Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

"Guía didáctica para el tema: Aplicaciones del Cálculo Integral, mediante el uso de infografías y el software GeoGebra"

Trabajo de titulación previo a la obtención

del Título de Licenciado en Ciencias de la

Educación en Matemáticas y Física

AUTOR: Wolfgang Rubén Ortiz Molina

C.I.: 0705446060

Correo electrónico: woruormo@gmail.com

TUTOR: Mg. Juan Diego Coello Apolo

C.I.: 1723243372

Cuenca, Ecuador

30-enero-2023

RESUMEN:

El presente trabajo de titulación nombrado "GUÍA DIDÁCTICA PARA EL TEMA: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL, MEDIANTE EL USO DE INFOGRAFÍAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA" responde a las problemáticas encontradas en la enseñanza del cálculo integral, manifestadas principalmente como deficiencias pedagógicas y tecnológicas. Este trabajo tiene como objetivo principal el desarrollo de una propuesta didáctica que potencialice el aprendizaje significativo del cálculo integral mediante material gráfico y de actividades tecnológicas, mismas que sin la necesidad de conocimientos previos permitan el modelado e interpretación de gráficas necesarias para la comprensión del Cálculo Integral.

La elaboración de la propuesta se fundamenta en el Análisis Didáctico de Textos, examinando específicamente los textos: *Elements of the Differential and Integral Calculus* de William Anthony Granville y *Calculus and Analytic Geometry* de George Thomas, textos que gozan de gran popularidad entre docentes de la asignatura de Cálculo Inrtegral. El análisis efectuado en este trabajo integra información específica de: conceptos, contenidos, aspectos cognitivos, formas de instrucción y evaluación; información esencial para la distinción de falencias y deficiencias en el proceso enseñanza – aprendizaje del Cálculo Integral.

Palabras Clave: Análisis didáctico de textos. Aplicaciones del cálculo integral. Aprendizaje significativo. Infografías. *Applets*. *GeoGebra*. Guía didáctica.

ABSTRACT:

The present degree work “TEACHING GUIDE FOR THE THEME: APPLICATIONS OF INTEGRAL CALCULUS, THROUGH THE USE OF INFOGRAPHIES AND GEOGEBRA SOFTWARE" responds to the problems encountered in the teaching of integral calculus, manifested mainly as pedagogical and technological deficiencies. The main objective of this work is the development of a didactic proposal that potentiates the significant learning of integral calculus by means of graphic material and technological activities, which, without the need of previous knowledge, allow the modeling and interpretation of graphs necessary for the understanding of Integral Calculus.

The elaboration of the proposal is based on the Didactic Analysis of Texts, specifically in: *Elements of the Differential and Integral Calculus* by William Anthony Granville and *Calculus and Analytic Geometry* by George Thomas, texts that enjoy great popularity among teachers of the subject. The analysis carried out in this work integrates information of: concepts, contents, cognitive aspects, forms of instruction and evaluation; necessary information for the distinction of faults and deficiencies in the teaching-learning process of Integral Calculus, particularly from its applications.

Keywords: Didactic text analysis. Applications of integral calculus. Meaningful learning. Infographics. Applets. GeoGebra. Didactic guide.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Yo, Wolfgang Rubén Ortiz Molina, en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "GUÍA DIDÁCTICA PARA EL TEMA: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL, MEDIANTE EL USO DE INFOGRAFÍAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 30 de enero de 2023

Wolfgang Rubén Ortiz Molina
C.I: 0705446060

Cláusula de Propiedad Intelectual

Yo, Wolfgang Rubén Ortiz Molina, autor del trabajo de "GUÍA DIDÁCTICA PARA EL TEMA: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL, MEDIANTE EL USO DE INFOGRAFÍAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 30 de enero de 2023

Wolfgang Rubén Ortiz Molina
C.I.: 0705446060

Dedicatoria

Este trabajo de titulación lo dedico a mis abuelos, quienes inculcaron en mí valores para una carrera de docencia.

A mi madre, apoyo constante durante todos estos años, guía que pese a las dificultades me encamino hacia un futuro alentador.

A mi padre, quien confió en mi compromiso con la docencia desde el principio, sosteniendo su apoyo incondicionalmente.

Dedicado a mi hermana, quien como vínculo familiar más estable compartió conmigo grandes momentos en esta experiencia.

Wolfgang Rubén Ortiz

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi tutor de tesis Juan Diego Coello, quien dispuso su tiempo, conocimiento y recursos para dotar a este trabajo de una calidad extraordinaria, la cual me complace compartir.

Al Ing. Fabián Bravo, quien me acompañó en cada instante de este proceso, incluso en los momentos más difíciles.

A mis docentes y compañeros de carrera, con quienes compartí momentos primordiales para la elaboración de este trabajo.

Wolfgang Rubén

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de titulación está enfocado en demostrar cómo el Análisis Didáctico de Textos permite encontrar falencias y limitaciones en la enseñanza - aprendizaje del Cálculo Integral, sintetizando los resultados con un análisis histórico desde las concepciones iniciales de Leibniz y Newton hasta las definiciones más actuales.

El análisis de varios autores clásicos y contemporáneos genera una visión amplia del Cálculo Integral tanto en sus interpretaciones geométricas como físicas. Este análisis recopila información sobre aspectos que afectan las cualidades del aprendizaje constructivista.

Este estudio procesa la información mediante el Análisis Didáctico de textos y una revisión histórica de conceptos, con la finalidad de generar estrategias didácticas mediante la corriente constructivista. El constructivismo permite potencializar las habilidades de los estudiantes para planificar y monitorear sus pensamientos frente a procesos evaluativos. Cuando el aprendizaje ha sido consolidado genera una metacognición, según Koriat, en (Goh, 2008) la metacognición es aquel momento en el cual un individuo comprende lo aprendido y analiza su propio proceso de aprendizaje, en particular, para ajustar y relacionar con su forma de pensar y comportarse.

La parte final de este trabajo presenta un compilado de información útil para un aprendizaje visual, concreto y de alto contenido pedagógico, sintetizado en una guía didáctica que define conceptos del Cálculo Integral mientras ofrece actividades y evaluaciones que construyen el aprendizaje.

ANTECEDENTES

La enseñanza del Cálculo Integral basa sus principios en el aprendizaje cognitivo, como lo señalan Misu, Budayasa, & Lukito (2018) el aprendizaje cognitivo está conformado por un conocimiento declarativo, procedimental, condicional y por un aprendizaje por funcionalidades como son la planificación, el monitoreo y la evaluación. El trabajo antes mencionado marca las directrices hacia la consolidación de dichos momentos de aprendizaje en la enseñanza, analiza también cuáles son las principales falencias por parte de estudiantes previo al servicio docente, tanto en conceptos como en la modelación de los mismos.

Otros trabajos como (Confrey, 1980) y (Ferrini-Mundy & Geuther, 1991) enfatizan las problemáticas que surgen en la enseñanza, aprendizaje y desarrollo del currículo para las asignaturas de Cálculo. Estos trabajos enfatizan un cambio en el currículo de la asignatura frente a problemas cognitivos y conceptuales. Un aspecto común en todos los trabajos antes mencionados es la deficiencia de material didáctico para la enseñanza del Cálculo.

Trabajos más centrados a la dinámica social y cultural del Ecuador como el trabajo de titulación: *Aplicación de software matemático DERIVE, para el logro de aprendizajes en aplicaciones del cálculo diferencial e integral, en estudiantes universitarios,* realizado por Muñoz (2018) promueven futuras investigaciones en el uso de las tecnologías como herramienta complementaria para el proceso de enseñanza – aprendizaje en temáticas afines al Cálculo. Un trabajo a tomar en cuenta en cualquier propuesta de implicación tecnológica como estrategia didáctica.

PROBLEMÁTICA

Existe una gran discusión entre expertos y las comunidades matemáticas sobre la pedagogía y el plan de estudios óptimo para la enseñanza del Cálculo (CUMP, 1990) y (Steen, 1987). Esta discusión manifiesta el bajo desempeño académico por parte de estudiantes en asignaturas de Cálculo, aspecto en los trabajos de (Confrey, 1980) y (Ferrini-Mundy & Geuther, 1991) y (Davis, 1986).

Como lo afirma Young (1986) citado por Ferrini-Mundy & Geuther (1991) solo en Estados Unidos alrededor de 600 000 estudiantes se matriculan anualmente en cursos de Cálculo a nivel de secundaria y universidad, de ellos 140 000 pertenecientes a carreras relacionadas con algún tipo de ingeniería, lograban aprobar el curso con una nota mínima (D) o superior; solo el 7% de los cursos usaban computadoras. Frente a estas estadísticas, fundaciones como *The National Science Foundation* han desarrollado varios proyectos que exploran la oportunidad de revitalizar la instrucción del cálculo, además de brindar soporte frente a necesidades cognitivas presentes en el plan de estudios de dichas asignaturas.

Davis, R. (1986) evidencia falencias en docencia, afirmando que ciertos docentes no cuentan con la preparación necesaria para trabajar en asignaturas que requieran de un pensamiento crítico – matemático, generando en los estudiantes deficiencias en la recepción de información frente a actividades repetitivas como: resolver, graficar, buscar, bosquejar, evaluar, determinar y calcular. Sin el desarrollo de un pensamiento crítico no existe la oportunidad de potencializar el aprendizaje desde su cognición hasta su aplicación.

JUSTIFICACIÓN

Este trabajo de investigación tiene como propósito descubrir falencias presentes en la enseñanza del Cálculo Integral para mitigarlas mediante el uso de nuevas tecnologías y material didáctico, priorizando un aprendizaje de valor. El aprendizaje de cualquier asignatura es significativo únicamente cuando el estudiante se apropia del conocimiento, analiza el mismo y llega a vincularlo con su realidad personal y colectiva, este proceso tiene éxito cuando el docente desarrolla todas las esferas del aprendizaje, en palabras de Mora & Parga (2008) estas esferas son: conocimiento disciplinar (Teorías, principios, leyes), el conocimiento psicopedagógico, el conocimiento histórico-epistemológico y social (conocimiento metadisciplinar) y el conocimiento del contexto escolar.

El autor de este trabajo de titulación busca vincular las temáticas de la psicología educativa (constructivismo y aprendizaje significativo) en el aprendizaje del Cálculo Integral, específicamente mediante sus respectivas aplicaciones. Se busca también dotar al docente y al estudiante de material que desarrolle y complemente el aprendizaje desde un plano constructivista, Ortiz (2015) define el constructivismo como un enfoque pedagógico que explica el proceso por el cual los seres humanos se apropian del conocimiento, cambiando el paradigma de descubrir el conocimiento por el de construir uno propio. Entendiéndose que el alumno fomenta su propio conocimiento, a partir de su propia forma de ser, pensar e interpretar la información, siendo el actor principal de su proceso de aprendizaje.

Este trabajo busca examinar las aplicaciones del Cálculo Integral como componente cognitivo capaz de anexar y relacionar las herramientas actuales con el proceso de aprendizaje.

OBJETIVOS

Objetivo general

Sintetizar la información obtenida mediante el Análisis Didáctico de textos en una guía didáctica para la enseñanza del tema: Aplicaciones del Cálculo Integral.

Objetivos específicos:

- Investigar alternativas pedagógicas frente a problemáticas evidenciadas en el Cálculo Integral.
- Examinar mediante Análisis Didáctico textos para la enseñanza del Cálculo Integral con el fin de localizar oportunidades y deficiencias pedagógicas.
- Elaborar infografías y simulaciones mediante el software libre GeoGebra que permitan consolidar los momentos del aprendizaje.
- Diseñar una guía didáctica conforme a los argumentos de los textos analizados y las directrices de un aprendizaje constructivista.

CAPÍTULO I: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Al tratarse de un trabajo de investigación cuyo objetivo principal es analizar textos de Cálculo Integral en su aspecto conceptual, cognitivo, instruccional y evaluativo. Es necesario recopilar información que permita encontrar las directrices necesarias que encaminan al estudiante a construir su conocimiento, para este cometido se busca implementar material didáctico que propicie un estudio fundamentado en los momentos del aprendizaje. Para ello es ineludible sintetizar los fundamentos de la visión dinámica y geométrica del Cálculo Integral en material de libre acceso.

Este capítulo describe cada uno de los componentes pedagógicos, conceptuales e instruccionales necesarios para la comprensión de la metodología de investigación presente en el capítulo II y de la propuesta que se construye de dicho análisis.

A continuación, se define cada uno de los apartados conceptuales que conforman esta propuesta educativa, partiendo desde la esencia pedagógica con el constructivismo hasta la definición del Cálculo Integral desde su vertiente dinámica y geométrica.

1.1 Constructivismo

El constructivismo es una corriente pedagógica que tiene sus bases en el siglo XVIII con posturas definidas como las de Vico y Kant. Como lo expone Rockmore (2000) la visión de Vico mantiene una ideología en la cual el conocimiento depende de la interpretación de las causas, es decir, solo se puede conocer lo que causamos, producimos o hacemos. Por otra parte, en la postura de Kant, el conocimiento ha de entenderse en términos de contexto social, construidos en aspectos que todos puedan aceptar (Villavicencio, 2010).

Este paradigma se puede ver fundamentado en varios textos de Kant, como por ejemplo en su texto *Crítica de la razón pura*, en el cual el ser humano conoce únicamente los fenómenos o expresiones de las cosas, más no a su esencia, ya que esta la construye el ser humano en su proceso de aprendizaje (Universidad San Aventura, 2015).

Es necesario señalar que el conocimiento es un proceso de vinculación donde los conocimientos nuevos guardan una estrecha relación con lo que se aprendió anteriormente y como se aprendió. La base del aprendizaje significativo es una enfatización del estudiante en la importancia que tiene el conocimiento previo como pieza fundamental para cualquier nueva adquisición de aprendizajes (Chrobak, 2000).

1.2 El aprendizaje significativo

Es la concepción cognitiva del aprendizaje, tiene lugar cuando el individuo interactúa con el entorno, dando validez a lo que percibe por medio de sus sentidos. Todo aprendizaje tiene varias directrices, pero las más importantes son el conocimiento por recepción y por descubrimiento. El aprendizaje por recepción se manifiesta cuando el estudiante recibe una tarea y la realiza mediante la activación y vinculación de conocimientos anteriores, por otra parte, el aprendizaje por descubrimiento necesita que el estudiante descubra dicho aprendizaje antes de que este sea estudiado en marco cognitivo (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983).

1.2.1 Ausubel y el aprendizaje significativo.

Para Kant, la trascendencia es la capacidad de la razón para acceder a un conocimiento superior de los objetos del mundo, el propósito de trascender no radica en que el sujeto se acerque al objeto de estudio, sino, como este encuentre y adapte dicho conocimiento a su entorno y capacidad cognitiva. Un aprendizaje trasciende cuando tiene la característica de ser permanente y, por consiguiente, imperecedero (Garcés, Montaluisa, & Salas, 2019).

En este contexto, Ausubel, Novak y Hanesian (1983) basan sus trabajos en el constructivismo con la finalidad de desarrollar una teoría sólida del aprendizaje significativo por develamiento, es de decir, solo se aprende aquello que se descubre; estos autores analizan el aprendizaje como un fin, como conexión de los conocimientos aceptados por la experiencia y los sentidos. En palabras de Rivera (2014) Aprende quien, con aspectos relevantes y preexistentes de su estructura cognitiva, relaciona todo contenido nuevo.

En síntesis, el aprendizaje significativo es un proceso de enseñanza activo con el entorno, siempre que el estudiante aproveche las actividades y tareas de aprendizaje. Este tipo de aprendizaje ha logrado mantenerse como referente para explicar los mecanismos con los que se lleva a cabo la adquisición y retención del conocimiento, permite entender como aprende el estudiante y como adopta estos conocimientos en su desarrollo cognitivo. En palabras de Ausubel, Novak, & Hanesian, (1983):

> […] el aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información “se conecta” con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de “anclaje” a las primeras (p. 14).

1.2.2 Requerimientos del aprendizaje significativo

Las exigencias para lograr un aprendizaje significativo se circunscriben en los cuatro pilares de la educación: “aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser” (Delos, 1994, pág. 103).

Por otro lado, la motivación es un requerimiento valioso para el aprendizaje, ya que brinda la oportunidad de apropiarse del conocimiento, a partir de desarrollar habilidades y hábitos de estudios, así mismo, es un proceso de carácter afectivo. Los autores Alcalay & Antonijevic (1987) expresan que la motivación es una actitud emocional y sociocultural interna, que facilita la adquisición y retención de los nuevos conocimientos. Estos requerimientos hacen indispensable una conexión entre lo aprendido y el entorno de aprendizaje, este último permitirá, asociar y discernir la importancia y la novedad de los nuevos conocimientos frente a conocimientos previos.

Toda relación de conocimientos, no se puede efectuar sin la ayuda de un guía o moderador de conocimientos, función óptima que se busca por parte de los docentes, mismos que cumplen un papel fundamental cuando estimulan, organizan, y planifican actividades y tareas en las cuales el estudiante desarrolle de manera intrapersonal y libre el proceso de enseñanza y aprendizaje (Garcés, Montaluisa, & Salas, 2019).

1.3 La pedagogía operatoria

La pedagogía operatoria surge como un cambio de rol por parte del maestro, en un proceso constructivo, donde el docente desarrolla el papel de guía, y así el alumno es autor y constructor de su conocimiento. La adquisición y elaboración de los conocimientos se genera como fruto de las experiencias e interpretaciones de la realidad mediante un diálogo constante del alumno y su entorno (Busquets, 1986).

Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones complejas, pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos, conectándose con el entorno con el afán de plantear preguntas que le permitan avanzar.

En el contexto de la pedagogía operatoria, el conocimiento según Moreno (2007) es:

El conocimiento de la realidad será comprensible para el sujeto con base a los instrumentos intelectuales que posea, es decir, de las estructuras operatorias de su pensamiento, por lo que el objeto de esta pedagogía es favorecer el desarrollo de estas estructuras, ayudando al sujeto a construir sus propios sistemas de pensamiento (p. 24).

1.3.1 Pedagogía operatoria en el estudio Matemático.

La pedagogía operatoria se basa en ejes del constructivismo, mismos que son necesarios para desarrollar conocimientos que perduren en un futuro enlace cognitivo. En este tipo de pedagogía, la vinculación de conocimientos es intuitiva, permitiendo elaborar conjeturas y análisis de temas complejos en ramas donde los contenidos guardan correlación continua con el pasar de los años. Existen asignaturas cuyos temas de estudio no necesitan de conocimientos previos, en el caso de las ciencias exactas todos los temas estudias guardan en lace con conocimientos de años previos y existe un estrecho enlace entre sus asignaturas.

Adentrándonos en el tema de estudio matemático, existen conceptos y procesos que generan confusiones en el estudiante. Este trabajo de titulación está enfocado utilizar la pedagogía operatoria para abordar la complejidad y abstracción del Cálculo Integral específicamente en las aplicaciones del mismo.

1.4 El Análisis Didáctico.

El análisis didáctico surge como una herramienta para vincular actividades constructivistas con la formación inicial y permanente del profesorado, promoviendo el desarrollo e implementación de innovaciones curriculares. El análisis desde una concepción aristotélica se muestra como el desmembramiento de algo dado por las partes que lo constituyen o a la investigación de sus consecuencias. El análisis es el estudio de los subconceptos con los cuales fue constituido un conocimiento, en palabras de Ferrater (1981), el análisis de una proposición es el estudio de los elementos que lo componen.

El análisis en la educación tiene una relación directa con la síntesis, siendo una herramienta efectiva para enseñar a otras personas los conocimientos descubiertos por un análisis anterior (Rico & Fernández-Cano, 2013).

El Análisis didáctico estudia los componentes del aprendizaje desde un ámbito conceptual, de contenidos, cognitivo, de instrucción y evaluativo, generando una vinculación entre las partes y dando como resultado un aprendizaje significativo que sintetiza la esencia del objeto o situación. Cada uno de estos componentes se validan mediante un proceso de síntesis que permite la conexión con el siguiente componente de aprendizaje. En su conjunto constituyen un ciclo: el ciclo del análisis didáctico, como lo esquematiza Lupiañez (2009) en la Figura 1.

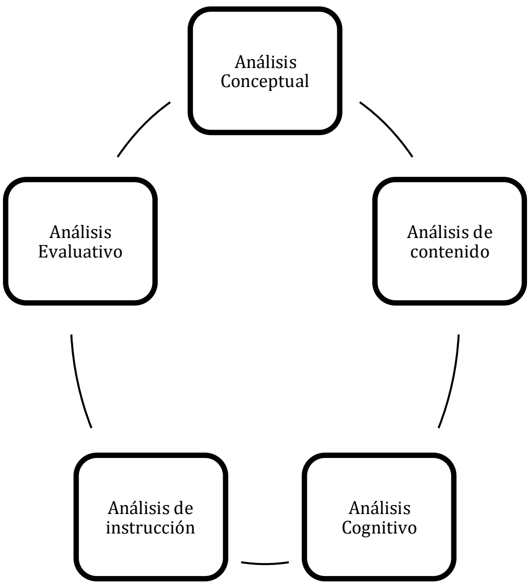


Figura 1. *Ciclo del análisis didáctico.*

1.4.1 Análisis y síntesis conceptual

El análisis conceptual convierte conceptos en piezas teóricas fundamentales para el desarrollo de una temática nueva, se manifiesta como eje directriz al desintegrar un problema en sus conceptos y fenómenos elementales. Este tipo de análisis es de tipo no empírico, ya que analiza el problema desde sus descripciones, definiciones, listas extensivas, ejemplos de uso, contraposición de textos y formulaciones simbólica (Rico, L., 2001).

Este método determina y caracteriza los puntos clave que delimitan un problema de estudio, analizando sus fundamentos e historia para definir la génesis y el desarrollo de los conceptos y sus concepciones. Su síntesis se basa en esclarecer los conceptos bases, en eliminar las inconsistencias derivadas de la falta de precisión en el significado y etimología, y de formar una red de conceptos que esquematicen el problema.

1.4.2 Análisis y síntesis de contenido

El análisis de contenido trabaja con la esencia del mensaje, estudiando el contenido semántico del texto, y es el encargado de la interpretación de la estructura comunicativa que describe el problema. Los autores Cohen, Manion, & Morrison (2011) definen el análisis de contenido como el proceso de síntesis de escritos para elaborar inferencias con la finalidad de descubrir la estructura interna de la comunicación.

El análisis de contenido tiene una naturaleza decodificadora, descifrando el mensaje en sus unidades más básicas, usa el método sistemático para la identificación de temas y las categorías que lo componen. El análisis de contenido mantiene una fuerte relación con el análisis conceptual, siendo una extensión y estructuración del mismo, característica que permite crear una secuencia entre momentos.

1.4.3 Análisis y síntesis cognitivo

En este aspecto se introducen todas las oportunidades y limitaciones que se encuentran en la enseñanza, se complementa con el análisis de contenido; su síntesis sienta los focos de la enseñanza para establecer prioridades y detallar posibles falencias presentes en el proceso enseñanza – aprendizaje.

En esta categoría se detallaan las expectativas del aprendizaje y se organiza los objetivos a cumplir, como lo detallan Rico & Lupiañez (2008) cada tema de estudio debe enunciar sus prioridades cognitivas, determinar el objeto y el alcance del aprendizaje, así como relacionar y organizar dichas prioridades, con el objetivo de encaminar el aprendizaje hacia un objetivo factible. Este tipo de análisis determina las dificultades en el aprendizaje y los vincula con los errores documentados o detectados en la práctica, con este análisis es sencillo generar un marco de propuestas que traten las limitaciones previsibles en el aprendizaje.

La síntesis cognitiva se encarga de organizar los aprendizajes tomando en cuenta la complejidad de actividades y tareas según la profundidad de los temas tratados. Esta síntesis se expresa, en ocasiones, mediante propuestas prioritarias de aprendizaje que resuman los análisis previos (Lupiañez, 2009).

1.4.4 Análisis y síntesis de instrucción

El análisis de instrucción adapta las consideraciones conceptuales y cognitivas para su debida interpretación, abordándolas desde la planificación o desde la perspectiva del profesor, efectuando pequeñas adaptaciones curriculares mediante el uso de diferentes recursos.

La finalidad del análisis de instrucción es responder a la interrogante: ¿cómo y cuándo se lleva a cabo la formación? Esta concepción es integradora, cualquier limitación o problemática detectada en los análisis anteriores se puede ver reflejada en una adaptación al programa.

Las etapas del análisis de instrucción según Rico, Lupiañez, & Molina (2013) son:

- Fundamentación de funciones y secuencias de las tareas.
- Descripción de materiales y recursos.
- Organización y gestión del trabajo en el aula.

La síntesis de esta etapa se relaciona con la elaboración de propuestas que encaminen al docente a compendiar los procesos de comunicación, estimulando estrategias para el intercambio y la transmisión de ideas. La planificación de la secuencia de instrucción mediante una unidad didáctica es clave para la síntesis de esta etapa de instrucción (Marín, 2009).

