in 1 : 48) **do**

$$15: \mathcal{U}_n^{(\gamma)} \leftarrow ((\mathcal{A}[q] \cdot \gamma + \mathcal{D}[q])/\mathcal{C}[q] \cdot \gamma), \mathcal{U}_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ((rf \cdot \gamma + \mathcal{H}[q])/\gamma)$$

$$16: \Phi_n^{(\gamma)} \leftarrow (g[q] + h[q] \times \mathcal{U}_n^{(\gamma)}), * \Phi_n^{(\gamma)} \leftarrow ((1 - \alpha_{mk}), \alpha_{mk})$$

$$17: \mathcal{V}_n \leftarrow (\mathcal{C}[q]/\mathcal{D}[q] \cdot (\mathcal{U}_n^{(\gamma)} - \mathcal{A}[k]/\mathcal{C}[q])^2 + 1/\mathcal{C}[q])$$

$$18: \Phi_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow (g_{n+1}[q] + h_{n+1}[q] \times \mathcal{U}_{n+rf}^{(\gamma)}), * \Phi_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow ((1 - \alpha_{mk+1}), \alpha_{mk+1})$$

$$19: \mathcal{V}_{n+rf} \leftarrow ((\mathcal{U}_{n+rf}^{(\gamma)} - rf)^2/\mathcal{H}[q])$$

$$20: \max E[U]_n^{(\gamma)} \leftarrow (\mathcal{U}_n^{(\gamma)} - (\gamma \cdot \mathcal{V}_n/2))$$

$$21: \max E[U]_{n+rf}^{(\gamma)} \leftarrow (\mathcal{U}_{n+rf}^{(\gamma)} - (\gamma \cdot \mathcal{V}_{n+rf}/2))$$

22: **end for**

$$23: \text{Print } (\Phi_n^{(\gamma)}, \Phi_{n+rf}^{(\gamma)})$$

#### Terminar

---

El pseudo-código en ambas tablas tiene el propósito de indicar como resolver nuestros ejemplos hipotéticos de manera sistemática y replicable. El sintaxis está basado en el lenguaje de R, pero también puede ser fácilmente adaptado e implementado en MATLAB o Python. Para ver el código fuente en R ir a (A3) y (A5).

**Desarrollo y Resultados**

En esta sección se presenta de manera conjunta resultados y análisis para los ejemplos hipotéticos que fueron planteados en el capítulo de Diseño Metodológico. Antes de empezar sin embargo se establecen las simplificaciones que se utilizaron en las tablas de resultados.

Los portafolios óptimos  $\hat{\omega}$  para los casos de  $n$  y  $n + 1$  se presentan como  $\hat{\omega} = (\alpha_{min}, \alpha_{mk})$  y  $\hat{\omega} = (\alpha_{rf}, \alpha_{mk+1})$ , donde se ha preferido utilizar el Teorema de Separación de Fondos con el fin de evitar vectores de longitud  $n$  o  $n + 1$ . Así mismo, con el propósito de mantener orden se simplificó el numero de respuestas que se muestran en las tablas. Estas simplificaciones no afectan en ninguna medida los análisis que siguen. Las tablas de resultados completas se encontrarán en los anexos (B1) y (B2). Por último, todos los resultados numéricos utilizan un separador de decimales en forma de punto en vez de una coma.

**Resultados y Análisis: Ejemplo 1**

**Tabla 3:** Resultados del Ejemplo 1 y la Construcción de Portafolio para el Conjunto  $\gamma$

$\gamma$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)_{n+1}$	$\hat{\omega} = (\alpha_{min}, \alpha_{mk})$	$\hat{\omega}_{n+rf} = (\alpha_{rf}, \alpha_{mk+1})$
2	(5.228, 2.25)	(7.49, 3.66)	(-3.99, 4.99)	(-3.06, 4.06)
3	(3.789, 1.051)	(5.05, 1.627)	(-2.33, 3.33)	(-1.7, 2.7)
4	(3.069, 0.631)	(3.83, 0.915)	(-1.49, 2.49)	(-1.03, 2.03)
5	(2.637, 0.437)	(3.098, 0.586)	(-1, 2)	(-0.62, 1.62)
6	(2.349, 0.331)	(2.61, 0.407)	(-0.66, 1.66)	(-0.35, 1.35)
7	(2.144, 0.267)	(2.261, 0.299)	(-0.43, 1.43)	(-0.16, 1.16)
8	(1.989, 0.226)	(2, 0.229)	(-0.25, 1.25)	(-0.01, 1.01)
9	(1.87, 0.198)	(1.797, 0.181)	(-0.11, 1.11)	(0.1, 0.9)
10	(1.774, 0.178)	(1.634, 0.146)	(0, 1)	(0.19, 0.81)
11	(1.695, 0.163)	(1.501, 0.121)	(0.09, 0.91)	(0.26, 0.74)
12	(1.63, 0.151)	(1.39, 0.102)	(0.17, 0.83)	(0.32, 0.68)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
49	(1.086, 0.095)	(0.469, 0.006)	(0.8, 0.2)	(0.83, 0.17)
50	(1.083, 0.095)	(0.463, 0.006)	(0.8, 0.2)	(0.84, 0.16)
51	(1.079, 0.095)	(0.457, 0.006)	(0.8, 0.2)	(0.84, 0.16)

Comentario: Las oportunidades eficientes M-V de cada portafolio son valores mensuales que se deben leer como porcentajes, donde  $\hat{\mu}$  es el valor aproximado del log del retorno mensual bruto esperado de portafolio y  $\hat{\sigma}_p^2$  es la varianza del retorno compuesto continuo del portafolio. Estos valores fueron redondeados a tres decimales y las columnas de pesos óptimos fueron redondeados a dos decimales.

En la parte más a la izquierda de esta tabla hemos colocado la columna de las medidas de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma$  en orden creciente desde  $\gamma = 12$  hasta  $\gamma = 51$ , en otras palabras, se ordenó a los individuos  $j$  desde el menos averso al riesgo al más averso al riesgo. La segunda y tercera columna muestran los pares de oportunidades eficientes M-V que

corresponden a cada portafolio óptimo que maximiza la utilidad esperada de cada individuo  $j$ , donde  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)$  denota el caso de  $n$ -activos-riesgosos y  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)_{n+1}$  denota el caso de  $n + 1$  activos-riesgosos más el activo-sin-riesgo.

Cuando se analizan estos resultados desde el orden  $\gamma_{50} \rightarrow \gamma_1$  se encuentra una relación  $\gamma \downarrow = (\hat{\mu} \uparrow, \hat{\sigma}_p^2 \uparrow)$  o  $\gamma \downarrow = (\hat{\mu} \uparrow, \hat{\sigma}_p^2 \uparrow)_{n+1}$ , lo que simplemente significa que a medida los individuos se vuelven menos aversos al riesgo aceptarán alternativas cada vez más riesgosas con recompensas cada vez más grandes. Por otro lado, la relación desde  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_{50}$  es por su puesto  $\gamma \uparrow = (\hat{\mu} \downarrow, \hat{\sigma}_p^2 \downarrow)$  o  $\gamma \uparrow = (\hat{\mu} \downarrow, \hat{\sigma}_p^2 \downarrow)_{n+1}$ . Una observación interesante aquí, se vuelve visible cuando analizamos el límite  $\gamma \rightarrow \infty$  utilizando la expresión en (103),

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \hat{\mu}(\gamma) &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}\gamma + \mathcal{D}}{\mathcal{C}\gamma} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}} \\ \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_p^2(\gamma) &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{r \cdot f \gamma + \mathcal{H}}{\gamma} = r \cdot f \end{aligned}$$

Para el caso de  $n$ -activos-riesgosos este resultado implica que si se incrementa el tamaño de  $\gamma$  para acomodar individuos con aversión al riesgo cada vez más grande, se vería que la configuración del portafolio óptimo que maximiza la utilidad esperada se acercará a la configuración del portafolio GMV dado que  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \hat{\omega} = \hat{\omega}_{min}$  con parámetros M-V  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2) = (\hat{\mu}_{min}, \hat{\sigma}_{min}^2)$ . Para el caso  $n + 1$  el resultado de arriba implica que el portafolio óptimo se acercará a una inversión completa en el activo-sin-riesgo  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \alpha_{rf} = 1$  con parámetros M-V  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2) = (r \cdot f, 0)$ . No obstante, como un individuo siempre tendrá un  $\gamma$  finito, la decisión óptima de portafolio siempre será invertir una proporción positiva en  $\alpha_{mk}$ <sup>59</sup>

<sup>59</sup> Alternativamente, establecemos el problema estático como,

$$\begin{aligned} \max_{\alpha_{mk}} E[U(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)] &= \max_{\alpha_{mk}} \left( \hat{\mu} - \gamma \frac{\hat{\sigma}_p^2}{2} \right) \\ &= \max_{\alpha_{mk}} \left( (\hat{\mu}_{min} - \alpha_{mk}(\hat{\mu}_{mk} - \hat{\mu}_{min})) - \gamma \frac{v(\hat{\mu})}{2} \right) \end{aligned}$$

la condición de primer orden es,

$$\frac{df}{d(\alpha_{mk})} : - \frac{(\hat{\mu}_{min} - \hat{\mu}_{mk})(\gamma \cdot (\mathcal{C}((\hat{\mu}_{min} - \hat{\mu}_{mk})\alpha_{mk} - \hat{\mu}_{min}) + \mathcal{A}) + \mathcal{D})}{\mathcal{D}} = 0$$

resolviendo esta ecuación para  $\alpha_{mk}$  se tiene,

$$\begin{aligned} \alpha_{mk} &= \frac{(\mathcal{C}\hat{\mu}_{min} - \mathcal{A})\gamma - \mathcal{D}}{(\mathcal{C}\hat{\mu}_{min} - \mathcal{C}\hat{\mu}_{mk})\gamma} \\ &= \mathcal{A}/\gamma \end{aligned}$$

Este resultado se obtiene utilizando las definiciones;  $\hat{\mu}_{min} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$  y  $\hat{\mu}_{mk} = \mathcal{B}/\mathcal{A}$ . Se puede decir también que siempre existirá una cantidad positiva  $\alpha_{mk} \in \mathbb{R}_+$  para cualquier  $\gamma > 1$ . Además, hacia el límite  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_{mk}$  se

o  $\alpha_{mk+1}$ , para el caso  $n + 1$  este resultado fue probado en el análisis de la expresión (29). Por lo tanto, cualquier individuo con medida de aversión al riesgo  $\gamma > 1$  siempre rechazará una inversión completa en el portafolio GMV o alternativamente una inversión completa en el activo-sin-riesgo  $rf$ , por un portafolio con mayor recompensa  $\forall \gamma > 1 : \hat{\mu} = \dot{\mu}_{min} + D/\gamma > \dot{\mu}_{min}$  o  $\hat{\mu} = rf + \mathcal{H}/\gamma > rf$ , incluso si esto signifique asumir un riesgo mayor,  $\forall \gamma > 1 : \hat{\sigma}_p^2 > \dot{\sigma}_{min}^2$  o  $\hat{\sigma}_p^2 > 0$ .

