Facultad De Filosofía Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

“Propuesta Metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de derivadas en las funciones trascendentes”

Trabajo de Titulación Previo a la Obtención del Título de Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física.

AUTORES:

Daniel Augusto López Reinoso

C.I: 0105821169

Correo electrónico: daniel.lopez.r@hotmail.com

Francisco Leonel Sigüenza Cuesta

C.I: 0105195002

Correo electrónico: fransiguenza0207@gmail.com

DIRECTORA:

Msc. Carmen Eulalia Calle Palomeque

C.I. 0301166708

Cuenca, Ecuador

08-septiembre-2022

RESUMEN

La propuesta metodológica está dirigida a los profesores de Cálculo Diferencial de los niveles de educación media y superior, la cual proporciona una metodología instruccional diferente a la tradicional, generando un aprendizaje significativo en los estudiantes a través de la modelación matemática. Esta modelación matemática surge en la enseñanza como una estrategia moderna. Además, fortalece el aprendizaje autónomo y la construcción del conocimiento en los estudiantes a través del contraste entre las matemáticas y el contexto. Este hecho se refleja en la creación de problemas y su resolución. Finalmente, la propuesta expone las herramientas necesarias para el planteamiento de problemas como son las demostraciones de las derivadas de las funciones trascendentes.

Palabras clave: Propuesta metodológica. Cálculo diferencial. Funciones trascendentes. Modelización matemática. Recursos didácticos. Demostraciones.

ABSTRACT

The methodological proposal is aimed at teachers of Differential Calculus at middle and higher education levels. It provides an instructional methodology different from the traditional one, generating meaningful learning in students through mathematical modeling. This Mathematical modeling emerges in teaching as a modern strategy. In addition, it strengthens autonomous learning and the construction of knowledge in students through the contrast between mathematics and the context. This fact is reflected in the creation of problems and their resolution. Finally, the proposal exposes the necessary tools for posing problems such as the demonstrations of the derivatives of transcendental functions.

Keywords: Methodological proposal. Diferential calculus. Transcendental functions. Mathematical modelling. Didactic resources. Demonstrations.

ÍNDICE

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Daniel Augusto López Reinoso en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Propuesta Metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de derivadas en las funciones trascendentes" en el primer año de Bachillerato General Unificado.", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 8 de septiembre de 2022

Daniel López

Daniel Augusto López Reinoso

C.I: 0105821169

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Francisco Leonel Sigüenza Cuesta en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Propuesta Metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de derivadas en las funciones trascendentes" en el primer año de Bachillerato General Unificado.", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 8 de septiembre de 2022

Francisco Leonel Sigüenza Cuesta

C.I: 0105195002

Cláusula de Propiedad Intelectual

Daniel Augusto López Reinoso, autor del trabajo de titulación "Propuesta Metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de derivadas en las funciones trascendentes", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 8 de septiembre de 2022

Daniel López

Daniel Augusto López Reinoso

C.I: 0105821169

Cláusula de Propiedad Intelectual

Francisco Leonel Sigüenza Cuesta, autor del trabajo de titulación "Propuesta Metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de derivadas en las funciones trascendentes", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 8 de septiembre de 2022

Francisco Leonel Sigüenza Cuesta

C.I: 0105195002

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradezco a Dios quien me ha protegido siempre en el trayecto de la vida. Para la elaboración de este proyecto fue importante el apoyo de mis padres César y Libia de mis hermanos Lorena y Javier quienes me han formado desde mi niñez, fomentando siempre la responsabilidad, honestidad y la educación que son los valores más importantes de una persona.

Expreso mi agradecimiento muy especial a mi tío Jeovanni Reinoso quien con su fortaleza y sabiduría logró ayudarme a superar mi estado de salud, brindando todos sus conocimientos para mi bienestar.

A todos los docentes y autoridades que laboran en la Universidad de Cuenca, quienes han facilitado el uso de las instalaciones para las diferentes actividades realizadas para la elaboración del proyecto. De manera específica al Dr. Marco Jácome Guzmán quien con sus conocimientos impartidos infundió en trabajar con los contenidos enseñados por él.

Gracias a mi compañero y amigo Francisco con quien he compartido siempre dentro y fuera de la Universidad, además ha estado en mis buenos y malos momentos apoyándome de una manera incondicional.

A la Msc. Eulalia Calle Palomeque quien como directora del Trabajo de Titulación y docente de la facultad nos apoyó en todo momento para la elaboración del proyecto, dedicando su tiempo para impulsar a ser una mejor persona y un buen docente.

Daniel

DEDICATORIA

El presente trabajo va dedicado principalmente a Dios por las bendiciones que ha derramado sobre en mi protegiendo mi salud y derramando muchas bendiciones sobre mí en el trayecto de mi instrucción para llegar a ser un profesional.

Este proyecto va dedicado para mis familiares que estuvieron pendiente de mi en mis situaciones difíciles y que me han guiado por un buen camino para llegar a ser una buena persona y un buen profesional.

Daniel

AGRADECIMIENTO

Agradezco inicialmente a Dios por concederme la salud y el bienestar para haber podido culminar mi carrera universitaria. De igual manera reconozco todo el esfuerzo de mi familia, quienes no dudaron en apoyarme en lo que pudieron, para que culmine mis estudios. Gracias a mi directora de tesis Msc. Eulalia Calle por guiarnos en cada etapa del desarrollo de nuestra propuesta, además por su paciencia, esfuerzo y compromiso hacia nuestro trabajo. Gracias al Dr. Marco Jácome, quien nos proporcionó conocimientos claves para encaminar nuestro trabajo. Gracias a todos mis docentes, por todos los conocimientos impartidos y sus consejos. Por último, gracias a todos mis compañeros, con los cuales compartí momentos divertidos y experiencias únicas.

Francisco

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a todas las personas quienes creyeron en mis capacidades para realizarme como un profesional. En especial a mi padre quien me brindó todo su apoyo y me motivó a que culmine mis estudios. A mi querido hijo Damián, por ser quien me motiva siempre a ser mejor persona y un padre ejemplar. A mi esposa Tania, por su dedicación como pareja y por su apoyo incondicional en todo momento de mi carrera, A mis hermanos, quienes me apoyaron con sus concejos y sus buenos deseos.

Francisco

INTRODUCCIÓN

La propuesta surge a partir de los inconvenientes que presentan los estudiantes en el estudio de Derivadas de las Funciones Trascendentes, ya que no cuentan con la suficiente información para determinar el origen de las derivadas de dichas funciones. Esto generó el interés de realizar una revisión bibliográfica de los textos que son utilizados para impartir las clases de Cálculo Diferencial, determinando la carencia de aplicaciones a la derivada mediante problemas de contexto.

La modelación matemática es una herramienta muy importante para formar estudiantes creativos y críticos, ya que mediante esto pueden establecer sus propios problemas matemáticos en relación a las funciones trascendentes y los eventos del diario vivir. Para la ejecución de la modelación como una nueva metodología se requiere de un proceso didáctico adecuado, para encaminar a los estudiantes a lograr nuevos conceptos respecto al Cálculo.

Posteriormente, se trabaja la metodología de la propuesta en la cual se hace mención a los instrumentos que se utilizaron para determinar los conocimientos que tienen los estudiantes mediante una evaluación diagnóstica, como también la información que tienen los docentes en los textos para compartir a los estudiantes mediante una comparación de bibliografías.

Finalmente, se expone la importancia de contar con los procesos demostrativos de las Derivadas de las Funciones Trascendentes mediante los conceptos del Cálculo, los cuales sirven para la formulación y resolución de problemas, ya que se ha evidenciado la falta de destrezas para desarrollar el tema. Además, se implementa el uso de recursos didácticos para la enseñanza del Cálculo, con el fin de obtener ciertas funciones las cuales provienen de situaciones que pueden ser simuladas mediante herramientas tecnológicas.

CAPÍTULO 1: GENERALIDADES

Problematización

Dentro del análisis matemático existe una contrariedad al inicio del estudio infinitesimal ya que los estudiantes deben aprender a percibir conceptos abstractos, los mismos que comprenden un estudio minucioso. En este contexto, basados en la experiencia personal como estudiantes de la asignatura de Cálculo Diferencial y en la participación de actividades trabajadas a nivel de Cátedras Integradoras se ha determinado la complejidad del estudio de las derivadas de las funciones trascendentes. Además de esto, hemos podido evidenciar la falta de procesos demostrativos de varias expresiones matemáticas, las cuales han limitado la solución de ciertos problemas, los cuales se resuelven de forma mecánica; más aún cuando se revisan distintos textos y tampoco se evidencian estos procesos, limitándose únicamente a desarrollos de fórmulas o ecuaciones sin conocer su origen. Este problema provoca que los estudiantes presenten dificultades para aprender los conceptos de derivadas, específicamente, de funciones trascendentes.

Sumado a lo anterior, la metodología de enseñanza que implementan muchos de los docentes para la instrucción de este contenido requiere buscar nuevas perspectivas, basadas en tendencias actuales, con la intención de mejorar los aprendizajes; evitando limitarse al uso de material bibliográfico. Bajo este contexto se hace evocación a lo que dicen algunos autores (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Robles y Castillo, 2012): La comprensión de las derivadas se trata de un problema didáctico relevante que diferentes investigaciones han permitido acotar: las dificultades se encuentran, precisamente, en la comprensión de las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto, por ejemplo, en el uso de las reglas de derivación. Esta dificultad de comprensión de las nociones de derivada en un punto y de función derivada se presenta no solo en relación con los alumnos, sino también con algunos profesores.

Es importante mencionar que los obstáculos no se presentan al aplicar las diferentes reglas de derivación existentes, sino que es el resultado de la interpretación de la derivada como un límite, el cual puede ser un proceso complejo en las funciones trascendentes.

Ante esta realidad, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿De qué manera, el uso y aplicación mecánica de reglas de derivación de las funciones trascendentes, afectan al aprendizaje y la enseñanza?

2. ¿Por qué es importante en la resolución de problemas de cálculo, demostrar las reglas de derivación de las funciones trascendentes?

3. ¿Qué recursos didácticos podrían aportar a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las derivadas en las funciones trascendentes?

Antecedentes

Los estudios de Isaac Newton y Leibniz sobre las derivadas, dieron paso a la solución de problemas dentro del cálculo infinitesimal. Aunque estos autores trabajaron en sus propios sistemas, llegaron a dar una importancia similar a este concepto. Hoy por hoy, el significado de la derivada posee una aplicación versátil, ya que ayuda a la comprensión de diferentes fenómenos en varios campos de estudio, aportando al desarrollo productivo y social de las naciones. Esto debido, a que aporta información concreta, directa y científica la misma que puede orientar en actividades habituales como: la construcción de edificaciones, el vuelo de los aviones o el movimiento de un vehículo (Editorial, 2014).

No obstante, la investigación en educación matemática ha mostrado que existen varios problemas para el aprendizaje del cálculo, dificultando a la mayoría de estudiantes, e incluso a algunos profesores de enseñanza media al acceso profundo de los conceptos propios del cálculo (Hitt, 2003). De acuerdo con el autor, a lo que refiere la problemática es que en el curso de cálculo diferencial de tercer ciclo de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca se desarrollan diversos tópicos los mismos que no se revisan de manera profunda las aplicaciones en el contexto ya que los limitantes de tiempo provocan que estos subtemas sean estudiados de manera superficial. Esto conlleva a que no exista una conexión entre los conocimientos naturales y los contenidos de cálculo. Esto ha dado lugar que tanto docentes como estudiantes se condicionen a emplear fórmulas directas en las resoluciones de ejercicios sin que exista una interpretación de los procesos.

Por consiguiente, para iniciar esta propuesta fue necesario indagar proyectos y exploraciones ejecutados anteriormente sobre la temática propuesta, esto se efectuó en la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca donde se pudo evidenciar que dichos estudios se orientan en la parte teórica, dejando de un lado las representaciones y aplicación de los contenidos a través de modelos matemáticos dentro de un contexto. Mediante estos particulares, el presente proyecto pretende suministrar argumentos válidos en las deducciones de las reglas de derivación las mismas que estén correctamente ordenadas, de tal modo que los estudiantes adquieran desde un inicio una formación disciplinada, formal y crítica de estos conceptos.

Justificación

En virtud de ello, se cree necesario que los participantes del proceso educativo conozcan la sistematización de los conceptos con la finalidad de demostrar las diferentes reglas de derivación en las funciones trascendentes. Asimismo, que su implicación a modelos matemáticos orientados a diferentes áreas, sea productiva para el desarrollo social y educativo, de tal manera que los estudiantes adopten un pensamiento crítico en su formación académica. Por otro lado, es necesario que los contenidos impartidos por los docentes sean los requeridos para soportar el estudio del cálculo diferencial, utilizando metodologías que permiten el aprendizaje de las percepciones abstractas por parte de los estudiantes.

La propuesta está dirigida para los estudiantes de la asignatura de Cálculo Diferencial de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca en donde no se han encontrado estudios que involucren el desarrollo de problemas o el uso de recursos didácticos para abordar el tema. Ampliando la revisión bibliográfica, se ha encontrado que la UNAM de México propone demostraciones de las derivadas de las funciones trascendentes enfocadas a conocer el origen de las fórmulas para la resolución de ejercicios, pero no contiene problemas de contexto en donde se puedan aplicar las funciones trascendentes; intención que se pretende efectuar en esta propuesta, con la finalidad de lograr que los estudiantes forjen su conocimiento a través de la modelación matemática.