1.4.5 Análisis y síntesis evaluativo

El análisis evaluativo describe los resultados del proceso, para lograr este objetivo se analizan los criterios e instrumentos para diagnosticar, valorar y organizar los conocimientos en un proceso analítico; a partir de estos criterios se evalúa y se procede a interpretar los resultados y el rendimiento alcanzado, finalmente se ajusta todo el proceso según los logros y objetivos alcanzados inferidos del rendimiento alcanzado.

La síntesis de esta etapa se formaliza en un análisis general que describe todo el proceso, mostrando la planificación realizada y su puesta en práctica. Este proceso es fundamental para validar las propuestas y adaptaciones curriculares efectuadas por el docente.

Esquematizado según Rico, Lupiañez, & Molina (2013) el ciclo del Análisis Didáctico de Textos es:

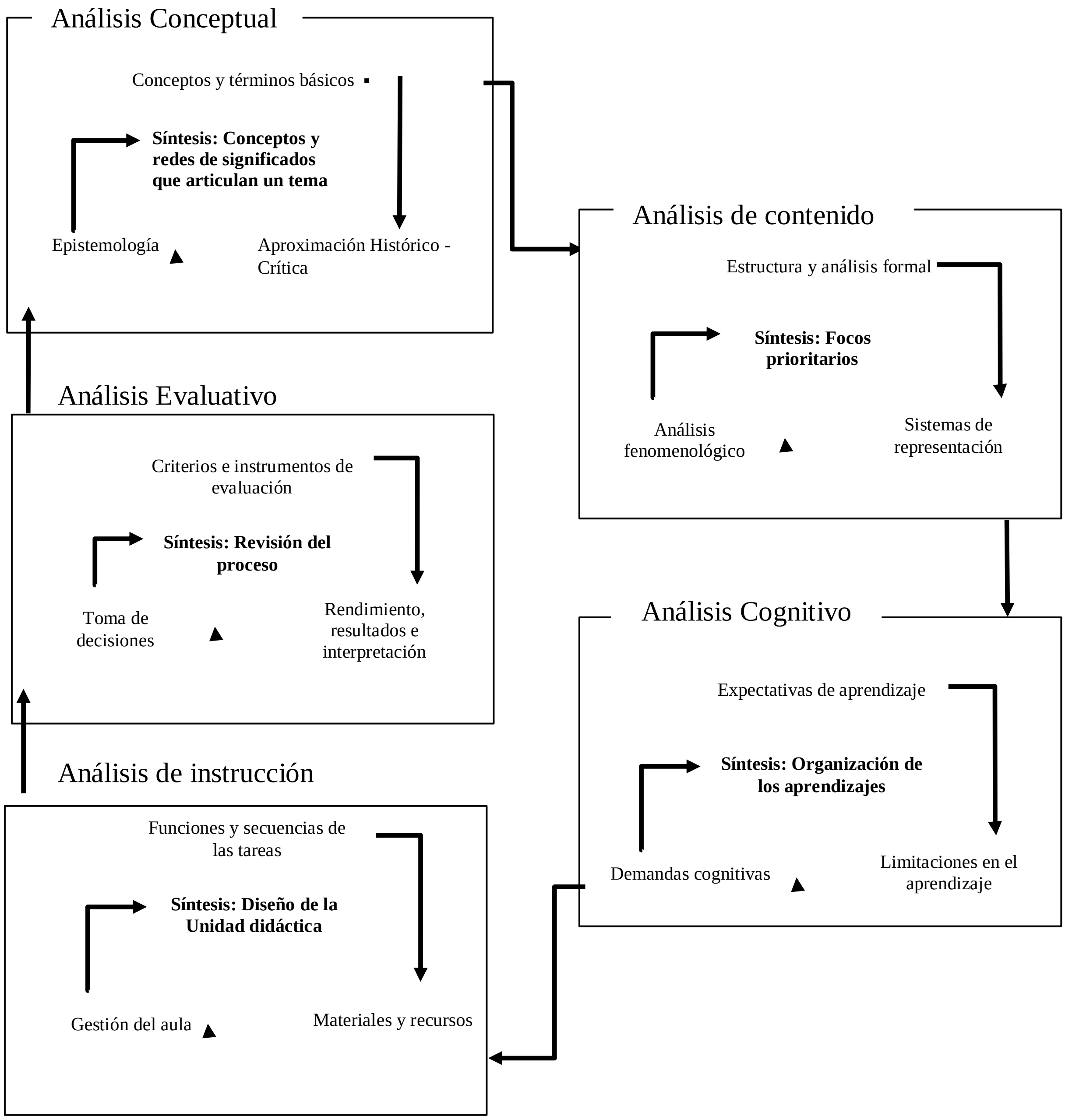


Figura 2. *Estructura del análisis didáctico.*

1.5 Objeto y finalidades del Análisis Didáctico

El análisis didáctico es una herramienta propia de la didáctica de la matemática, brinda una revisión integral de los textos matemáticos, organiza como se deben impartir y como regular su práctica. Las finalidades de este análisis radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación, puesta en práctica y evaluación del proceso enseñanza-aprendizaje (Rico & Lupiañez, 2008).

Como podemos evidenciar, el análisis didáctico se encarga de nutrir los textos ya presentes en el sistema educativo mediante nuevas experiencias educativas, atenuando las falencias encontradas. Este análisis brinda grandes experiencias para el nuevo profesorado, mediante este análisis se comprende cuáles son las problemáticas y cuál es el camino correcto para desarrollar un aprendizaje significativo.

A continuación, se detalla los conceptos básicos que definen el Cálculo Integral, mismos que servirán como referencia para los análisis efectuados en el capítulo II.

1.6 Integral definida:

Sylvestre Lacroix, cuyos textos dominaron el estudio del Cálculo Integral a principios del siglo XIX, consolidó la visión geométrica y dinámica del Cálculo Integral en su libro *Traité du calcul différentiel et du calcul integral* (1798) escrito para consolidar todo el conocimiento existente sobre este tema. Las conclusiones de su trabajo, las podemos ver mencionadas en la séptima edición del mismo, misma que contiene notas de Charles Hermit y Alfred Serret, quienes expresan que:

$\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ es igual a: $\sum_{x=x_0}^{x=X} f(x)dx$.

Cabe recalcar que el primero que definió el límite de una suma como una integral definida fue Louis Cauchy en 1823 y planteada tres años antes por uno de sus colegas Siméon Poisson.

Poisson mostró que la diferencia de las antiderivadas es igual a la integral, refiriéndose a la siguiente ecuación como “la proposición fundamental de la teoría de las integrales definidas”

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La cantidad $F(b) - F(a)$ es llamada integral definida, tomada de $x = a$ a $x = b$, donde $F(x) + c$ es la integral general o indefinida (Poisson, 1820).

1.6.1 Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI):

Para cualquier función f que sea continúa en el intervalo $[a, b]$,

I. $\frac{d}{dx}\int_a^x \quad f(t)dt = f(x)$

II. $\int_a^b \quad f(x)dx = F(b) - F(a)$

La ecuación (I) es conocida como la antiderivada del TFCI y muestra cómo se define la integral para construir una antiderivada y la ecuación (II) se la conoce como la parte de evaluación del TFCI y muestra cómo se usa la antiderivada para evaluar una integral definida.

Esta información por si sola genera en los estudiantes confusión, por eso, la manera más intuitiva de enseñar las nociones básicas de cálculo integral es mostrarlo como proceso inverso a la derivación, si bien esta definición es sencilla y correcta, se omite información necesaria para entender a la integral como el límite de una suma infinita.

Es necesario recalcar la importancia numérica y geométrica que rinde las directrices del Cálculo Integral.

Para entender los procesos pedagógicos utilizados para la enseñanza de estas temáticas, se tiene que retroceder en la historia a sus inicios, como lo afirma Boyer (1949), se necesita reconocer las contribuciones de Newton y Leibniz como caminos que generan una continuidad, hacia un desarrollo matemático.

1.6.1.1 Visión geométrica de Leibniz.

Leibniz quería encontrar el área bajo la curva, para ese cometido demostró cómo construir curvas auxiliares en las cuales la pendiente es proporcional al valor de la ordenada de la curva original. Como se puede ver en la Figura 3. Esta demostración sirvió como argumento para demostrar que el área bajo la curva es proporcional a la curva auxiliar. En términos prácticos, con esta demostración se puede afirmar que, si encontramos una función *F* para la cual la curva original está descrita por, *y=F'(x),* entonces el área quedará expresada en términos de *F*.

Leibniz, para encontrar el área bajo la curva, demostró como la pendiente de dicha curva guarda proporcionalidad con la medida vertical de dicha curva y una constante, *a*. Esto permitió expresar el área de bajo una curva en términos de una función primitiva.

Según Leibniz, si podemos encontrar una función F, cuya curva describa y= F´(x), el área bajo la curva quedará expresada bajo términos de F como podemos ver en la Figura 3.

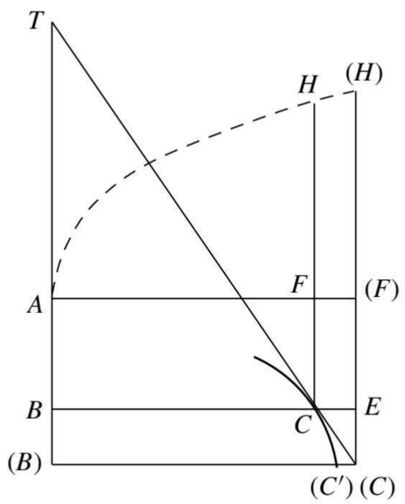


Figura 3. *Ilustración de Leibniz como prueba del TFCI.*

Para Katz (1993), Leibniz encontró en la relación entre una curva y un triángulo caracterismo (diferenciales) las pruebas suficientes para entender áreas y tangentes como una manifestación de sumas y restas, donde su naturaleza inversa es obvia.

Cabe recalcar que si nos adentramos en la historia podemos percatarnos que existe una interpretación geométrica por parte de Issac Barrow años antes de la propuesta por Leibniz, esta se puede encontrar en su obra *Lectiones geometricae* misma que abarca contribuciones de James Greogory y Andrew Leahy. Todas estas contribuciones permitieron dotar de varias aplicaciones al cálculo integral mediante su interpretación geométrica, por ejemplo, estudios de Gregory mostró como se puede encontrar la longitud de una curva conociendo su área.

1.6.1.2 Visión Dinámica de Newton.

Newton trabajó sus ideas sobre el Cálculo durante los años de 1665-1666. Su resultado sobre la tasa de cambio de un área lo podemos encontrar en su manuscrito “*The October 1666 Tract on Fluxions*” adelantándose a la publicación de Gregory, *Geometrie pars universalis*. En el problema 5, Newton (1667) trabaja en cuál es la naturaleza de una curva cuya área está expresada por una ecuación dada, explicando que, si tenemos una función, *y* en Figura 4, el incremento que obtiene es *q*= distancia *bc*, la ordenada de la curva. Esta es la parte antiderivada del TFCI: la tasa de cambio del área está dado por la ordenada de la curva dada.

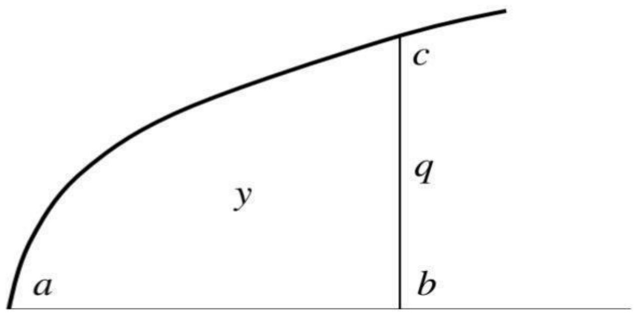


Figura 4 . *Ilustración de Newton para su argumento del TFCI*

La clave para entender la visión dinámica del TFCI, en palabras de Bressoud (2011) es tener la habilidad de reconocer a la ordenada como la tasa de cambio del área, concepto que está ligado con la gráfica de la velocidad como una función del tiempo, reconociendo que la distancia acumulada es el área bajo la curva.

Esta visión dinámica muestra a la derivada como la tasa de cambio y la integral como la acumulación de estos cambios, cambios de tipo infinitesimal, tanto Leibniz como

Newton manejaban los mismos conceptos, pero una visión diversa. Desde el punto de vista físico de Newton, la derivada es expuesta como el fenómeno de velocidad y la integral como la acumulación de estos pequeños incrementos mismos que están expresados en función de la velocidad misma.

Newton organizó la información de una manera concreta, tal que explicó la vinculación entre los fenómenos físicos de la naturaleza, y de una forma intuitiva explicar las proporcionalidades de las que habla Leibniz en sus escritos. La principal diferencia entre la visión geométrica la visión dinámica, es que Newton fue capaz de explicar mediante modelos geométricos las relaciones que existe entre fenómenos físicos como: la aceleración, velocidad y distancia.

1.6.2 Sumas de Riemann:

Como se puede observar, el Cálculo Integral guarda una relación con un contexto físico y con un contexto geométrico, teorías expuestas por Newton y Leibniz, pero no fue hasta mediados del siglo XIX cuando Bernhard Riemann unifico estas visiones desde un punto de vista didáctico, mediante sumas infinitas ahora conocidas como Sumas de Riemann.

Si bien en los textos de Lacroix ya se empieza a estudiar las Integrales definidas como el límite de una suma, y Poisson ya definió un teorema sobre las antiderivadas, fue Riemann en 1854 quien profundizó en el tema y ejemplificó cómo una curva puede ser segmentada en áreas cada vez más pequeñas que se puedan sumar para obtener aproximaciones muy precisas.

1.6.2.1 Interpretación de las Sumas de Riemann:

Las Sumas de Riemann se establecen como el área comprendida entre la función y los ejes axiales para el intervalo (a, b) dividiendo en (n) intervalos y sumando los resultados del área de cada intervalo. Según la partición y el lugar de la partición obtendremos valores sobrestimados y subestimados, sabiendo que el valor más aproximado a la superficie total se encontrará en la media de estos valores, la exactitud de los cálculos es directamente proporcional al número de particiones.

Ejemplos:

$f(x) = x^2$ *para x*, [0,3]

Superficie bajo la función $f(x) = x^2$ para x, [0,3] es igual a $9\ u^2$

Superficie aproximada por Sumas de Riemann (con n =3): *igual a* $8.5\ u^2$

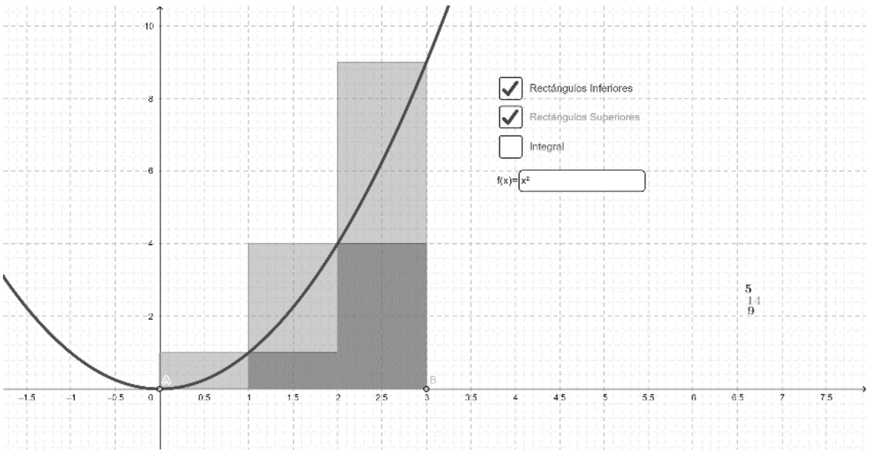


Figura 5. *Superficie aproximada por Sumas de Riemann con tres particiones*

Superficie aproximada por Sumas de Riemann (con n =6): $9.125\ u^2$

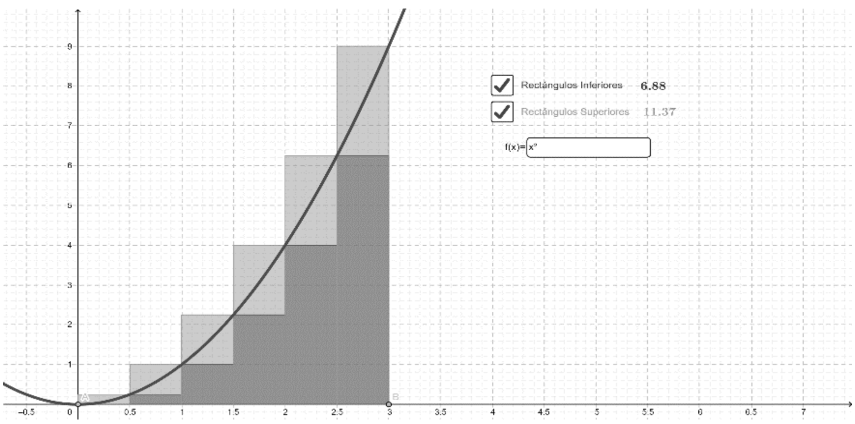


Figura 6. *Superficie aproximada por Sumas de Riemann (con n =6).*

Las sumas de Riemann son de gran utilidad para aproximar superficies mediante una estimación por suma de pequeños intervalos, pero pierden utilidad si buscamos un valor de exacto de cualquier función frente a un número escaso de particiones.

1.7 Limitantes pedagógicas en la enseñanza del Cálculo Integral

El trabajo de Bressoud (2011) *Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus,* refleja implicaciones pedagógicas presentes en el estudio del cálculo, mismas que son:

- Dificultad para la introducción de la integral como el límite de una suma.
- Carencia de ejemplos prácticos que permitan definir a la integral como el camino más apto para la resolución de un problema.
- Vinculación sin contexto de la Integral como la antiderivada.
- Carencias en la concepción de la integral como una herramienta geométrica y dinámica.

Estas observaciones nos permiten definir las limitaciones a trabajar al momento de planificar estrategias didácticas para el Cálculo Integral, y guarda concordancia con limitantes evidenciadas en los principales textos para la enseñanza del Cálculo, una de ellas, la estructuración del currículo, que de manera tradicional está segmentada en categorías, secuencias temáticas y lecciones para cada tema. Sobre la base de esta estructuración tradicional Romberg & Tufte (1987) detallan que, la concepción matemática por parte de los alumnos prevalece como una colección de habilidades que tienen que ser desarrolladas una por una, afirmando que en el currículo tradicional la enseñanza de las matemáticas tiene un ámbito mecánico de logros por repetición. Estos autores también proponen la construcción del conocimiento como una solución a la problemática curricular.

1.8 Consideraciones Pedagógicas en la enseñanza del Cálculo Integral

Un modelo constructivista es necesario como una herramienta contextual y no conceptual, por medio del constructivismo el estudiante puede desarrollar una visión del Cálculo Integral basada en aplicaciones vinculadas a sus intereses de estudio, contextualizando el conocimiento a las necesidades del estudiante. Un desarrollo de un currículo acorde a las necesidades cuenta con cuatro consideraciones básicas como lo definen Driver & Oldham (1985):

- Estructuración de contenidos.
- Información acerca de las bases en el conocimiento de los estudiantes.
- Perspectivas de los procesos de aprendizaje.
- Facilidades de enseñanza práctica para los estudiantes.

Estos componentes tienen gran influencia en el desarrollo curricular, permitiendo desarrollar estrategias de aprendizaje y materiales didácticos adecuados a la implementación pedagógica.

Existen dos grupos de estudio sobre la reestructuración del currículo, por una parte, y la que más investigadores atrae, es la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza en áreas como la aritmética, álgebra, geometría y física, como lo podemos encontrar en trabajos de (Bell, 1979), (Clement, 1982) & (Davis, 1984); en contraste con un segundo que profundiza de manera cuantitativa, las variables actitudinales y experimentales frente a la construcción de conceptos adaptables a sus necesidades e intereses, aspectos detallados en trabajos como (Dick, 1984), (Edge & Friedberg, 1983), (Ferrini-Mundy &

Balomenos, 1984) y (Geuther, 1986). Estos autores muestran la dicotomía presente en las investigaciones académicas entre variables internas (conceptual e instructivo) y variables de carácter cognitivo – evaluativo, ambas necesarias para fortalecer un ciclo de aprendizaje que adapte todas las necesidades de los estudiantes.

CAPÍTULO II: METODOLOGÍA

La técnica que marcará el desarrollo de este proyecto de investigación es el Análisis Didáctico de textos, una técnica de carácter cualitativa, en sentido amplio, la metodología cualitativa puede expresarse como la investigación que produce datos descriptivos. La investigación cualitativa es inductiva, según Taylor & Bogdan (1989) los investigadores que se usan metodología cualitativa, comprenden y desarrollan conceptos partiendo de las pautas vinculadas a los datos, y no recogiendo datos para evaluar hipótesis.

Este trabajo de investigación usa la técnica cualitativa como rama integradora para recopilar y vincular información expuesta en textos de autores como (Ferrini-Mundy & Geuther, 1991), (Bressoud, 1992) & (Katz, 1993) que analizan la interpretación de la enseñanza del cálculo a través de la historia del mismo, y de autores como (Bressoud, 2011) y (Little, 2008), que manifiestan la importancia de la enseñanza a través de la tecnología y la vinculación entre conceptos y su descripción gráfica.

El Análisis Didáctico de textos describe las problemáticas encontradas y los procesos o propuestas encaminados a resolverlas. Este análisis sienta las bases de una guía didáctica que vincule las nuevas tecnológicas y material visual de fácil comprensión.

2.1 Análisis Didáctico de Textos como metodología de investigación.

Este tipo de análisis permite comprender las limitaciones encontradas y las oportunidades de aprendizaje desde cada una de las etapas del aprendizaje. El Análisis Didáctico de textos como lo describe Lupiañez (2009) basado en (Gómez & Rico, 2007) consta de un análisis de conceptual, un análisis de contenido, un análisis cognitivo, un análisis de instrucción y un análisis de evaluación, aspectos detallados en el Capítulo I del presente trabajo de titulación.

Para el análisis conceptual se trabajará en la terminología básica, mediante una aproximación histórica – crítica que determine la génesis epistemológica de la temática analizada, se destaca la vinculación que existe con contenidos previos.

El análisis de contenido indaga la estructura y el análisis formal de los temas, su sistema de representación gráfica y un análisis fenomenológico que muestren los focos prioritarios necesarios para el aprendizaje.

El apartado cognitivo expone las expectativas del aprendizaje y de los contenidos, en este proceso se esquematizan todas las limitaciones y demandas cognitivas encontradas en la práctica educativa, manteniendo una organización de los aprendizajes.

Finalmente, para el apartado de instrucción y evaluación, se analizan las limitantes presentes y se estructuran soluciones acordes a los momentos de aprendizaje.

2.1.1 Aplicación del Análisis Didáctico de Textos

El Análisis Didáctico de textos tiene como objetivo potencializar el aspecto conceptual y cognitivo de cada una de las etapas del aprendizaje (anticipación, construcción y consolidación). Este trabajo de investigación realiza un análisis didáctico a los principales textos de estudio utilizados para la enseñanza del Cálculo Integral, como son*: Elements of the Differential and Integral Calculus* de Granville y Calculus *and Analytic Geometry* de George Thomas. Si bien no son los únicos textos existentes para la enseñanza de esta asignatura, estos textos representan la transición de la enseñanza a lo largo de la historia, ya que el texto de Granville hace referencia a los pensamientos de autores clásicos, y el texto de Thomas, trabaja desde un apartado geométrico apegado a las nuevas tecnologías, característica común en libros contemporáneos.

2.1.1.1 *Elements of the Differential and Integral Calculus* de Granville

El texto de Granville publicado inicialmente en 1904, fue por décadas el estándar americano para la introducción a esta asignatura, en este libro se evidencia las primeras aproximaciones a nociones más detalladas del Teorema Fundamental del Cálculo, como lo podemos observar en la segunda edición de su obra *Elements of the Differential and Integral Calculus* de Granville.

Para este análisis didáctico se utilizará la edición en español publicada por editorial Limusa en 2009, y nos centraremos en el análisis del capítulo XVIII, mismo que abarca las aplicaciones del Cálculo Integral.

2.1.1.2 *Calculus and Analytic Geometry* de George Thomas

Por otra parte, *Calculus and Analytic Geometry* de George Thomas fue el texto que dominó el mercado durante la vida del autor, su éxito se debe posiblemente a, como lo explica Bressoud (2011), su correcta aplicación de una función de área, mostrando que la derivada de dicha función es el valor de la ordenada en ese punto, definición necesaria para definir rigurosamente al área de dicha función como el límite de la aproximación de sumas, idea ya vista en los trabajos de Riemann.