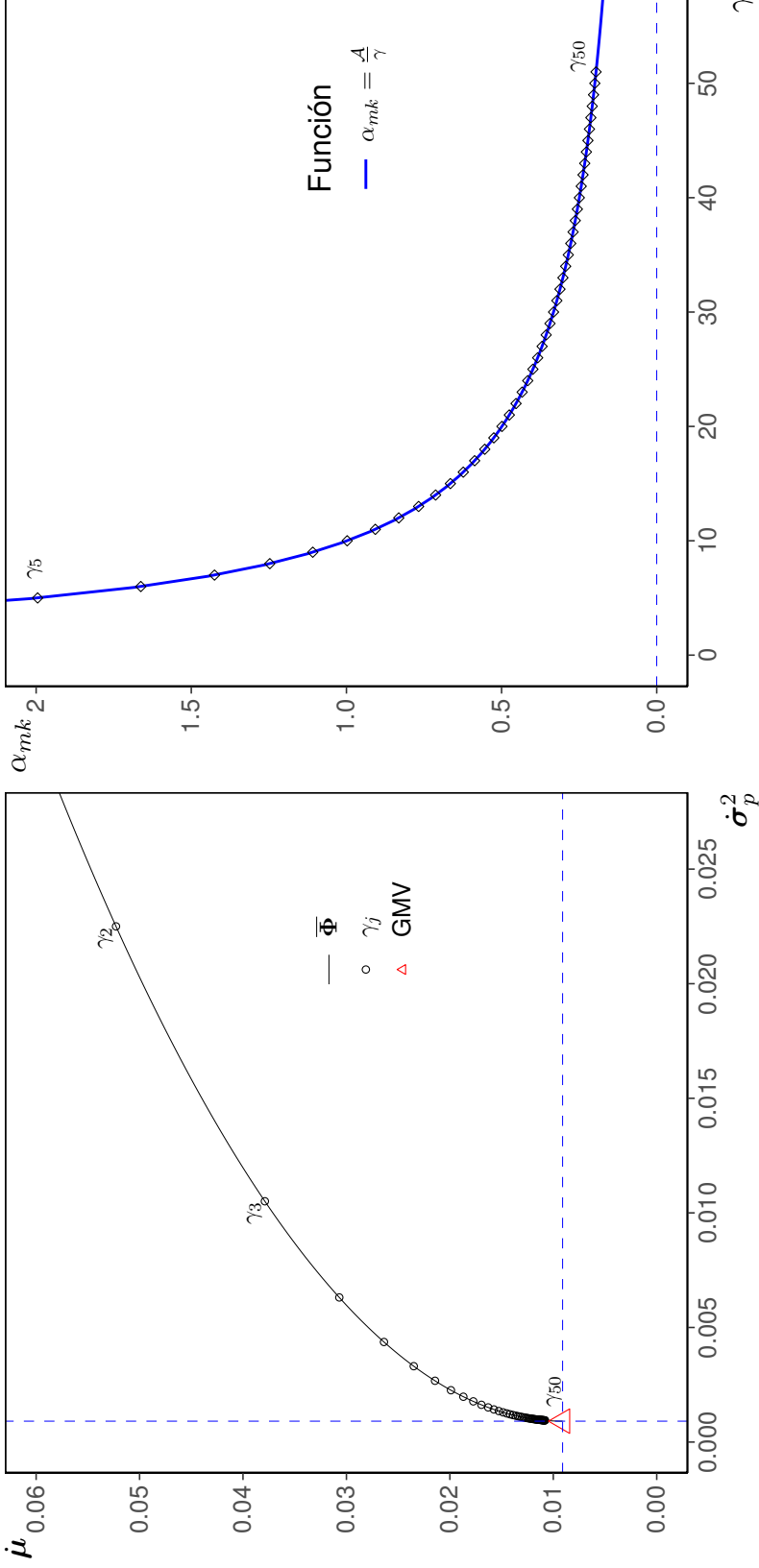
Por último, las dos columnas que siguen corresponden a los vectores óptimos que resuelven el problema estático. Notar que el Teorema de Separación nos permite recuperar toda la información de cada  $\omega_i$  si se utilizan los resultados de arriba conjuntamente con la expresión de  $\hat{\omega}_\lambda$  en (73). Con esta simplificación es más fácil y eficiente analizar el cambio en la composición de los portafolios de acuerdo a los cambios en  $\gamma$ . Para el caso  $n$ , se tiene una relación  $\gamma \downarrow = (\alpha_{min} \downarrow, \alpha_{mk} \uparrow)$  y para el caso  $n + 1$  tenemos  $\gamma \downarrow = (\alpha_{rf} \downarrow, \alpha_{mk+1} \uparrow)$ . Otra observación interesante ocurre al vincular  $\gamma$  con una variable de edad. Por ejemplo, si se utiliza la suposición que existe una relación positiva entre  $\gamma$  y la edad de los individuos, entonces a medida que  $j$  representa a un individuo cada vez más viejo, veremos que el interés por inversiones cada vez más riesgosas disminuye, alternativamente, si  $j$  representa a un individuo cada vez más joven, el interés por inversiones cada vez más riesgosas incrementa. Si esta observación es válida, los resultados implican que por la suposición de normalidad también se puede establecer que a medida  $\gamma_{50} \rightarrow \gamma_1$  representa a un individuo cada vez más joven, la probabilidad de perder una proporción mayor de riqueza incrementa  $\gamma \uparrow \implies z \uparrow = (x - \dot{\mu} \uparrow)/\dot{\sigma} \uparrow$  y a medida que  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_{50}$  cada vez representa a un individuo cada vez más viejo, la probabilidad de perder una proporción grande de riqueza disminuye  $\gamma \downarrow \implies z \downarrow = (x - \dot{\mu} \downarrow)/\dot{\sigma} \downarrow$ . No obstante, este análisis es simplemente una forma subjetiva en la que nosotros hemos decidido interpretar los resultados, más allá de vincular a  $\gamma$  con la edad del individuo, se sabe que otra variable que se puede considerar es el nivel de riqueza inicial de los individuos, donde leeríamos  $\gamma_{50} \rightarrow \gamma_1$  como un orden de los individuos más ricos a los individuos más pobres, a partir de esto el análisis se mantiene igual, es decir, aquellos individuos más ricos invierten una proporción mayor en los fondos con más riesgo.

Para resumir, en este ejemplo construimos una totalidad de 100 portafolios de inversión. Cada

acerca a 0 y  $\alpha_{min}$  se acerca a 1.

portafolio  $\hat{\omega}$  y  $\hat{\omega}_{n+1}$  es una solución óptima al problema estático CRRRA-Log de cada individuo  $j$ . Analizando los resultados de este ejemplo, pudimos encontrar relaciones interesantes cuando dejamos que  $\gamma \rightarrow \infty$ , la lección central siendo que a medida que el individuo se vuelve más averso al riesgo, su portafolio óptimo se vuelve más conservador, es decir, se estabiliza hacia la configuración del portafolio GMV o alternativamente se estabiliza hacia una inversión completa en el activo-sin-riesgo. A continuación mostramos una representación gráfica de los resultados.

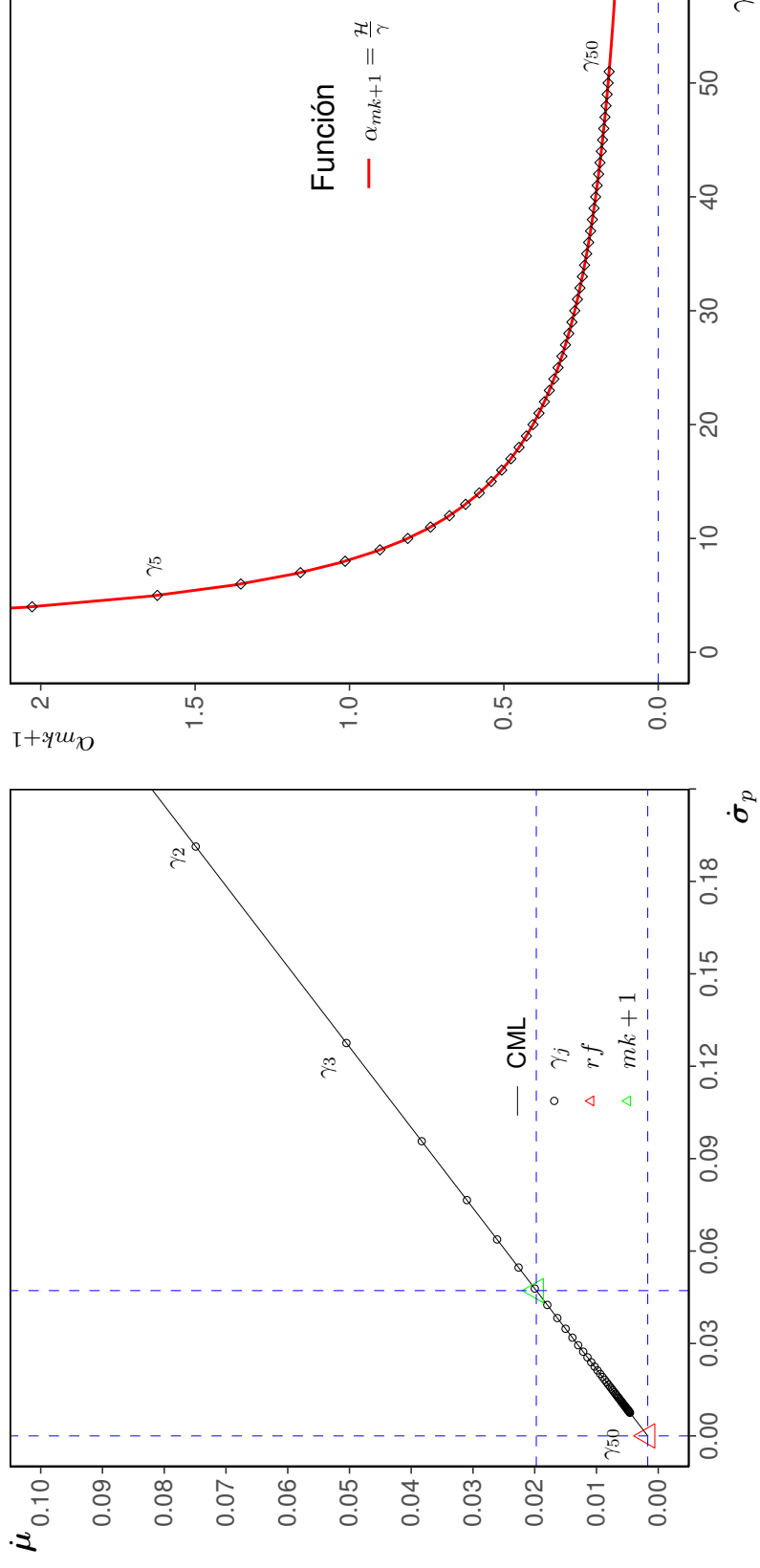
Figura 2: Portafolios Óptimos en el Espacio V-M y la Variación en el Pesaje, el Caso  $n = 49$