Objetivo General

Diseñar una propuesta metodológica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de derivadas en las funciones trascendentes, basada en procesos demostrativos y recursos didácticos.

Objetivos Específicos

- Revisar textos de cálculo para contrastar las reglas de derivación de las funciones trascendentes con las demostraciones de algunas expresiones matemáticas, analizando el impacto de su uso en la resolución de problemas.
- Elaborar problemas de contexto que permitan visibilizar la importancia de procesos demostrativos, para mejorar la comprensión de las derivadas de las funciones trascendentes.
- Seleccionar recursos didácticos adecuados y pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de las derivadas de algunas funciones trascendentes.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Propuestas Metodológicas

Las instituciones de educación superior públicas enfrentan actualmente el reto de participar en procesos permanentes de innovación, resultado de la dinámica constante de los avances científicos y tecnológicos, que ha llevado al replanteamiento de nuevos paradigmas educativos. Para el siglo XXI, "la educación superior deberá incorporar el paradigma de la educación permanente, que implica dotar a los estudiantes de una disciplina intelectual bien cimentada para el autoaprendizaje en las diversas situaciones en que se encuentre" (ANUIES, 2001).

En esta virtud, las propuestas metodológicas se tornan necesarias para abordar los diferentes temas del Cálculo Matemático, como una forma de mejorar los procesos educativos, en todos los niveles de instrucción, buscando cambiar la aplicación mecánica de reglas de derivación de las funciones trascendentes por procesos que sean transigentes, los cuales permitan una adquisición oportuna de conocimientos. Según Carvajal & Castro (2019), las actividades metodológicas elaboradas para el abordaje de los temas de derivadas para la formación de profesores de matemática pretenden ser una propuesta que genere otra dinámica en la clase, en donde el estudiante sea gestor de su conocimiento y aprecie al cálculo como una línea matemática que puede enriquecer de manera sustantiva su proceso formativo y profesional.

Una de las propuestas metodológicas es la modelación matemática, considerada una metodología de enseñanza la cual se origina de un contenido en específico de donde surgen las interrogantes o problemas que se desean resolver.

Modelación Matemática

La modelación matemática consiste en la representación de un fenómeno a través de ecuaciones o expresiones matemáticas, en las cuales se utilizan las letras como variables, los números son los datos que nos presenta el problema y las operaciones algebraicas son las interacciones entre las variables. Para la construcción de un modelo matemático se requiere de un procedimiento que consiste en lo siguiente: Problema - Variables – Condiciones – Datos – Proceso Matemático – Modelización – Comprobación – Aplicación. (Rondón Duran, 2013, pp. 38-39)

Los modelos matemáticos para que sean válidos tienen que cumplir con algunos parámetros como son:

Parsimonia.- Se bosqueja un modelo simple, es decir sin la necesidad de que haya varios parámetros y condiciones del problema.

Modestia.- Plantear el modelo matemático de manera que se llegue a objetivos factibles para que haya interés por parte del lector.

Exactitud.- El modelo matemático está elaborado con la relación a hechos reales, de manera que se pueda obtener los datos aproximados de lo que sucede en la realidad.

Verificabilidad.- En este apartado se trabaja la comprobación del modelo matemático realizado con los eventos que suceden en la vida cotidiana, de manera que se determine la regularidad de la modelación realizada. (Rondón Duran, 2013, p. 42)

La modelación matemática es importante en la asignatura de cálculo diferencial, especialmente en el estudio de las derivadas de las funciones trascendentes. Además, es considerada una metodología de enseñanza, la cual consiste en que el estudiante elija un tema, realice una investigación del mismo y presente argumentos para elaborar un modelo matemático con la ayuda del docente (Bassanezi, 2002), de manera que el estudiante no solo aprende matemáticas sino la relaciona con el contexto en diferentes áreas del conocimiento formando un sentido crítico y creativo, dando un significado al tema que estudia.

Al hacer uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas se logra que: los estudiantes articulen los significados matemáticos con sucesos y experiencias de la vida cotidiana; exista un interés característico de los estudiantes hacia las operaciones algebraicas sabiendo que se puede aplicar en cualquier ámbito o eventos habituales; los aprendices estimulan su creatividad para la elaboración de problemas matemáticos a partir del contexto; y finalmente logran formar una capacidad suficiente para ser críticos con su aprendizaje así como también realizar investigaciones en cualquier espacio educativo (vol16-2-6.pdf, s. f.).

En el estudio de la derivada de las funciones trascendentes se toma en cuenta la modelación matemática para el análisis de varios fenómenos de la naturaleza los cuales implican funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. (Barahona & Martínez, s. f.). En base a lo mencionado se destaca la importancia de las funciones trascendentes para la construcción de modelos matemáticos, los cuales nos permiten comprender diferentes eventos del entorno. Además, la aplicación de la derivada en estas funciones ayuda a comprender las variaciones que experimentan los acontecimientos ocurridos, como por ejemplo: la población de un país varía con los años, las temperaturas también varían en el transcurso del tiempo, la velocidad con que se mueve un objeto, entre otros (Avalos, s. f.).

La modelación matemática resulta ser un método de enseñanza que no está presente de manera sustancial en las planificaciones de la asignatura de Cálculo Diferencial, a pesar de ser un instrumento que reestructura los contenidos pragmáticos con los planteados en clases. Lo que significa que los docentes no contemplan las teorías abordadas en la Didáctica de las Matemáticas y a su vez la utilización de libros en las sesiones de clase no asumen a la modelación en eventos cotidianos (García & Páez, s. f.).

Con el uso de esta metodología se puede demostrar la importancia de la resolución de problemas de cálculo, demostrando las reglas de derivación de las funciones trascendentes.

Didáctica y Matemáticas

Se podría definir a la didáctica como la destreza que poseen los individuos, para transmitir conocimientos. Esto, de alguna manera deriva en que se pueda optimizar ciertos métodos o técnicas que involucran el proceso de aprendizaje. En la práctica, la didáctica se consolida con la aplicación de la propuesta teórica ya que en esta etapa se logra evidenciar si las proyecciones pronostican aspectos positivos en la adquisición de nuevos conceptos. Breda, Adriana & Esqué de los ojos (2020), consideran que la Didáctica de la Matemática (DM) puede generar principios provisionales consensuados por un sector importante de la comunidad interesada en la educación matemática, que pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta materia y, segundo, para valorar su implementación; todo lo cual demuestra la importancia de esta rama de la ciencia que justifica no solo el uso de teorías sino el de recursos didácticos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, como interés específico, el de las derivadas en las funciones trascendentes.

Una de las recomendaciones realizadas desde el campo de investigación en didáctica del cálculo, habla de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza de dicho objeto (Pino-Fan, et al, 2013).

Procesos de Enseñanza – Aprendizaje de las Matemáticas

Se considera como enseñanza al proceso mediante el cual se proporciona conocimientos de cualquier índole. Para ello es necesario la interacción entre las personas que transmiten la información, las personas que la receptan y el objeto de conocimiento. Por otro lado, el aprendizaje humano se vincula con el desarrollo personal y se produce de mejor manera cuando el sujeto se encuentra motivado; es decir, cuando tiene ganas de aprender y se esfuerza en hacerlo. Para ello emplea su memoria, su capacidad de atención, su razonamiento lógico o abstracto y diversas herramientas que tengan a su alcance. En este contexto, la característica más importante de los buenos profesores es que se colocan en el lugar del alumno (Gallego & Luna, 2008). Esto se traduce, en que los docentes deben conocer las necesidades de sus estudiantes para que se dé un proceso enseñanza aprendizaje óptimo en ambos sentidos.

En el área de matemáticas es conveniente conocer cuáles son las causas por las que no se alcanza un aprendizaje idóneo en los estudiantes. Quizás, se deba a que los docentes hoy en día no asimilan las necesidades que posee cada estudiante y cómo llevan a cabo su proceso de estudio. Para ello, Socarras, J. M. (2008), sugiere que exista un mayor acercamiento de los contenidos matemáticos con la realidad, implementando la resolución de problemas que involucran situaciones de la vida cotidiana. De esta forma se eliminará el rechazo a las matemáticas, fomentando el uso de contenidos de otras disciplinas, logrando un trabajo interdisciplinar.

Tendencias y Perspectivas de la Enseñanza de las Matemáticas

Las matemáticas muchas de las veces son consideradas sinónimo de confusión para quienes las estudian. Por ende, los docentes actuales asumen el reto de innovar con nuevas tendencias proyectadas a mejorar la enseñanza de los contenidos matemáticos. En esta línea, consideramos la propuesta de Vicenç Font el cual manifiesta diferentes tendencias aplicables no solamente en el área de matemáticas, sino también al desarrollo de otras ciencias.

En Ecuador se puede evidenciar los cambios que ha experimentado la educación en cuanto a contenidos formativos de los diferentes niveles de educación. De manera que, hoy en día podemos apreciar los bloques curriculares en los cuales se trabaja el área de matemáticas los mismos que son: Algebra y Funciones, Geometría y Medida, Estadística y Probabilidad. Establecer estos tópicos de enseñanza, probablemente ha sido una transición un tanto compleja para los actores de educación, debido a la falta de capacitación docente y al desconocimiento o poco dominio que se tiene sobre algunos temas. Las causas de esta deficiente enseñanza parecen ser, por una parte, la dificultad misma de las materias en cuestión y, por otra parte, una falta de preparación adecuada de los profesores que han de impartir estas materias, (Font. V. 2008).

Luego de analizar estos inconvenientes, hemos encontrado dentro de las tendencias enunciadas por el autor, diferentes tendencias que se acoplan a esta propuesta de trabajo. En primer lugar, la tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas: esta orientación nos ayuda a relacionar los contenidos teóricos impartidos en las clases con problemáticas propias del contexto en donde se desarrolle la formación de los estudiantes. Seguido a esto, se toma en cuenta la tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos: en cuanto a esta sugerencia, es vital que los alumnos comprendan todos los procesos que se requieren para llegar a la solución de los ejercicios, así como los profesores deben conocer la deducción de las distintas fórmulas que se presentan en las temáticas y que no solo sea un proceso mecánico y de aplicación de tablas de libros. Finalmente nos apoyaremos en las tendencias de un aprendizaje activo y la incorporación de las (TIC): esta tendencia permite que los estudiantes sean responsables de construir su propio conocimiento y además dar un buen uso a las tecnologías que tengan a su alcance ya que en la actualidad es necesario que se maximice el beneficio de estas herramientas.

Derivadas de Funciones Trascendentes

Derivada

La derivada es uno de los conceptos fundamentales para el estudio del cálculo, aunque un tratamiento excesivamente algebraico del concepto, sin la utilización de otro tipo de representaciones para su enseñanza, puede contribuir al surgimiento de dificultades de cara a su comprensión.(Pino-Fan et al., 2013)

En base a este criterio, se considera a la derivada como un contenido matemático que se debe impartir de diferentes maneras como representarla gráfica, interpretarla de forma geométrica, y no solo algebraica ya que el uso y aplicación mecánica de reglas de derivación afectan al aprendizaje y la enseñanza, al tiempo de limitar forjar un aprendizaje significativo, presentándose además dificultades en su comprensión, debido a que no hay una aplicación de las mismas en eventos de la vida cotidiana.

Retomando la sugerencia que propone Pino-Fan sobre la implementación de representaciones que se le puede atribuir al concepto de derivada de una función, este autor hace mención a la representación gráfica que se le puede asignar a las derivadas de funciones, permitiendo así una visualización de elementos netamente teóricos que inicialmente se presentan de una manera abstracta, lo cual conlleva que exista confusiones en los estudiantes. Seguido a esto, se podrá crear un vínculo entre el procedimiento analítico, la teoría planteada inicialmente y las representaciones graficas. Esto permite que los estudiantes puedan hacer un recorrido de ida y vuelta en el proceso de aprendizaje de las derivadas en las funciones trascendentes. Adicionalmente, permitirá que los jóvenes puedan enfrentarse a diferentes problemáticas como también generar nuevas propuestas de modelación matemática dentro del tema.

La derivada de una función como interpretación geométrica se considera a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función, en el campo algebraico se dice que una función es diferenciable cuando posee una derivada. (Louis Leithold, 1998). En otros términos, podemos comprender a la derivada de una función como: el cambio que experimenta una variable con respecto a otra, es decir la tasa de variación existente entre variables. Para establecer o determinar la derivada de diferentes funciones matemáticas se hace uso de varios teoremas. En nuestra propuesta se analizará las demostraciones correspondientes de las distintas funciones trascendentes, llámese función trigonométrica, exponencial, logarítmica, entre otras las mismas que serán aplicadas en problemas contemporáneos que rodean nuestro entorno.

La derivada de una variable dependiente como dice su nombre siempre va depender de una variable independiente, es decir que, si la variable independiente toma un valor y a medida que éste vaya creciendo o aumentando, la variable dependiente irá aumentando en el mismo rango de la otra variable. Situación que se puede evidenciar de manera práctica, mediante la resolución de problemas.

Funciones Trascendentes

El estudio de las funciones dentro del cálculo diferencial conlleva cierto dominio en las funciones algebraicas expresadas como polinomios. Este panorama se dificulta cuando se inicia el estudio de las funciones trascendentes, ya que estas funciones no se pueden representar mediante las operaciones básicas de polinomios, debidos a que exhiben nuevas operaciones. Además, no brindan soluciones directas como es el caso de las ecuaciones algebraicas. Podemos decir que la función trascendente es opuesta a la función algebraica. A continuación, se presenta una breve clasificación de las funciones trascendentes.

Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas están relacionadas con la resolución de triángulos rectángulos a través del cociente de sus lados para obtener los ángulos agudos de la respectiva figura geométrica; estas funciones tienen un comportamiento periódico cuando son analizados a partir de la gráfica del círculo unitario (Bernat Requena Serra, 2015). Es decir, el crecimiento que poseen estas funciones es de forma repetitiva y para ello se debe tener en cuenta los ángulos expresados en radianes.

Al mismo tiempo las funciones trigonométricas a través de la modelación matemática tienen utilidad en distintas aplicaciones: el movimiento ondulatorio, cuerdas vibratorias, oscilaciones entre otras. Para la interpretación de estos modelos matemáticos se requiere un dominio de las diferentes funciones trigonométricas y las posibles combinaciones entre las mismas.

Funciones Exponenciales

Las funciones exponenciales se caracterizan por tener la variable independiente en el exponente de un número, estas funciones son muy útiles en los modelos matemáticos referentes a las ciencias naturales y sociales (James Stewart, 2012). Además, estas funciones siempre son crecientes o decrecientes como por ejemplo $f(x) = a^x$ y tiene su inversa la cual es f^{-1} esta función se considera logarítmica.

Como se mencionó inicialmente estas funciones son útiles para representar crecimientos acelerados. En este sentido, se pretende incorporar este tipo de funciones en aspectos del diario vivir. Es así, que estas funciones nos pueden ayudar a interpretar una problemática muy conocida como es el caso de la pandemia mundial el COVID y como los contagios se han precipitado en los diferentes países del mundo. Además, esta asimilación nos conduce a predecir o precautelar ciertos tipos de inconvenientes desde una perspectiva de análisis de datos.

Funciones Logarítmicas

Como en la exponencial, la función logarítmica se utiliza con frecuencia en los cálculos y desarrollos de las matemáticas, las ciencias naturales y las ciencias sociales. Asimismo, se usa para comprimir la medida de magnitudes cuyo crecimiento es demasiado rápido y dificulta su representación visual o el cálculo del fenómeno que representa. (*Función logarítmica - hiru*,

s. f.). Es la función inversa a la función exponencial como lo mencionamos en el concepto anterior, este tipo de funciones tienen su dominio o valores de las abscisas desde 0 hasta el infinito $(0,\infty)$ mientras que su rango o valores de las ordenadas son todos los números reales $(-\infty , \infty)$

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Metodología

En esta propuesta didáctica se planteará una metodología cualitativa para cumplir con los objetivos planteados, de manera que tengamos datos que se expresan en forma de palabras o textos que ayudan a comprender ciertas acciones y actitudes de los estudiantes evaluados que no son cuantificables (*Datos cualitativos* | *QuestionPro*, s. f.).

Para la aplicación de esta metodología se hizo uso de un instrumento de evaluación y un cuadro comparativo, con el objetivo de identificar el nivel de conocimientos que poseen los estudiantes, como también diferenciar los contenidos presentes en los textos que dispone el docente para impartir sus clases.

Con los resultados obtenidos de los estudiantes que estuvieron cursando Cálculo Diferencial de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, se elaboraron los recursos didácticos necesarios para solucionar los problemas que tienen los estudiantes para un aprendizaje significado de la modelación matemática respecto a la derivada de las funciones trascendentes.

Técnicas Metodológicas

Evaluación Diagnóstica

Con la finalidad de obtener información respecto a la propuesta planteada, se realizó una evaluación diagnóstica, la cual estaba compuesta de seis ítems, en donde se planteó distintos tipos de interrogantes como son de conceptos, gráficas, desarrollo matemático y razonamiento. El cuestionario fue diseñado en base a conceptos de cálculo diferencial para evidenciar el nivel de conocimientos de estudiantes que cursaron dicha asignatura.

El instrumento de evaluación estuvo conformado por preguntas teóricas en donde se pudo identificar la manera que el estudiante está forjando su aprendizaje, además se colocó una tabla con las funciones trascendentes para que el estudiante complete con que aspectos del contexto están relacionadas cada una de ellas. En la parte práctica, se dispuso ejercicios los cuales se podrán resolver a través de fórmulas, mientras que en otros ejercicios se solicitaba la demostración de las fórmulas utilizadas. Finalmente se planteó un problema de contexto, mediante el cual los estudiantes debían modelar una función y a través de la misma determinar la información solicitada.

Cuadro Comparativo

Las fuentes bibliográficas planteadas en el sílabo de la asignatura de Cálculo Diferencial sirvieron para evidenciar la información implícita sobre las demostraciones de las funciones trascendentes. Es por ello que se procedió a realizar una revisión de diferentes libros, en donde pudimos constatar que no todos cuentan con las demostraciones necesarias para la formulación y resolución de problemas. A continuación, se presenta un cuadro en el cual se representa el contraste entre los textos analizados.

Demostraciones de las Funciones Trascendentes											
Texto		Derivadas de Funciones Trigonométricas						Derivadas de Funciones Logarítmicas		Derivadas de Funciones Exponenciales	
Nombre	Autor	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante	$\ln x$	$\log_a x$	e^x	a^x
El Cálculo	Louis Leithold	✓	✓	✓		✓					
Análisis Matemático I	Eduardo Espinoza Ramos	✓	✓	✓				✓		✓	✓
Cálculo de una Variable	James Stewart	✓		✓					✓		
Cálculo Diferencial e Integral	Granville	✓	✓	✓				✓			✓
Cálculo de una Variable	Dennis G. Zill	✓		✓		✓					

Figura 1.Cuadro Comparativo de los Textos de Cálculo Diferencial. Fuente Propia

Población

La evaluación fue dirigida a los estudiantes del cuarto ciclo de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca, los cuales están divididos en dos grupos de 28 y 21 estudiantes respectivamente. Se escogió a estos grupos de estudiantes ya que ellos aprobaron la asignatura de Cálculo Diferencial y son quienes nos pueden brindar información importante respecto a la propuesta planteada.

Análisis de los Resultados de la Evaluación Diagnóstica

Resultados Individuales de las Preguntas

Luego de la aplicación de la evaluación diagnóstica, se procedió a revisar los resultados individuales de los estudiantes, dando una valoración cuantitativa respecto a una rúbrica planteada: valoración de 0 a 4, en donde 0 es la valoración mínima y 4 la máxima. Con esta información, se hizo un análisis de los resultados de cada pregunta, en donde se pudo considerar aspectos característicos en la comprensión de las derivadas de las funciones trascendentes, así como las interpretaciones gráficas que los estudiantes poseen de estos conceptos y la relación que se puede establecer con el contexto. Los resultados obtenidos se describen a continuación.

Pregunta 1:

¿Qué información nos proporciona la derivada de una función?

En la primera pregunta de la evaluación se planteó que los estudiantes describan todo lo que ellos conocen sobre la derivada de una función, en donde se logró evidenciar que los educandos relacionan a la derivada como la recta tangente a la gráfica de la función. En tanto, que en una minoría considera a la derivada como una tasa de variación, la cual está relacionada con la modelación matemática que se plantea en esta propuesta.

Respuestas Representativas

- La derivada proporciona información del cambio de una variable respecto a otra; por ejemplo: la velocidad y la aceleración. (Respuesta de los estudiantes evaluados)
- La derivada de una función refiriéndose a una interpretación geométrica nos indica la pendiente de la recta tangente a una curva. Por medio de esta se puede obtener puntos máximos y mínimos, también puntos de inflexión. Con relación a la física la derivada nos permite obtener la velocidad de un objeto determinado. (Respuesta de los estudiantes evaluados)
- La derivada de una función nos permite encontrar el área bajo la curva. (Respuesta de los estudiantes evaluados)

En la figura 2, podemos observar que el 43% de estudiantes con conocimiento medio, poseen una información acertada acerca de la derivada de una función. El 35% pudo dar ejemplos de aplicación de la derivada y el concepto, demostrando un conocimiento alto. El 8% además de los ejemplos, pudo establecer varios conceptos respecto a la derivada con conocimientos excelentes respecto a la rúbrica planteada. El 12% con un conocimiento bajo no consiguió establecer un concepto claro, finalmente el 2% relacionó la información con conceptos de Cálculo Integral, denotando un conocimiento nulo del tema.

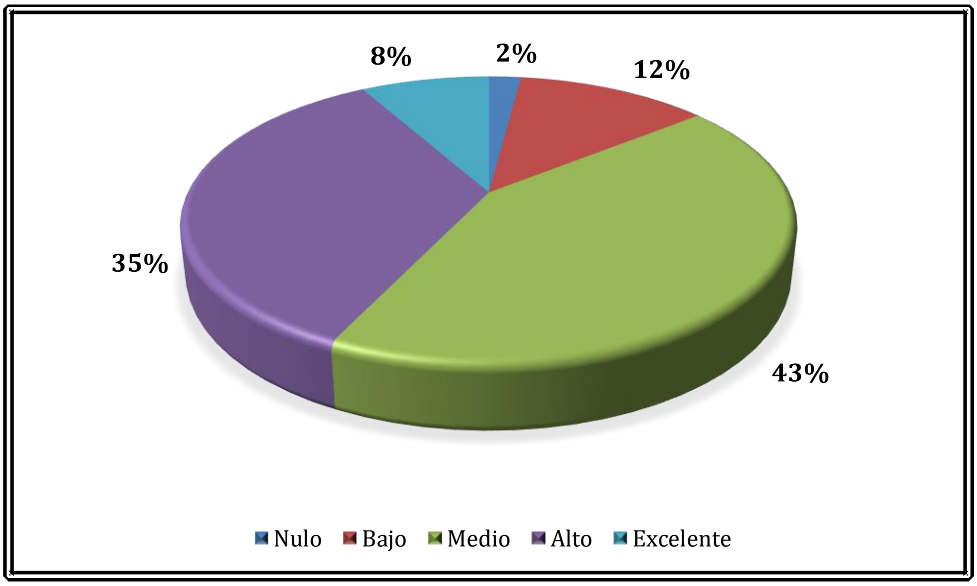


Figura 2. Resultados de la Pregunta 1. Fuente Propia

Pregunta 2:

Escriba cuál es la derivada de la función: $f(x) = cosx$. Justifique su respuesta.

En base al primer ítem procedemos a plantear una demostración de la derivada de una función trigonométrica, fundamentada en el concepto de la derivada.

Respuestas Representativas

- Regla de derivación. (Respuesta de los estudiantes evaluados)
- La respuesta es (-) porque es la inversa del seno en la gráfica. (Respuesta de los estudiantes evaluados)
- Las justificaciones restantes se enfocaron en la demostración de la regla de derivación mediante el concepto de límites.

En esta pregunta se pudo evidenciar un mejor rendimiento por parte de los estudiantes ya que la solución era de forma práctica o resolución de un ejercicio, la evaluación se realizó en dos partes ya que se tomaba en cuenta la parte teórica y la parte práctica en donde, un 6%

de los estudiantes no lograron demostrar su conocimiento sobre la interrogante planteada por lo cual se tomó como un conocimiento bajo; el 47% solo coloco la respuesta a la pregunta, pero no la justificación como se solicitaba, obteniendo un conocimiento medio; el 14% no logró completar la respuesta solicitada ya que en el proceso de demostración no finalizó, alcanzando el nivel alto y finalmente el 33% consiguió el máximo puntaje al cumplir todo el proceso solicitado como la respuesta y su justificación, demostrando un conocimiento excelente.