Para el siguiente análisis didáctico se utilizará la 12 da edición, y su capítulo 6 que indica las aplicaciones del Cálculo Integral.

2.2 Análisis Didáctico (Granville – Thomas)

Tabla 3. *Análisis Didáctico a los textos de Granville & Thomas*

Texto Analizado	
Cálculo una Variable (2010) George B. Thomas Capítulo 6: Aplicaciones de las integrales definidas (308-360)	Calculo Diferencial e Integral (2009) William Granville Capítulo XVIII: Centros de gravedad, presión de líquidos, trabajo y valor medio (408-428)
Análisis Conceptual	
Análisis conceptual previo de conceptos básicos principales antes de cada subtema, entre ellos:	Análisis directo a las aplicaciones, con un pequeño acercamiento a conceptos como:

Definición de límite de una suma, integral como suma infinita e integral definida. Uso y significado de secciones transversales. Método de las rebanadas, bosquejo de un sólido por secciones transversales, método de discos, revolución de figuras alrededor de los ejes axiales. Método de arandelas y cascarones cilíndricos. Definición de arco de una curva, área de una superficie. Definición de trabajo y fuerza, ley de Hooke, momentos, centros de masa y centroides	Definición de límite de una suma, integral como suma infinita e integral definida. Definición de momento de superficie, centro de gravedad. Centro de gravedad de figuras planas y sólidos. Definición de presión, trabajo, trabajo de bombeo Definición de fuerza de atracción Definición de valor medio de una función
Análisis de contenido	
La estructura del tema consiste en la organización de los diversos tipos de aplicaciones según su nivel de complejidad, consiste en una enumeración ordenada de conceptos, procedimientos, gráficos y representaciones, mediante gran cantidad de ejercicios, modelos que vinculan los contenidos distribuidos en 6 subunidades.	Se presenta las definiciones necesarias para cada aplicación, se vincula conceptos y ejemplos modelos. La estructuración de contenidos se los hace mediante cuatro subtemas
Análisis cognitivo	
Enuncia dos objetivos principales, ampliar las aplicaciones de las integrales definidas, y resolver problemas sobre fenómenos físicos, los objetivos están estructurados por competencias y conocimiento necesarios	Manifiesta cuatro focos prioritarios, sin ninguna vinculación por dificultad o características
Análisis de instrucción	
El texto se consolida como una herramienta de consulta y aprendizaje autónomo, los aprendizajes están estructurados. Incluye un cuadro de programación para cada lección. El texto presenta gran cantidad de ejercicios, modelos acordes a cada tema y que abordan una secuencia de contenidos que facilita el autoaprendizaje y la vinculación de conocimientos, se destaca mucho la variedad de gráficas y esquemas que guían y consolidan el aprendizaje.	El texto se muestra como una herramienta de consulta básica, los ejercicios están estructurados para mantener la misma dificultad y consolidar solo los conceptos evaluados en los pocos ejercicios modelos que no guardan vinculación entre sí. Cuenta con gráficas básicas que explican los ejemplos, modelos No aborda ni profundiza conceptos entre las aplicaciones.
Análisis Evaluativo	
Considera tres momentos: 1. Inicial, repaso de conocimientos mediante ejercicios sugeridos. 2. Seguimiento, se valoran los nuevos aprendizajes mediante preguntas de repaso 3. Terminal, valora el logro del alcance de estrategias, y encamina al estudiante hacia un aprendizaje significativo mediante el uso de Software como Maple, y proyectos de modelado de ejercicios	Considera solo un momento de repaso de conocimientos mediante ejercicios propuestos.

Como se puede evidenciar, existen grandes diferencias entre los textos analizados, por un lado, el texto de Thomas guarda una buena estructuración de conceptos y temáticas, dotando también de una vinculación entre los temas presentados y su representación gráfica. Por otra parte, el texto de Granville, muy popular en su época, no guarda una estructura sólida entre sus conceptos y sus gráficas, estas últimas solo detallan características de los ejercicios modelos.

Este análisis nos permitirá detallar en los siguientes puntos, cuáles son las limitantes pedagógicas y tecnológicas encontradas, así como posibles consideraciones de vital importancia para la síntesis de un análisis evaluativo e instruccional, aspectos de vital importancia para el desarrollo de una propuesta didáctica que priorice la consolidación de los momentos del aprendizaje.

2.2.1 Limitantes pedagógicas y tecnológicas evidenciadas.

El Análisis didáctico de textos recopila información en cada uno de sus componentes, por una parte el análisis cognitivo brinda ciertas limitaciones pedagógicas manifestadas en los componentes previos (análisis conceptual y de contenido), mismas que se pueden observar en la Tabla 2. Por otra parte, en la Tabla 3 se presentan limitaciones tecnológicas encontradas en el análisis de instrucción de los textos.

Tabla 2.
Limitaciones Pedagógicas encontradas mediante el uso del Análisis didáctico

Limitaciones pedagógicas encontradas mediante el uso del Análisis Didáctico	
Cálculo una Variable (2010) George B. Thomas Capítulo 6: Aplicaciones de las integrales definidas (308-360)	Calculo Diferencial e Integral (2009) William Granville Capítulo XVIII: Centros de gravedad, presión de líquidos, trabajo y valor medio (408-428)
▪ Falta de contexto en el uso de métodos (discos, arandelas, cascarones cúbicos, entre otros) ▪ Gráficos bajo una sola Perspectiva. ▪ Ejercicios propuestos no cumplen una estructura didáctica , se basan en su mayoría en el primer momento de su análisis evaluativo (Inicial, repaso de conocimientos)	▪ Conceptos sin contexto y poco profundizados ▪ Falta de relación entre conceptos y su descripción gráfica. ▪ Carencia de ciertos métodos para la resolución de ejercicios (discos, arandelas, cascarones cúbicos, entre otros) ▪ Carencia de aplicaciones del cálculo integral como: longitud de un arco y trabajo realizado por un resorte. ▪ Ejercicios propuestos idénticos a los ejercicios modelos

Tabla 3. *Limitaciones Tecnológicas encontradas en el Análisis didáctico*

Limitaciones tecnológicas encontradas mediante el uso del Análisis Didáctico	
Cálculo una Variable (2010) George B. Thomas Capítulo 6: Aplicaciones de las integrales definidas (308-360)	Calculo Diferencial e Integral (2009) William Granville Capítulo XVIII: Centros de gravedad, presión de líquidos, trabajo y valor medio (408-428)
El libro cuenta con una gran amplia variedad de herramientas tecnológicas y material adicional que se encuentra en su página web: **www.pearsoneducation.net/Thomas** Efectuando el análisis encontramos las siguientes limitantes: ▪ Ejercicios propuestos bajo el nombre Exploraciones con computadora, que requieren de un sistema informático computacional (SAC, como Maple o Mathematica) mismos que no están al alcance de muchos estudiantes, ya sea por el costo de su licencia o la dificultad de su uso. ▪ Ejercicios interactivos en MyMathlab que requieren de un código de acceso único entregado con la compra del texto. ▪ Limitaciones de lenguaje (inglés) en los contenidos adicionales al texto.	El texto analizado no cuenta con ningún tipo de herramienta o material tecnológico para fomentar el aprendizaje.

2.3 Consideraciones tecnológicas en la enseñanza del Cálculo Integral.

La tecnología es una herramienta muy útil que potencializa los conocimientos, su correcto uso necesita de ciertos conocimientos informáticos que no están al alcance de todosw, es por eso que se busca la adaptación de herramientas tecnológicas que permitan entender, comprender y construir el aprendizaje, sin la necesidad de un conocimiento informático previo.

Con la ayuda de la tecnología, no solo de computadores, sino también de smartphone y tabletas, se pueden lograr cambios significativos en el proceso de aprendizaje. La tecnología brinda un apoyo a la estructura del currículo, permitiendo a los estudiantes generar retroalimentaciones de los conocimientos, y la eficacia del proceso de pensar y analizar la información (Thompson, 1985).

Varias instituciones, como la Guía Curricular para especialidades matemáticas (CUMP) o la Oficina de graduados de Ciencia, Ingeniería y Educación Matemática

(USEME) por sus siglas en inglés, han establecido numerosos proyectos para modificar la forma en la que se imparte el Cálculo Integral. Estos proyectos hacen énfasis en las consideraciones matemáticas, las posibilidades tecnológicas y en ciertos casos descubrimiento científicos sobre el aprendizaje del estudiante. (CUMP, 1990)

El empleo de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas es necesario y fundamental, ya que permite aplicar los conocimientos ya adquiridos en una construcción permanente de aprendizaje significativo para el estudiante. La tecnología se ha convertido en un eje fundamental para la mitigación de limitantes en el currículo de matemáticas. La computación es una herramienta que ha transformado por completo tanto a la ciencia como a la sociedad, hablando de la enseñanza, la computadora ha permitido cambiar en el currículo lo que es factible e importante en el ámbito matemático (Steen, 1986)

Como se pudo evidenciar en los apartados anteriores sobre las limitaciones tecnológicas, existe una amplia variedad de herramientas tecnológicas que pueden potencializar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral, sin embargo, muchas de estas herramientas son licenciadas con precios que no están al alcance de las instituciones, los docentes o los estudiantes; es por eso que detallamos las siguientes consideraciones:

- Fomentar el uso de herramientas sin licencia, como el software libre GeoGebra, que permite graficar e interactuar con las mismas.
- Hacer uso de Applets (Ejercicios interactivos previamente ya desarrollados) que permitan la modulación e interacción del estudiante con el aprendizaje.
- Desarrollar actividades que permitan analizar temas de gran dificultad para la enseñanza por parte del docente, como por ejemplo demostraciones.

- Desarrollar actividades que requieran el mínimo conocimiento informático.

CAPÍTULO III: PROPUESTA DIDÁCTICA

El capítulo II de este trabajo de investigación nos permitió indagar, primero bajo en concepto histórico, cuáles son los conceptos básicos del cálculo integral, las interpretaciones de los autores más representativos tanto de sus inicios como de su apogeo, y segundo analizar cuáles son las limitaciones pedagógicas y tecnológicas encontradas en los trabajos de investigación expertos, además de las encontradas en los principales textos guía para la enseñanza del Cálculo.

Ya con este análisis y siguiendo ciertas consideraciones, podemos sintetizar en este capítulo, con la estructura de una guía didáctica que abarque un proceso constructivista del aprendizaje, completando el ciclo del análisis didáctico para el tema: Aplicaciones del Cálculo Integral. El proceso de síntesis esta detallado en este capítulo y evidenciado bajo una Guía didáctica que se encuentra anexada a este documento.

Esta propuesta de titulación centra su base netamente en el constructivismo, que según (Ortiz, 2015) "Es un enfoque pedagógico que explica la forma en que los seres humanos se apropian del conocimiento". Esta teoría sostiene que el conocimiento no se descubre, se construye. Entendiéndose que el alumno fomenta su propio conocimiento, a partir de su propia forma de ser, pensar e interpretar la información, siendo el alumno responsable de su proceso de aprendizaje.

Es necesario hacer énfasis en el uso de las tecnologías en la elaboración de la guía didáctica, pues esta brinda facilidades en la comprensión, el análisis y la construcción del aprendizaje por parte del alumno. Actualmente, la utilización de la tecnología en el aula es visto como una estrategia que apoya los procesos educativos a través de ambientes virtuales de enseñanza (Jaramillo, 2007).

Según Álvarez, Almeida, & Villegas (2014) el uso de las tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas favorece a una penetración profunda en el contenido que se estudia mediante una actividad experimental, además motivar a los estudiantes. Herramientas digitales como GeoGebra ofrecen grandes posibilidades para modelar y resolver ejercicios matemáticos, de una manera rápida y práctica, familiarizarse con el programa permitirá al docente exponer de una manera visual los resultados obtenidos por sus estudiantes.

En ciertos casos que no se cuente con herramientas digitales, se presenta el uso de infografías como alternativa para presentar la información y los gráficos. Una infografía es una combinación de elementos visuales que aportan un desarrollo gráfico de la información, Se utiliza como respaldo para brindar información compleja mediante una presentación gráfica que sintetice o esclarezca la información, haciendo más atractiva su lectura (El Clarín, 1997)

La infografía es una herramienta útil en situaciones en las que el docente no cuenta con los recursos necesarios para desarrollar actividades digitales, puede recurrir a su uso para implementar en sus clases material gráfico para generar en el estudiante un ambiente visual de los contenidos y ejercicios planteados. El docente puede desarrollar mediante infografías secuencias a los temas próximos a abordar, en los que se genere un interés hacia un desarrollo visual de su clase.

3.1 GeoGebra como herramienta para la enseñanza del Cálculo Integral.

GeoGebra es un software interactivo matemático que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo. Este software ofrece una visualización del contenido en tres formas diferentes, una vista gráfica, una algebraica y una en formato hoja de cálculo, permitiendo al usuario trabajar con la interacción simultánea de estos tres modos

(Arteaga, Medina, & del Sol, 2019). Este tipo de software ofrece grandes varias ventajas como herramienta didáctica, según Hohenwarter (2014) ofrece facilidades para modelar y resolver ejercicios matemáticos, de manera rápida y práctica. Familiarizarse con el programa, permite al docente exponer de una manera visual los resultados obtenidos por sus estudiantes, además de permitir solucionar dudas y casos particulares de una manera objetiva y didáctica.

GeoGebra nos permite realizar representaciones gráficas con l finalidad de observar características especiales en un objeto, mismas que pueden ser usadas para representar gráficamente ejercicios modelo, y ejercicios propuestos, véase *Fig. 7, Fig. 8,* y *Fig. 9*. GeoGebra de igual manera permite crear entornos de aprendizaje virtual, mediante actividades interactivas (Applets) en las cuales el estudiante puede interactuar con sus conocimientos sin la necesidad de tener un conocimiento avanzado del programa o de informática en general, véase *Fig. 10.*

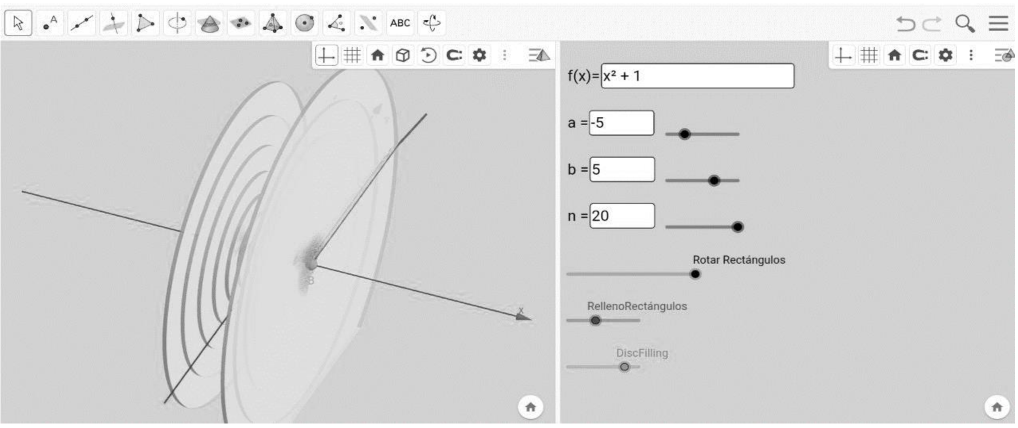


Fig. 7. *Gráfica explicativa método de discos para n=20*

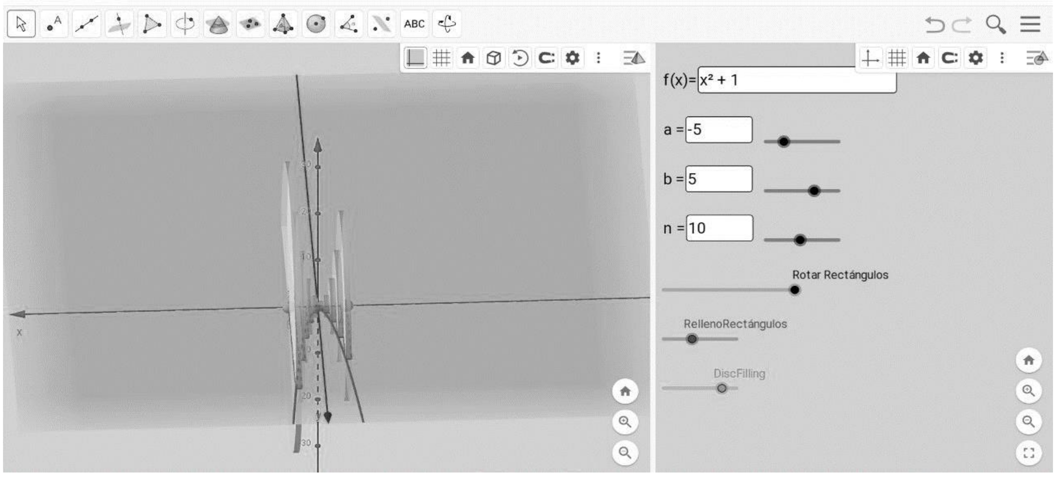


Fig. 8. *Gráfica explicativa método de discos para n=10*

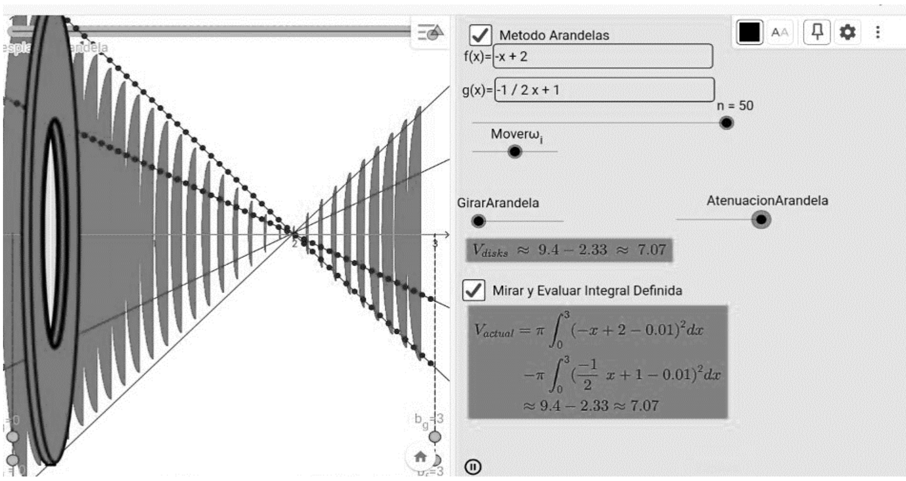


Fig. 9. *Gráfica explicativa método de arandelas para n=50*

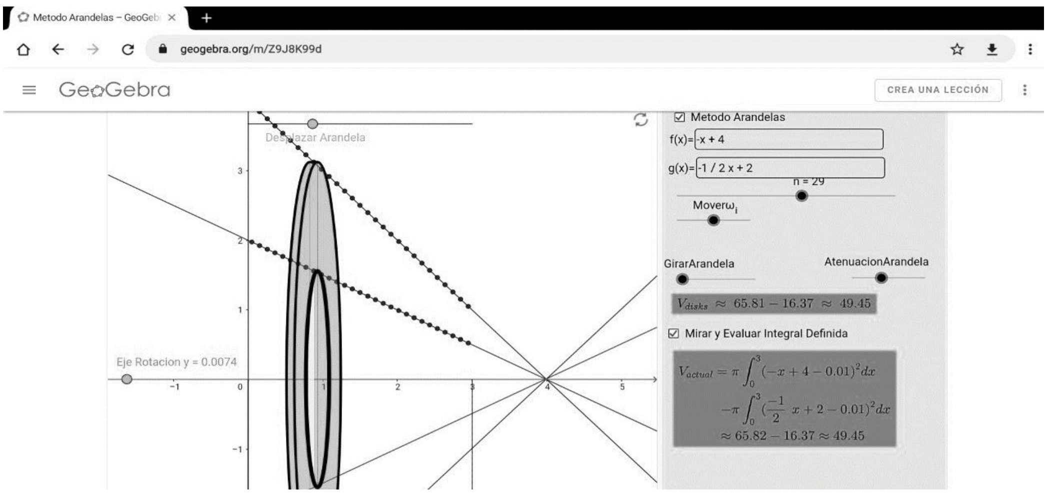


Fig. 10. *Applet (ejercicio interactivo) método de arandelas*

A continuación, se estructura una guía didáctica que desarrolle el tema Aplicaciones del Cálculo Integral desde cada uno de los momentos del aprendizaje (anticipación, construcción y consolidación), a la vez que ofrece alternativas didácticas que mitiguen las problemáticas evidenciadas en el capítulo II mediante; dotando de esta manera al docente la posibilidad de trabajar con material tanto físico como digital, y sea el docente quien frente a sus posibilidades adapte sus clases a cualquiera de estos recursos, implementando en el estudiante un aprendizaje significativo en el estudio del tema.

3.2 Estructura Guía Didáctica

La estructura de la guía didáctica se basa en un pequeño repaso histórico entre las dos visiones principales del cálculo, tratando así su parte Geométrica (Leibniz) y su parte dinámica (Newton), y la integración de ambas por medio de las Sumas de Riemann, siendo esta la más utilizada por su facilidad didáctica para explicar las aplicaciones del Cálculo Integral. La revisión histórica es potenciada y sintetizada con el Análisis Didáctico efectuado a los textos de Granville y Thomas.

El contenido de esta propuesta estará desarrollado para 6 horas-clase (40 min) y una evaluación final estipulada para 2 horas-clase.

Tabla 4.
Estructura propuesta didáctica

Clase	Tipo de Análisis	Síntesis
#1	Componente Conceptual	Conceptual
	Anticipación: Conceptos y términos básicos. Construcción: Aproximación histórica. Consolidación: Vinculación, conceptos, representación gráfica.	Articulación del tema basándose en terminología y conceptos.
	Componente de Contenido	de Contenido
#2-#3	Anticipación: Estructura y Análisis sobre Sumas de Riemann. Construcción: Construcción sistemática de representaciones gráficas (sólidos de revolución) Consolidación: Análisis fenomenológico.	Elaboración de focos prioritarios de aprendizaje.
	Componente Cognitiva	Cognitiva

#4-#5	Anticipación: Introducción a las aplicaciones del Cálculo Integral Construcción: Vinculación entre contenidos, representaciones y aplicaciones. Consolidación: Verificación de limitaciones y demandas cognitivas.	Organización de los aprendizajes
	Componente de Instrucción	de Instrucción
#6	Anticipación: Funcionalidad de las tareas Construcción: Revisión de recursos y herramientas del aprendizaje Consolidación: Gestión de los materiales para uso autónomo	Fundamentación y construcción del aprendizaje significativo
	Componente Evaluativa	Evaluativa
#7-#8	Anticipación: Correlación entre componentes conceptuales y su representación gráfica Construcción: Resolución de problemáticas evidenciando el contexto fenomenológico Consolidación: Interpretación dinámica de la integral desde un contexto conceptual y geométrico	Revisión del proceso de aprendizaje.

El docente podrá encontrar en esta guía didáctica las directrices necesarias para abordar este tema, contará con explicaciones, demostraciones y representaciones gráficas de ejercicios modelo, claros y detallados, aplicaciones de métodos y técnicas que faciliten la comprensión, además de una gran variedad de ejercicios recomendados para la resolución en clase o de manera autónoma por el estudiante. Cabe recalcar que, para enfatizar en un aprendizaje significativo, se implementa una serie de recursos tecnológicos que permiten al estudiante una vinculación entre las enseñanzas del aula y un aprendizaje constructivista.

CONCLUSIONES

El Análisis Didáctico de textos cumplió un papel importante en el desarrollo de esta estrategia didáctica de aprendizaje, señalando las deficiencias y limitantes presentes en dos de los libros más populares para la enseñanza de Cálculo Integral. Este análisis didáctico marcó las directrices necesarias para la correcta vinculación de los momentos del aprendizaje con los contenidos pedagógicos de los textos analizados, resultados que potencializados con el uso de las tecnologías definen nuevas oportunidades para la aplicación del conocimiento en el contexto personal y social del estudiante.

Este trabajo de titulación expuso información necesaria mediante el Análisis Didáctico de textos, señalando oportunidades de aprendizaje para futuras adaptaciones curriculares del tema: Aplicaciones del Cálculo Integral.

Mediante el análisis conceptual se logró evidenciar conceptos y términos básicos, los cuáles gracias a una aproximación histórica previa permitieron destacar redes de conceptos que articulaban el tema analizado.

Por medio del análisis de contenido se revisó la estructura de los sistemas de representación, así como de los procesos fenomenológicos que describen el tema, se logró sintetizar este apartado mediante focos prioritarios de información, necesarios para los análisis sucesivos.

En el análisis cognitivo se trabajó en los focos prioritarios del análisis anterior, señalando las expectativas del aprendizaje, así como las demandas cognitivas y las limitaciones del mismo. Este análisis permitió organizar el aprendizaje en busca de posibles estrategias didácticas que aminoren las problemáticas encontradas.