Comentario: La Figura (a) representa la frontera eficiente M-V compuesta por los 49 portafolios de industria en espacio V-M:  $e_j e x = \sigma_p^2$ ,  $e_j e y = \mu$ . Sobre esta curva también definimos a las coordenadas  $(\mu, \sigma_p^2)$  de cada  $\gamma \in \gamma$  como se presentan en la tabla de resultados (3). La línea vertical y la línea horizontal interseptan en la coordenada  $(\mu_{min}, \sigma_{min}^2)$  del portafolio GMV. La Figura (b) muestra la función de la relación entre la proporción óptima invertida en el Portafolio de Mercado  $\alpha_{mk}$ , con respecto a incrementos en la medida de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma \rightarrow \infty$ .



Figura 3: Portafolios Óptimos en el Espacio DS-M y la Variación en el Pesaje, el Caso  $n = 49 + r.f$

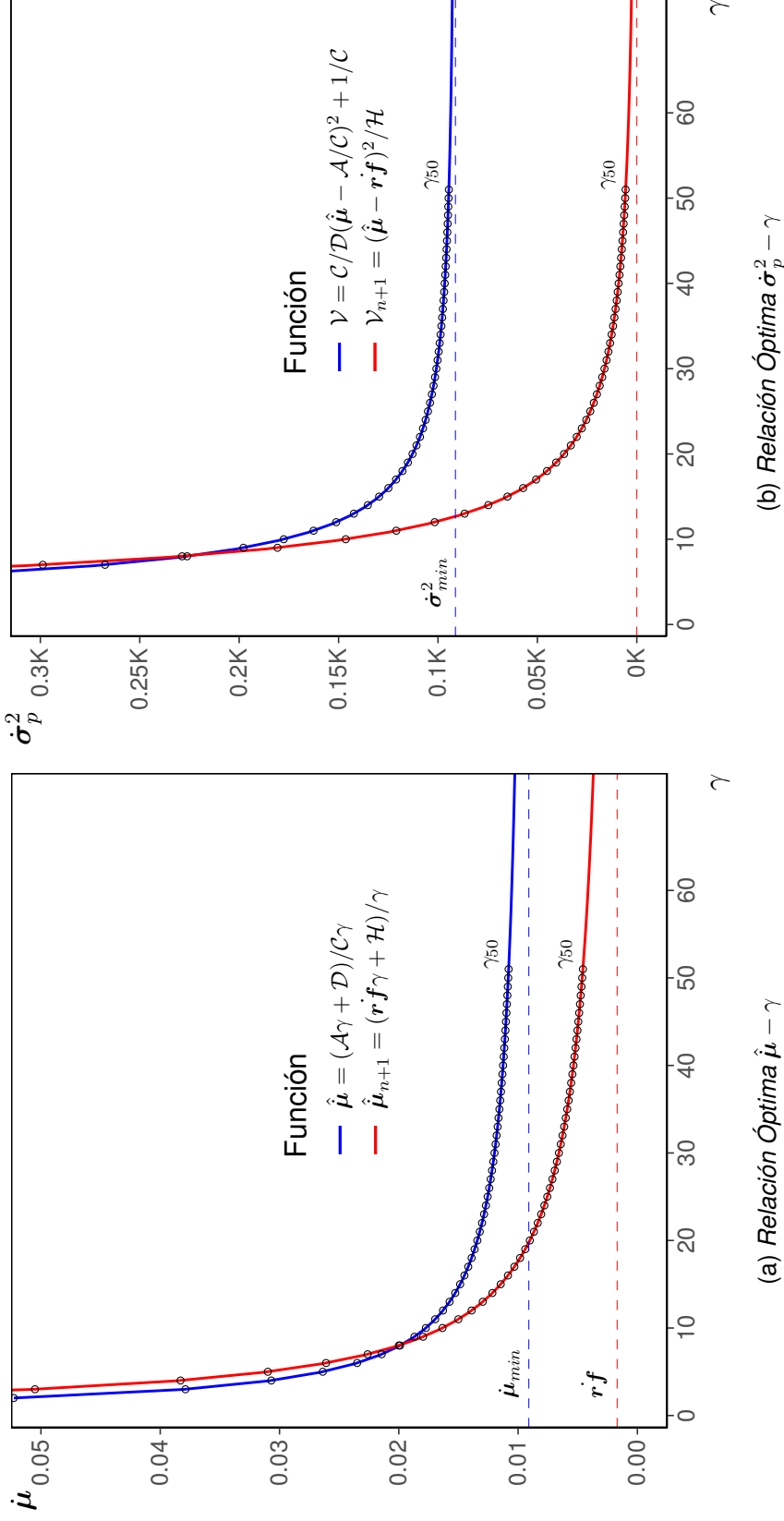


(a) Frontera CML

(b) Relación Óptima  $\alpha_{mk+1} - \gamma$ .

Comentario: La Figura (a) denota la Línea de Mercado de Capitales CML en espacio DS-M, compuesta por 49 portafolios de industria y el Bono del Tesoro. Sobre esta curva están definidas las coordenadas  $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_p)$  para cada  $\gamma_j \in \gamma$  como se muestra la tabla de resultados (3). Las líneas verticales y horizontales interceptan en las coordenadas  $(0, r.f)$  correspondientes al activo-sin-riesgo y en  $(\hat{\sigma}_{mk+1}, \hat{\mu}_{mk+1})$  correspondientes al Portafolio de Mercado. La Figura (b) denota la función de relación entre la proporción óptima invertida en el Portafolio de Mercado  $\alpha_{mk+1}$  mientras incrementamos la medida de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Figura 4: Representación de los Parámetros M-V en Función de  $\gamma$



Comentario: La Figura (a) contiene dos funciones cada una pertenece al caso  $n$  y  $n + 1$  respectivamente. Estas funciones denotan la relación entre el parámetro óptimo  $\hat{\mu}$  y la medida de aversión al riesgo  $\gamma$  que optimiza la utilidad esperada de cada individuo  $j$ . La figura (b) contiene dos funciones que denotan la varianza de los portafolios óptimos para los casos  $n$  y  $n + 1$  respectivamente. Los círculos en cada figura representan coordenadas específicas de parámetros de los portafolios óptimos. También, en ambas figuras las líneas horizontales sirven para mostrar el límite de cada función mientras  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Resultados y Análisis: Ejemplo 2

Tabla 4: Resultados del Ejemplo 2 y los Efectos de Diversificación

$n$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)_{n+rf}$	$\hat{\omega}^{(\gamma=7)}$	$\hat{\omega}_{n+rf}^{(\gamma=7)}$	$\max E[U]_n$	$\max E[U]_{n+rf}$
2	(1.08, 0.184)	(0.811, 0.092)	(0.16, 0.84)	(0.3, 0.7)	4.342	4.905
3	(1.079, 0.183)	(0.817, 0.092)	(0.16, 0.84)	(0.29, 0.71)	4.406	4.937
4	(1.093, 0.179)	(0.849, 0.097)	(0.13, 0.87)	(0.27, 0.73)	4.656	5.095
5	(1.153, 0.183)	(0.928, 0.108)	(0.1, 0.9)	(0.24, 0.76)	5.134	5.489
6	(1.19, 0.187)	(0.969, 0.114)	(0.1, 0.9)	(0.23, 0.77)	5.358	5.694
7	(1.237, 0.196)	(1.008, 0.12)	(0.11, 0.89)	(0.25, 0.75)	5.512	5.89
8	(1.247, 0.198)	(1.016, 0.121)	(0.12, 0.88)	(0.26, 0.74)	5.529	5.929
9	(1.242, 0.197)	(1.019, 0.121)	(0.12, 0.88)	(0.27, 0.73)	5.531	5.944
10	(1.255, 0.199)	(1.031, 0.123)	(0.12, 0.88)	(0.27, 0.73)	5.584	6.004
11	(1.253, 0.198)	(1.032, 0.123)	(0.12, 0.88)	(0.27, 0.73)	5.6	6.008
12	(1.258, 0.194)	(1.054, 0.126)	(0.09, 0.91)	(0.25, 0.75)	5.788	6.121
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
33	(1.637, 0.202)	(1.697, 0.218)	(-0.32, 1.32)	(-0.08, 1.08)	9.311	9.333
34	(1.637, 0.202)	(1.697, 0.218)	(-0.33, 1.33)	(-0.08, 1.08)	9.312	9.334
35	(1.637, 0.201)	(1.703, 0.219)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.337	9.365
36	(1.645, 0.202)	(1.709, 0.22)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.368	9.393
37	(1.69, 0.209)	(1.755, 0.226)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.6	9.627
38	(1.7, 0.211)	(1.762, 0.227)	(-0.33, 1.33)	(-0.08, 1.08)	9.636	9.659
39	(1.699, 0.21)	(1.763, 0.228)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.637	9.663
40	(1.699, 0.21)	(1.764, 0.228)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.643	9.669
41	(1.7, 0.209)	(1.776, 0.229)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	9.696	9.732
42	(1.719, 0.212)	(1.79, 0.231)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	9.769	9.801
43	(1.719, 0.212)	(1.794, 0.232)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	9.787	9.822
44	(1.72, 0.212)	(1.794, 0.232)	(-0.37, 1.37)	(-0.1, 1.1)	9.787	9.822
45	(1.718, 0.211)	(1.799, 0.233)	(-0.38, 1.38)	(-0.11, 1.11)	9.805	9.847
46	(1.732, 0.213)	(1.81, 0.234)	(-0.37, 1.37)	(-0.11, 1.11)	9.863	9.902
47	(1.888, 0.236)	(1.96, 0.256)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	10.616	10.648
48	(1.943, 0.244)	(2.019, 0.264)	(-0.37, 1.37)	(-0.11, 1.11)	10.909	10.946
49	(2.144, 0.267)	(2.261, 0.299)	(-0.43, 1.43)	(-0.16, 1.16)	12.076	12.156