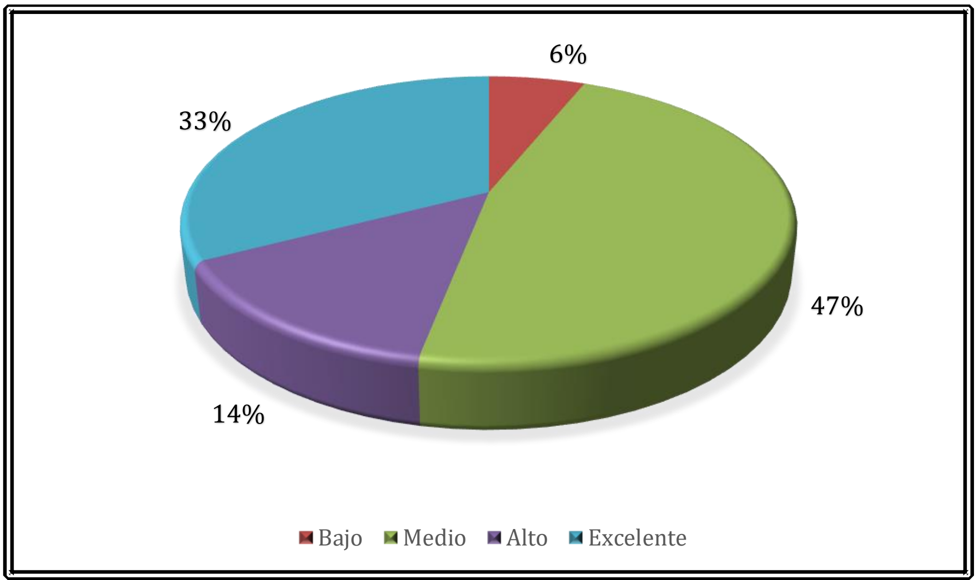


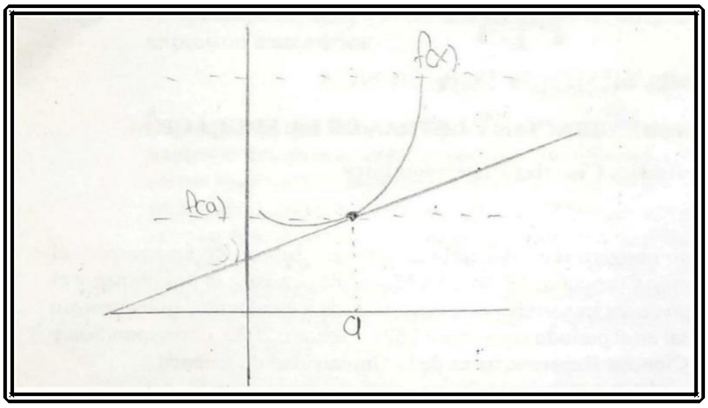
Figura 3. Resultados de la Pregunta 2. Fuente Propia

Pregunta 3:

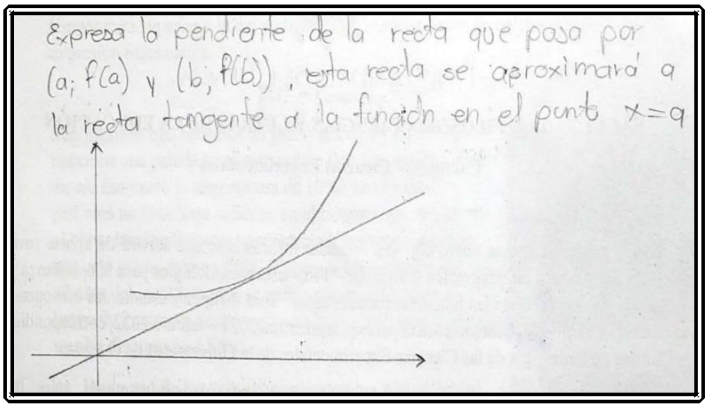
¿Cuál es la interpretación geométrica de derivada?

La pregunta número tres de la evaluación pedía que se coloque la interpretación geométrica que poseen los estudiantes de la derivada. De acuerdo a los resultados se pudo evidenciar que el 10% de estudiantes asumen una comprensión gráfica y geométrica de la información que proporciona la derivada de una función, con un conocimiento medio es decir los estudiantes optaron por graficar una curva la cual se acompañaba de una recta tangente a la misma.

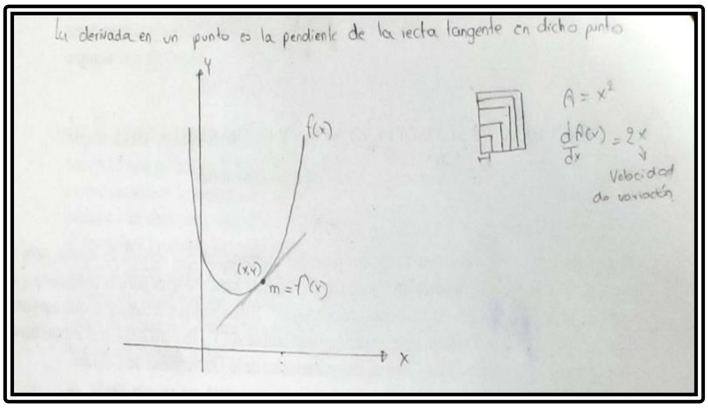
Respuestas Representativas



Fotografía 1. Respuesta de un estudiante sobre la interpretación geométrica de la derivada. Fuente Propia



Fotografía 2. Respuesta de un estudiante sobre la interpretación geométrica de la derivada. Fuente Propia



Fotografía 3. Respuesta de un estudiante sobre la interpretación geométrica de la derivada. Fuente Propia

El 31% de los evaluados proporcionaron breves conceptos de los gráficos elaborados, en donde se especificaba las características respecto a la derivada, demostrando que poseen un conocimiento alto. Por otro lado, el 33% de los estudiantes pudieron establecer conceptos adicionales como es el concepto de diferenciales para demostrar de donde nace el significado de derivadas haciendo uso de límites, notando un conocimiento excelente.

El 10% de estudiantes no pudieron establecer algún tipo de interpretación gráfica o a su vez confundieron contenidos de cálculo diferencial con los del cálculo integral, provocando que los estudiantes no logren dar una respuesta coherente de este concepto y finalmente un 16% con conocimiento nulo del tema ya que no respondió la pregunta planteada de ninguna manera dejando en blanco la misma.

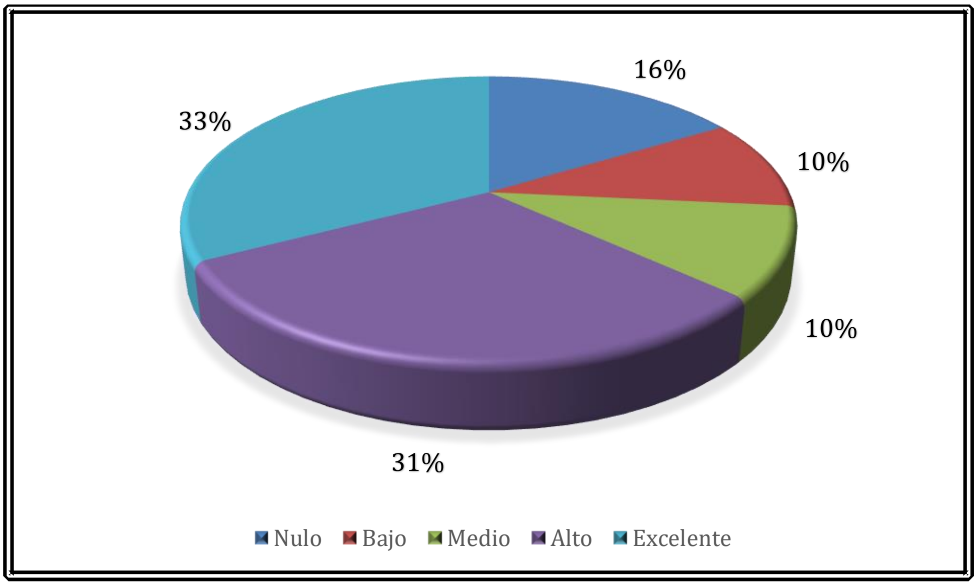
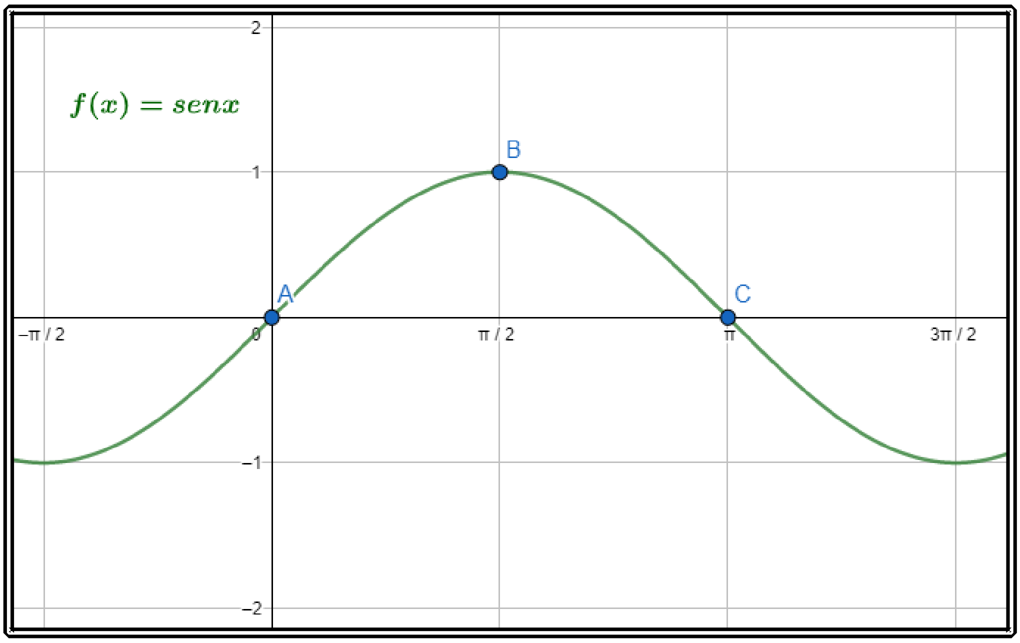


Figura 4. Resultados de la Pregunta 3. Fuente Propia

Pregunta 4:

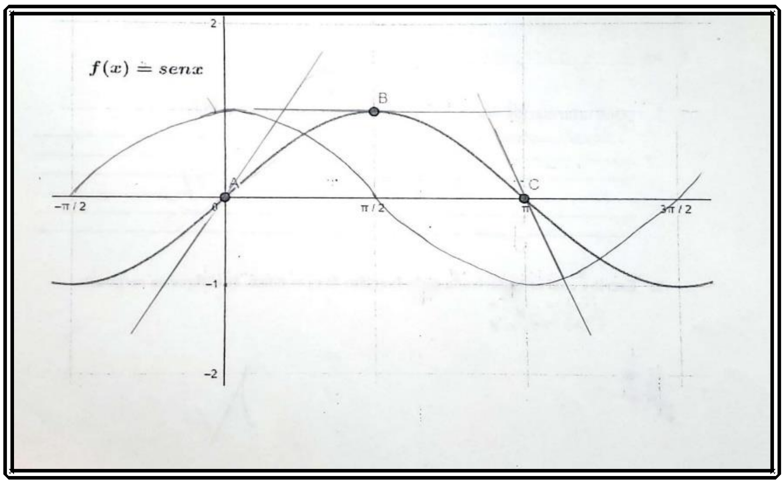
En la siguiente imagen trace un gráfico que caracterice la derivada de la función en los siguientes puntos.

- $\boldsymbol{A(0,0)}$
- $\boldsymbol{B\left(\frac{\pi}{2},1\right)}$
- $\boldsymbol{C(\pi,0)}$

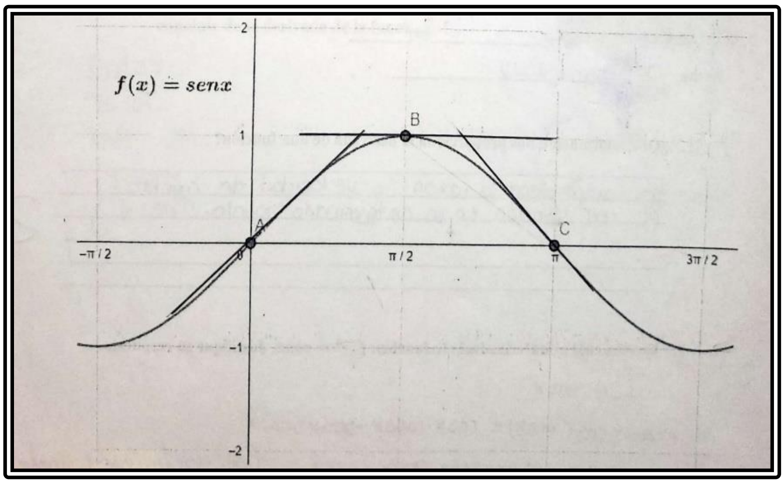


La pregunta número cuatro de la evaluación presentaba un gráfico el cual contenía una función trascendente trigonométrica en donde se establecían tres puntos contenidos en dicha función. El propósito de esta pregunta era que los estudiantes logren trazar un gráfico que caracterice a la derivada de la función en estos puntos.

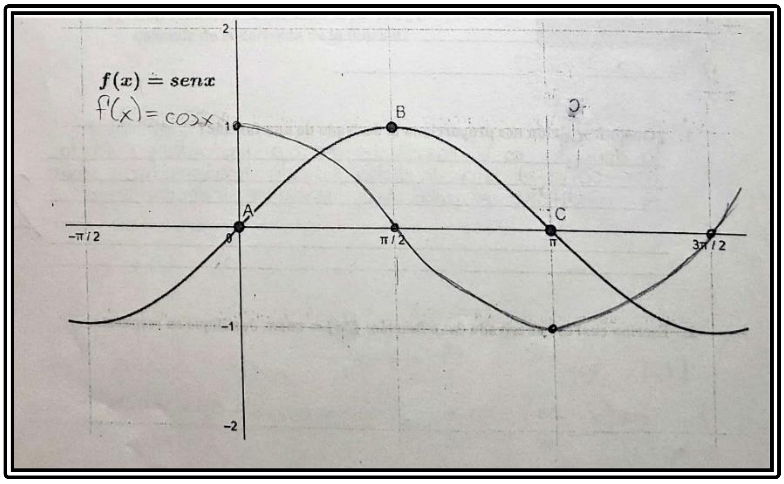
Respuestas Representativas



Fotografía 4. Respuesta de un estudiante sobre las características gráficas de la derivada en diferentes puntos de la función Seno. Fuente Propia



Fotografía 5. Respuesta de un estudiante sobre las características gráficas de la derivada en diferentes puntos de la función Seno. Fuente Propia



Fotografía 6. Respuesta de un estudiante sobre las características gráficas de la derivada en diferentes puntos de la función Seno. Fuente Propia

Dentro de los resultados el 82% obtuvo un conocimiento excelente, ya que no existió ningún inconveniente para que puedan bosquejar gráficas que permiten comprender a la derivada desde un aspecto geométrico. Este resultado, refleja que la comprensión grafica por parte de los estudiantes es favorable, así también se pudo constatar que mediante las reglas de derivación los estudiantes pueden responder inmediatamente cuál es la derivada de la función Seno.