Por medio del análisis de instrucción se evidenció cuáles son los recursos necesarios ´para el desarrollo del tema, así como la gestión del mismo gracias a los requerimientos del análisis cognitivo. En este apartado se estructuran también propuestas que integran el tema de estudio en los diferentes momentos del aprendizaje, formalizando también secuencias entre las tareas propuestas y los recursos didácticos. Este análisis agrupa toda la información recopilada en los análisis precedentes para desarrollar una guía didáctica que potencialice las oportunidades encontradas.

Por último, el análisis evaluativo permitió desarrollar la propuesta de aprendizaje, y permitió hacer una revisión completa del proceso del Análisis Didáctico de textos, en este apartado también se logró estructurar cuáles son los criterios e instrumentos para la evaluación, tanto del tema como de la efectividad de todo el proceso; siendo la primera desarrollada en la propuesta didáctica de este trabajo, dejando la evaluación de rendimiento y resultados para futuras investigaciones que interpreten y verifiquen dicha propuesta.

En síntesis, este trabajo de investigación logró:

- Investigar alternativas pedagógicas que sinteticen los conceptos clásicos del Cálculo Integral y las implementaciones tecnológicas expuestas por autores contemporáneos mediante el Análisis Didáctico de textos.
- Sistematizar la información obtenida mediante el Análisis Didáctico de textos según las oportunidades y limitaciones implicadas en la enseñanza – aprendizaje.
- Elaborar material didáctico por medio de infografías y simulaciones en GeoGebra que permitan la consolidación y construcción del aprendizaje.
- Estructurar y diseñar una guía didáctica conforme a los textos analizados y las directrices del constructivismo para el tema: Aplicaciones del Cálculo Integral.

La información obtenida en este trabajo fue organizada en base a los momentos del aprendizaje, dicha estructura se formalizó en la guía didáctica anexada a este trabajo de titulación.

Los recursos presentados en este trabajo tienen autonomía en su utilidad, es decir, el docente puede trabajarlos como complemento en clase, o trabajar con la vinculación de todos los recursos mediante la guía didáctica. En palabras de García (2001) una guía didáctica “es el documento que orienta el estudio; acercando a los procesos cognitivos, con el fin de que pueda trabajarlo de manera autónoma” (p. 242). Este instrumento permite guiar y facilitar el conocimiento, siendo el agente integrador de todos los medios y recursos que se presentan como apoyo al servicio docente.

Es importante recalcar que, una de las limitantes evidenciadas gracias a este trabajo es la necesidad de conocimientos informáticos previos para el uso de las herramientas digitales, por esta razón todas las implementaciones tecnológicas presentes en la guía didáctica están diseñadas para ser utilizadas sin la necesidad de programas externos o capacitación previa.

RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

El presente trabajo de investigación busca marcar directrices en el uso de tecnologías, que sin la necesidad de un conocimiento informático previo sirvan como herramienta para potencializar las etapas del aprendizaje y permitir una construcción del conocimiento por parte del estudiante. En el momento de vincular la tecnología con el proceso de aprendizaje, se recomienda a futuros investigadores tomar las pautas y observaciones señaladas en este trabajo y desarrollarlas en sus respectivos campos de investigación; facilitando así la estructura de la investigación, enfrentando así las capacidades y limitantes del colectivo social.

Las adaptaciones curriculares frente problemáticas contemporáneas deben ser tomadas en cuenta, se debe generar estructuras de aprendizaje que permitan al estudiante relacionar lo aprendido con su entorno cultural y su contexto social, generando así un aprendizaje de valor que pueda ser transmitido y potencializado por la sociedad. Es necesario mantener el campo del Análisis Didáctico de textos abierto a futuras investigaciones que permitan encontrar incongruencias de forma y fondo en el aprendizaje, permitiendo al docente o investigador adaptar este tipo de análisis a diversos estilos y tipos de aprendizaje.

Por último, se extiende una invitación a futuros investigadores a validar la propuesta didáctica ofrecida con este trabajo, para que de este modo la interpretación de resultados valide el proceso del Análisis Didáctico de textos como herramienta efectiva para la estructuración de nuevas adaptaciones curriculares, no solo en esta temática sino en cualquier proceso educativo que presente limitaciones o dificultades pedagógicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abilock, D., & Williams, C. (2014). Recipe for an infographc. *Knowledge Quest*, 46-55.

Alcalay, L., & Antonijevic. (1987). Variables afectivas. *Revista Mexicana de Educación* (144), 29-32.

Álvarez, M., Almeida, B., & Villegas. (2014). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Pueblo y Educación.*

Arteaga, E., Medina, J., & del Sol, J. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado*, 102-108.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Bell, W. (1979). The Learning processes of aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 361-378.

Boyer, C. (1949). *the History of calculus and its Canceptual development (The concepts of Calculus).* New York: Dover Publications.

Bressoud, D. (1992). Why Do We Teach Caluculus? *The Amarican Mathematical Monthly, 99*(7), 615-617.

Bressoud, D. (2011). Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *American Mathematical Monthly*, 99-113.

Brigham, T. J. (2018). Piktochart. *Journal of the Medical Library Association*, 584-587.

Busquets, M. (1986). La pedagogía operatoria: Maestro aprendizaje. *Actas sobre las IV jornadas de estudio sobre la investigación en la escuela*, 103-105.

Chrobak, R. (2000). *LA METACOGNICION Y LAS HERRAMIENTAS.* Buenos Aires: Universidad Nacional del Comahue.

Clement, J. (1982). Algebra world problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16-30.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education.* Londres: Routledge.

Confrey, J. (1980). *Conceptual change, number concepts and the introduction to Calculus.* New York: Doctoral dissertation, Cornell University.

CUMP. (1990). *Notas del Subcomité para la reforma del Cálculo en los dos primeros años de estudio .* Mathematical Association of America.

Davis, R. (1984). *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education.* Norwood: Ablex Publishing Corporation.

Davis, R. (1986). Calculus at University High School in R. G. Douglas (ed.) Toward a Lean and Lively Calculus. *Mathematical Association of America*.

Delors, J. (1994). *Los cuatro pilares de la educación.* México: El correo de la UNESCO.

Dick, T. (1984). *Covariance structural models for mathematics achievement and participation: An investigation of sex differences at the level of college calculus using factorial modeling.* New Hampshire: (doctoral dissertation).

Driver, R., & Oldham, V. (1985). *A constructivist approach to curriculum development in science, paper presented at the meeting of the British Educational Research Association.* Sheffield.

Edge, O., & Friedberg, S. (1983). Factors affecting achievement in a first course of calculus. *Journal of Experimental Education,* 136-140.

El Clarín. (1997). *Manual de Estilo de Clarín.* Buenos Aires: Argentino S.A.

Ferrater, J. (1981). *Diccionario de Filosofía.* Madrid: Alianza.

Ferrini-Mundy, J., & Balomenos, R. (1984). Males and females in a college calculus: Relationships among prior, current, and subsequent academic experiences. *Paper* *presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*.

Ferrini-Mundy, J., & Geuther, K. (1991). An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching, and Curriculum Development. *American Mathematical Monthly, 98*(7), 627-635.

Garcés, L., Montaluisa, A., & Salas, E. (2019). El aprendizaje significativo y su relación con los estilos de aprendizaje. *Anales, 1*(376). Recuperado el 22 de junio de 2021, de https://revistadigital.uce.edu.ec/index.php/anales/article/view/1871

Geuther, J. (1986). *The role of the error analysis, diagnostic grading procedures and student reflection in first semester calculus learning (doctoral dissertation, University of New Hampshire).*

Goh, C. (2008). Metacognitive Instruction for Second Language Listening Development. *RELC Journal*, 188-213.

Gómez, P., & Rico, L. (2007). Learning within communities of practice in preservice secondary school teacher's education. *PNA*, 17-28.

Jaramillo, I. (2007). Estrategias visuales aplicadas on-line y su impacto en la adquisición de aprendizaje. *Praxis Pedagógica.*, 171-188.

Katz, V. (1993). Using the History of Calculus to Teach Calculus. *Science and Education*, 243-249.

Little, C. (2008). Teaching Calcululs, can GeoGebra Bridge the Algebra - Geometry Divide? *Mathematics in School*, 2-4.

Lupiañez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial para profesores de matemática secundaria.* Granada: Tesis Doctoral de la Universidad de Granada.

Marín, A. (2009). *Informe-memoria sobre el contenido y las expectativas de la sección de análisis didáctico dedicada al análisis de instrucción en la materia Didáctica de la Matemática de la Licenciatura de Matemáticas.* Granada: Universidad de Granada.

Misu, L., Budayasa, I., & Lukito, A. (2018). Profile of Metacognition of Mathematics Pre-Service Teachers. *Journal of Physics, Conf. Series,* Conf. Ser. 947.

Mora, W., & Parga, D. (2008). El Conocimiento Didáctico del Contenido en Química: integración de las Tramas de contenido / histórico –epistemológicas con las Tramas de Contexto /Aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED,* 55.

Moreno, L. (2007). *La pedagogía operacional en la escuela.* Colombia: Ediciones Infra.

Muñoz, M. (2018). *Aplicación de software matemático DERIVE, para el logro de aprendizajes en aplicaciones del cálculo diferencial e integral, en estudiantes universitarios.* Cuenca.

Newton, I. (1667). The October 1666 tract of fluxions. *The Mathematical Papers of Isaac Newton 1664-1666, 1,* 400-448.

Ortiz, D. (2015). *El constructivismo como teoría y método de enseñanza.* Sophia.

Poisson, S. (1820). Suite du mémoire sur les intégrales définies. *Journal de L'École Royale Polytechnique*, 319.

Rico, J., & Lupiañez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza.

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática en P. Gómez y Rico Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). *Análisis Didáctico y Metodología de la Investigación.* Granada: Comares.

Rico, L., Lupiañez, J., & Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Rivera, J. (2014). EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO Y LA EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES. *Revista UNMSM - Investigación Educativa*, 47-52.

Rockmore, T. (2000). *Cuadernos sobre Vico 11-12*. Sevilla España: Universidad de Sevilla.

Romberg, T., & Tufte, F. (1987). Mathematics curriculum engineering: Some suggestions from cognitive science. En T. Romberg, & D. Steward, *The Monitoring of School Mathematics: Background papers*. Wisconsin: University of Wisconsin-Madison.

Steen, L. (1987). Calculus for a new century. *National Research Council*, Background papers for the National Colloquium.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1989). *Introducción a los métodos cualitativos de la investigación*. Barcelona: Paidós.

Thompson, C. (2016). *The surprising history of the infographic*. Obtenido de https://www.smithsonianmag.com/history/surprising-history-infographic/

Thompson, W. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics. *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*, 189-236.

Universidad San Aventura. (2015). *Las correinetes constructivistas y los modelos autoestructurantes*. Bogotá: Universidad San Aventura.

Villavicencio, L. (2010). El constructivismo kantiano según Rawls como fundamento de los derechos humanos. *Frónesis, 17*(1), 23-52. Recuperado el 23 de junio de 2021, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1315-62682010000100004&lng=es&tlng=es.

Washington, O., & Gebera, T. (2010). Contexto y desarrollo de la modalidad educativa blended learning en el sistema universitario iberoamericano. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 358.

Young, S. (1986). Present Problems and Future Prospects. *Calculus for a New Century*, 172-175.

ANEXOS

Guía didáctica para el tema: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL, MEDIANTE EL USO DE INFOGRAFÍAS Y EL SOFTWARE GEOGEBRA

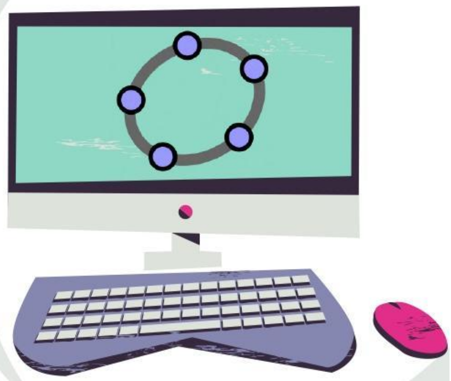

GUÍA DIDÁCTICA
APLICACIONES
CÁLCULO INTEGRAL
Wolfgang Rubén Ortiz

Todas las imágenes utilizadas en este trabajo fueron descargadas bajo licencia de paga de los sitios: FLATICON, STORYSET y CANVA.
Gráficas y animaciones generadas mediante el Software GeoGebra

Edición Digital

Wolfgang Rubén Ortiz M. 2022

TICs



Códigos QR

Los ejercicios propuestos en este documento pueden ser revisados escaneando su respectivo código QR

APPLETS

Un applet es un componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo, en un navegador web. usted únicamente necesitará de una conexión a internet

GeoGebra

GeoGebra es una aplicación de ordenador que permite construir figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y genera gráficas de funciones que pueden ser modificadas de forma dinámica utilizando el ratón. GeoGebra cuenta con una página web que permite utilizar todas las herramientas del programa de ordenador

Todos los ejercicios propuestos cuentan con un código QR que redirecciona a un applet de GeoGebra en el que el usuario podrá revisar y comprobar resultados, además de modificar los valores para el estudio autónomo.

NOTA

En el caso de contar con un dispositivo para leer los códigos QR, usted encontrará todos los links en la siguiente pag:

https://linktr.ee/woruormo

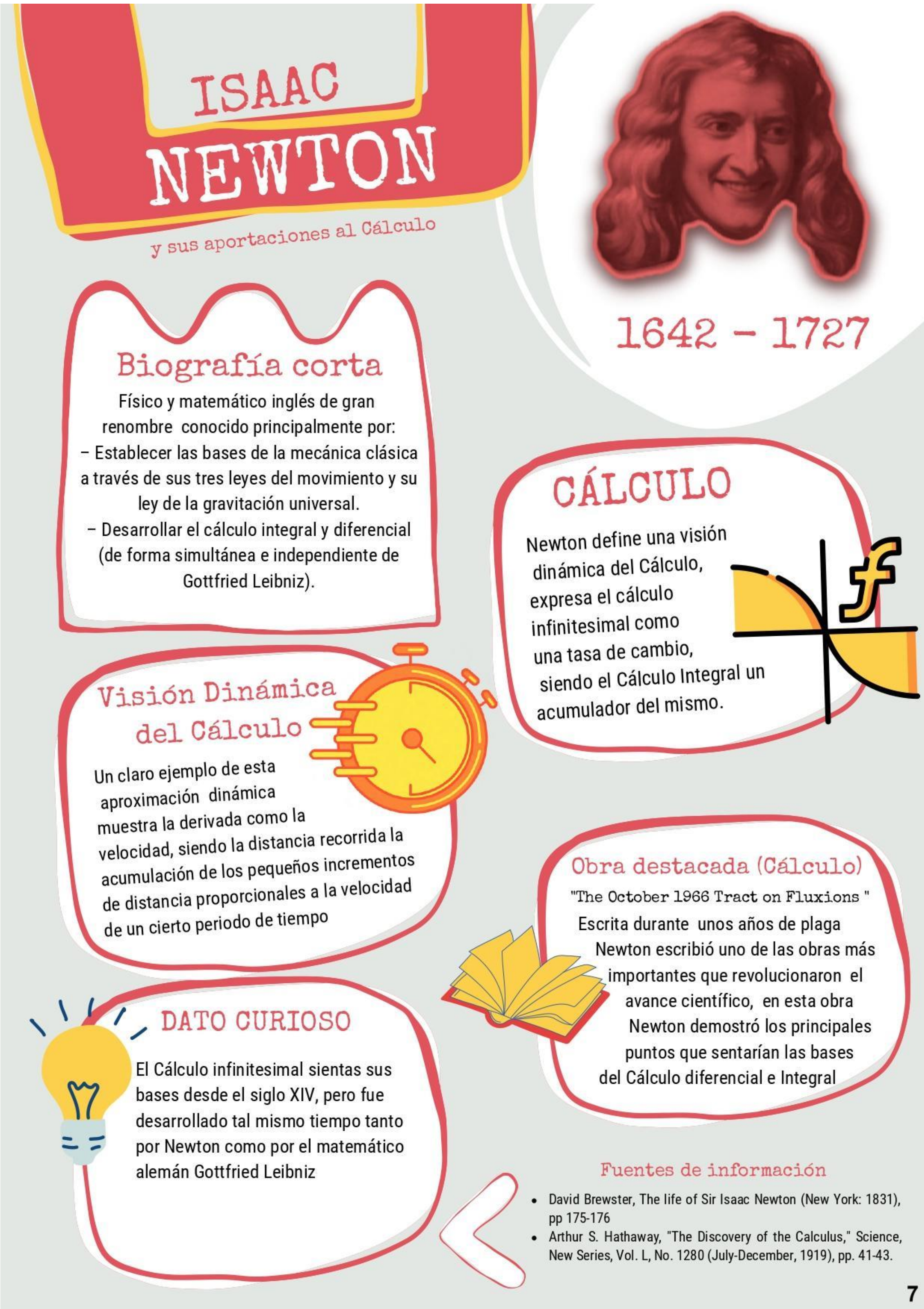
ÍNDICE

Guía Didáctica: Aplicaciones Cálculo Integral

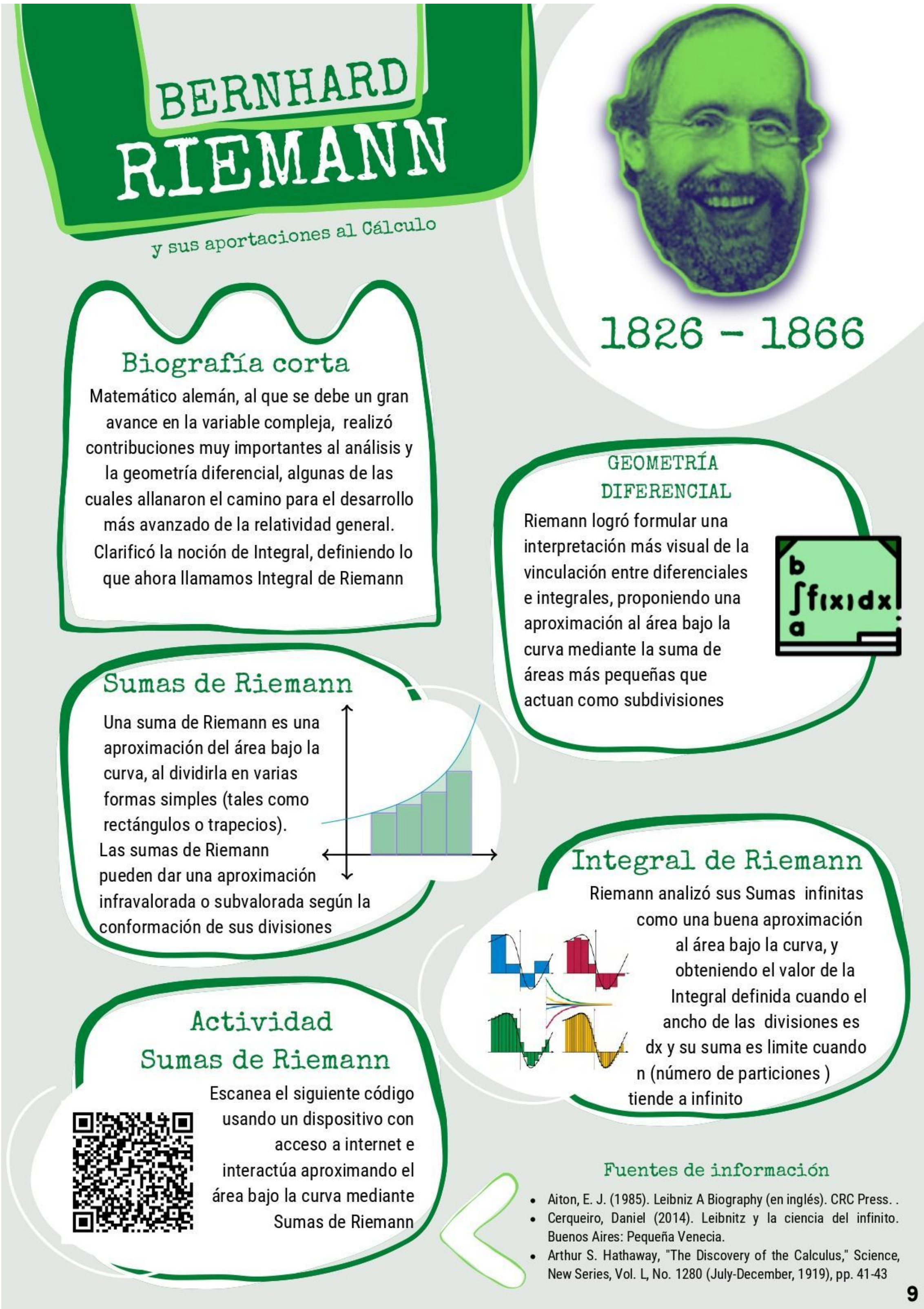
Gráficas y animaciones generadas mediante el Software GeoGebra

Wolfgang Rubén Ortiz M. 2022


PERSONAJES IMPORTANTES
CÁLCULO
6


ISAAC
NEWTON
y sus aportaciones al Cálculo
1642 - 1727
Biografía corta
Físico y matemático inglés de gran renombre conocido principalmente por:
– Establecer las bases de la mecánica clásica a través de sus tres leyes del movimiento y su ley de la gravitación universal.
– Desarrollar el cálculo integral y diferencial (de forma simultánea e independiente de Gottfried Leibniz).
CÁLCULO
Newton define una visión dinámica del Cálculo, expresa el cálculo infinitesimal como una tasa de cambio, siendo el Cálculo Integral un acumulador del mismo.
f
Visión Dinámica del Cálculo
Un claro ejemplo de esta aproximación dinámica muestra la derivada como la velocidad, siendo la distancia recorrida la acumulación de los pequeños incrementos de distancia proporcionales a la velocidad de un cierto periodo de tiempo
Obra destacada (Cálculo)
"The October 1966 Tract on Fluxions "
Escrita durante unos años de plaga Newton escribió uno de las obras más importantes que revolucionaron el avance científico, en esta obra Newton demostró los principales puntos que sentarían las bases del Cálculo diferencial e Integral
DATO CURIOSO
El Cálculo infinitesimal sientas sus bases desde el siglo XIV, pero fue desarrollado tal mismo tiempo tanto por Newton como por el matemático alemán Gottfried Leibniz
Fuentes de información
• David Brewster, The life of Sir Isaac Newton (New York: 1831), pp 175-176
• Arthur S. Hathaway, "The Discovery of the Calculus," Science, New Series, Vol. L, No. 1280 (July-December, 1919), pp. 41-43.
7

Wolfgang Rubén Ortiz Molina


BERNHARD
RIEMANN
y sus aportaciones al Cálculo
1826 - 1866
Biografía corta
Matemático alemán, al que se debe un gran avance en la variable compleja, realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general.
Clarificó la noción de Integral, definiendo lo que ahora llamamos Integral de Riemann
GEOMETRÍA DIFERENCIAL
Riemann logró formular una interpretación más visual de la vinculación entre diferenciales e integrales, proponiendo una aproximación al área bajo la curva mediante la suma de áreas más pequeñas que actuan como subdivisiones
b
∫f(x)dx
a
Sumas de Riemann
Una suma de Riemann es una aproximación del área bajo la curva, al dividirla en varias formas simples (tales como rectángulos o trapecios).
Las sumas de Riemann pueden dar una aproximación infravalorada o subvalorada según la conformación de sus divisiones
Integral de Riemann
Riemann analizó sus Sumas infinitas como una buena aproximación al área bajo la curva, y obteniendo el valor de la Integral definida cuando el ancho de las divisiones es dx y su suma es limite cuando n (número de particiones) tiende a infinito
Actividad
Sumas de Riemann
Escanea el siguiente código usando un dispositivo con acceso a internet e interactúa aproximando el área bajo la curva mediante Sumas de Riemann
Fuentes de información
Aiton, E. J. (1985). Leibniz A Biography (en inglés). CRC Press. .
Cerqueiro, Daniel (2014). Leibnitz y la ciencia del infinito. Buenos Aires: Pequeña Venecia.
Arthur S. Hathaway, "The Discovery of the Calculus," Science, New Series, Vol. L, No. 1280 (July-December, 1919), pp. 41-43
9

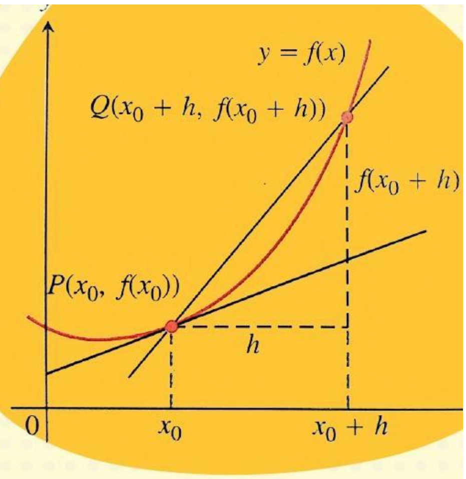

MENCIONES
ESPECIALES
WILLIAM OF
HEYSTESBURY
1313-1372
Incluyó en sus obras una definición sobre velocidad instantánea muy adelantada a su época
RENÉ
DESCARTES
1596-1650
Unificó la geometría en un contexto algebraico sentando las bases del Cálculo por medio de su Geometría Analítica
EVANGELISTA
TORRICELLI
1608-1647
Sus aportes en geometría fueron determinantes para el desarrollo del Cálculo
ISAAC
BARROW
1630-1677
Obtuvo varias demostraciones geométricas sobre el Teorema Fundamental del Cálculo, fue mentor de Isaac Newton
JAMES
GREGORY
1638-1675
Expresó como encontrar la longitud de una curva conociendo el área que existe debajo de ella. Expuso demostraciones claves del Teorema fundamental del Cálculo
LEONHARD
EULER
1707-1773
Fue el responsable de vincular el análisis de curvas con el análisis de funciones en su obra "Introducción al análisis infinitesimal"
Fuentes de información
• Bressoud, D. (2011). Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. American Mathematical Monthly, 99-113
• Katz, V. (1993). Using the History of Calculus to Teach Calculus. Science & Education, 243-249.
10


REPASO
11

CÁLCULO DIFERENCIAL

ASPECTOS PARA RECORDAR

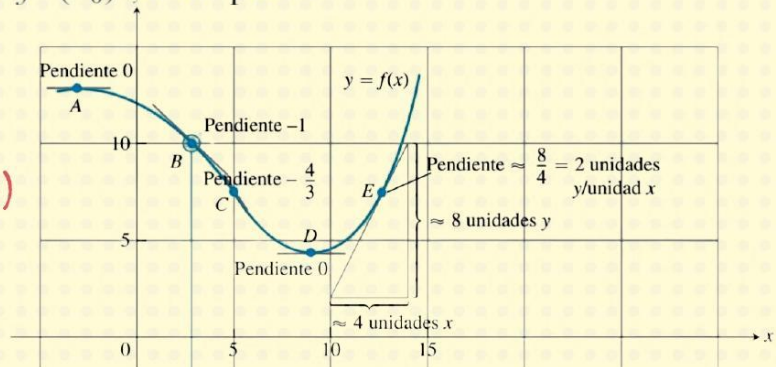
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



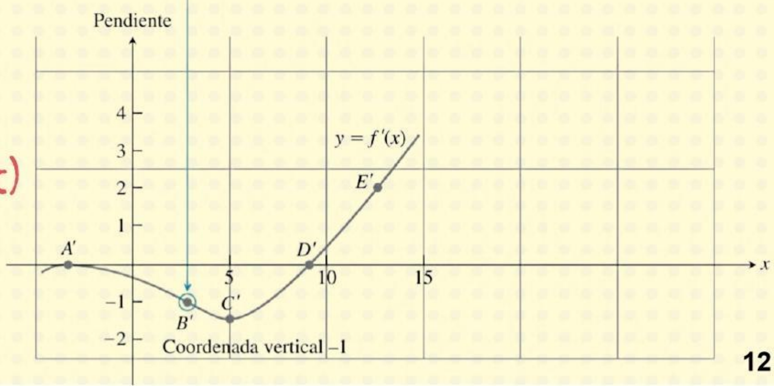
Interpretaciones

1. La pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en $x = x_0$.
2. La pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$.
3. La tasa de cambio de $f(x)$ con respecto a x en $x = x_0$.
4. La derivada $f'(x_0)$ en un punto.