Comentario: La columna  $n$  denota el número de alternativas riesgosas de inversión en orden creciente. Las oportunidades eficientes M-V de cada portafolio son valores mensuales que se deben leer como porcentajes, donde  $\hat{\mu}$  es el valor aproximado del log del retorno mensual bruto esperado de portafolio y  $\hat{\sigma}_p^2$  es la varianza del retorno compuesto continuo del portafolio. Las columnas que definen la composición de los portafolios óptimos corresponden a un mismo individuo que agrega una alternativa riesgosa a la vez. Las dos últimas columnas denotan el máximo nivel de utilidad esperada para el caso  $n$  y  $n + 1$  respectivamente. Recordar que todos los resultados se han calculado con respecto a una medida de aversión relativa al riesgo constante  $\gamma = 7$ .

Los resultados de este ejemplo muestran que a medida el individuo incrementa la diversificación<sup>60</sup> al expandir  $n$ , la utilidad esperada incrementa. Este efecto es consistente cuando se incrementa  $n : 2 \rightarrow 49$  y leemos los resultados en las columnas de arriba hacia abajo,

<sup>60</sup> No confundir a la diversificación de Markowitz como un principio únicamente en orden del número de activos. Aunque el número de activos importa, el “efecto” de la diversificación depende en mayor medida del coeficiente de correlación entre los activos y las medias y varianzas individuales.

pero también cuando se agrega el activo-sin-riesgo  $n \rightarrow n + 1$  y leemos los resultados de izquierda a derecha. Lo que ocurre analíticamente es que reducir la diversificación en menos un activo-riesgoso, es lo mismo que agregar una restricción de igualdad  $w_i = 0$  en el programa  $\mathcal{Z}$ , esta modificación por definición causa que la condición de primer orden con respecto a un  $\hat{\omega}_n$  sea diferente de la condición de primer orden con respecto a un  $\hat{\omega}_{n-1}$  y por lo tanto<sup>61</sup>,  $\max_{\omega_n} E[U(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)] > \max_{\omega_{n-1}} E[U(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)] \quad \forall \hat{\omega}_n, \hat{\omega}_{n-1}$ . En otras palabras, no diversificar completamente significa reducir la máxima utilidad esperada alcanzable por el aporte de  $w_i$ .

Otra manera de ver el efecto de la diversificaciones es por medio de los programas  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ , introduciendo una restricción  $\omega_i = 0$  y luego comparando la varianza resultante de un  $\hat{\omega}_{n-1}$  con la varianza cuando existe diversificación completa  $\hat{\omega}_n$ . Nuevamente, por definición la relación que se encuentra para todo  $\hat{\mu}$  objetivo será,  $\min_{\omega} \hat{\sigma}_p^2 < \min_{\omega_{n-1}} \hat{\sigma}_p^2 \quad \forall \hat{\omega}_n, \hat{\omega}_{n-1}$ . Este resultado implicará que las oportunidades M-V eficientes del programa menos diversificado serán dominadas por las oportunidades M-V eficientes del programa con diversificación completa, esto se traducirá en un desplazamiento hacia la derecha de la curva eficiente tal como se muestran en las figuras (5), (6). A partir de esto, es también claro que el individuo racional prefiere elegir su portafolio óptimo de la frontera de oportunidades más dominante.

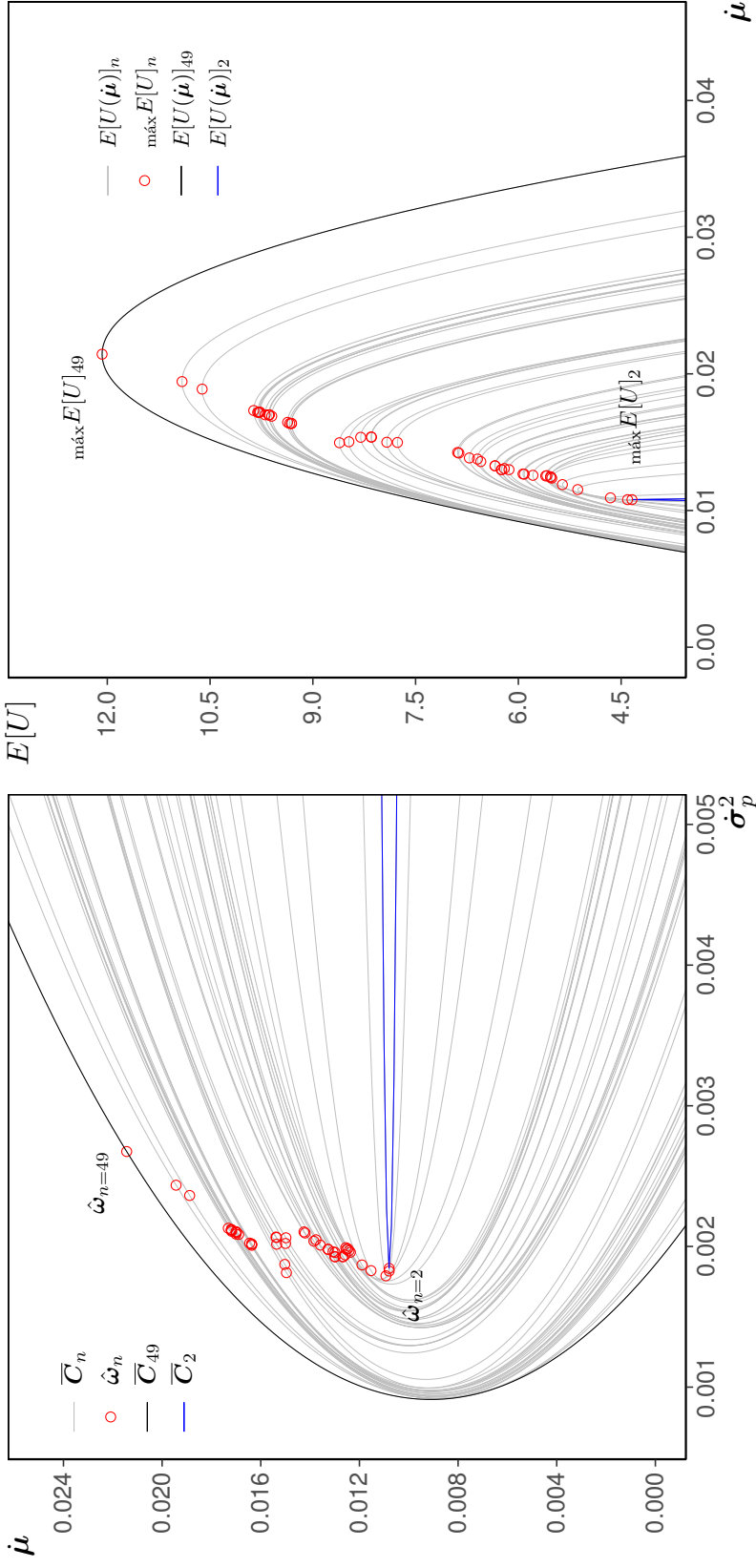
El grado de reducción de la utilidad esperada cuando  $w_i = 0$ , dependerá de los atributos de media, varianza y covarianza de  $i$ . Si es el caso que  $i$  tiene un aporte pequeño, es decir,  $\max_{\omega_n} E[U(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)] \approx \max_{\omega_{n-1}} E[U(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)] \quad \forall \hat{\omega}_n, \hat{\omega}_{n-1}$ , entonces en lo marginal es posible que eliminar activos, tenga poco efecto en el incremento de la utilidad esperada y por efecto en la composición óptima del portafolio, como se muestra en los resultados de  $n : 33 \rightarrow 40$ . Un uso práctico de este análisis puede ser en una situación que nos condicione a invertir en un número fijo de  $n$ . Si por ejemplo,  $n = 10$ , entonces la estrategia del individuo es buscar un conjunto de 10 portafolios que proporcionen el valor más cercano a  $\max E[U]_{49}$ . De manera similar, si somos una institución financiera que crea productos de fondos de inversión, sería beneficioso condicionar el tamaño de  $n$  con el fin de reducir costos, lo ideal sería poder replicar el comportamiento de la frontera eficiente resultante de los 49 portafolios de industria, por medio de un  $n = 10$ . Una replicación cercana a la frontera eficiente real, significaría poder cubrir la demanda de activos riesgosos, con el supuesto de que los individuos son indiferentes

<sup>61</sup> La misma conclusión aplicará cuando se elimina el activo-sin-riesgo.

a reducciones marginales pequeñas sobre su utilidad esperada.

Finalmente, este ejemplo ha revelado la idea de que el efecto positivo de la diversificación en realidad depende de lo que aporta cada alternativa, si el efecto es grande, vale la pena mantener o incorporar a esta alternativa en nuestro portafolio de inversión, si el efecto es marginal, quizás deberíamos considerar en primer orden los beneficios de la reducción de costos.