Un 10% con conocimientos altos demostraron a través de una gráfica el concepto de derivada, pero no lo realizaron en todos los puntos solicitados. Con conocimientos medios el

6% realizaron gráficas que no tenían relación a la pregunta planteada y el 2% con un conocimiento nulo estableció una gráfica del área bajo la curva que no pertenece al cálculo diferencial. Este último porcentaje refleja que ciertos estudiantes presentan un desconcierto entre los conceptos de Calculo Diferencial con los conceptos referentes al Calculo Integral.

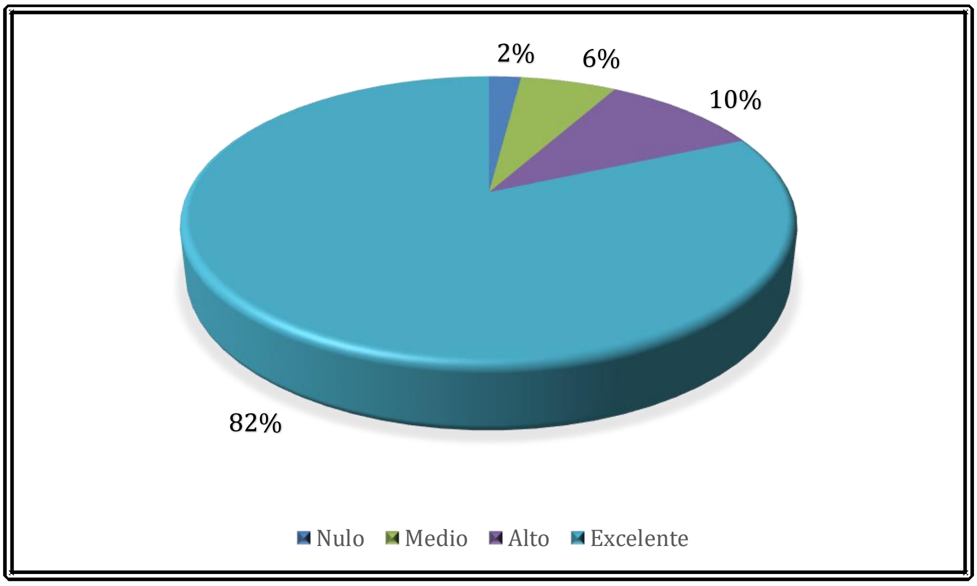


Figura 5. Resultados de la Pregunta 4. Fuente Propia

Pregunta 5:

Las siguientes son ejemplos de funciones trascendentes:

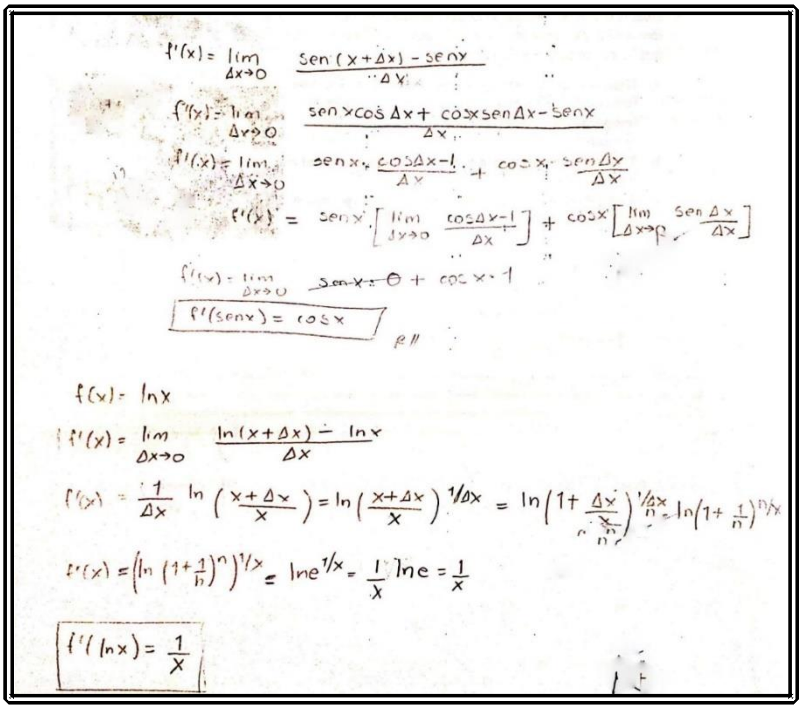
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = senx$
- $f(x) = tanx$
- $f(x) = \ln x$
- $f(x) = a^x$
- $f(x) = log_a x$

Elija dos de ellas y demuestre la regla de derivación haciendo uso de la definición de derivada:

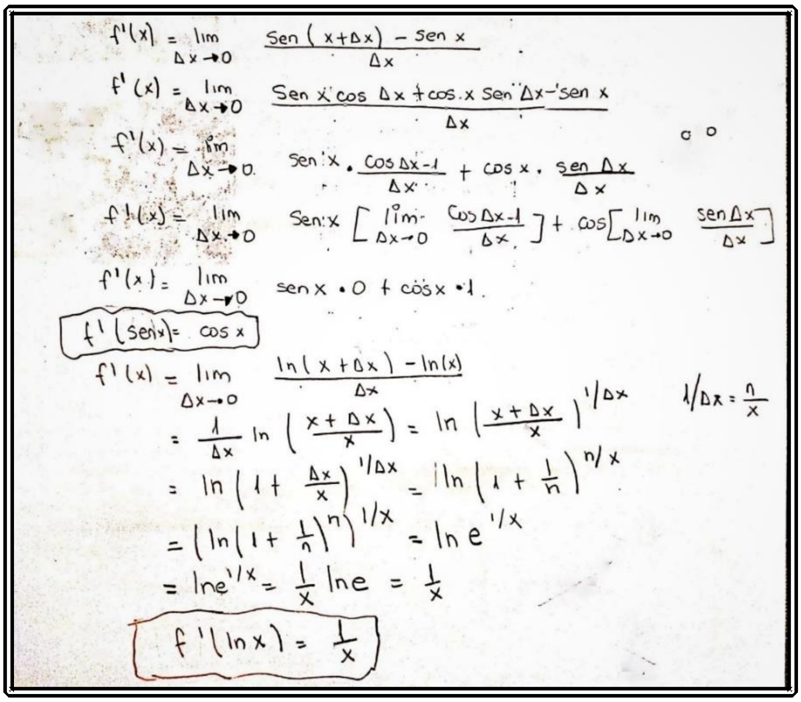
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En la pregunta número cinco se proporcionó a los estudiantes diferentes tipos de funciones trascendentes de las cuales se pedía que se eligiera dos de ellas y que se realice la demostración formal de la regla de derivación. Para ello, se les facilitó la fórmula que describe el concepto de derivada de una función utilizando el límite.

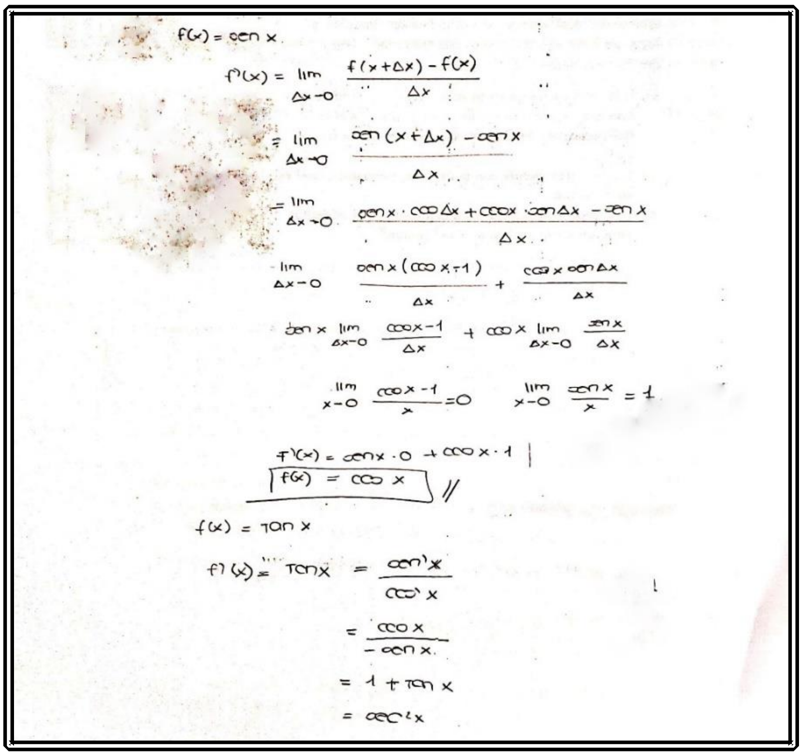
Respuestas Representativas



Fotografía 7. Respuesta de un estudiante sobre las demostraciones de la derivada en las funciones trascendentes. Fuente Propia



Fotografía 8. Respuesta de un estudiante sobre las demostraciones de la derivada en las funciones trascendentes. Fuente Propia



Fotografía 9. Respuesta de un estudiante sobre las demostraciones de la derivada en las funciones trascendentes. Fuente Propia

Aquí se pudo constatar que el 41% de estudiantes no lograron establecer y demostrar en donde se origina la regla de derivación para estas funciones, determinando un conocimiento bajo. El 18% con conocimiento nulo, no fue capaz de instaurar ningún tipo de proceso algebraico para determinar la derivada de una función trascendente. Con conocimientos medios el 20% de los evaluados lograron demostrar la derivada de una función trascendente y no de dos como se requería en la orden. El 20% restante con un conocimiento alto y excelente adquirieron las derivadas de las dos funciones elegidas.

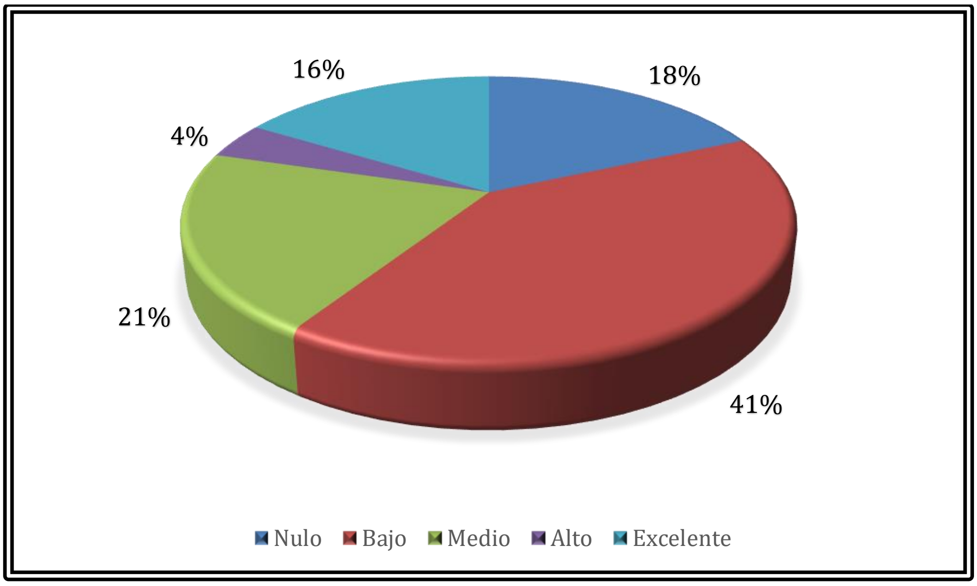


Figura 6. Resultados de la Pregunta 5. Fuente Propia

Pregunta 6:

La ley de enfriamiento de Newton expresa que un cuerpo que se encuentra a una temperatura superior a la del ambiente que lo rodea habrá de enfriarse según la siguiente expresión matemática:

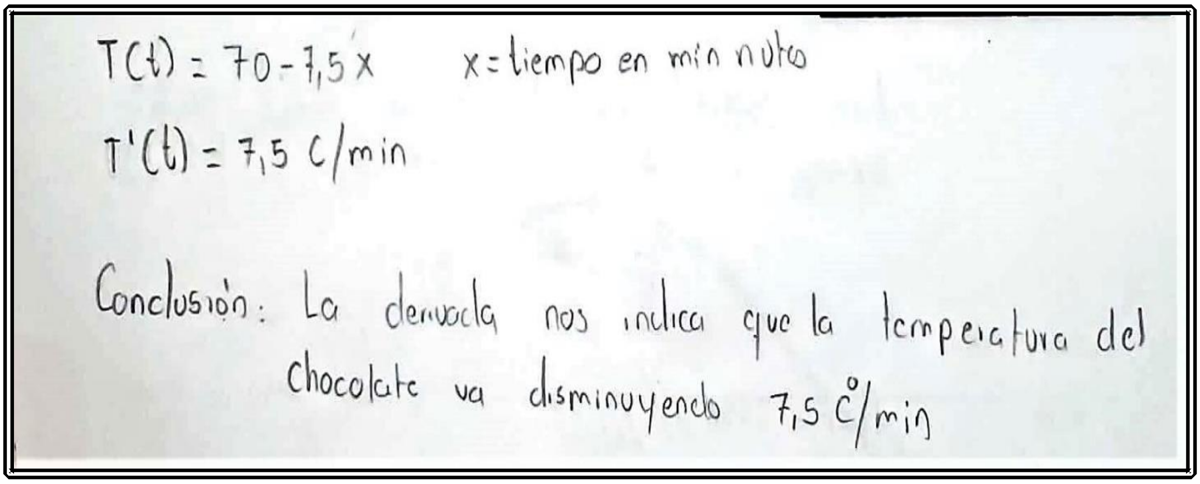
$$T(t) - T_{ambiente} = ce^{kt}$$

Supongamos que hacemos un paseo al Cajas y en el viaje hacemos una parada en el restaurante Dos Chorreras, siendo en ese momento la temperatura de 10°C; en el lugar pedimos un chocolate caliente, en el instante que nos sirven el chocolate medimos su temperatura y podemos observar que este se encuentra a $70°C$. Hacemos un recorrido por las afueras del local mientras se enfría nuestro chocolate y luego de 2 minutos realizamos una nueva medición y vemos que ha disminuido a $55°C$.

a) **Haga uso de los datos proporcionados y modele una función, la cual nos ayude a determinar cuál es la temperatura de nuestro chocolate en cualquier instante.**
b) **Una vez que cuente con la función, determine cuál es su derivada.**
c) **Con relación a la situación expuesta, ¿qué podemos concluir de la derivada de la función?**

La última pregunta de la evaluación planteaba una situación problémica dentro del contexto local. En ella se pedía a los estudiantes que en base a los datos descritos en el problema modelen una función trascendente la misma que dé solución al evento y permita comprender al problema dentro de un análisis matemático. Luego de que los estudiantes logren establecer la función antes mencionada se les solicitaba que obtengan la derivada de esta función y examinen cuál sería el propósito de este concepto dentro de la situación expuesta.