Gráfica f(x)



Gráfica f '(x)



12

Wolfgang Rubén Ortiz Molina

REGLAS DE DERIVACIÓN
(BÁSICAS)

Constante: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Suma: $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Diferencia: $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

Producto: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Cociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Regla de la cadena: $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

REGLAS DE DERIVACIÓN
(BÁSICAS)

Fórmulas generales

Suponga que u y v son funciones derivables de x.

Constante: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Suma: $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Diferencia: $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

Producto: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Cociente: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Regla de la cadena: $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

14

REGLAS DE DERIVACIÓN
(COMPLEMNTARIAS)

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

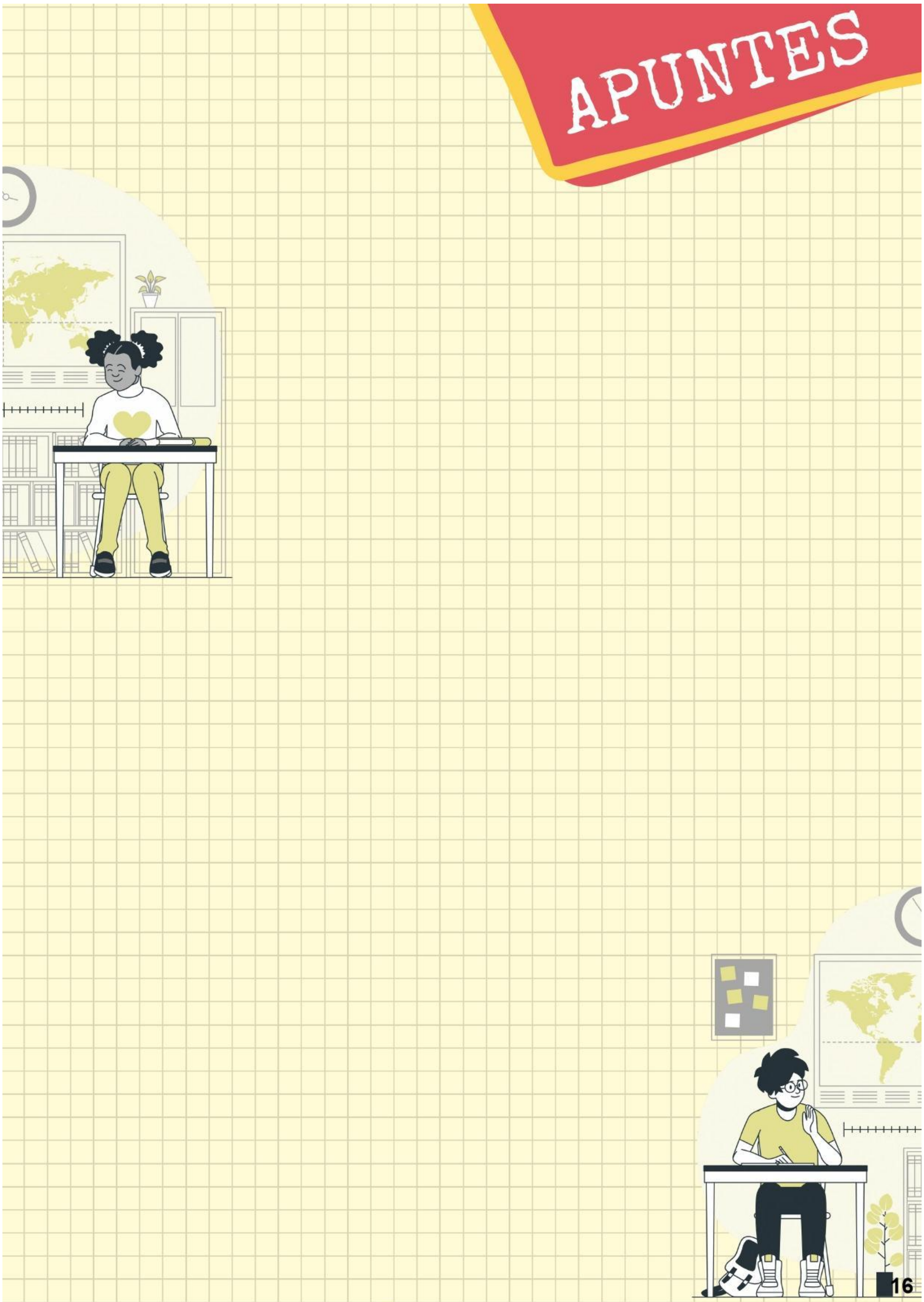
$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$$

Funciones paramétricas

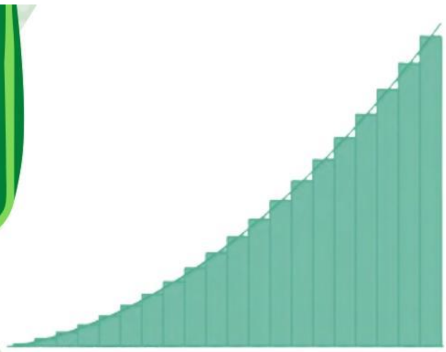
Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables, entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$


APUNTES
16

SUMAS DE RIEMANN

ASPECTOS PARA RECORDAR



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right).$$

S_n es igual a la suma de Riemann para f en el intervalo $[a,b]$

n= número de particiones

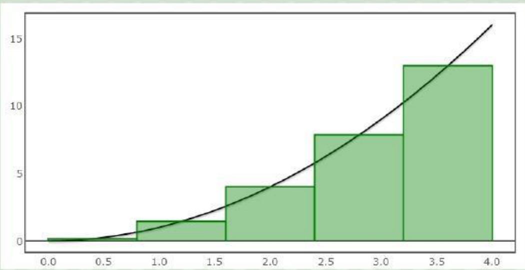
k= contandor

$(b\text{-}a)/n$ = Es el ancho de las particiones

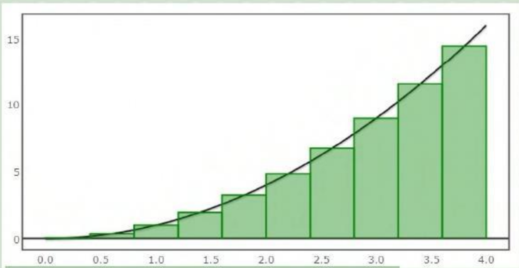
$f(a+k(b\text{-}a)/n)$ = Es la función evaluada para cada partición

Ejemplos:

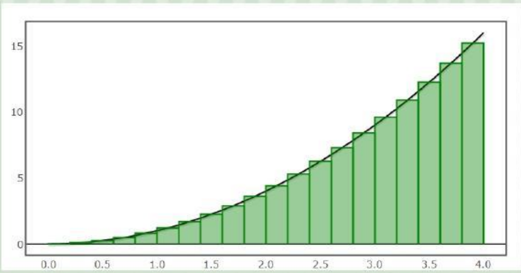
- $f(x)= x^2$ con 5 particiones para el intervalo [0,4]
  $S_5 = 21.12$



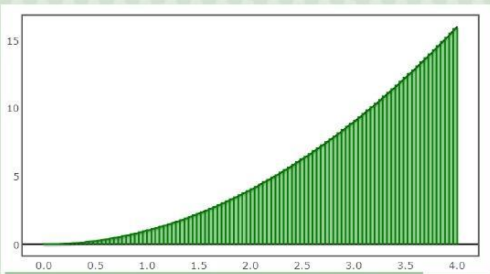
- $f(x)= x^2$ con 10 particiones para el intervalo [0,4]
  $S_{10} = 21.28$



- $f(x)= x^2$ con 20 particiones para el intervalo [0,4]
  $S_{20} = 21.32$



- $f(x)= x^2$ con 100 particiones para el intervalo [0,4]
  $S_{100} = 21.33$



INTEGRAL DE RIEMANN

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right).$$

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x.$$

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$

El limite de una suma de Riemann con infinitas particiones es igual a la Integral definida

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Integral de } f \text{ de } a \text{ a } b}$$

Límite superior de integración

La función es el integrando.

Signo de la integral

x es la variable de integración.

Límite inferior de integración

Cuando usted encuentra el valor de la integral, ha evaluado la integral.

$S_5 = 21.12$ para $f(x) = x^2$ con 5 particiones para el intervalo [0,4]

$S_{10} = 21.28$ para $f(x) = x^2$ con 10 particiones para el intervalo [0,4]

$S_{20} = 21.32$ para $f(x) = x^2$ con 20 particiones para el intervalo [0,4]

$S_{100} = 21.33$ para $f(x) = x^2$ con 100 particiones para el intervalo [0,4]

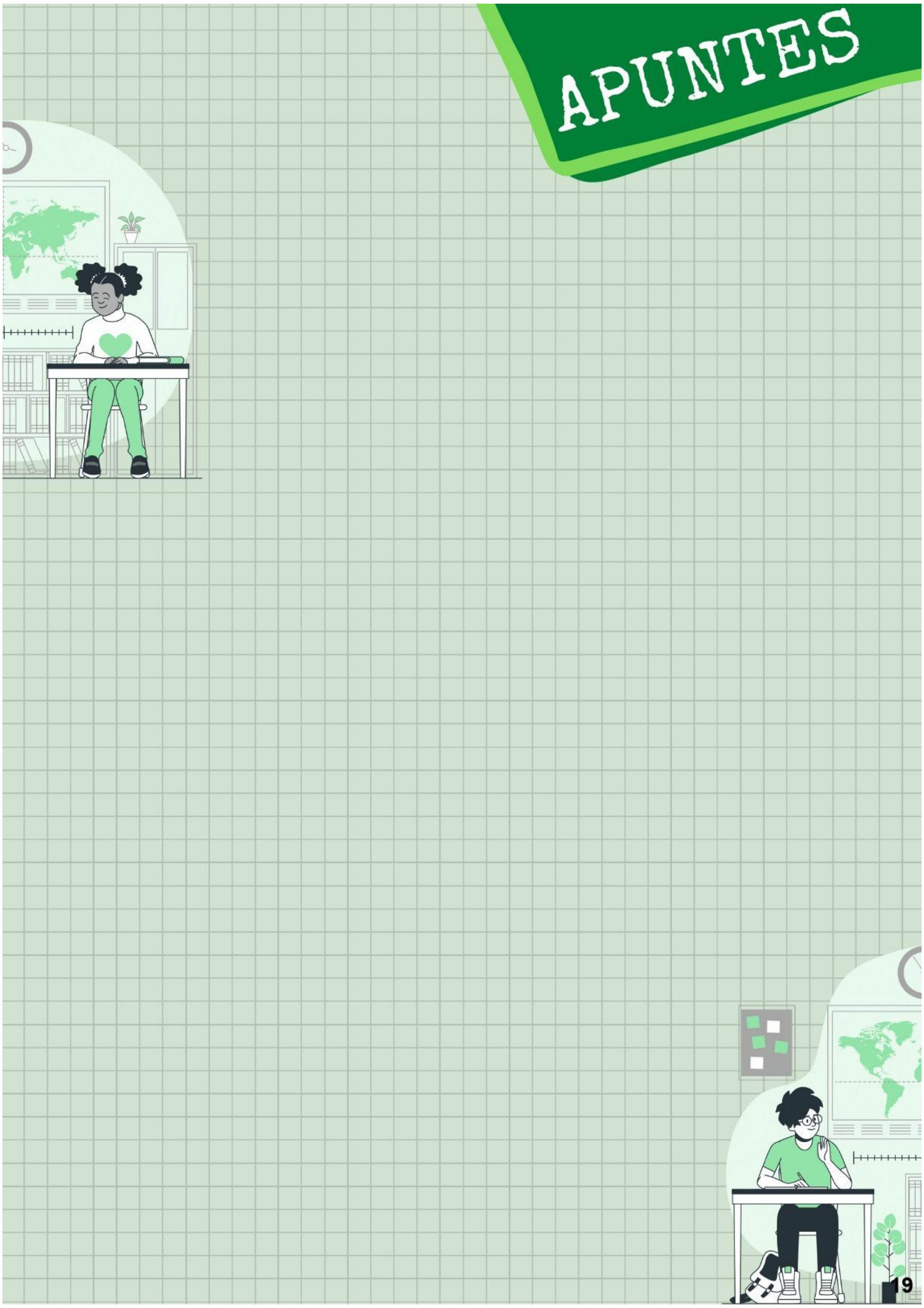
$S_{\infty} = 21.\bar{3}$ para $f(x) = x^2$ con infinitas particiones para el intervalo [0,4]

$$\int_0^4 x^2 = \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=4}$$

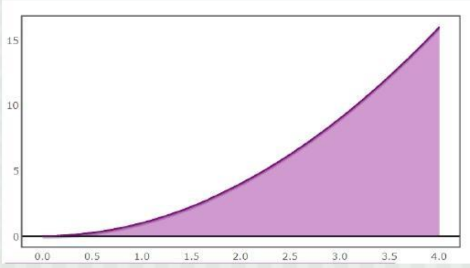
$$\int_0^4 x^2 = \frac{1}{3}(4)^3 - \frac{1}{3}(0)^3$$

$$\int_0^4 x^2 = 21.\bar{3}$$

18


APUNTES
19

CÁLCULO INTEGRAL



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (Parte 1): Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

CONTINUACIÓN TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (Parte 2): Si f es continua en todo punto en $[a, b]$ y f es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

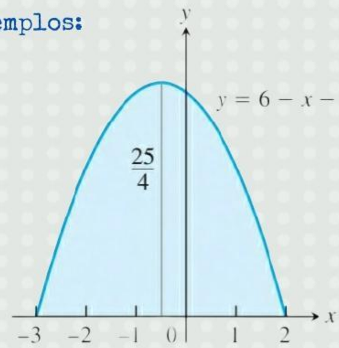
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

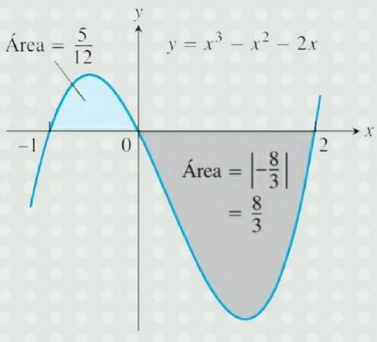
ÁREA BAJO LA CURVA

Para encontrar el área entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$, haga lo siguiente:

1. Subdivida $[a, b]$ en los ceros de f.
2. Integre f en cada subintervalo.
3. Sume los valores absolutos de las integrales.

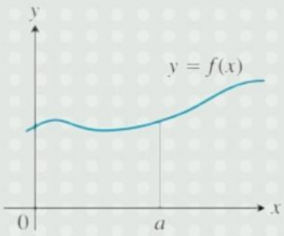
Ejemplos:





20

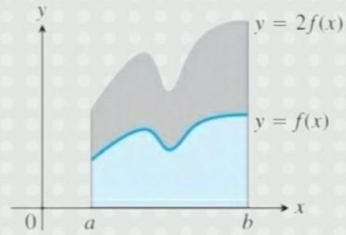
REGLAS DE INTEGRACIÓN



(a) *Ancho del intervalo cero:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

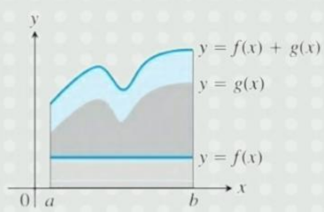
(El área debajo de un punto es 0).



(b) *Múltiplo constante:*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

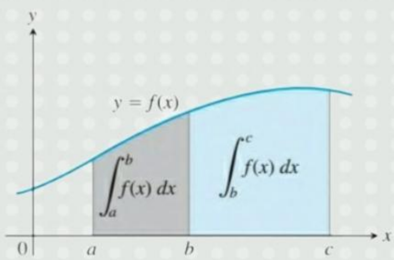
(Mostrado para $k = 2$).



(c) *Suma:*

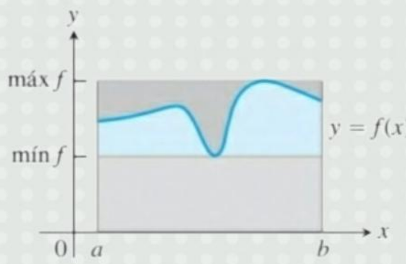
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(Suma de áreas)



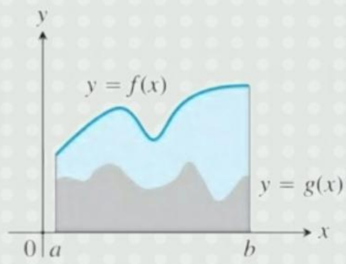
(d) *Aditividad para integrales definidas:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Desigualdad máximo-mínimo:*

$$\text{mín}\, f\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{máx}\, f\cdot(b-a)$$



(f) *Dominación:*

$$f(x) \ge g(x) \text{ en } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

21

TABLA DE INTEGRALES

$$\int dx = x + C \qquad \int k dx = kx + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \qquad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1) \qquad \int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C \qquad \int \frac{u'}{u+a} dx = \ln|u+a| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int u' e^u dx = e^u + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0, a \neq 1) \qquad \int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \ (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C \qquad \int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + C$$

$$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C \qquad \int u'(1 + \tan^2 u) dx = \tan u + C$$

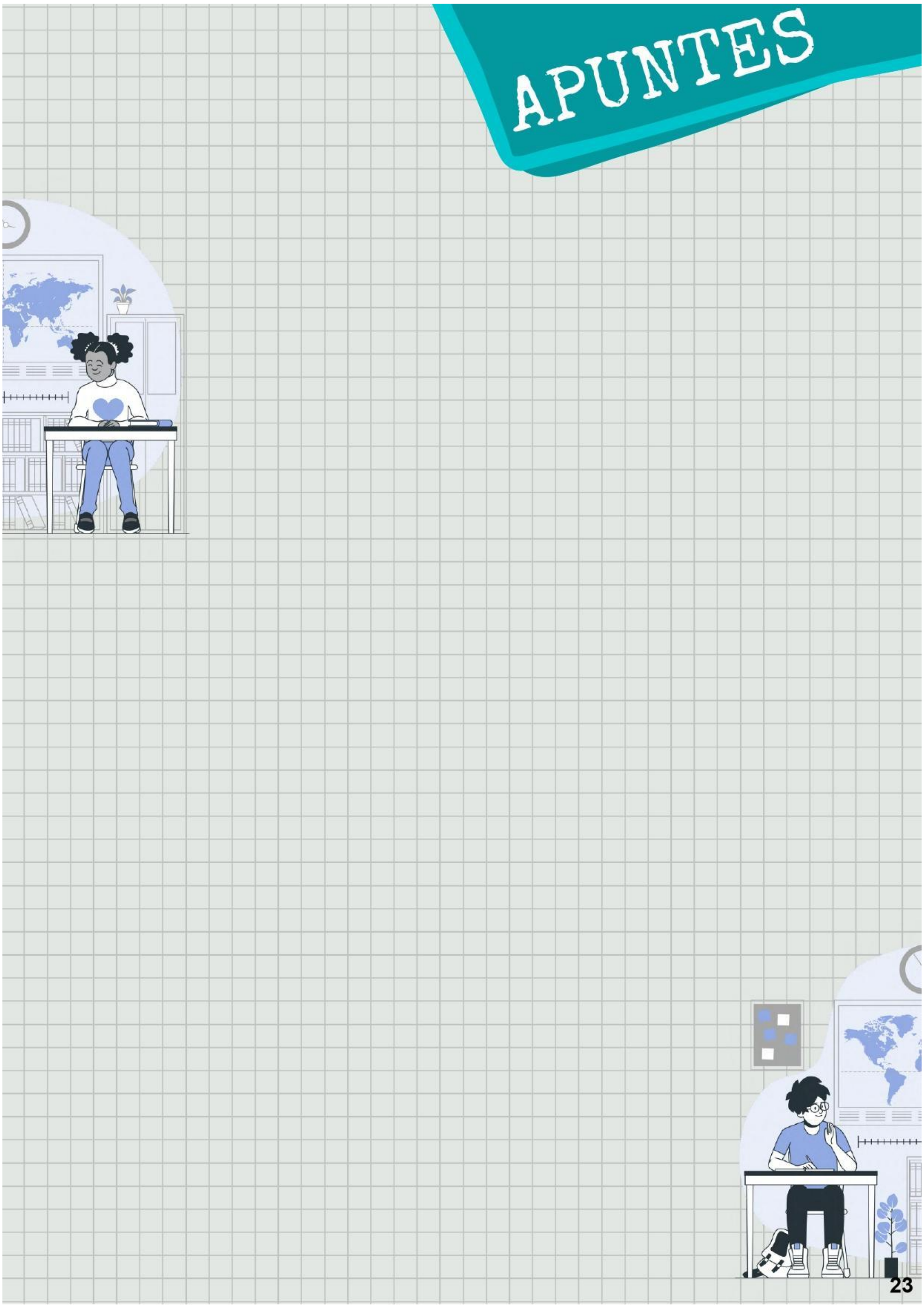
$$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\text{cotan } x + C \qquad \int \frac{u'}{sen^2 u} dx = -\text{cotan } u + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x + C \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \text{arcsen } u + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan u + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{\text{a}} + C \qquad \int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{\text{a}} + C$$

22


APUNTES
23


APLICACIONES DEL
CÁLCULO INTEGRAL
24

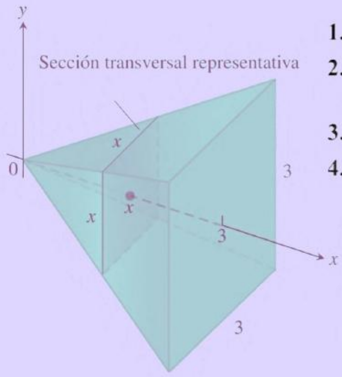
TEMAS

- CÁLCULO DE VOLÚMENES POR ROTACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES ALREDEODR DE UN EJE
- CÁLCULO DE VOLUMNES POR MEDIO DE CASQUETES CILINDRICOS
- LONGITUD DE CURVAS PLANAS
- MOMENTOS Y CENTRO DE MASA
- SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN
- TRABAJO
- PRESIÓN Y FUERZAS DE FLUIDOS

25

CÁLCULO DE UN VOLUMEN

SECCIONES TRANSVERSALES

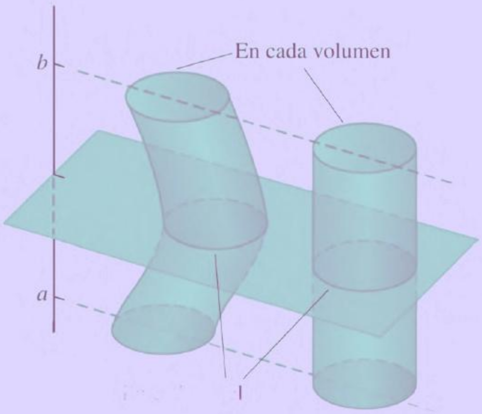


1. *Bosqueje el sólido y una sección transversal representativa.*
2. *Determine una fórmula para $A(x)$*, el área de una sección transversal representativa.
3. *Determine los límites de integración.*
4. *Integre $A(x)$* por medio del Teorema Fundamental.