Figura 5: El Efecto de la Diversificación en la Frontera Eficiente y en la Función de Utilidad Esperada Caso  $n$ -activos

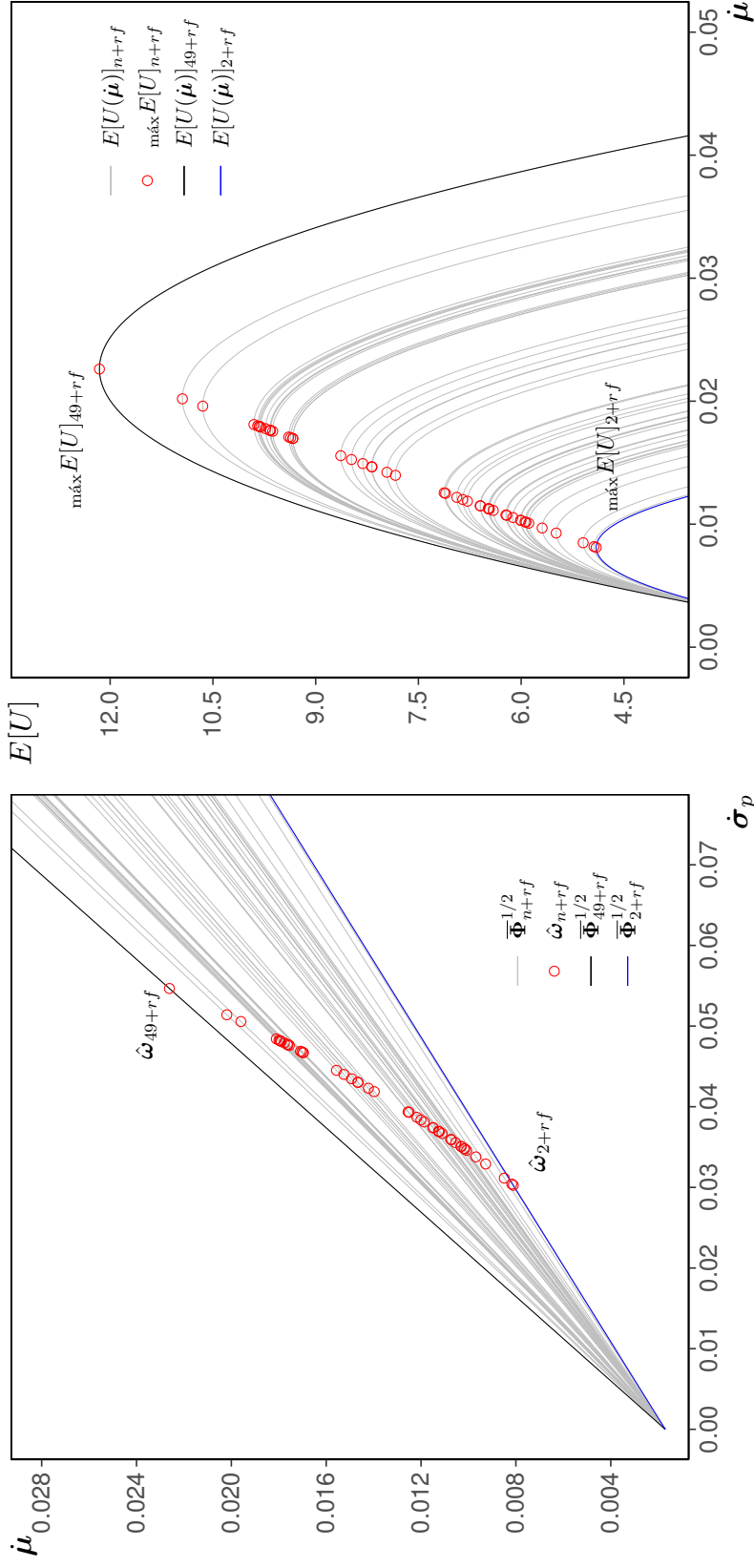


(a) Fronteras factibles  $\bar{C}_n$

(b) Funciones de Utilidad Esperada  $E[U(\hat{\mu})]_n$

Comentario: En la Figura (a) se denotan 49 fronteras factibles, cada una está compuesta por  $n$  portafolios de industrias. La frontera más hacia el centro y de color azul es aquella compuesta de  $n = 2$ -activos-riesgos, mientras la frontera de afuera y en negra, está compuesta por  $n = 49$ -activos-riesgos. Cada coordenada individual denota a los parámetros V-M factibles de un portafolio óptimo para el individuo con medida de aversión al riesgo  $\gamma = 7$ , cuando las alternativas riesgosas son  $n$ . La Figura (b) muestra 49 funciones de utilidad esperada del problema estático CRRA-Log, cada una es generada por  $n$ -activos riesgosos. La función más hacia adentro y de color azul es generada por  $n = 2$ -activos-riesgosos, la función de afuera es generada por  $n = 49$ -activos-riesgosos. Cada coordenada individual sirve para denotar el punto máximo  $\hat{\mu}$ , que proporciona la máxima utilidad esperada cuando la función se genera por  $n$ -activos riesgosos.

Figura 6: El Efecto de la Diversificación en la Frontera CML y en la Función de Utilidad Esperada Caso  $n + 1$



(a) Fronteras CML

(b) Funciones de Utilidad Esperada  $E[U(\hat{\mu})]_{n+rf}$

Comentario: En la Figura (a) se denotan 49 fronteras CML, cada una está compuesta por  $n + 1$  portafolios de industrias y el Bono del Tesoro a un Mes. La frontera de color azul es aquella compuesta de  $2 + r, f$ -activos, mientras la frontera en negra, está compuesta por  $49 + r, f$ -activos. Cada coordenada individual denota los parámetros DS-M eficientes de un portafolio óptimo para el individuo con medida de aversión al riesgo  $\gamma = 7$ , cuando las alternativas riesgosas son  $n + 1$ . La Figura (b) muestra 49 funciones de utilidad esperada del problema estático CRR-Log, cada una es generada por  $n + 1$ -activos. La función más hacia adentro y de color azul es generada por  $2 + r, f$ -activos, la función de afuera es generada por  $49 + r, f$ -activos. Cada coordenada individual sirve para denotar el punto máximo  $\hat{\mu}$ , que proporciona la máxima utilidad esperada cuando la función se genera por  $n + 1$ -activos.

### Conclusiones y Limitaciones

Se ha resuelto la construcción de portafolio a través de su contextualización en el problema estático. En este contexto, se demostró que cuando la decisión de portafolio ocurre en un horizonte de inversión de un solo periodo y se asume el supuesto de Log-Normalidad y de una función de utilidad CRRA, el portafolio óptimo se define por sus parámetros M-V y una medida de aversión al riesgo intrínseca de cada individuo. Aunque este esfuerzo resultó en un capítulo de Marco Teórico denso en formulas y expresiones matemáticas, valió la pena para comprender en cuanto a lo normativo que la construcción de portafolio es un proceso de toma de decisiones motivadas por el comportamiento racional. Además, la extensidad de los resultados matemáticos del Marco Teórico sirvieron para elaborar algoritmos, que ejecutados en R, permitieron construir cientos de portafolios en apenas segundos.

Al resolver el primer ejemplo hipotético, se demostró que cualquier individuo averso al riesgo nunca estaría dispuesto a invertir toda su riqueza inicial en el portafolio GMV o alternatively en el activo-sin-riesgo  $r.f.$ . En el análisis del segundo ejemplo, se observó en cambio que la diversificación tiene un efecto positivo sobre la máxima utilidad alcanzable. No obstante, si el beneficio marginal de agregar más activos al conjunto de alternativas es pequeño, un subconjunto del universo de alternativas de inversión podría ser una aproximación aceptable a la verdadera máxima utilidad esperada alcanzable. Estos dos análisis ilustraron como las lecciones del comportamiento racional se pueden aplicar en escenarios de inversión.

Las limitaciones de este trabajo se pueden dividir en dos frentes. Por un lado, se tiene una dependencia absoluta en los planteamientos teóricos, que como consecuencia ha significado en una falta de argumentos para justificar las observaciones empíricas. Esto se hizo evidente en el capítulo de Diseño Metodológico, donde se decidió ignorar los resultados de las pruebas de normalidad con el fin de no contradecir el supuesto de normalidad sobre los retornos compuestos continuos. Esta limitación se convierte en una barrera que separa el uso mecánico del modelo CRRA-Log en el contexto teórico y en la aplicación real. Por otro lado, al formalizar el problema estático se simplificó la decisión de inversión del individuo para que únicamente implique una decisión de portafolio sobre un horizonte de un solo periodo. Sin embargo, es claro que un modelo teórico más sólido debería considerar adyacentemente los niveles óptimos de consumo-ahorro del individuo, así como múltiples decisiones de inversión



y consumo-ahorro a lo largo de un horizonte de múltiples periodos. Un modelo que considerara estas variables revelaría más acerca del comportamiento racional. Desafortunadamente el modelo estático CRRA-Log no ofrece estas respuestas, a menos que se incurra en simplificaciones y supuestos adicionales, que a su vez se resultaría en un modelo sumamente rígido. Al haber establecido estas limitaciones, el propósito es también mostrar que se ha sacrificado la complejidad y la pertinencia para la aplicación práctica, por simplicidad y utilidad para la formación de criterios racionales.

Finalmente, sería interesante poder ver extensiones sobre el tema de construcción de portafolio en futuras investigaciones de nuestra facultad. Creemos que si en algo se ha podido contribuir para motivar a esto, es que este trabajo ofrece un fundamento sólido para introducir a la teoría de portafolio. Además, se recomienda encarecidamente dirigirse y revisar a los autores que en turno han motivado este trabajo y merecen todo el crédito de lo que se ha podido hacer aquí.