Respuestas Representativas

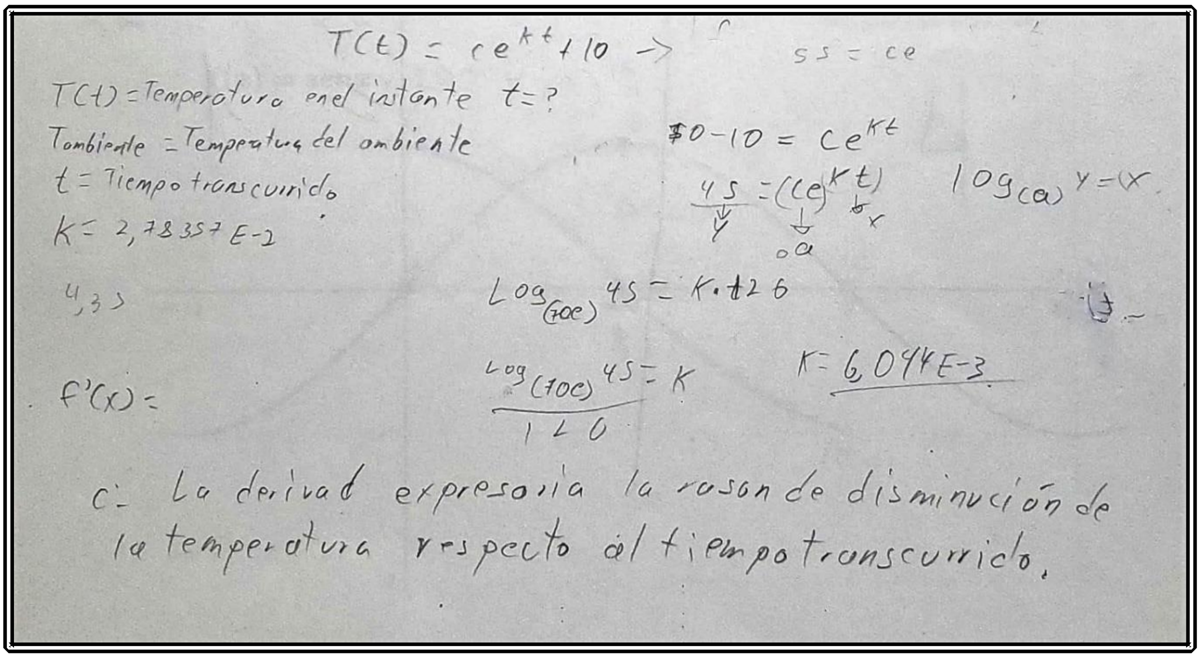


$T(t) = 70 - 7{,}5x$ x = tiempo en minutos

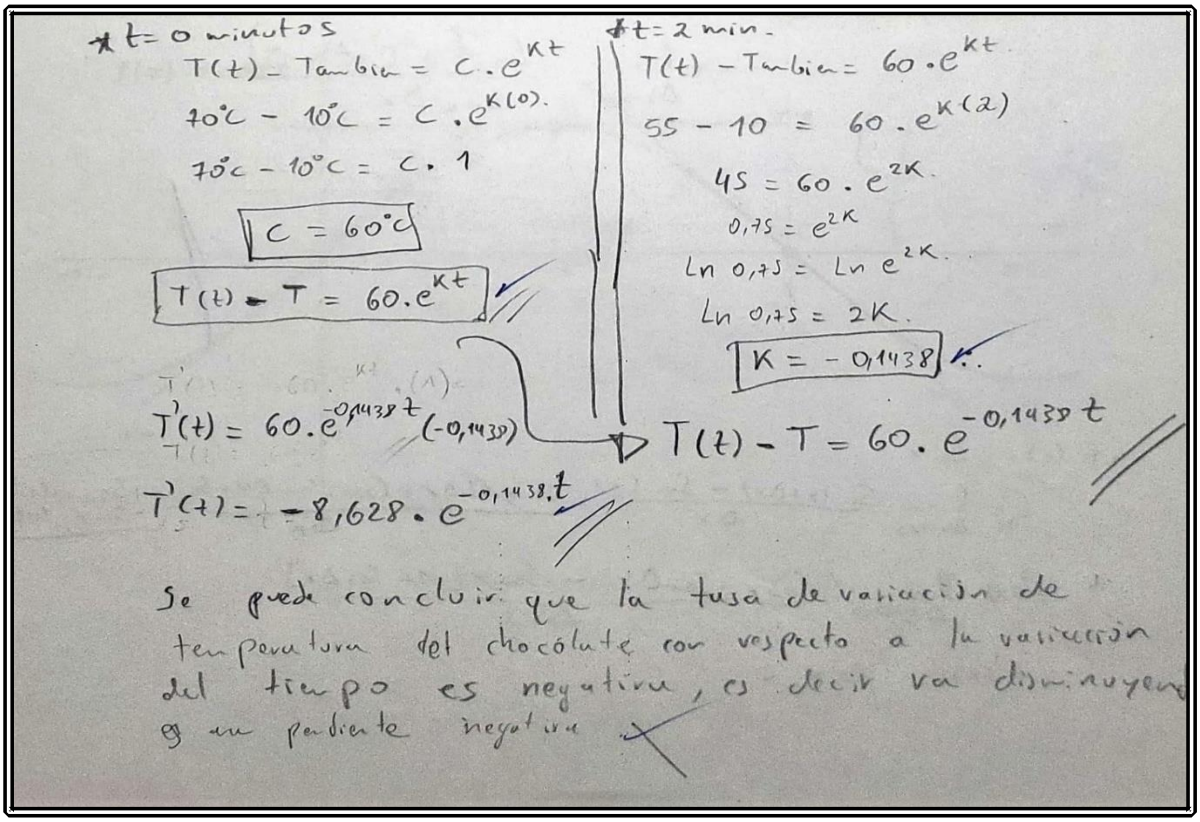
$T'(t) = 7{,}5$ C/min

Conclusión: La derivada nos indica que la temperatura del chocolate va disminuyendo 7,5 °C/min

Fotografía 10. Respuesta de un estudiante sobre el problema de contexto. Fuente Propia



Fotografía 11. Respuesta de un estudiante sobre el problema de contexto. Fuente Propia



Fotografía 12. Respuesta de un estudiante sobre el problema de contexto. Fuente Propia

En cuanto a los resultados obtenidos de esta pregunta se logró evidenciar que solo un estudiante que representa el 2% de la población evaluada, determinó el modelo y a su vez encontró la derivada haciendo una interpretación de la misma, otro estudiante (2%) tiene la capacidad para establecer el modelo matemático, pero tiene errores en la interpretación de datos, estableciendo un conocimiento alto. Un 8% con un conocimiento medio tiene una ligera idea como resolver el problema, pero no lo desarrolla correctamente. El nivel de conocimiento bajo es el más representativo con un 53% donde los estudiantes no tienen la capacidad para desarrollar el ejercicio, tan solo exponen los datos del problema y finalmente el 35% con conocimiento nulo dejaban el espacio en blanco sin la intención de resolver.

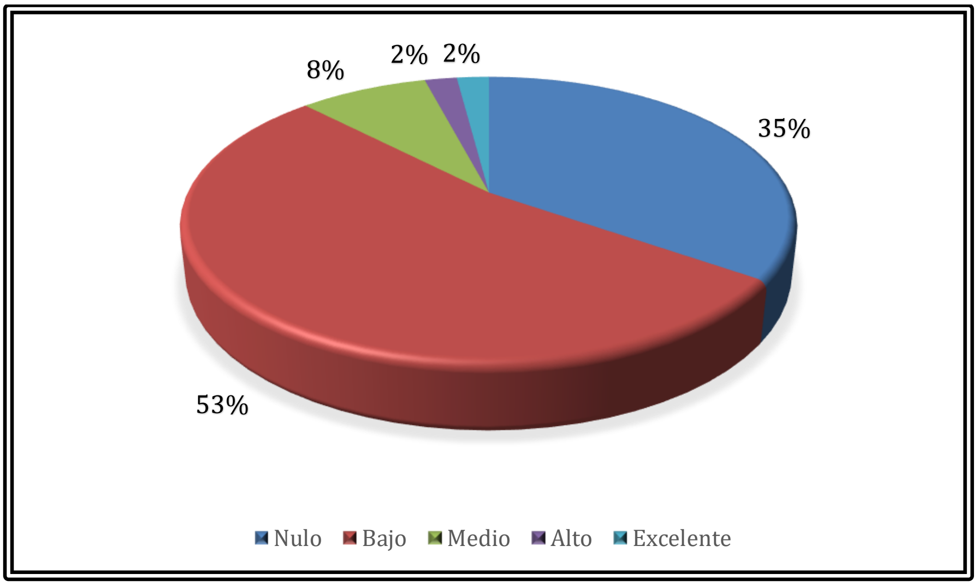


Figura 7. Resultados de la Pregunta 6. Fuente Propia

Análisis General de la Evaluación

La evaluación aplicada constaba de apartados teóricos, gráficos, demostrativos y aplicaciones referentes a la derivada de las funciones trascendentes; a través de esta valoración se adquirió información necesaria para determinar cuáles son las falencias que tienen los estudiantes en el aprendizaje del tema planteado; deduciendo que en la enseñanza se trabaja con una metodología centrada en procesos mecánicos y no conectada con el contexto, lo que limita a lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Los apartados teóricos demuestran que existen diferentes puntos de vista sobre la definición de la derivada y su importancia dentro del Cálculo Diferencial. En la primera interrogante se consiguió una valoración 2.35 sobre 4 que representa el 59% de la calificación máxima, lo cual indica que el conocimiento teórico de los estudiantes está en un nivel medio. En la siguiente pregunta que hace referencia al contenido teórico con lo práctico subió la calificación a un 68% con un puntaje de 2.73 sobre 4, demostrando que hay un mejor conocimiento del tema. En base a estas valoraciones, la propuesta busca que los estudiantes adquieran nuevos conocimientos a partir de experiencias relacionadas con el contexto.

En cuanto al apartado gráfico, los estudiantes demuestran tener la capacidad suficiente para dibujar e interpretar gráficas respecto a la información que proporciona la derivada de una función trascendente. La pregunta tres refleja una calificación de 2.53 sobre 4 que atribuye al 63% de la valoración máxima; con una puntuación de 3.69 sobre 4. La siguiente pregunta fue la que más puntaje obtuvo en la evaluación, proporcionando así un 92% mostrando un conocimiento de nivel excelente. Estas preguntas fueron las que mejores resultados presentaron en la evaluación, en ese sentido se establece que los métodos gráficos para interpretar la derivada son aceptables. Por ello, el proyecto reforzará estos aspectos con la ayuda de simuladores que indican el comportamiento de gráficas de las funciones trascendentes, de tal manera que los estudiantes forjen un conocimiento visual.

Simultáneamente en el apartado práctico, los estudiantes conocen cuál es la derivada de la mayoría de funciones planteadas en la evaluación de una manera memorística, pero no cuentan con la destreza suficiente para establecer métodos que ayuden a obtener un análisis del origen de las derivadas de las funciones trascendentes. Es por ello, que esta pregunta adquirió una valoración de 1.59 sobre 4 dando así el 40% del puntaje máximo, se determina que hay muchas falencias en las demostraciones de las derivadas, por lo tanto, el proyecto proporciona a los docentes una metodología diferente a la tradicional, de modo que el estudiante conozca el origen de las derivadas de funciones trascendentes.

Mediante el análisis de datos se pudo puntualizar que los estudiantes no cuentan con la capacidad necesaria de dar soluciones a problemas, ya que existe la dificultad de establecer un modelo matemático. Además, se pudo apreciar que 17 estudiantes no respondieron a la pregunta, es decir exteriorizan un rechazo a las situaciones cuando estas no conllevan procesos mecánicos. En los resultados se observa que tienen un rendimiento del 21% con una calificación de 0.84 sobre 4.