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 9\ \text{m}^3$$

Las **secciones transversales** de esta pirámide son cuadrados de lado x

PRINCIPIO DE CAVALIERI



El **principio de Cavalieri** establece que sólidos con alturas iguales e idénticas áreas transversales en cada altura **tienen el mismo volumen**

El volumen de ambas figuras es igual al volumen de cada moneda multiplicado por el número de monedas, ambas figuran cuentan con **11 monedas**

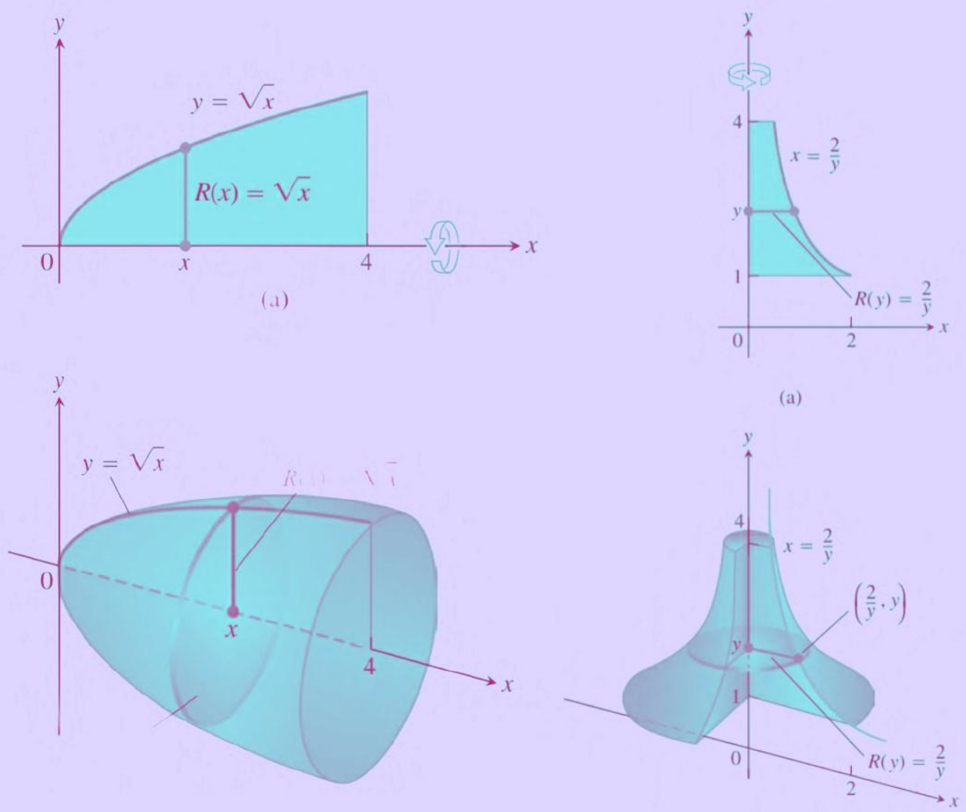
26

CÁLCULO DE UN VOLUMEN

SECCIONES TRANSVERSALES SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

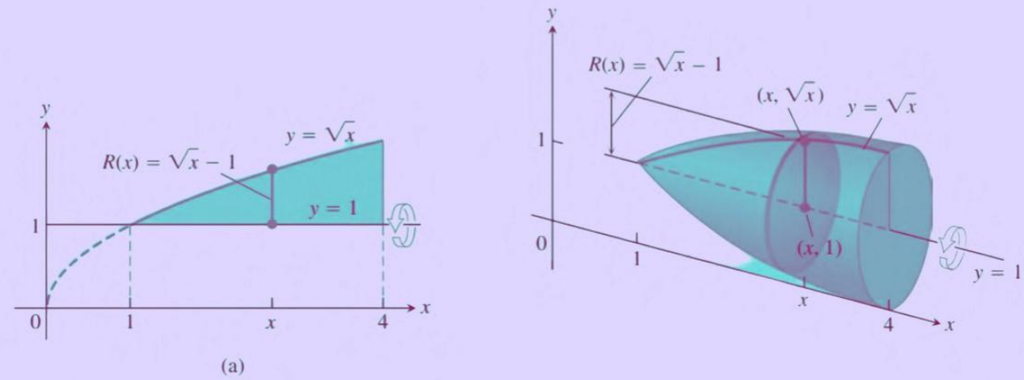
MÉTODO DE DISCOS

Las **secciones transversales** son discos de radio $R(x)$ o $R(y)$



Las **secciones transversales** son discos formados en rotación al **eje x**

Las **secciones transversales** son discos formados en rotación al **eje y**



Las **secciones transversales** son discos formados en rotación alrededor de la recta ***paralela al eje x***

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \pi [R(x)]^2\, dx.$$

Evaluación Tipo A (Pág 54-55)

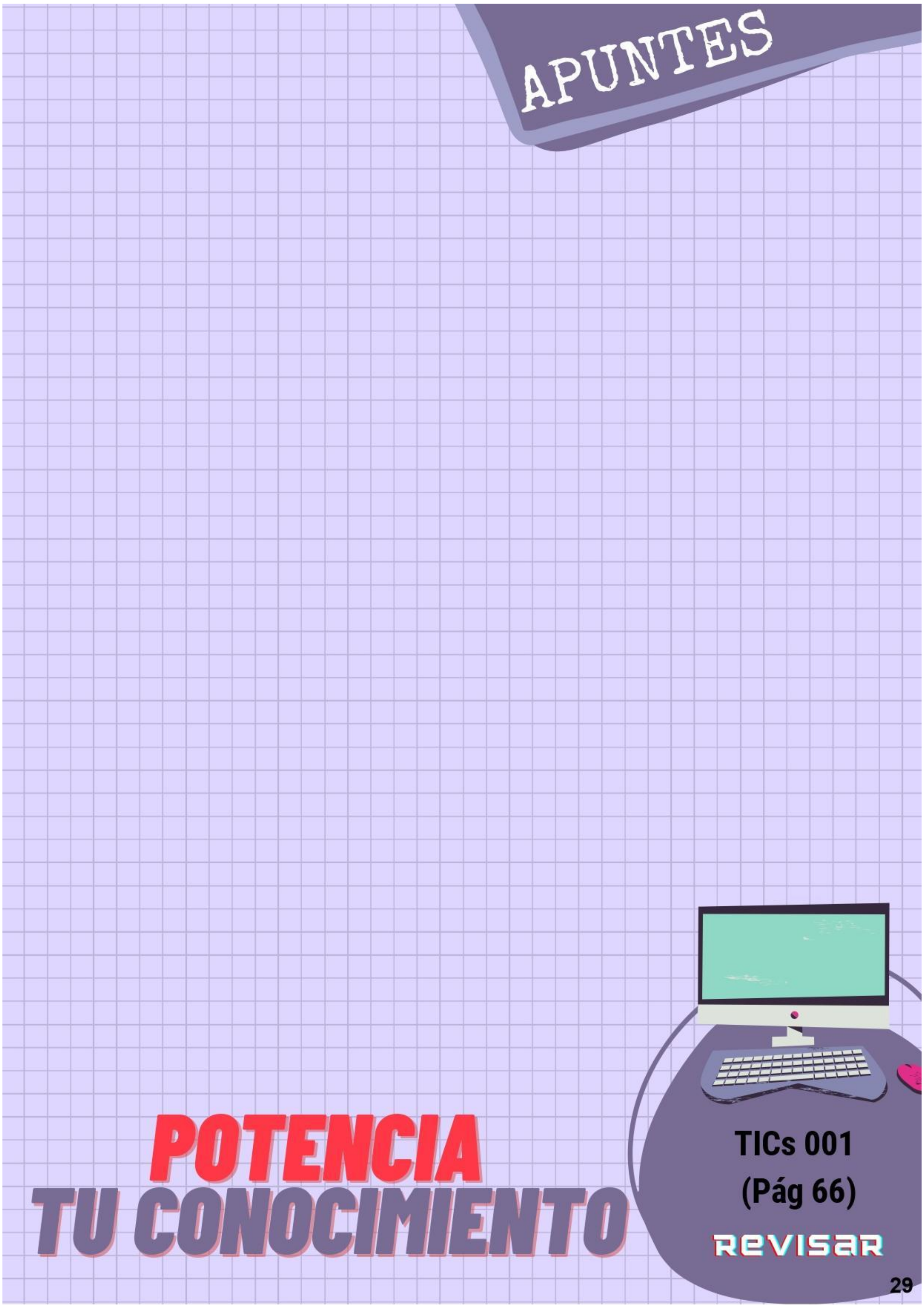
REVISAR

EJERCICIOS MÉTODO DE DISCOS

Hallar el volumen de los siguientes sólidos de revolución:
compruebe las gráficas y los resultados escaneando los siguientes códigos QR

$f(x)=-x^2+4$ en el intervalo $[-2,2]$	$f(x)=sen(x)$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$	$f(x)=-x^3$ en el intervalo $[-1,1]$

28

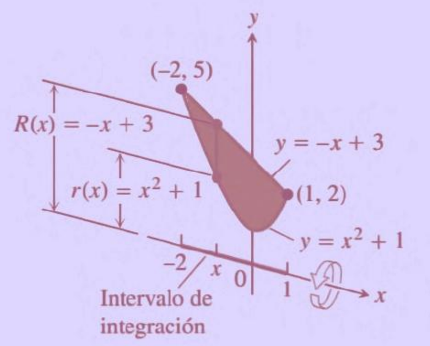

APUNTES
POTENCIA
TU CONOCIMIENTO
TICs 001
(Pág 66)
revisar
29

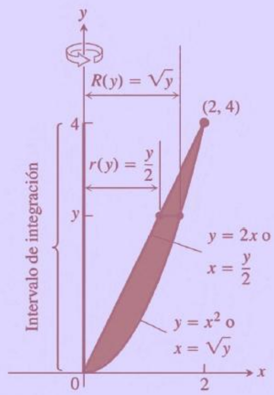
CÁLCULO DE UN VOLUMEN

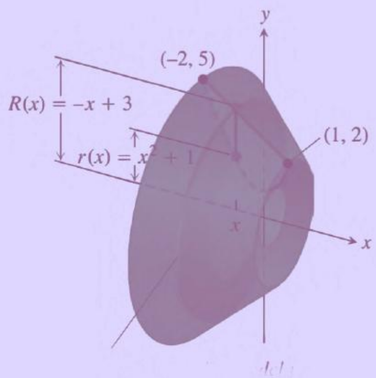
SECCIONES TRANSVERSALES SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

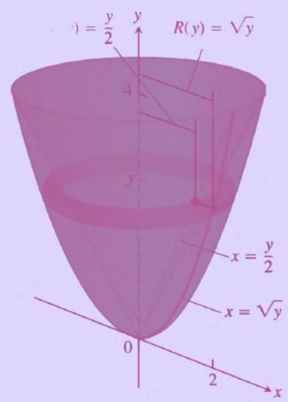
MÉTODO DE ARANDELAS

Las **secciones transversales** son arandelas de radio externo *R(x)* y radio interno r(x) o radio externo R(y) y radio interno r(y)







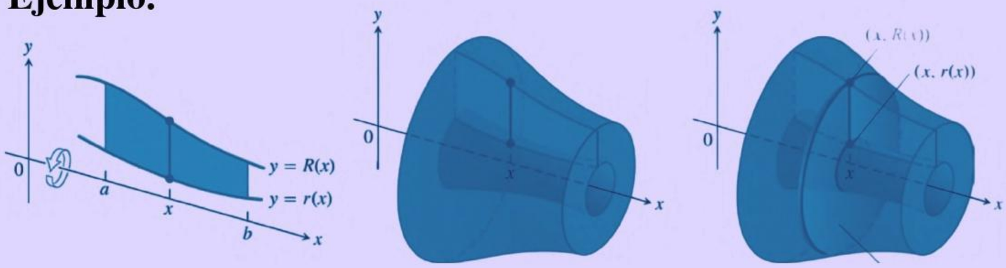


Las **secciones transversales** son arandelas formados en rotación al **eje x**

Las **secciones transversales** son arandelas formados en rotación al **eje y**

CÁLCULO DE VOLÚMENES POR ROTACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES ALREDEODR DE UN EJE

Ejemplo:



Las **secciones transversales** son arandelas de radio externo *R(x)* y radio interno r(x)

El **área** de cada sección transversal es:

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2$$

El **volumen** del sólido de revolución es:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

Para sólidos de revolución formados en rotación al **eje x**

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$

Para sólidos de revolución formados en rotación al **eje y**

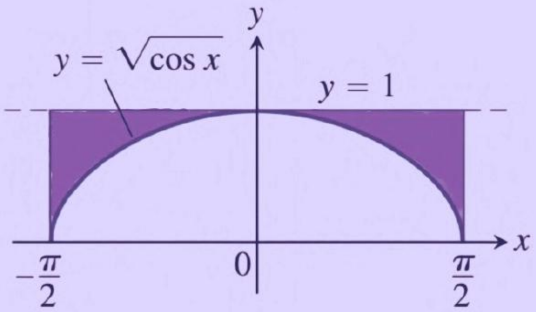
$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,dy$$

Evaluación Tipo A (Pág 54-55)

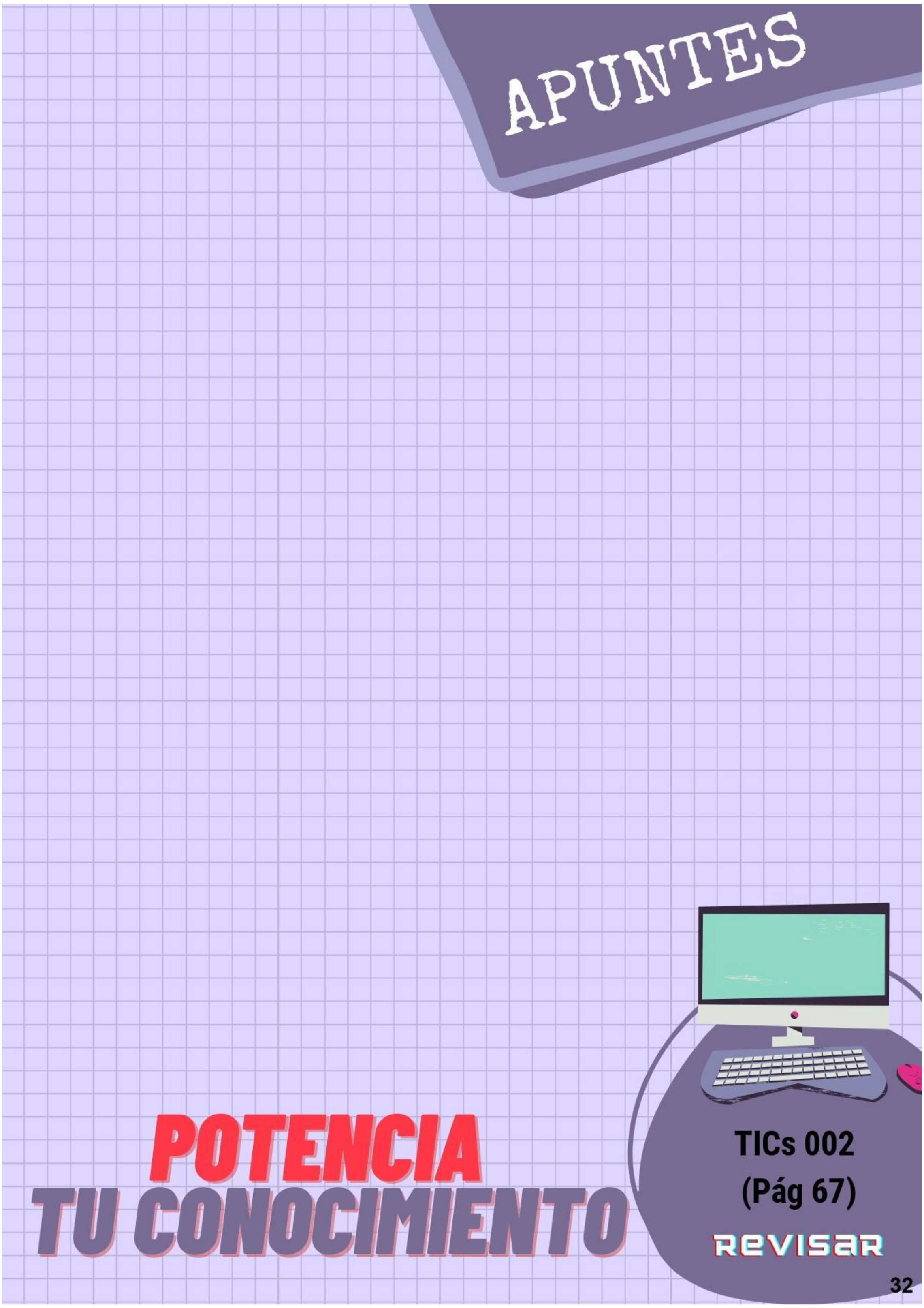
REVISAR

EJERCICIO MÉTODO DE ARANDELAS

Hallar el volumen del siguiente sólido de revolución alrededor del eje x: **compruebe la gráficas y el resultado** escaneando el siguiente código QR



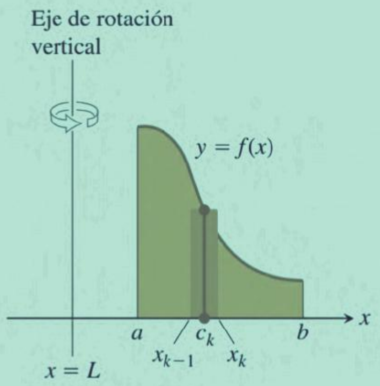
31

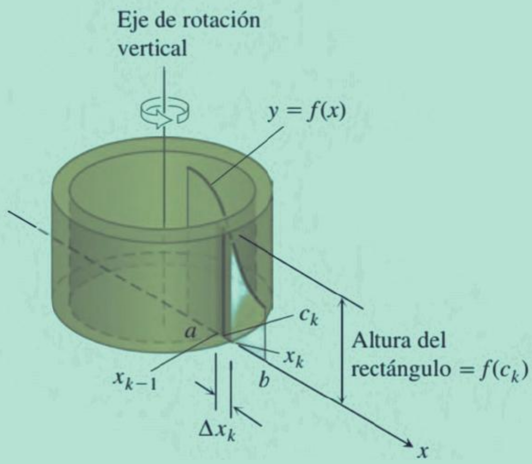

APUNTES
POTENCIA
TU CONOCIMIENTO
TICs 002
(Pág 67)
REVISAR
32

CÁLCULO DE UN VOLUMEN POR MEDIO DE CASQUETES CILÍNDRICOS

Sin importar la posición del eje de rotación (horizontal o vertical), los pasos para poner en práctica el método de los casquillos son:

1. *Dibujar la región y trazar un segmento de recta* que la cruce en forma *paralela* al eje de rotación. *Etiquetar* la altura o longitud del segmento (altura del casquillo) y la distancia desde el eje de rotación (radio del casquillo).
2. *Determinar* los límites de integración para la variable del grosor.
3. *Integrar* el producto 2π (radio del casquillo)(altura del casquillo) respecto de la variable del grosor (x o y) para determinar el volumen.





Para sólidos de revolución formados en rotación al **eje x**

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dy$$

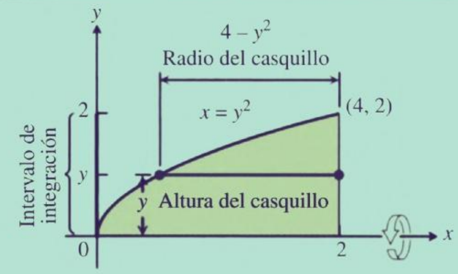
Para sólidos de revolución formados en rotación al **eje y**

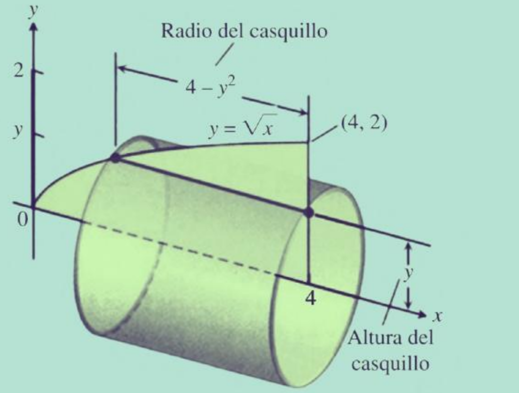
$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dx$$

33

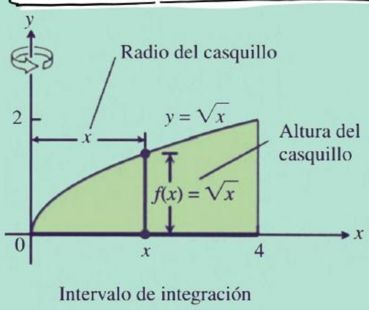
CÁLCULO DE VOLUMNES POR MEDIO DE CASQUETES CILINDRICOS

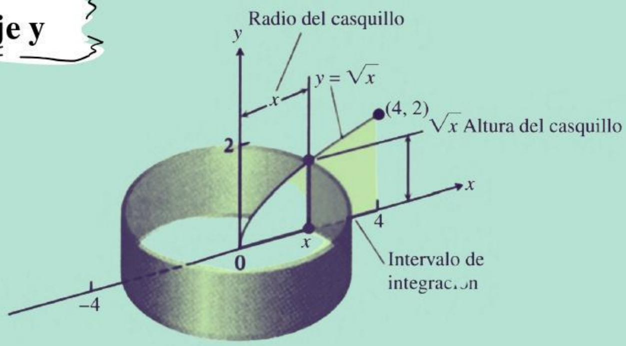
Para sólidos de revolución formados en rotación al **eje x**