## Referencias

- Back, K. E. (2017). *Asset Pricing and Portfolio Choice Theory*. Oxford University Press. Descargado de <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780190241148.001.0001> doi: 10.1093/acprof:oso/9780190241148.001.0001
- Boyd, S., Boyd, S. P., y Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Brandt, M. W. (2010). Chapter 5 - portfolio choice problems. En Y. AÏT-SAHALIA y L. P. HANSEN (Eds.), *Handbook of financial econometrics: Tools and techniques* (Vol. 1, p. 269-336). San Diego: North-Holland. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444508973500080> doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-50897-3.50008-0>
- Campbell, J. Y. (2018). *Financial decisions and markets: A course in asset pricing*. Princeton University Press. Descargado de <http://press.princeton.edu/titles/11177.html>
- Campbell, J. Y., y Viceira, L. M. (2002). *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*. Oxford University Press. Descargado de <https://doi.org/10.1093/0198296940.001.0001> doi: 10.1093/0198296940.001.0001
- Danthine, J.-P., y Donaldson, J. B. (2015). Chapter 5 - risk aversion and investment decisions, part 1. En J.-P. Danthine y J. B. Donaldson (Eds.), *Intermediate financial theory (third edition)* (Third Edition ed., p. 115-141). San Diego: Academic Press. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978012386549600005X> doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-386549-6.00005-X>
- Eeckhoudt, L., Gollier, C., y Schlesinger, H. (2005). Risk aversion. En *Economic and financial decisions under risk* (pp. 3–26). Princeton University Press. Descargado 2022-12-05, de <http://www.jstor.org/stable/j.ctvc4j15.4>
- Gollier, C. (2001). *The economics of risk and time*. MIT press.
- Kim, D., y Francis, J. (2013). *Modern portfolio theory: Foundations, analysis, and new developments*. Wiley.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. Descargado 2022-12-28, de <http://www.jstor.org/stable/2975974>
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J. R., y cols. (1995). *Microeconomic theory* (Vol. 1). Oxford university press New York.

Merton, R. C. (1972). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of financial and quantitative analysis*, 7(4), 1851–1872.

Pennacchi, G. G. (2008). *Theory of asset pricing*. Pearson/Addison-Wesley Boston.

Stewart, S., Piro, C., y Heisler, J. (2019). *Portfolio management: Theory and practice*. Wiley.

**Anexo A**  
**Anexo de Metodología**

**Tabla A1:** Descripción de los Datos de Sesgo y Curtosis

<i>i</i>	Sesgo	Curtosis	<i>i</i>	Sesgo	Curtosis
1	-0.3412	5.4633	26	-0.7550	6.7428
2	-0.1253	4.9871	27	0.0776	5.0380
3	-0.4308	6.7269	28	-0.8126	6.4421
4	-0.4079	5.5543	29	-0.5083	5.2737
5	-0.5339	5.6945	30	-0.4947	8.2185
6	-0.6073	5.3631	31	-0.4152	4.3238
7	-0.8138	7.0000	32	-0.4909	4.4662
8	-0.3273	5.8194	33	-0.6765	5.7369
9	-0.5648	5.6049	34	-0.7603	6.7071
10	-0.5523	6.2844	35	-0.6254	5.8223
11	-0.4022	5.1605	36	-0.2124	4.8670
12	-0.6439	4.8704	37	-0.8214	5.8699
13	-0.1540	5.1572	38	-0.5129	5.0914
14	-0.5843	6.1288	39	-0.3136	5.7513
15	-0.6938	6.8914	40	-0.7751	6.0262
16	-0.8564	10.3045	41	-0.6124	5.2650
17	-0.8005	8.1019	42	-0.7862	7.1892
18	-0.6821	5.9738	43	-0.5277	6.3044
19	-0.6829	5.9141	44	-1.0622	8.0266
20	-0.5831	5.4781	45	-0.7816	6.2043
21	-0.9119	6.9243	46	-0.6463	6.0255
22	-0.6293	5.9926	47	-0.6486	12.1402
23	-0.1016	8.6516	48	-0.7810	5.4094
24	-1.0524	8.7598	49	-0.7889	5.6384
25	-0.4985	5.2841	50	0.6467	3.2453

Comentario: En esta tabla se muestran los parámetros empíricos de Sesgo y Curtosis de los 49 portafolios de industria y el Bono del Tesoro a un Mes, durante la muestra temporal de 600 meses desde enero de 1972 hasta enero de 2022. Estos resultados sirven como un complemento de la Tabla (2) y además sirven para corroborar el comentario de la Figura (1).

**Tabla A2:** *Extraccion de Datos del Repositorio de Kenneth French*

---

```
library(frenchdata)

AA<-download_french_data("49 Industry Portfolios")
#Contiene datos financieros de los 49 portafolios de industria

BB<-download_french_data("Fama/French 5 Factors (2x3)")
#Contiene datos del Bono del Tesoro entre otras variables

CC<-AA[["subsets"]][["data"]][[1]]
#Contiene todos los datos de los retornos simples mensuales
#historicos de las 49 industrias

DD<-BB[["subsets"]][["data"]][[1]]
#Contiene todos los datos de los retornos simples
#mensuales historicos del Bono del Tesoro a un mes entre otras variables

EE<-(data.frame(DD[103:(103+599),])[-1]*.01)[6]
#Contiene los datos de los retornos simples mensuales
#historicos del Bono del Tesoro a un mes entre otras
#variables durante la muestra temporal

VV<-data.frame(CC[547:(547+599),]*.01)[-1]
#Contiene los datos de los retornos simples mensuales
#historicos de las 49 industrias durante la muestra temporal

V<-log(1+VV)
#Base de datos de los retornos compuestos continuos historicos

rf<-EE[600,1]
#El retorno simple de rf a T=600

VarMensuales_log<-data.frame(diag(var(V)))

print(V)
```

---

Comentario: Con este código se han generado las matrices de retornos. Adicionalmente, con la información contenida en estas variables se crearon las Tablas (1) y (2).

Tabla A3: El Algoritmo 1 en R

---

```

#Variables congruentes con la seccion de Definir del Algoritmo 1
rf<- .0017
Risk_Av<-t(data.frame((t(seq(2,51,by=1))))))
Universo <-49

# Variables congruentes con la seccion de Requerir del Algoritmo 1
R_4_1<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
R_4_2<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
R_5_1<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
R_5_2<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
R_5_3<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
R_5_4<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))

# Variables congruentes con la seccion de Calcular del Algoritmo 1
C_6_1_T<-matrix((colMeans(V[1:49])+
(VarMensuales_log[1:49,]*.5)),nrow = 1,ncol = 49)

C_6_1<-t(C_6_1_T)

C_6_2<-matrix(rep(1, times=49))

C_6_2_T<-t(C_6_2)

C_7_1<-matrix((var(V[,1:49])),nrow = 49,ncol = 49))

C_7_2<-solve(C_7_1)

Esc_A<-sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_1)
Esc_B<-sum((C_6_1_T**C_7_2)**C_6_1)
Esc_C<-sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_2)

Esc_D<-(((sum((C_6_1_T**C_7_2)**C_6_1))*
(sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_2)))-
(sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_1))^2)

Esc_H<-(sum((C_6_1_T**C_7_2)**C_6_1)
-(2*rf*(sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_1) ))
+((rf^2)*(sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_2) ))

#Son los vectores g y h como en la linea 10.1 y 10.2
G<-(((sum((C_6_1_T**C_7_2)**C_6_1))*(C_7_2**C_6_2)) -
((sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_1))*
(C_7_2**C_6_1)))/(((sum((C_6_1_T**C_7_2)
**C_6_1))* (sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_2)))-
(sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_1))^2))

#Son los vectores g y h como en la linea 11.1 y 12.2
HH<-(((sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_2))*
(C_7_2**C_6_1))-
((sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_1))*
(C_7_2**C_6_2)))/(((sum((C_6_1_T**C_7_2)
**C_6_1))* (sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_2)))-
(sum((C_6_2_T**C_7_2)**C_6_1))^2))

```

---

Comentario: Con este código y su continuación en la siguiente página, se han generado los resultados de la Tabla (3) y es una adaptación del Algoritmo (1). Para generar estos resultados correctamente se requiere primero ejecutar el código en el la Tabla (A2). Antes de ejecutar este código es recomendable que el entorno se encuentre vacío.

Tabla A4: El Algoritmo 1 en R continuación

---

```

G_rf<-(-1*C_7_2%*%((C_6_1-rf*C_6_2)*
(rf/((sum((C_6_1_T%*%C_7_2)%*%C_6_1))-(2*rf*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_1)))+(rf^2)*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_2))))))

HH_rf<-(C_7_2%*%((C_6_1-rf*C_6_2)*
(1/((sum((C_6_1_T%*%C_7_2)%*%C_6_1))-(2*rf*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_1)))+(rf^2)*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_2))))))

#Sirve para mostrar el pesaje optimo utilizando la Separacion de Fondos
#caso n+1
TANGENCYM<-((sum((C_6_1_T%*%C_7_2)%*%C_6_1))-(rf*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_1)))/((sum((C_6_2_T%
*C_7_2)%*%C_6_1))-(rf*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_2))))
#Sirve para mostrar el pesaje optimo utilizando la Separacion de Fondos
#caso n+1
TANGENCYVAR<-((sum((C_6_1_T%*%C_7_2)%*%C_6_1))-
(2*rf*(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_1)))+(rf^2)*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_2)))/(((sum((C_6_2_T
%*%C_7_2)%*%C_6_1))-(rf*
(sum((C_6_2_T%*%C_7_2)%*%C_6_2))))^2)

for (i in 1:50){

  C_13_1<-(((Esc_A*Risk_Av[i])+Esc_D)/(Esc_C*Risk_Av[i]))

  R_5_1[i]<-C_13_1

  R_5_2[i]<-(((rf*Risk_Av[i])+Esc_H)/(Risk_Av[i]))

  R_5_3[i]<-(((Esc_C/Esc_D)*((((Esc_A*Risk_Av[i])+Esc_D)/(Esc_C*Risk_Av[i])))-
(Esc_A/Esc_C)^2)+(1/Esc_C))

  R_5_4[i]<-(((((((rf*Risk_Av[i])+Esc_H)/(Risk_Av[i])))-rf)^2)/Esc_H))

  R_4_1[i]<-(C_13_1-(Esc_A/Esc_C))/ (((Esc_B/Esc_A)-(Esc_A/Esc_C))

  R_4_2[i]<-(((TANGENCYM-rf))/(Risk_Av[i]*TANGENCYVAR))
}

#Aqui se encuentran los resultados de la tabla 3
#Imprimir uno a la vez
print(R_4_1,R_4_2,R_5_1,R_5_2,R_5_3,R_5_4)

```

---

Comentario: Este código no produce vectores de pasajes de longitud  $n$ , si se quiere obtener pesajes individuales se requiere únicamente definir un comando en orden con las expresiones en (68) y (82) del Marco Teórico. Si la ejecución del código se detiene por un error, primero revisar espacios sobretodo en las operaciones matemáticas como `% * %`.