El bajo rendimiento en la última pregunta de la evaluación motiva a diseñar una nueva propuesta metodológica, la cual consiste en iniciar el estudio de la derivada de las funciones trascendentes a partir de un problema de contexto. Asimismo, orientar a los estudiantes para que puedan formular problemas a través de eventos cotidianos; de manera que se potencie un aprendizaje significativo sobre estos conceptos y no se limiten a emplear procesos tradicionales como la resolución de ejercicios, teniendo como recurso la repetición.

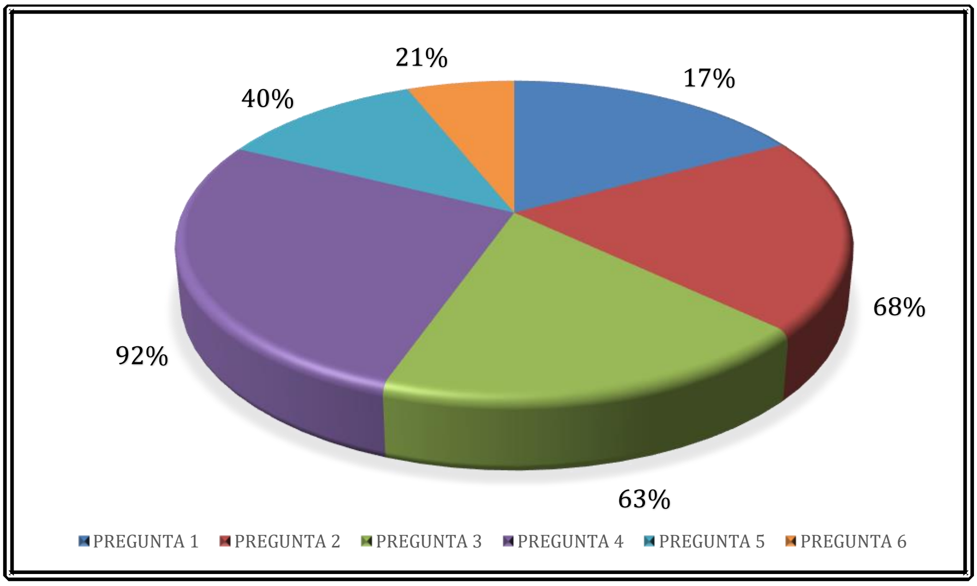


Figura 8.Resultados Generales de la Evaluación. Fuente Propia

A manera de Conclusión

En base al análisis precedente, se puede señalar que para la enseñanza de las funciones trascendentes dentro del Cálculo Diferencial, es necesario que el docente se encuentre capacitado para generar un aprendizaje significativo en sus estudiantes; con este objetivo, se propone que el docente trabaje en una auto - evaluación pedagógica con respecto a la temática mencionada y al contexto educativo; sugiriendo realizar un seguimiento durante las sesiones de clase y mediante una rúbrica se iría evaluando cada aspecto relevante en cuanto a la enseñanza. De tal manera que con esos resultados el docente pueda mejorar la metodología de enseñanza y aplicar la propuesta planteada en este proyecto.

CAPÍTULO 4: PROPUESTA METODOLÓGICA

Desarrollo de la Propuesta

Instituir un nuevo método de enseñanza - aprendizaje resulta un reto para los actores comprometidos en el abordaje del cálculo diferencial, en específico la derivación de funciones trascendentes, debido la complejidad en su comprensión. Ante esta realidad, la presente propuesta plantea la necesidad y a su vez el compromiso de trabajar en una nueva perspectiva que aporte a la construcción de conocimientos del Cálculo con la implementación de la modelación matemática dentro del contexto local y conociendo el origen de las diferentes reglas de derivación de funciones trascendentes, en la formación de los estudiantes de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales.

Fase 1: Delimitación del Evento dentro del Contexto Local

La parte inicial de la propuesta se ve enfocada a definir una situación problémica dentro del escenario de las funciones trascendentes. Los estudiantes identificarán las relaciones que pueden existir entre los contenidos teóricos y las acciones o actividades cotidianas que ellos realizan, para que, a su vez puedan establecer un problema. Se sugiere diferentes alternativas:

a) Que los estudiantes exploren libros de cálculo diferencial con el fin de interpretar las posibles aplicaciones de la derivación de las funciones trascendentes en el entorno que los rodea.
b) Los docentes deberán enlazar diferentes áreas con los temas de estudio; en donde se involucre el conocimiento de las derivadas, tales como: la medicina, la ingeniería, la arquitectura, la economía, entre otras. De este modo los estudiantes ampliarán la visión de relacionar los contenidos teóricos con el ámbito científico y social.
c) La experiencia propia de cada estudiante podrá aportar información importante para el planteamiento de situaciones problemáticas en un contexto real. A su vez las diferentes actividades académicas que se realicen dentro de la universidad, servirán de aporte para nutrir los conocimientos y se pueda involucrar el asunto de estudio.

Una vez que se haya establecido el escenario, se deberá ejecutar un plan que ayude a determinar la complejidad de la situación y a su vez examinar si la solución de la problemática es viable. En esta primera fase el docente orientará a los estudiantes para que logren establecer una relación fructífera entre el entorno y sus estudios académicos.

Ejemplo de un Evento dentro del Contexto

En el año 2020, el mundo percibió la propagación de la pandemia del Covid-19. En Ecuador se pudo apreciar diferentes problemáticas que causó el virus. En tal sentido, se plantea una situación similar, la cual considera un modelo matemático que ayuda a conocer cuál es el crecimiento de una epidemia de gripe dentro de la ciudad de Cuenca en la temporada de invierno. Haciendo una revisión de información respecto al crecimiento de epidemias, el evento puede ser modelado aproximadamente mediante la siguiente función:

$$\boldsymbol{P(t)} = \frac{\mathbf{150}}{\mathbf{1 + 15000}\boldsymbol{e}^{\mathbf{-0{,}35}\boldsymbol{t}}}$$

La función nos dará como resultado la cantidad de personas contagiadas de gripe y donde (t) representa el número de días después de haber iniciado la epidemia. Como podemos observar la función se ajusta a una función trascendente. Ahora lo siguiente será, recopilar la información teórica necesaria sobre esta función para poder formular un problema, el cual soporte la aplicación de la derivada como respuesta a cierta información que podemos obtener de este escenario.

Fase 2: Contenidos Matemáticos Necesarios para Abordar la Problemática

Para el desarrollo del proyecto es necesario conocer el origen de las tablas de las derivadas, que están presentes en los textos, pero de manera superficial, sin mencionar cómo se las obtienen. En efecto, las derivadas de las funciones trascendentes se las encuentra fácilmente en varios textos de matemáticas, pero en muy pocos casos se plantean sus demostraciones. Para superar esta dificultad, se exponen dichas demostraciones.

Teorema de Estricción

Suponga que las funciones f, g y h está definidas en algún intervalo abierto $\boldsymbol{I}$ que contiene a $\boldsymbol{a}$, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{I}$ para la cual $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$. También suponga que $\lim_{x\to a} f(x)\ \ y\ \lim_{x\to a} h(x)$ existen y son iguales a $\boldsymbol{L}$ Entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ existe y es igual a $\boldsymbol{L}$.

$A_1 = \frac{1}{2}\, Sen\, x \qquad A_2 = \frac{1}{2}\, x \qquad A_3 = \frac{1}{2}\, Tan\, x$

$A_1 = f(x) \qquad A_2 = g(x) \qquad A_3 = h(x)$

$A_1 \leq A_2 \leq A_3$

$$\frac{Sen\,x}{Sen\,x} \leq \frac{x}{Sen\,x} \leq \frac{Tan\,x}{Sen\,x}$$

$$1 \leq \frac{x}{Sen\,x} \leq \frac{1}{Cos\,x}$$

$$1 \geq \frac{Sen\,x}{x} \geq Cos\,x$$

$$Cos\,x \leq \frac{Sen\,x}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x\to 0} Cos\,x \leq \lim_{x\to 0}\frac{Sen\,x}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{Sen\,x}{x} \leq 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-cos\,x)(1+cos\,x)}{x(1+cos\,x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 x}{x(1+cos\,x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x(1+cos\,x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\cdot\frac{sen\,x}{1+cos\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{1+cos\,x} = 1\left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0}$$

Derivadas de las Funciones Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[senx] : \lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen(x+\Delta x)-senx}{\Delta x} = \frac{0}{0} = I$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{senx.cos\Delta x + cosx.sen\Delta x - senx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{senx(cos\Delta x - 1) + cosx.sen\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{senx(cos\Delta x-1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cosx.sen\Delta x}{\Delta x} = senx\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cos\Delta x - 1}{\Delta x} + cosx\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x}{\Delta x}$$

$senx.0 + cosx.1 = cosx$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}[sen\,x] = cos\,x}}$$

$\boldsymbol{\frac{d}{dx}}[\boldsymbol{cosx}]:\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cos(x+\Delta x)-cosx}{\Delta x}=\frac{0}{0}=I$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cosx.cos\Delta x - senx.sen\Delta x - cosx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cosx(cos\Delta x - 1) - senx.sen\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cosx(cos\Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{senx.sen\Delta x}{\Delta x} = cosx\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cos\Delta x - 1}{\Delta x} - senx\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\Delta x}{\Delta x}$$

$cosx.0 - senx.1 = -senx$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}[cos\,x] = -sen\,x}}$$

$\boldsymbol{\frac{d}{dx}}[\boldsymbol{tanx}]:\ tanx = \frac{senx}{cosx}$

$$\frac{d}{dx}\frac{senx}{cosx} = \frac{cosx.cosx - senx(-senx)}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{senx}{cosx} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}[tan\,x] = sec^2x}}$$

$\boldsymbol{\frac{d}{dx}}[\boldsymbol{cot\,x}]:\ cotx = \frac{cos\,x}{sen\,x}$

$$\frac{d}{dx}\frac{cosx}{senx} = \frac{-senx.senx - cosx.cosx}{sen^2x} = \frac{-sen^2x - cos^2x}{sen^2x}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{senx}{cosx} = -\frac{1}{sen^2x} = -csc^2x$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[\sec x]} : \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{cosx} = \frac{0.cosx - 1(-senx)}{cos^2x}$$

$$\frac{senx}{cos^2x} = \frac{senx}{cosx}.\frac{1}{cosx} = tanx.secx$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}[\sec x] = \tan x \cdot \sec x}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[cscx]} : csc\,x = \frac{1}{sen\,x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{senx}\right] = \frac{0.senx - 1.cosx}{sen^2x} = -\frac{cosx}{sen^2x} = -\frac{cosx}{senx}.\frac{1}{senx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{senx}\right] = \boldsymbol{-cotx.cscx}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}[cscx] = -cotx.cscx}}$$

Derivadas de las Funciones Logarítmicas

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[\ln x]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - lnx}{\Delta x} = \frac{0}{0} = I$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[log_a x]}$$

$$f(x) = \log_a x \rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\ln x \rightarrow \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\ln a}lnx = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}log_a x = \frac{1}{x\ln a}}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}log_a|u| = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}}}$$

Derivadas de las Funciones Exponenciales

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[e^x]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x+\Delta x)} - e^x}{\Delta x} \quad \to \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \to \quad e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$e^{\Delta x} - 1 = P \ \to \ e^{\Delta x} = P + 1 \ \to \ lne^{\Delta x} = \ln P + 1 \to \ \ \Delta x \ln e = \ln P + 1$$

$$\Delta x = lnP + 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} e^{\Delta x} - 1 = 0 \to \ \lim_{p \to 0} P = 0$$

$$e^x \lim_{p \to 0} \frac{P}{\ln P + 1} \quad \to \quad e^x \lim_{p \to 0} \frac{1}{\frac{1}{P}\ln(1 + P)} \quad \to \quad e^x \lim_{p \to o} \frac{1}{\ln(1 + P)^{\frac{1}{P}}}$$

$$e^x \frac{1}{\lim\limits_{p \to o}(1 + P)^{\frac{1}{P}}} = e^x \frac{1}{\ln e} = e^x \frac{1}{1} = e^x 1 = e^x$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx} e^x}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[a^x]}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{\Delta x} \quad \to \quad a^x \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right)$$

$$P = a^{\Delta x} - 1 \qquad a^{\Delta x} = P + 1$$

$$lna^{\Delta x} = \ln P + 1 \ \to \ \ \Delta x \ln a = \ln P + 1 \ \to \ \ \Delta x = \frac{\ln P + 1}{\ln a}$$

$$a^x \lim_{p \to 0} \frac{P}{\frac{\ln(P + 1)}{\ln a}} \quad \to \quad a^x \frac{lna}{\lim\limits_{p \to 0} \frac{1}{P} \ln(P + 1)} \quad \to \quad a^x \frac{lna}{\lim\limits_{p \to 0} \ln(P + 1)^{\frac{1}{P}}}$$

$$a^x \frac{lna}{1} = a^x lna$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x lna$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}}$$

Fase 3: Formulación y Resolución de Problemas

Al formular un problema "el alumno se siente un creador y esto, además de estimular el aprendizaje, forma motivos fuertes para el trabajo con el problema, perdiendo el miedo que muchas veces se crea alrededor de esta importante actividad matemática" (Cabrera & Campistrous Pérez, 1999). Desde esta perspectiva, se puede fomentar metodologías de enseñanza que se fundamentan en la modelación matemática, la cual ayuda a formar estudiantes creativos y seguros de las actividades que realizan, despojando el temor por la resolución de problemas que se genera desde la etapa escolar, considerando como una tarea complicada de comprender y resolver.