Para sólidos de revolución formados en rotación al **eje y**



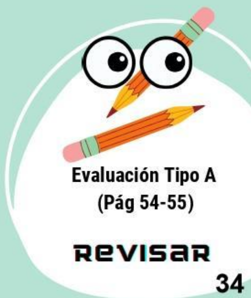


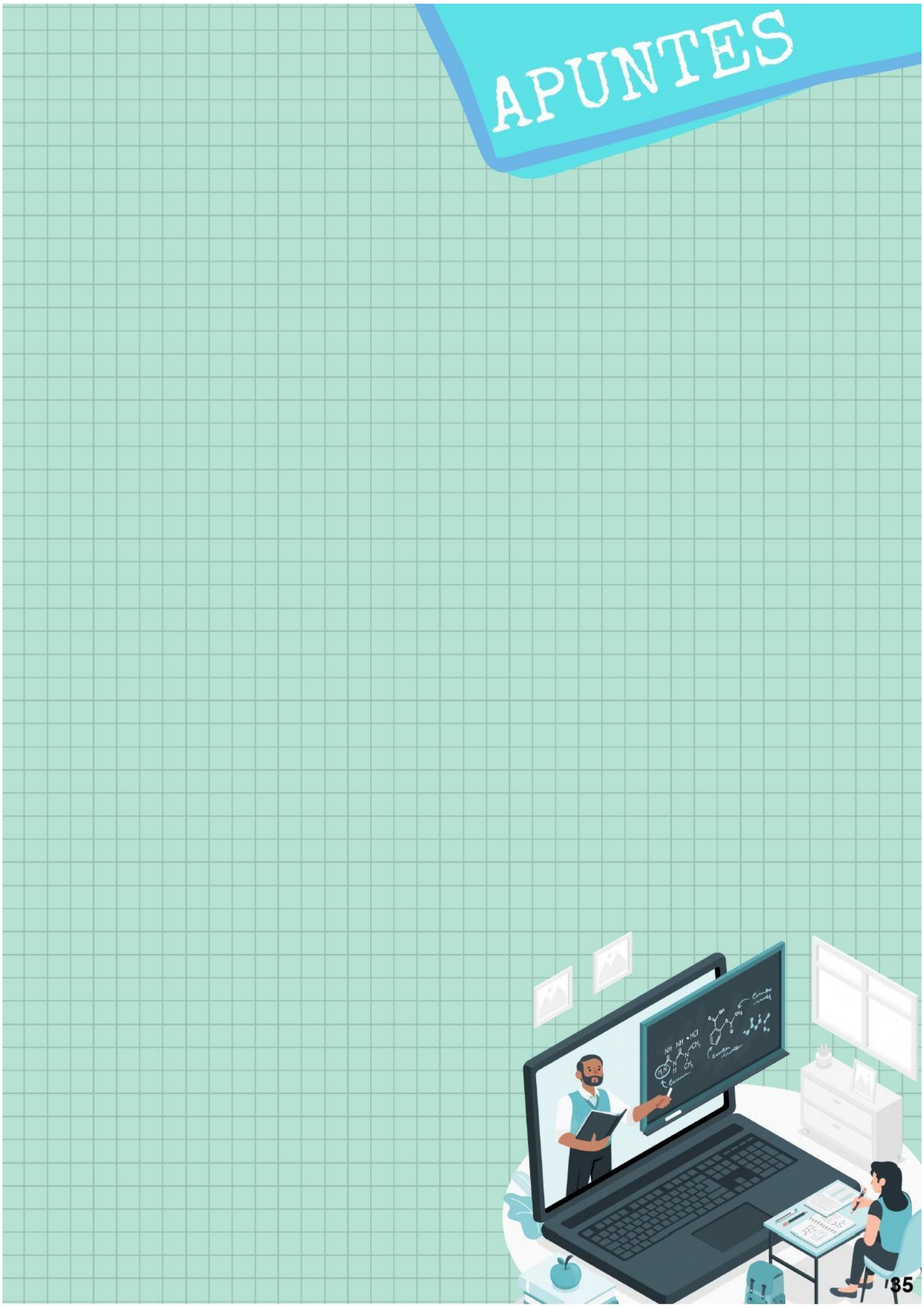
EJERCICIO MÉTODO DE CASQUETES CILÍNDRICOS

Hallar el volumen del siguiente sólido de revolución alrededor del eje x: **compruebe la gráficas y el resultado** escaneando el siguiente código QR

Volumen de *f(x)=-x^(2)+16* *0 ≤ x ≤ 4* **alrededor del eje Y**

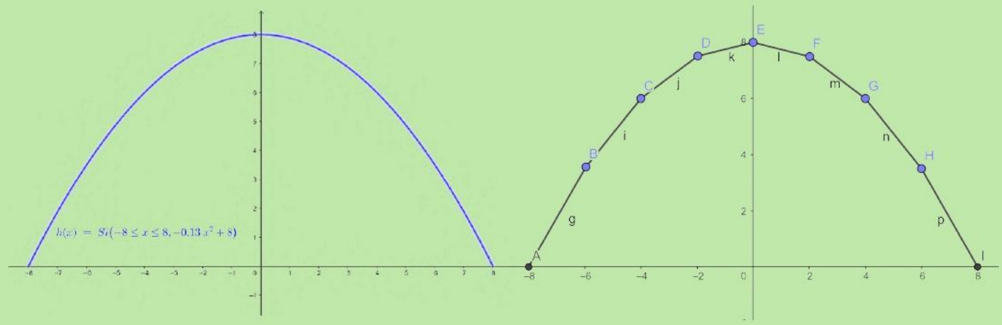
Volumen de *f(x)=sen(x) para 0 ≤ x ≤3.14* **alrededor del eje Y**



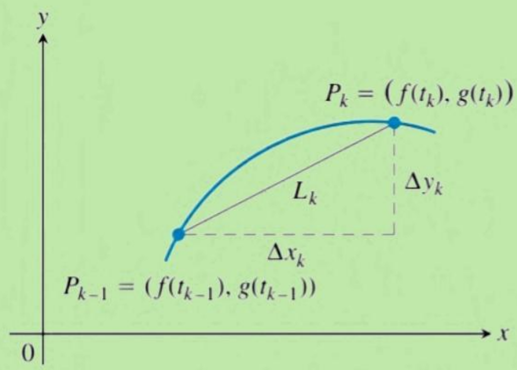

APUNTES

CÁLCULO DE LONGITUD DE CURVAS PLANAS

Una muy buena aproximación al cálculo de la longitud del arco de la función ***f(x)=-0.125x^(2)+8*** es la suma de las longitudes de sus segmentos



La longitud del arco $P_{k-1}P_k$ es igual al cálculo de la hipotenusa del siguiente triángulo caracterísitco



$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

La sumatoria de todos los k segmentos es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Cambiando Sumatorias enésimas por Integrales obtenemos la siguiente ecuación:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.}$$

$$x = t \qquad \text{y} \qquad y = f(t), \qquad a \le t \le b,$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = f'(t).$$

36

Según los límites de integración obtenemos las siguientes ecuaciones para calcular la longitud de curvas planas

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy.$$

EJERCICIOS LONGITUD DE CURVAS PLANAS

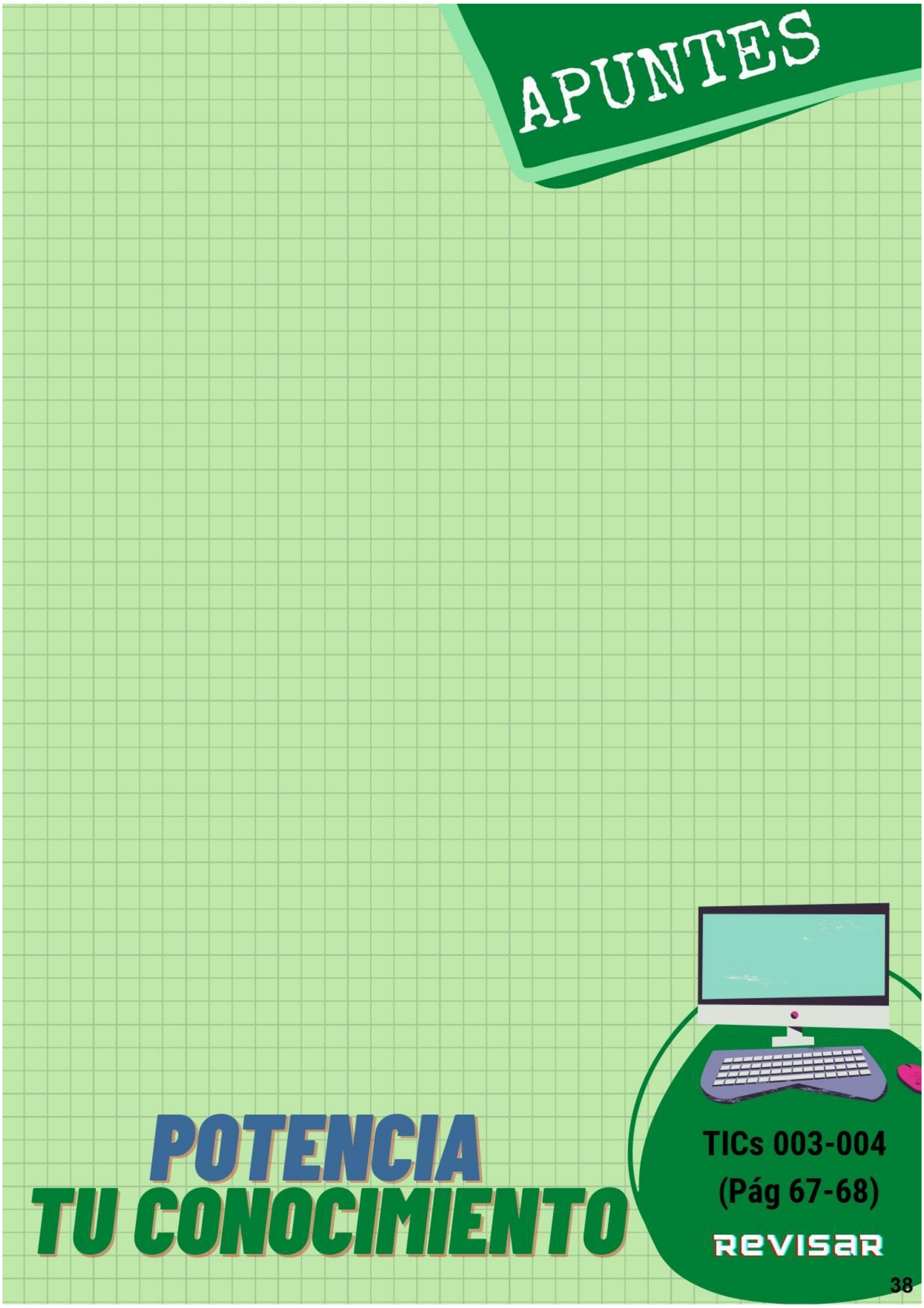
Calcular la longitud de las siguientes funciones:
Comprobar gráfica y resultados escaneando los siguientes códigos QR

f(x)= sen(x)
para: $0 \leq x \leq 2\pi$

f(x)= cos(x)
para: $0 \leq x \leq 3\pi$

f(x)= 5log(x)
para: $1 \leq x \leq 10$

f(x)= sen(x)cos(x)
para: $0 \leq x \leq 4\pi$


APUNTES
POTENCIA
TU CONOCIMIENTO
TICs 003-004
(Pág 67-68)
REVISAR
38

CÁLCULO DE MOMENTOS Y CENTROS DE MASA

TORQUE:

Torque o momento de una fuerza es una magnitud vectorial que representa la acción de una fuerza con respecto a un punto. Es igual al producto de la Fuerza por la distancia al punto de giro. **El Torque de un sistema** es igual a la sumatoria del momento de fuerza que ejerce cada masa.

$$\text{Torque del sistema} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3$$

Un sistema de masas se encuentra en **equilibrio** cuando el Torque del sistema es igual a 0

$$g \sum (x_k - \bar{x}) m_k = 0$$

$$\sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) = 0$$

$$\sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k = 0$$

$$\sum m_k x_k = \bar{x} \sum m_k$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al origen}}{\text{masa del sistema}}.$$

El punto $\bar{x}$ se denomina **centro de masa** del sistema.

MOMENTO Y CENTRO DE MASA DE UNA VARILLA (FRANJA):

Considerar que: el momento de cada pieza de la franja respecto del origen es aproximadamente $x_k\,\Delta m_k$, por lo que el momento del sistema es aproximadamente igual a la suma de $x_k\,\Delta m_k$:

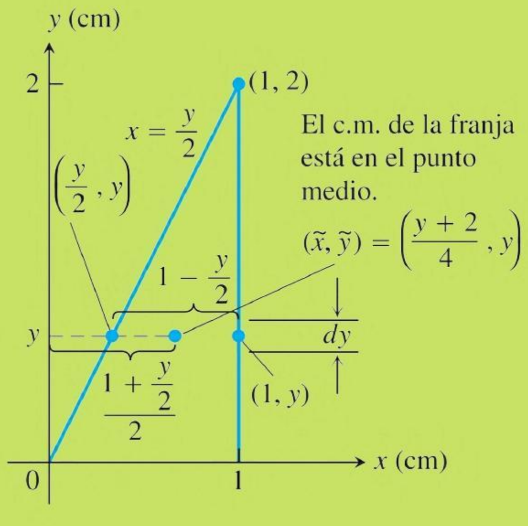
$$\text{momento del sistema} \approx \sum x_k\,\Delta m_k.$$

Para varillas no uniformes: si la densidad de la franja en x_k es $\delta(x_k)$, expresada en términos de masa por unidad de longitud y si δ es continua, entonces Δm_k es aproximadamente igual a $\delta(x_k)\,\Delta x_k$ (masa por unidad de longitud por longitud):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\,\Delta x_k.$$

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)\,dx}. = \frac{\text{momento del sistema con respecto al origen}}{\text{masa del sistema}}.$$

MOMENTO Y CENTRO DE MASA DE FIGURAS PLANAS:

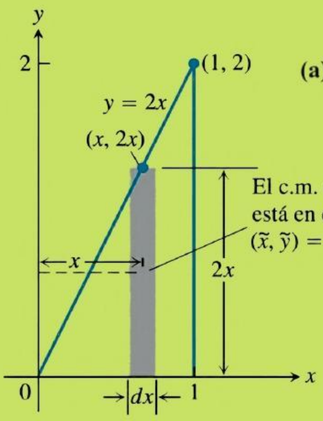


$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}.$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}.$$

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA

EJERCICIO MODELO:



(a) El momento M_y: La franja vertical representativa tiene

centro de masa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$

largo: $2x$

ancho: dx

área $dA = 2x\,dx$

masa: $dm = \delta\,dA = 3 \cdot 2x\,dx = 6x\,dx$

distancia del c.m. al eje y: $\tilde{x} = x$.

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$\tilde{x}\,dm = x \cdot 6x\,dx = 6x^2\,dx.$$

Por lo tanto, el momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^1 6x^2\,dx = 2x^3\Big]_0^1 = 2\text{ g}\cdot\text{cm}.$$

(b) La masa de la placa:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\,dx = 3x^2\Big]_0^1 = 3\text{ g}.$$

(c) La coordenada x del centro de masa de la placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\text{ g}\cdot\text{cm}}{3\text{ g}} = \frac{2}{3}\text{ cm}.$$

Por medio de un cálculo **análogo** se puede determinar y

Evaluación Tipo B
(Pág 56-57)

REVISAR

EJERCICIOS PROPUESTOS:

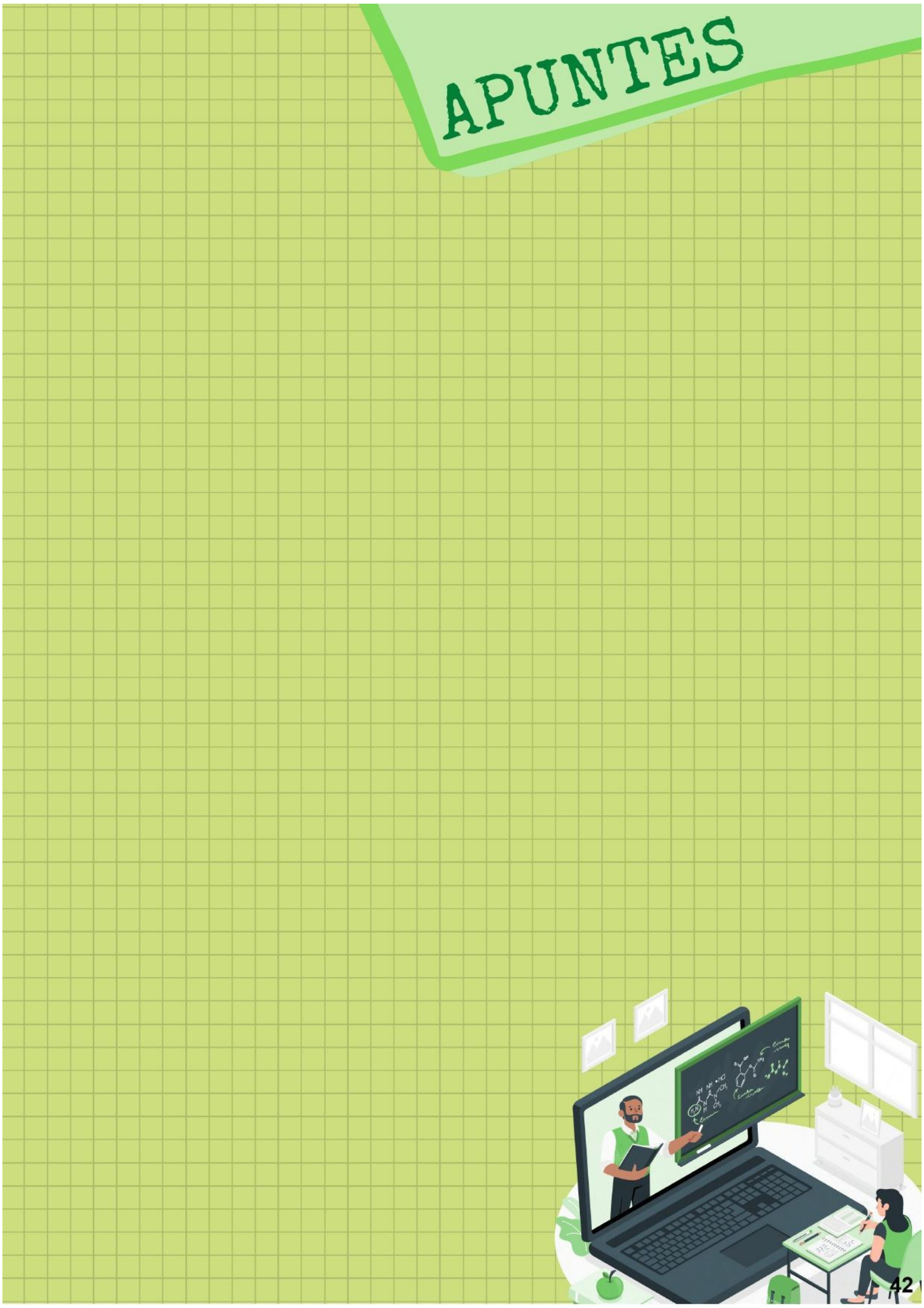
Hallar el centro de masa de las siguientes figuras:

compruebe las gráficas y el resultado escaneando los siguientes códigos QR

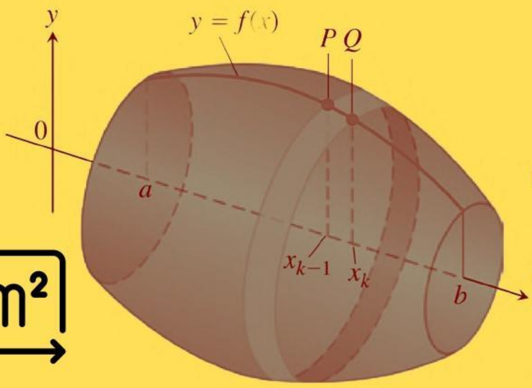
f(x)= x^2
δ =kx^2
para: 0 ≤ x ≤ 3

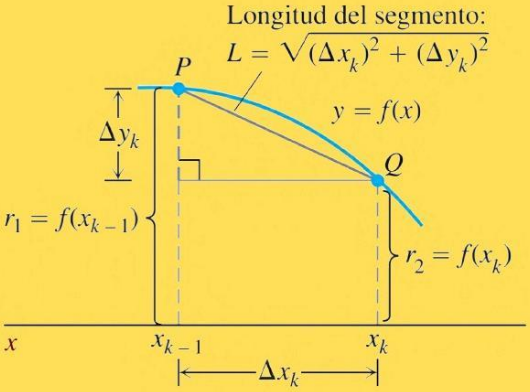
f(x)= -0.25x^(2)+8
δ =kx^2
para: 0 ≤ x ≤ 4

41


APUNTES
42

SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN





El área de una superficie de revolución es igual a:

$$S = \int 2\pi(\text{radio})(\text{ancho de la banda}) = \int 2\pi\rho \, ds$$

donde el radio (ρ) es igual a la distancia del diferencial al eje de rotación.
Según el eje de rotación tenemos las siguientes ecuaciones.

Rotación en el **eje x**

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy$$

Rotación en el **eje y**

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

TEOREMAS DE PAPPUS

TEOREMA 1 Teorema de Pappus para volúmenes

Si una región plana se hacer girar alrededor de una recta en el plano, de manera que esta última no corte el interior de la región, entonces el volumen del sólido generado es igual al área de la región por la distancia recorrida por su centroide durante la rotación. Si ρ es la distancia entre el eje de rotación y el centroide, entonces

$$V = 2\pi\rho A.$$

TEOREMA 2 Teorema de Pappus para áreas de superficies

Si un arco de una curva plana suave se hacer girar una vez alrededor de una recta en el plano, de manera que ésta no corte el interior del arco, entonces el área de la superficie generada por el arco es igual a la longitud del arco por la distancia recorrida por el centroide del arco durante la rotación. Si ρ es la distancia entre el eje de rotación y el centroide, entonces

$$S = 2\pi\rho L.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar el área de las siguientes superficies **alrededor del eje x**:
compruebe las gráficas y el resultado escaneando los siguientes códigos QR

f(x)= -0.25x^2+4 **para: 0 ≤ x ≤ 4**

f(x)= cos(x)+1 **para: 0 ≤ x ≤ 6.28**

f(x)= sen(x)+1 **para: 0 ≤ x ≤ 9**

f(x)= -sen(x)cos(x)+1 **para: 0 ≤ x ≤ 4**

APUNTES

TRABAJO DE UNA FUERZA

Trabajo realizado por una fuerza constante

Cuando un cuerpo se mueve una distancia d a lo largo de una línea recta como resultado de la aplicación de una fuerza constante de magnitud F en la dirección del movimiento, definimos el **trabajo** T realizado por la fuerza sobre el cuerpo mediante la fórmula

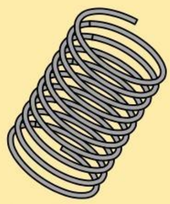
$$T = Fd \qquad \text{(Fórmula para calcular el trabajo con fuerza constante).}$$

$$\text{Trabajo} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k.$$

El Trabajo de una fuerza es igual a la **sumatoria de los trabajos** efectuados por una fuerza sobre un cuerpo en cada porción de espacio

El **trabajo** realizado por una fuerza variable $F(x)$ dirigida a lo largo del eje x de $x = a$ a $x = b$ es

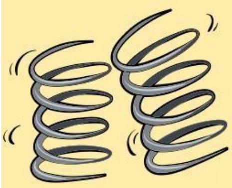
$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

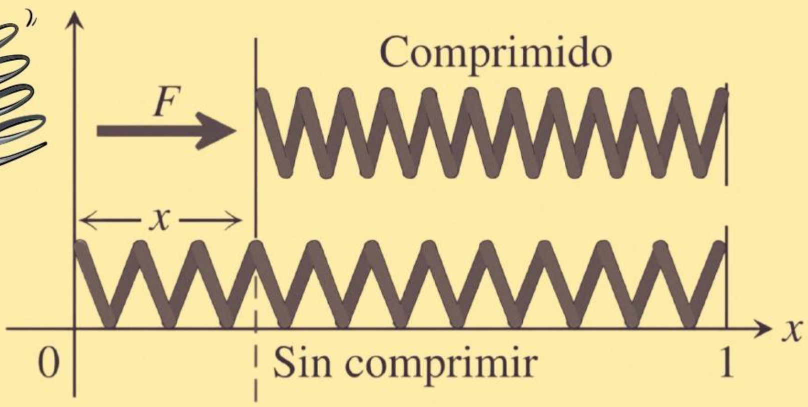


Ley de Hooke para resortes: $F = kx$

La **ley de Hooke** establece que la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud a partir de su longitud natural (sin comprimir), es proporcional a x. En símbolos,

$$F = kx.$$

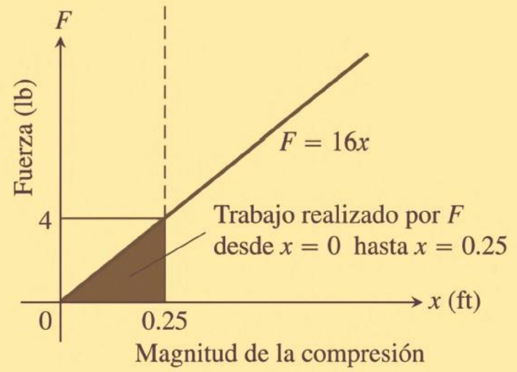


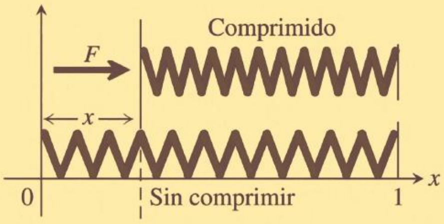


Ejercicio Modelo

Ley de Hooke para resortes: $F = kx$

Determinar el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 pie a una longitud de 0.75 pies, si la constante del resorte es $k = 16$ lb/pie.