Tabla A5: El Algoritmo 2 en R

---

```

#Variables congruentes con la seccion de Definir del Algoritmo 2
RiskAv<-7
rf<-.0017#usar este valor para replicar resultados
Objective<-.02261
Universo<-49

#Variables congruentes con la seccion de Requerir del Algoritmo 2
R_4_1<-t((t(matrix(ncol=1,nrow = 48))))
R_4_2<-t((t(matrix(ncol=1,nrow = 48))))
R_5_1<-t(matrix(ncol=48,nrow = 1))
R_5_2<-t(matrix(ncol=48,nrow = 1))
R_5_3<-t(matrix(ncol=48,nrow = 1))
R_5_4<-t(matrix(ncol=48,nrow = 1))
R_5_5<-t(matrix(ncol=48,nrow = 1))
R_5_6<-t(matrix(ncol=48,nrow = 1))

#Son variables miscelaneas para guardar resultados
Esc_A<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
Esc_B<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
Esc_C<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
Esc_D<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
Esc_H<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
G<-list()
HH<-list()
G_rf<-list()
HH_rf<-list()

#Sirve para mostrar el pesaje optimo utilizando la Separacion de Fondos
#caso n+1
TANGENCYM<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))
TANGENCYVAR<-t(matrix(ncol=1,nrow = Universo))

#Son variables congruentes con la seccion de Calcular del Algoritmo 2
for (i in 2:Universo){
  C_7_1_T<-matrix((colMeans(V[1:i])+
  (VarMensuales_log[1:i,]*.5)),nrow = 1,ncol = i)
  C_7_1<-t(C_7_1_T)
  C_7_2<-matrix(rep(1, times=i))
  C_7_2_T<-t(C_7_2)
  C_8_1<-matrix((var(V[,1:i])),nrow = i,ncol = i))
  C_8_2<-solve(C_8_1)
  Esc_A[i]<-sum((C_7_2_T%*%C_8_2)%*%C_7_1)
  Esc_B[i]<-sum((C_7_1_T%*%C_8_2)%*%C_7_1)
  Esc_C[i]<-sum((C_7_2_T%*%C_8_2)%*%C_7_2)
  Esc_D[i]<-(((sum((C_7_1_T%*%C_8_2)%*%C_7_1))*
  (sum((C_7_2_T%*%C_8_2)%*%C_7_2)))-
  (sum((C_7_2_T%*%C_8_2)%*%C_7_1))^2)
  Esc_H[i]<-(sum((C_7_1_T%*%C_8_2)%*%C_7_1) )-(2*rf*
  (sum((C_7_2_T%*%C_8_2)%*%C_7_1) ))+((rf^2)*
  (sum((C_7_2_T%*%C_8_2)%*%C_7_2) ))
}

```

---

Comentario: Con este código y su continuación en la siguiente página, se han generado los resultados de la Tabla (4) y es una adaptación del Algoritmo (2). Para generar estos resultados correctamente se requiere primero ejecutar el código en el la Tabla (A2) y en caso de haber ejecutado A3 y A4 se requiere eliminar estas variables del entorno y luego ejecutar el código.



Tabla A6: El Algoritmo 2 en R continuación

---



---

```

#Son los vectores g y h como en la linea 11.1 y 11.2
G[[i]]<-(((sum((C_7_1_T**C_8_2)**C_7_1))*C_8_2**C_7_2))
-((sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1))*
(C_8_2**C_7_1))/(((sum((C_7_1_T**C_8_2)**C_7_1))*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2))-(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1))^2))

#Son los vectores g y h como en la linea 12.1 y 12.2
HH[[i]]<-(((sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2))*C_8_2**C_7_1))-
((sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1))*
(C_8_2**C_7_2))/(((sum((C_7_1_T**C_8_2)**C_7_1))*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2))-(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1))^2))

G_rf[[i]]<-(-1*C_8_2**((C_7_1-rf*C_7_2)*
(rf/((sum((C_7_1_T**C_8_2)**C_7_1))-(2*rf*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1)))+(rf^2)*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2))))))

HH_rf[[i]]<-(C_8_2**((C_7_1-rf*C_7_2)*
(1/((sum((C_7_1_T**C_8_2)**C_7_1))-(2*rf*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1)))+(rf^2)*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2))))))

TANGENCYM[i]<-((sum((C_7_1_T**C_8_2)**C_7_1))-(rf*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1)))/((sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1))-
(rf*(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2))))

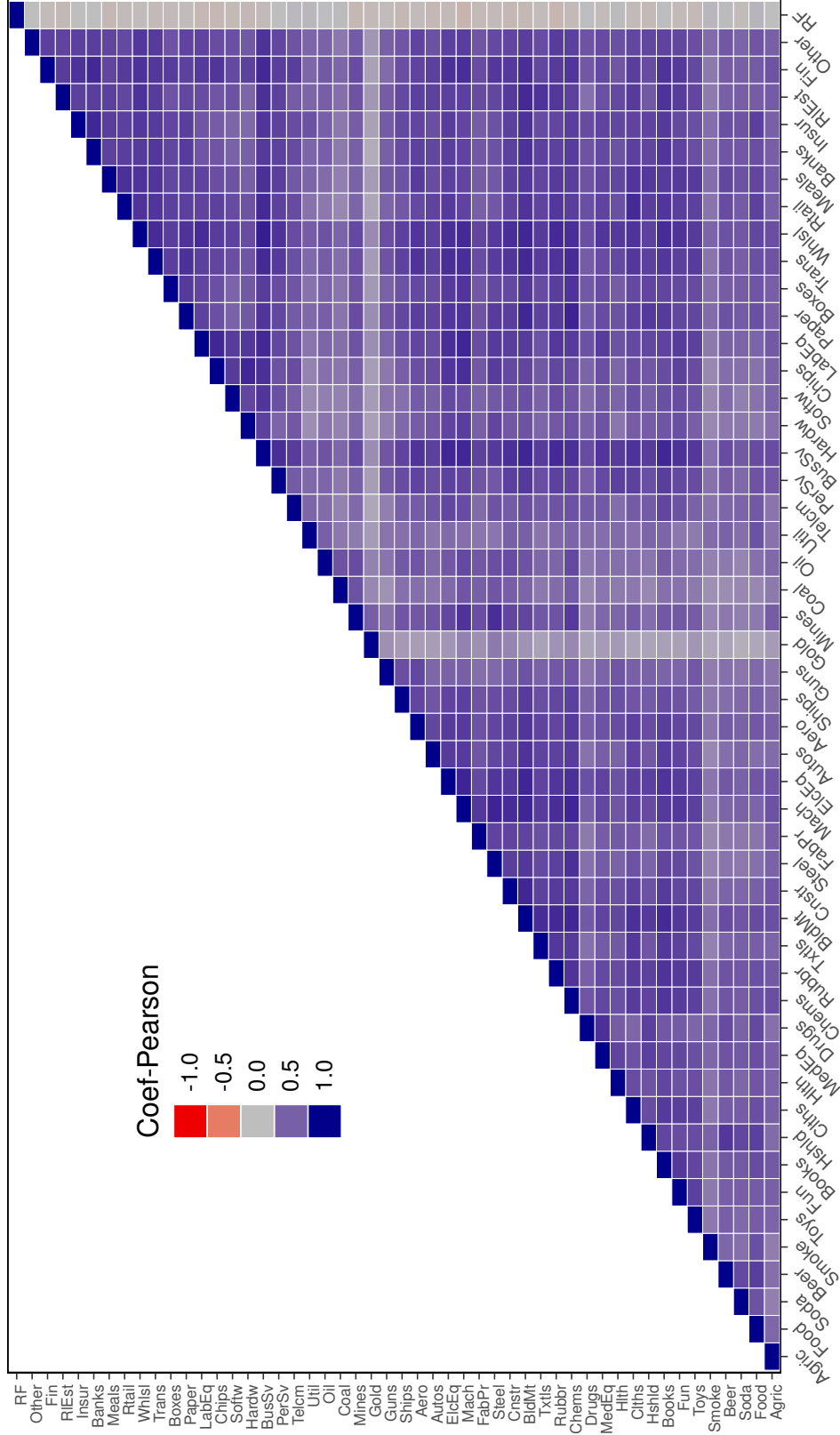
TANGENCYVAR[i]<-((sum((C_7_1_T**C_8_2)**C_7_1))-(2*rf*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1)))+(rf^2)*
(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2)))/(((sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_1))-
(rf*(sum((C_7_2_T**C_8_2)**C_7_2))))^2)
}
for (i in 1:49){
  C_15_1<-(((Esc_A[i]*RiskAv)+Esc_D[i])/(Esc_C[i]*RiskAv))
  R_5_1[i]<-C_15_1
  C_17<-(((Esc_C[i]/Esc_D[i])*(((Esc_A[i]*RiskAv)+Esc_D[i])/
(Esc_C[i]*RiskAv)))-(Esc_A[i]/Esc_C[i])^2)+(1/Esc_C[i]))
  R_5_3[i]<-(C_17)
  C_15_2<-(((rf*RiskAv)+Esc_H[i])/(RiskAv))
  R_5_2[i]<-C_15_2
  C_19<-(((((((rf*RiskAv)+Esc_H[i])/(RiskAv))-rf)^2)/Esc_H[i]))
  R_5_4[i]<-(C_19)
  R_5_5[i]<-(C_15_1-(RiskAv*(C_17/2)))
  R_5_6[i]<-(C_15_2-(RiskAv*(C_19/2)))
  R_4_1[i]<-(C_15_1-(Esc_A[i]/Esc_C[i])/
(((Esc_B[i]/Esc_A[i])-(Esc_A[i]/Esc_C[i]))))
  R_4_2[i]<-(((TANGENCYM[i]-rf))/(RiskAv*TANGENCYVAR[i]))
}

#Aqui se encuentran los resultados de la tabla 4
#Imprimir uno a la vez
print(R_4_1,R_4_2,R_5_1,R_5_2,R_5_3,R_5_4,R_5_5,R_5_6)

```

---

Figura A1: Mapa de Calor de los Coeficientes de Correlación



Comentario: En este gráfico se muestra el mapa de calor de los coeficientes de correlación de 49 portafolios de industria y el Bono del Tesoro a un Mes. La muestra temporal para estimar este parámetro es equivalente a 600 meses desde enero de 1972 hasta enero de 2022.