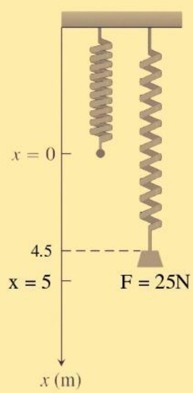


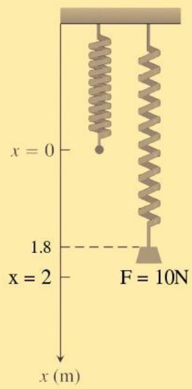
$$W = \int_a^b F(x)\, dx. \qquad W = \int_0^{0.25} 16x\, dx = 8x^2 \Big]_0^{0.25} = 0.5 \text{ lb-pies}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar el trabajo realizado por las siguientes fuerzas :

compruebe las gráficas y el resultado escaneando los siguientes códigos QR

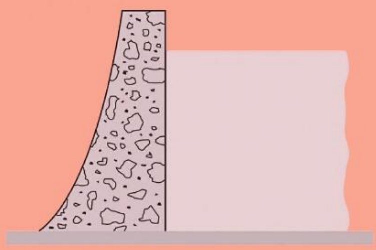




APUNTES

PRESIÓN Y FUERZAS DE FLUIDOS

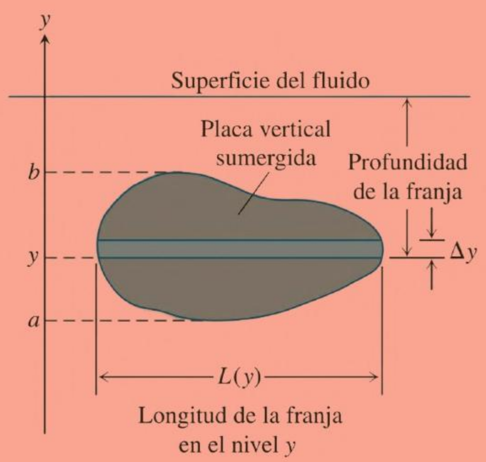
En un fluido que está en reposo, la presión p a una profundidad h es la densidad del fluido w por h:



$$p = wh.$$

Cómo podemos ver la presión es proporcional a la profundidad *h*, por esta razón la construcción de las presas tiene esta forma para soportar la presión en la base.

PRESIÓN EN PLACAS SUMERGIDAS



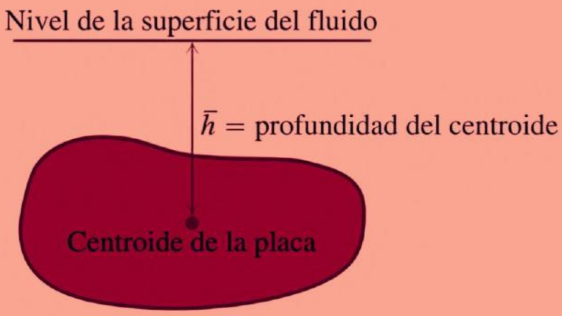
$$F = pA = whA$$

F = fuerza total = fuerza por unidad de área × área
= presión × área = pA
= whA.

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{profundidad de la franja})_k \cdot L(y_k))\, \Delta y_k.$$

$$F = \int_a^b w \cdot (\text{profundidad de la franja}) \cdot L(y)\, dy.$$

FUERZA DE FLUIDOS Y CENTROIDES

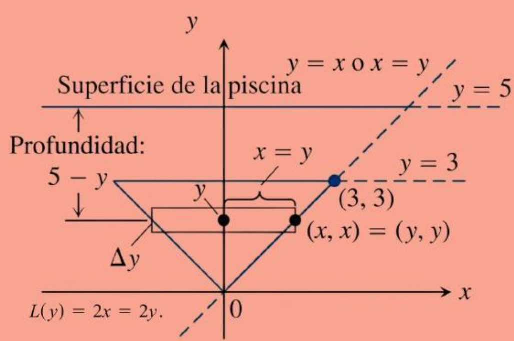


La fuerza de un fluido de densidad w contra un lado de una placa plana vertical sumergida, es el producto de w, la distancia $\bar{h}$ entre el centroide de la placa y la superficie del fluido, y el área de la placa:

$$F = w\bar{h}A.$$

EJERCICIO MODELO

Una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles, con base de 6 metros y altura de 3 metros, se sumerge verticalmente, con la base hacia arriba, 2 metros por debajo de la superficie de una alberca. Determinar la fuerza ejercida por el agua contra un lado de la placa.

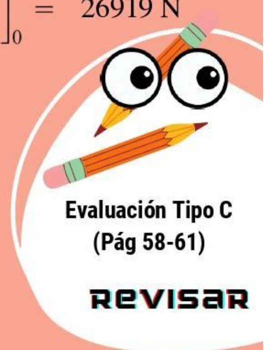


$$F = \int_a^b w \cdot \begin{pmatrix}\text{profundidad}\\ \text{de la franja}\end{pmatrix} \cdot L(y)\, dy$$

$$= \int_0^3 (997)(5-y)2y\, dy$$

$$= (1994)\int_0^3 (5y - y^2)\, dy$$

$$=(1994)\left[\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 26919 \text{ N}$$



MÉTODO CENTROIDE

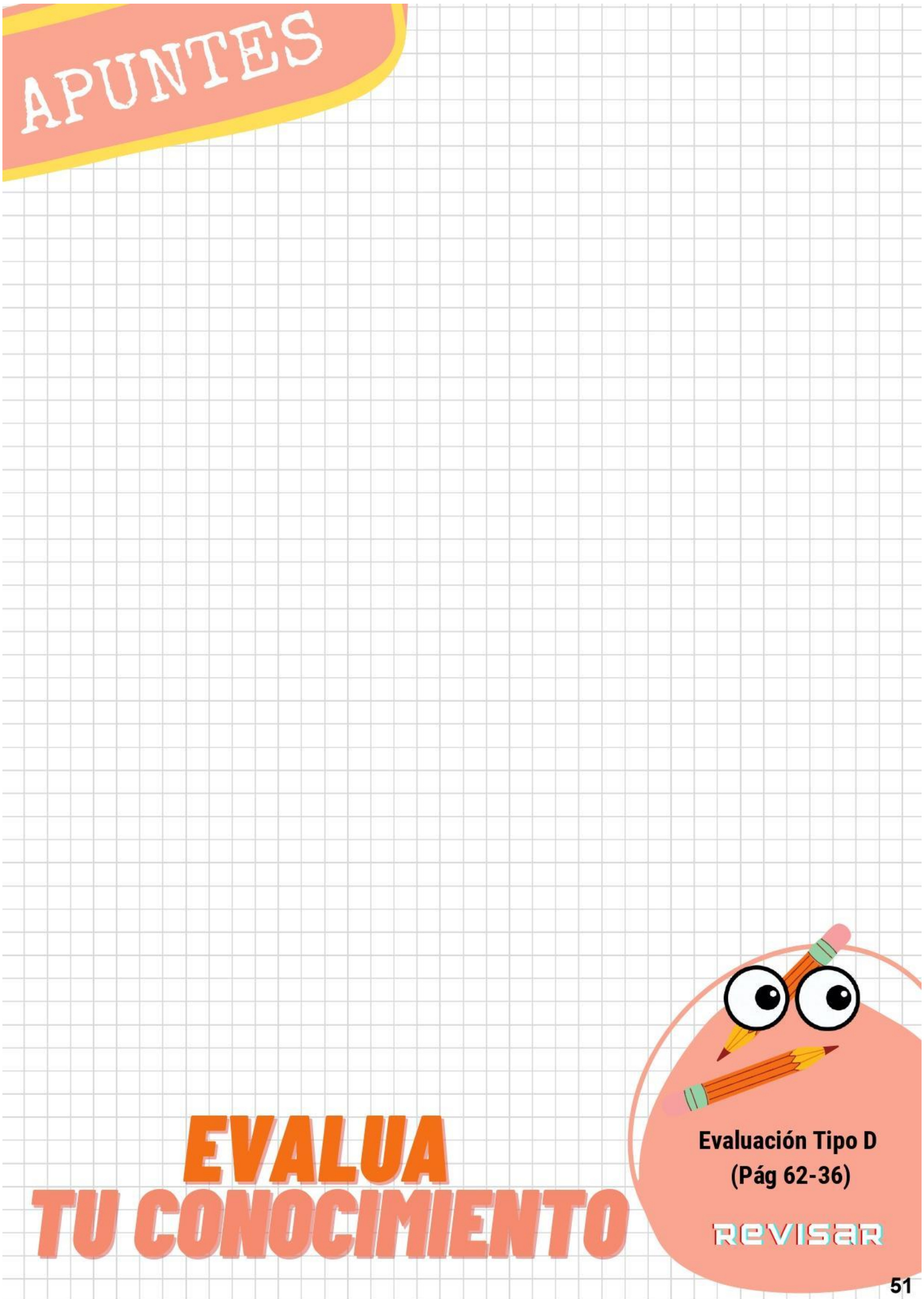
$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

$$F = w\bar{h}A = (\ 997\ )(3)(9)$$

$$= 26919 \text{ N}$$

El centroide del triángulo está en el eje y, a un tercio de la distancia entre la base y el vértice, así que $\bar{h}$=3


APUNTES
EVALUA
TU CONOCIMIENTO
Evaluación Tipo D
(Pág 62-36)
REVISAR
51

EVALUACIONES

52

EVALUACIÓN

TIEMPO: 30 MIN

TIPO A 001

CÁLCULO DE VOLÚMENES POR ROTACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES ALREDEODR DE UN EJE
CÁLCULO DE VOLUMNES POR MEDIO DE CASQUETES CILINDRICOS

1. Determine el volumen de la siguiente región **$y=x^2$** acotada por las rectas **$y=0$**, **$x=2$,** en rotación con el **eje X**

2. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido de revolución al **eje Y,** acotado por **$y=2x$, $y=x/2$, $x=1$**

53

EVALUACIÓN **TIEMPO: 30 MIN** **TIPO A** **002**

CÁLCULO DE VOLÚMENES POR ROTACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES ALREDEODR DE UN EJE
CÁLCULO DE VOLUMNES POR MEDIO DE CASQUETES CILINDRICOS

Determine el volumen de la siguiente región $y = \sqrt{9 - x^2}$ acotada por **y=0,** en rotación alrededor del **eje x**

2. Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen del sólido de revolución al **eje Y,** acotado por **$y = 2 - x^2$, $y = x^2$, $x = 0$**

54

TIEMPO: 30 MIN

EVALUACIÓN TIPO B 001

- LONGITUD DE CURVAS PLANAS
- MOMENTOS Y CENTRO DE MASA

1.Determine la longitud de la curva $y=x^{3/4}$ de $x=0$ a $x=3$

2. Determine el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ en la región acotada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=4$

55

EVALUACIÓN

TIEMPO: 30 MIN

TIPO B 002

- LONGITUD DE CURVAS PLANAS
- MOMENTOS Y CENTRO DE MASA

1.Determine la longitud de la curva $x=(y^4/4) + 1/(8y^2)$ de y=1 a y=3

2. Determine el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ en la región acotada por $y=25- x^2$ y el **eje x**

56

EVALUACIÓN

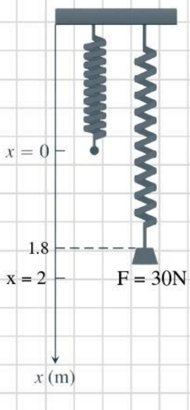
TIEMPO: 45 MIN

TIPO C 001

- SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN
- TRABAJO
- PRESIÓN Y FUERZAS DE FLUIDOS

1.Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta ***y=x/2*** de ***x=0*** a ***x=4*** alrededor del **eje Y**. **Compruebe** su respuesta con la fórmula geométrica.

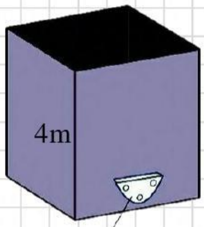
2. Determine el Trabajo realizado al extender el resorte desde su posición inicial hasta X=1.8. La constante de elasticidad la puede obtener usando la fórmula F=kx



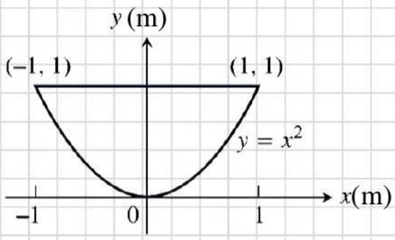
57

2. El tanque cúbico de metal que se muestra a continuación tiene una puerta parabólica, que se mantiene en su lugar por medio de tornillos y fue diseñado para soportar una fuerza del fluido de 2000N sin romperse. El líquido que se planea almacenar en él tiene una densidad de 1 kg/dm³

.¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la puerta cuando el líquido tiene 2 metros de profundidad?



Compuerta parabólica



Vista ampliada de la compuerta parabólica

58

EVALUACIÓN

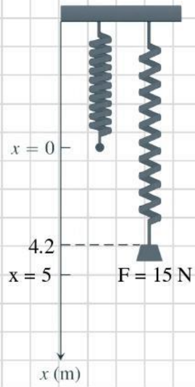
TIEMPO: 45 MIN

TIPO C 002

- SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN
- TRABAJO
- PRESIÓN Y FUERZAS DE FLUIDOS

1. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y=x/3$ de $x=0$ a $x=3$ alrededor del **eje X**. **Compruebe** su respuesta con la fórmula geométrica.

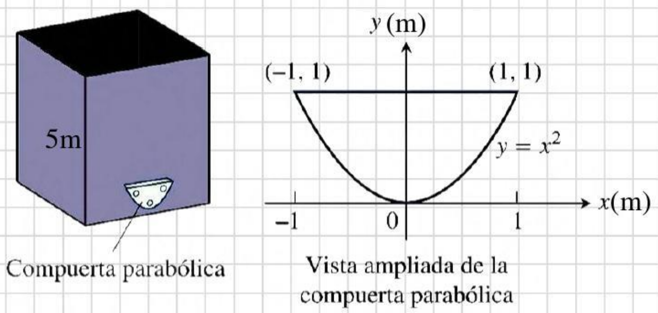
2. Determine el Trabajo realizado al extender el resorte desde su posición inicial hasta X=4.2. La constante de elasticidad la puede obtener usando la fórmula F=kx



59

2. El tanque cúbico de metal que se muestra a continuación tiene una puerta parabólica, que se mantiene en su lugar por medio de tornillos y fue diseñado para soportar una fuerza del fluido de 2100N sin romperse. El líquido que se planea almacenar en él tiene una densidad de 1 kg/dm³

¿Cuál es la altura máxima a la que puede llenarse el depósito sin exceder sus limitaciones de diseño?



EVALUACIÓN

TIEMPO: 120MIN

TIPO D 001

- CÁLCULO DE VOLÚMENES POR ROTACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES ALREDEODR DE UN EJE
- CÁLCULO DE VOLUMNES POR MEDIO DE CASQUETES CILINDRICOS
- LONGITUD DE CURVAS PLANAS
- MOMENTOS Y CENTRO DE MASA
- SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN
- TRABAJO
- PRESIÓN Y FUERZAS DE FLUIDOS

1. Determine el volumen de la siguiente región **y=sen(x)** acotada por las rectas ***y=0***, **x=π**, en rotación con el ***eje X***

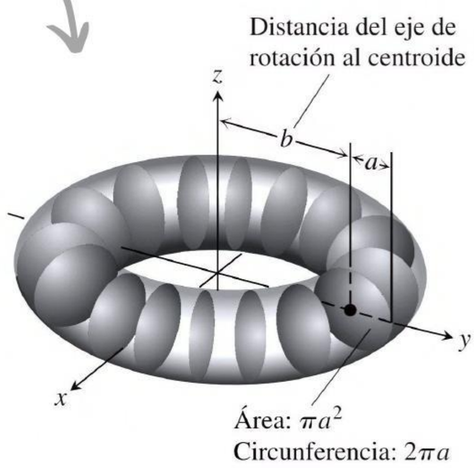
2. Utilice el **método de los cascarones** para determinar el volumen del sólido de revolución al ***eje Y***, acotado por ***$y=3-x^2$, $y=x^2$, $x=0$***

3. Determine la longitud de la figura acotada por ***$y=5-x^2$, $y=2x$, $x=0$***

4. Determine la superficie exterior de del sólido de revolución de la figura acotada por **$y=8-x^2$** y los ejes coordenados.

5. Describa las ecuaciones para encontrar los momentos, masas y el centro de masa de una placa delgada que cubre una región en el plano XY.

6. Utilizando el Teorema de Pappus determine el Volumen del siguiente toro (con forma de rosquilla)



61

EVALUACIÓN **TIEMPO: 120MIN** **TIPO D 001**

- CÁLCULO DE VOLÚMENES POR ROTACIÓN DE SECCIONES TRANSVERSALES ALREDEODR DE UN EJE
- CÁLCULO DE VOLUMNES POR MEDIO DE CASQUETES CILINDRICOS
- LONGITUD DE CURVAS PLANAS
- MOMENTOS Y CENTRO DE MASA
- SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN
- TRABAJO
- PRESIÓN Y FUERZAS DE FLUIDOS

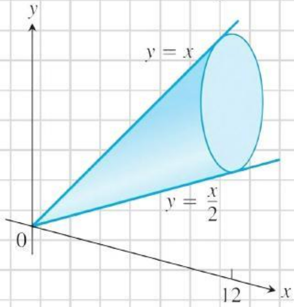
1. Determine el volumen de la siguiente región **y=cos(x)** acotada por las rectas ***y=0***, **x=π/2**, en rotación con el ***eje X***

2. Utilice el **método de los cascarones** para determinar el volumen del sólido de revolución al ***eje Y***, acotado por ***y=8 - x², y=x², x=0***

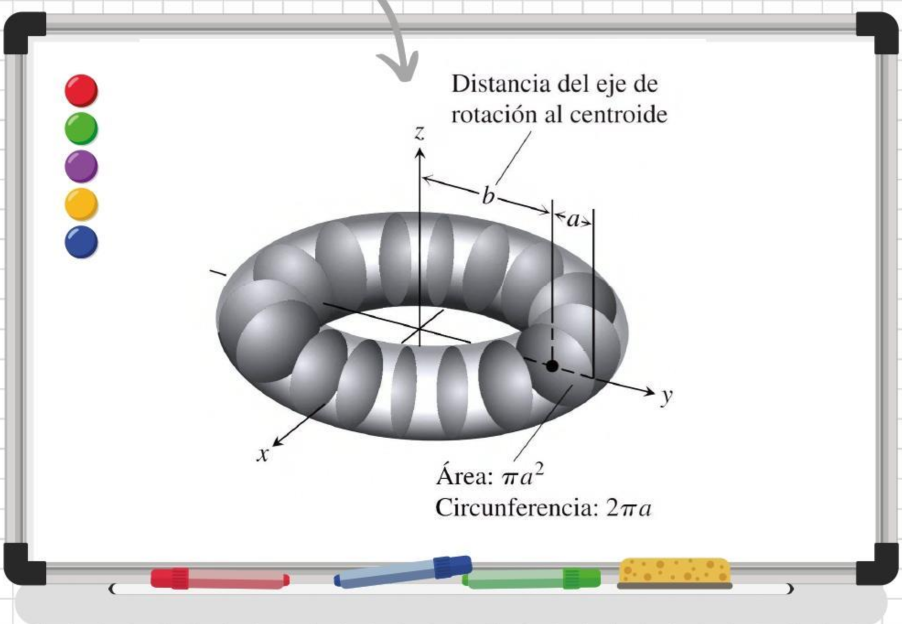
3. Determine la longitud de la figura acotada por ***y=8 - x², y=1.5x, x=0***

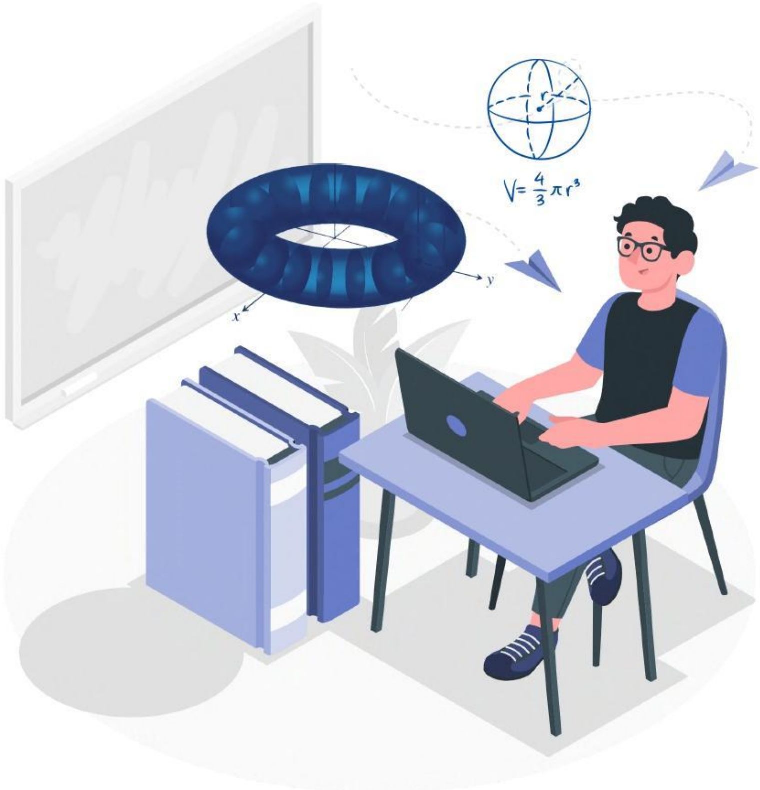
4. Determine la superficie exterior de del sólido de revolución de la figura acotada por **y=x²** y los ejes coordenados.

5. Describa como se puede utilizar el Principio de Cavalieri para determinar el volumen del sólido de revolución acotado entre las rectas y=x/2, y=x



6. Utilizando el Teorema de Pappus determine la superficie exterior del siguiente toro (con forma de rosquilla)





IMPLEMENTACIÓN DE TIC'S

TICs

Códigos QR

Los ejercicios propuestos en este documento pueden ser revisados escaneando su respectivo código QR

APPLETS

Un applet es un componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo, en un navegador web. usted únicamente necesitará de una conexión a internet

GeoGebra

GeoGebra es una aplicación de ordenador que permite construir figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y genera gráficas de funciones que pueden ser modificadas de forma dinámica utilizando el ratón. GeoGebra cuenta con una página web que permite utilizar todas las herramientas del programa de ordenador

Todos los ejercicios propuestos cuentan con un código QR que redirecciona a un applet de GeoGebra en el que el usuario podrá revisar y comprobar resultados, además de modificar los valores para el estudio autónomo.

NOTA

En el caso de contar con un dispositivo para leer los códigos QR, usted encontrará todos los links a cada ejercicio en la siguiente pag:

https://linktr.ee/woruormo

64

TICs

001

Escanea el siguiente código QR

Modifique los siguientes parámetros
Número de particiones (n=21)
Límite inferior (a=0)
Límite Superior (b= Aleatorio)

Pegue aquí captura de pantalla de los cálculos efectuados por la Applet

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet marcando únicamente la casilla Discos

☑ Discos

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet marcando únicamente la casilla Sólido de Revolución

☑ Sólido de revolución

NOTA

En el caso de contar con un dispositivo para leer los códigos QR, usted encontrará todos los links a cada ejercicio en la siguiente pag:

65

TICs 002

Escanea el siguiente código QR

Modifique los siguientes parámetros
f(x)= sen 2x

Pegue aquí captura de pantalla de los cálculos efectuados por la Applet

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet Deslizando el l rectángulo diferencial en el gráfico de la izquierda, y marcando únicamente la opción "mostrar sumas de Rlemann"

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet Deslizando el l rectángulo diferencial en el gráfico de la izquierda, y marcando únicamente la opción sólido de revolución

NOTA

En el caso de contar con un dispositivo para leer los códigos QR, usted encontrará todos los links a cada ejercicio en la siguiente pag:

66

TICs

003

Escanea el siguiente código QR

Modifique los siguientes parámetros
Número de particiones (n=5)
Límite inferior (a=0)
Límite Superior (b= Aleatorio)

Pegue aquí captura de pantalla de los cálculos efectuados por la Applet

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet con 5 particiones

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet con el número máximo de particiones

NOTA

En el caso de contar con un dispositivo para leer los códigos QR, usted encontrará todos los links a cada ejercicio en la siguiente pag:

67

TICs 004

Escanea el siguiente código QR

Modifique los siguientes parámetros
$f(x) = \cos(2x) + 1$
límite superior= Aleatorio

Pegue aquí captura de pantalla de los cálculos efectuados por la Applet

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet, deslizando el ángulo de rotación hasta los 180°

Pegue aquí captura de pantalla de la parte gráfica efectuada por la Applet, deslizando el ángulo de rotación hasta los 360°

NOTA

En el caso de contar con un dispositivo para leer los códigos QR, usted encontrará todos los links a cada ejercicio en la siguiente pag:

68