Anexo de Desarrollo y Resultados

Tabla B1: Resultados Completos del Ejemplo 1

$\gamma$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)_{n+1}$	$\hat{\omega}$	$\hat{\omega}_{n+rf}$	$\gamma$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)_{n+1}$	$\hat{\omega}$	$\hat{\omega}_{n+rf}$
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
13	(1.574, 0.142)	(1.296, 0.087)	(0.23, 0.77)	(0.38, 0.62)	32	(1.18, 0.1)	(0.627, 0.014)	(0.69, 0.31)	(0.75, 0.25)
14	(1.527, 0.135)	(1.216, 0.075)	(0.29, 0.71)	(0.42, 0.58)	33	(1.172, 0.099)	(0.614, 0.013)	(0.7, 0.3)	(0.75, 0.25)
15	(1.486, 0.13)	(1.146, 0.065)	(0.33, 0.67)	(0.46, 0.54)	34	(1.164, 0.099)	(0.601, 0.013)	(0.71, 0.29)	(0.76, 0.24)
16	(1.45, 0.125)	(1.085, 0.057)	(0.38, 0.62)	(0.49, 0.51)	35	(1.157, 0.098)	(0.588, 0.012)	(0.71, 0.29)	(0.77, 0.23)
17	(1.418, 0.121)	(1.031, 0.051)	(0.41, 0.59)	(0.52, 0.48)	36	(1.15, 0.098)	(0.577, 0.011)	(0.72, 0.28)	(0.77, 0.23)
18	(1.39, 0.118)	(0.983, 0.045)	(0.45, 0.55)	(0.55, 0.45)	37	(1.143, 0.098)	(0.566, 0.011)	(0.73, 0.27)	(0.78, 0.22)
19	(1.365, 0.115)	(0.94, 0.041)	(0.47, 0.53)	(0.57, 0.43)	38	(1.137, 0.097)	(0.555, 0.01)	(0.74, 0.26)	(0.79, 0.21)
20	(1.342, 0.113)	(0.902, 0.037)	(0.5, 0.5)	(0.59, 0.41)	39	(1.131, 0.097)	(0.545, 0.01)	(0.74, 0.26)	(0.79, 0.21)
21	(1.321, 0.111)	(0.867, 0.033)	(0.52, 0.48)	(0.61, 0.39)	40	(1.126, 0.097)	(0.536, 0.009)	(0.75, 0.25)	(0.8, 0.2)
22	(1.303, 0.109)	(0.835, 0.03)	(0.55, 0.45)	(0.63, 0.37)	41	(1.121, 0.096)	(0.527, 0.009)	(0.76, 0.24)	(0.8, 0.2)
23	(1.286, 0.108)	(0.806, 0.028)	(0.57, 0.43)	(0.65, 0.35)	42	(1.116, 0.096)	(0.519, 0.008)	(0.76, 0.24)	(0.81, 0.19)
24	(1.27, 0.106)	(0.78, 0.025)	(0.58, 0.42)	(0.66, 0.34)	43	(1.111, 0.096)	(0.51, 0.008)	(0.77, 0.23)	(0.81, 0.19)
25	(1.255, 0.105)	(0.756, 0.023)	(0.6, 0.4)	(0.68, 0.32)	44	(1.106, 0.096)	(0.503, 0.008)	(0.77, 0.23)	(0.82, 0.18)
26	(1.242, 0.104)	(0.733, 0.022)	(0.62, 0.38)	(0.69, 0.31)	45	(1.102, 0.095)	(0.495, 0.007)	(0.78, 0.22)	(0.82, 0.18)
27	(1.23, 0.103)	(0.712, 0.02)	(0.63, 0.37)	(0.7, 0.3)	46	(1.098, 0.095)	(0.488, 0.007)	(0.78, 0.22)	(0.82, 0.18)
28	(1.218, 0.102)	(0.693, 0.019)	(0.64, 0.36)	(0.71, 0.29)	47	(1.094, 0.095)	(0.481, 0.007)	(0.79, 0.21)	(0.83, 0.17)
29	(1.208, 0.101)	(0.675, 0.017)	(0.66, 0.34)	(0.72, 0.28)	48	(1.09, 0.095)	(0.475, 0.006)	(0.79, 0.21)	(0.83, 0.17)
30	(1.198, 0.101)	(0.658, 0.016)	(0.67, 0.33)	(0.73, 0.27)	49	(1.086, 0.095)	(0.469, 0.006)	(0.8, 0.2)	(0.83, 0.17)
31	(1.189, 0.1)	(0.642, 0.015)	(0.68, 0.32)	(0.74, 0.26)	50	(1.083, 0.095)	(0.463, 0.006)	(0.8, 0.2)	(0.84, 0.16)
					51	(1.079, 0.095)	(0.457, 0.006)	(0.8, 0.2)	(0.84, 0.16)

Comentario: Estos son los resultados completos del Ejemplo 1 que se mostraron en la Tabla (3) del Capítulo de Desarrollo y Análisis.

Tabla B2: Resultados Completos del Ejemplo 2

$n$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)$	$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p^2)_{n+rf}$	$\hat{\omega}^{(\gamma=7)}$	$\hat{\omega}_{n+rf}^{(\gamma=7)}$	$\text{máx} E[U]_n$	$\text{máx} E[U]_{n+rf}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	(1.266, 0.193)	(1.072, 0.129)	(0.08, 0.92)	(0.23, 0.77)	5.915	6.211
14	(1.267, 0.193)	(1.075, 0.129)	(0.07, 0.93)	(0.23, 0.77)	5.932	6.224
15	(1.299, 0.196)	(1.111, 0.134)	(0.07, 0.93)	(0.22, 0.78)	6.137	6.407
16	(1.307, 0.196)	(1.123, 0.136)	(0.06, 0.94)	(0.22, 0.78)	6.206	6.464
17	(1.298, 0.193)	(1.125, 0.136)	(0.05, 0.95)	(0.21, 0.79)	6.243	6.475
18	(1.3, 0.193)	(1.126, 0.137)	(0.05, 0.95)	(0.21, 0.79)	6.249	6.481
19	(1.327, 0.198)	(1.149, 0.14)	(0.06, 0.94)	(0.22, 0.78)	6.341	6.593
20	(1.327, 0.198)	(1.15, 0.14)	(0.06, 0.94)	(0.23, 0.77)	6.341	6.598
21	(1.358, 0.201)	(1.187, 0.145)	(0.05, 0.95)	(0.22, 0.78)	6.549	6.784
22	(1.376, 0.205)	(1.201, 0.147)	(0.06, 0.94)	(0.23, 0.77)	6.597	6.853
23	(1.385, 0.204)	(1.218, 0.15)	(0.04, 0.96)	(0.21, 0.79)	6.716	6.94
24	(1.42, 0.21)	(1.251, 0.154)	(0.05, 0.95)	(0.22, 0.78)	6.868	7.104
25	(1.425, 0.21)	(1.255, 0.155)	(0.05, 0.95)	(0.22, 0.78)	6.887	7.124
26	(1.498, 0.206)	(1.397, 0.175)	(-0.06, 1.06)	(0.12, 0.88)	7.765	7.836
27	(1.499, 0.202)	(1.422, 0.179)	(-0.09, 1.09)	(0.09, 0.91)	7.921	7.961
28	(1.536, 0.206)	(1.465, 0.185)	(-0.1, 1.1)	(0.09, 0.91)	8.144	8.177
29	(1.538, 0.207)	(1.467, 0.185)	(-0.1, 1.1)	(0.09, 0.91)	8.149	8.183
30	(1.536, 0.202)	(1.493, 0.189)	(-0.14, 1.14)	(0.05, 0.95)	8.301	8.313
31	(1.503, 0.187)	(1.525, 0.194)	(-0.26, 1.26)	(-0.03, 1.03)	8.474	8.477
32	(1.496, 0.181)	(1.557, 0.198)	(-0.33, 1.33)	(-0.08, 1.08)	8.611	8.634
33	(1.637, 0.202)	(1.697, 0.218)	(-0.32, 1.32)	(-0.08, 1.08)	9.311	9.333
34	(1.637, 0.202)	(1.697, 0.218)	(-0.33, 1.33)	(-0.08, 1.08)	9.312	9.334
35	(1.637, 0.201)	(1.703, 0.219)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.337	9.365
36	(1.645, 0.202)	(1.709, 0.22)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.368	9.393
37	(1.69, 0.209)	(1.755, 0.226)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.6	9.627
38	(1.7, 0.211)	(1.762, 0.227)	(-0.33, 1.33)	(-0.08, 1.08)	9.636	9.659
39	(1.699, 0.21)	(1.763, 0.228)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.637	9.663
40	(1.699, 0.21)	(1.764, 0.228)	(-0.34, 1.34)	(-0.09, 1.09)	9.643	9.669
41	(1.7, 0.209)	(1.776, 0.229)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	9.696	9.732
42	(1.719, 0.212)	(1.79, 0.231)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	9.769	9.801
43	(1.719, 0.212)	(1.794, 0.232)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	9.787	9.822
44	(1.72, 0.212)	(1.794, 0.232)	(-0.37, 1.37)	(-0.1, 1.1)	9.787	9.822
45	(1.718, 0.211)	(1.799, 0.233)	(-0.38, 1.38)	(-0.11, 1.11)	9.805	9.847
46	(1.732, 0.213)	(1.81, 0.234)	(-0.37, 1.37)	(-0.11, 1.11)	9.863	9.902
47	(1.888, 0.236)	(1.96, 0.256)	(-0.36, 1.36)	(-0.1, 1.1)	10.616	10.648
48	(1.943, 0.244)	(2.019, 0.264)	(-0.37, 1.37)	(-0.11, 1.11)	10.909	10.946
49	(2.144, 0.267)	(2.261, 0.299)	(-0.43, 1.43)	(-0.16, 1.16)	12.076	12.156

Comentario: Estos son los resultados completos del Ejemplo 2 que se mostraron en la Tabla (4) del capítulo de Desarrollo y Resultados.