Según (Jiménez et al., 2015), el tratamiento de los problemas matemáticos es uno de los aspectos de la enseñanza de la Matemática que más aporta al desarrollo del pensamiento. Bajo esta perspectiva, y una vez delimitado el contexto a trabajar, la actividad se orienta a que los estudiantes adquieran la destreza de formular un problema con la información recopilada hasta la etapa actual, correspondiendo en esta fase, proponer directrices para plantear el problema y buscar solución.

Hasta este punto, los estudiantes han obtenido información suficiente y relevante para poder elaborar o modelar por sí mismos un problema que involucre las derivadas de funciones trascendentes. Además, en la fase 2 se facilita la demostración de las reglas de derivación de las funciones antes mencionadas con la finalidad de que los estudiantes conozcan el origen de estas reglas y puedan orientarse en la formulación de problemas contextualizados.

Proceso para la Elaboración de un Problema

Para formular un problema matemático es necesario seguir con un procedimiento adecuad. Este proceso está ligado a las bases del esquema de un problema como son los datos, circunstancias y cuestión. Los datos están en el problema de forma implícita y explícita que pueden representar un valor numérico y a su vez la operación a realizar entre ellos. Las circunstancias representan las condiciones en las que se va a desarrollar el problema y estarán presentes de forma no explícita. Además, hacen que los conceptos matemáticos tengan sentido por su valor para dar respuesta a un cierto reto. Finalmente, la cuestión es lo que se debe encontrar o interpretar para dar solución al problema demostrando su autenticidad.

La delimitación establecida en la primera fase será el punto de partida para la elaboración del problema ya que en este apartado se podrá analizar los datos obtenidos y por otra parte instaurar las incógnitas que presenta el problema. Posteriormente, se identificarán los contenidos matemáticos pertinentes para la construcción del problema, exponiéndose en el enunciado, de forma explícita e implícita. Finalmente, se formulará la incógnita o el objeto a encontrar dentro del problema, el cual tendrá relación con los datos.

Fase 4: Aplicación de la Propuesta con el Apoyo de Recursos Didácticos

En la última etapa del proyecto se procederá con la elaboración de problemas que se ajusten al contexto, para ello los docentes conjuntamente con los estudiantes deberán relacionar las diferentes problemáticas presentes en el entorno. En este sentido, la expectativa es que se pueda modelar mediante funciones en diferentes acontecimientos que conlleven un vínculo con las funciones trascendentes y se consiga interpretar al concepto de derivada como una razón de cambio entre dos variables. Seguidamente se presentan algunos ejemplos de problemas ajustados al contexto local:

Problema 1

En el Centro de Documentación Juan Bautista Vásquez hay un reloj de péndulo que proporciona la hora a los visitantes, en cierta visita un estudiante se concentró en el movimiento que describía el reloj. El péndulo tenía una longitud $\boldsymbol{a}$, además de un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ compuesto por una recta perpendicular al reloj y al punto máximo que alcanza el péndulo. ¿Cuál es la velocidad y aceleración a la que se mueve el péndulo en un tiempo $\boldsymbol{t}$?

Problema 2

Un docente adquiere un terreno ubicado en la parroquia Ricaurte, el cual tiene un valor en el mercado de $V(t) = 20000e^{\sqrt{1}}$. Considerando que la tasa de interés esta constante al 10% capitalizada. ¿Después de cuantos años el precio del terreno llegará a ser el máximo?

Problema 3

En el bar de Jurisprudencia se venden desayunos, almuerzos y meriendas, se supone que en algún momento los ingresos por las ventas dependiendo del tiempo son los siguientes: $D(t) = 6, \quad A(t) = 8, \quad M(t) = 11$. Los almuerzos tendrán un crecimiento del 9%, las meriendas reducirán en un 18% y los desayunos decaerán en un 4%. ¿Cuál será la razón a la que asciende los ingresos por las ventas en dicho momento?

Recurso Didáctico

Para instaurar los modelos matemáticos a través de las funciones trigonométricas, es necesario utilizar un software que permita observar el comportamiento de un cuerpo el cual describe un movimiento oscilante. Para este caso se hará uso de un aplicativo de acceso libre y gratuito, mediante el cual los estudiantes podrán comprobar que la función modelada cumple con el problema planteado y se ajusta a la realidad.

El software a utilizar es GeoGebra el cual brinda muchas herramientas para trabajar en diversas funciones. Se hace uso de esta herramienta con el objetivo que el estudiante pueda practicar con funciones trigonométricas. A continuación, se puede observar una animación con el comportamiento del movimiento de un resorte describiendo la gráfica de la función seno, planteando varios parámetros, en los cuales nuestra función puede tomar diferentes valores, de manera que se puede formular un nuevo problema con incógnitas distintas.

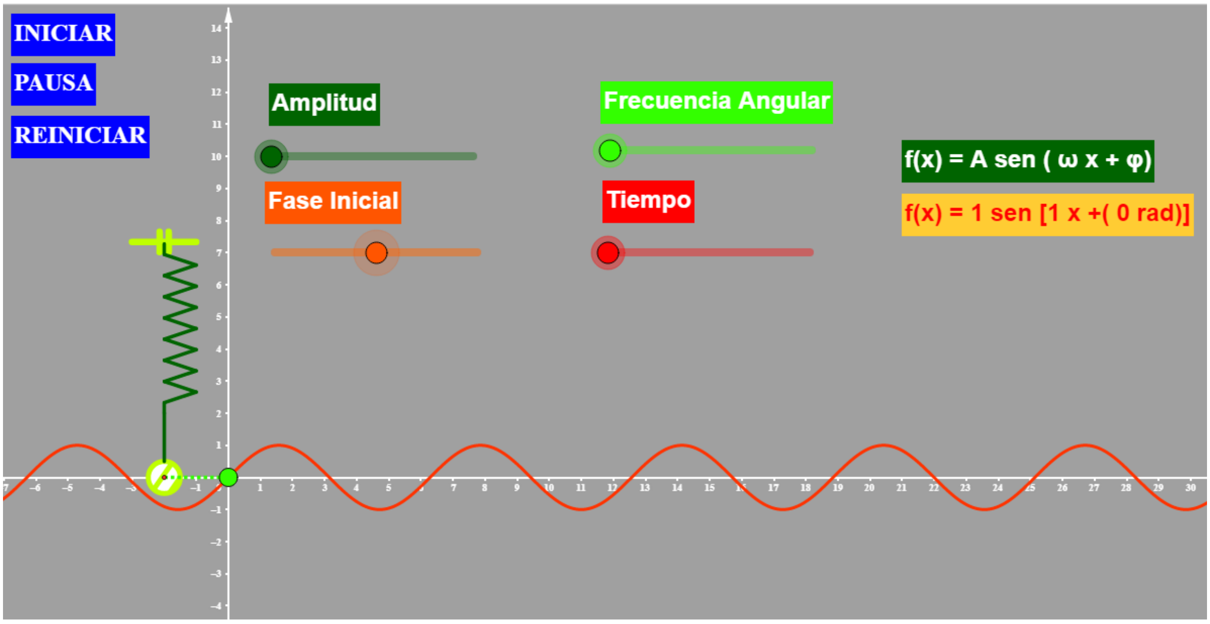


Figura 9. Ejemplo de un software matemático. Fuente Propia

CONCLUSIONES

- Mediante la revisión del material bibliográfico que se aborda en la asignatura de Cálculo Diferencial, se ha podido evidenciar que distintos textos no cuentan con las demostraciones acertadas sobre las derivadas de las Funciones Trascendentes, lo cual converge a que los estudiantes no desarrollen la destreza necesaria para realizar problemas que están basados en conocer el origen de los significados matemáticos. Por ende, disponer de las justificaciones íntegras de cada una de las reglas de derivación de las funciones mencionadas, aporta a que los estudiantes forjen un aprendizaje significativo.

- Los datos derivados del análisis de la evaluación diagnóstica, dan a conocer la falta de conocimiento sobre la modelación de una función a partir de una problemática. Es por ello que la creación y el análisis de problemas ajustados a la realidad, permiten enfatizar la importancia de relacionar los contenidos teóricos con situaciones o experiencias propias de los estudiantes.

- La vinculación de recursos didácticos adecuados o pertinentes en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las derivadas de las funciones trascendentes se considera como una herramienta apropiada para ampliar y mejorar los conocimientos de los estudiantes de Calculo Diferencial. Mas aún, cuando se presentan inconvenientes en el desarrollo de las actividades educativas, como lo fue la pandemia del COVID-19 que obligó a la comunidad educativa desarrollar las actividades de forma virtual; resaltándose el uso de los simuladores virtuales en el mejoramiento del estudio de las derivadas de funciones trascendentes.

RECOMENDACIONES

- En la planificación de los sílabos en la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales se debe tomar en cuenta las fuentes bibliográficas que se van a trabajar durante el período académico ya que muchas de ellas no contienen la información suficiente para formar docentes críticos, los cuales puedan discernir los contenidos de una manera diferente a la tradicional.

- Las evaluaciones realizadas por los docentes son básicamente forma cuantitativa a través de la resolución de ejercicios, lo cual no brinda un resultado de cada estudiante respecto a su aprendizaje, ya que priorizan procesos mecánicos. La recomendación es realizar también, una evaluación cualitativa para determinar, además, los conocimientos y aptitudes de los estudiantes.

- En el desarrollo de los procesos educativos, se requiere fomentar el uso y la construcción de recursos didácticos con el fin de forjar los conocimientos en los estudiantes, ya que a través de aquello se puede visualizar como acontecen los eventos diarios relacionados con la matemática; lo cual ayudará a que los estudiantes puedan plantear distintos problemas a partir de sus experiencias.

BIBLIOGRAFÍA

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 191-206.

Avalos, O. F. J. (s. f.). *LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN EDUCACIÓN MEDIA "UNA EXPERIENCIA PARA PENSAR EN EL AULA"*. 80.

Barahona, M., & Martínez, E. (s. f.). *La derivada de las funciones trascendentes*. 6.

Bernat Requena Serra. (2015). *Funciones trigonométricas*. https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funciones-trigonometricas/

Cabrera, C. R., & Campistrous Pérez, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas en la escuela*. *2*(2-3), 31-45.

Datos cualitativos | QuestionPro. (s. f.). Recuperado 5 de diciembre de 2021, de https://www.questionpro.com/es/datos-cualitativos.html

Función logarítmica—Hiru. (s. f.). Recuperado 2 de diciembre de 2021, de https://www.hiru.eus/es/matematicas/funcion-logaritmica

García, J. F. M., & Páez, L. M. P. (s. f.). *PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN INGENIERÍA, BASADA EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA*. 11.

James Stewart. (2012). Cálculo de Una Variable. En *Matemáticas para el Cálculo* (Vol. 7, p. 51,57). CENGAGE Learning.

Jiménez, M. L., Pimentel, L. G., & Rodríguez, L. E. R. (2015). El Método De Proyecto Para La Formulación De Problemas Matemáticos. *Atenas*, *4*(32), 100-112.

Louis Leithold. (1998). Derivada y Diferenciación. En *EL CÁLCULO* (Fidencio Mata González, Vol. 7, p. 100). Oxford University Press.

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). *IDONEIDAD EPISTÉMICA DEL SIGNIFICADO DE LA DERIVADA EN EL CURRICULO DE BACHILLERATO*. 28.

Rondón Duran, J. E. (2013). *Una introducción al modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones*. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21813

Vol16-2-6.pdf. (s. f.). Recuperado 14 de diciembre de 2021, de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol16/vol16-2/vol16-2-6.pdf

James Stewart. (2012). Cálculo de Una Variable. En Matemáticas para el Cálculo (Vol. 7, p. 51,57). CENGAGE Learning.

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. Paradigma, 34(2), 129-150.

Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., & Font Moll, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. Educación matemática, 24(1), 35-71.

Socarras, J. M. R. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Revista iberoamericana de educación, 47(3), 1-8.

ANEXOS

Evaluación Diagnóstica

El tipo de evaluación que se utilizó en el proceso de obtención de datos fue la diagnostica, ya que esta evaluación nos permitió explorar el nivel de conocimientos adquiridos por los estudiantes en el curso de Calculo Diferencial. Por otro lado, este test nos brinda un punto de partida para la toma de decisiones de la propuesta planteada.

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFIA CIENCIAS Y LETRAS DE LA EDUCACIÓN
Carrera de Ciencias Experimentales

Objetivo: La presente tiene como objetivo recaudar información que servirá de aporte para el desarrollo del Trabajo de Integración Curricular: "Propuesta Metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de derivadas en las funciones trascendentes". Está dirigida a estudiantes que cursaron la asignatura de Cálculo Diferencial en el periodo septiembre 2021 – febrero 2022, correspondiente a la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Cuenca.

La información proporcionada es confidencial y será utilizada estrictamente, para fines estadísticos; razón por la cual se solicita a los participantes responder de acuerdo a sus conocimientos las preguntas expuestas a continuación:

Datos Informativos

Nombre y Apellido: ____________________________________

Ciclo: ____

Fecha: ____

1. **¿Qué información nos proporciona la derivada de una función?**

   ____

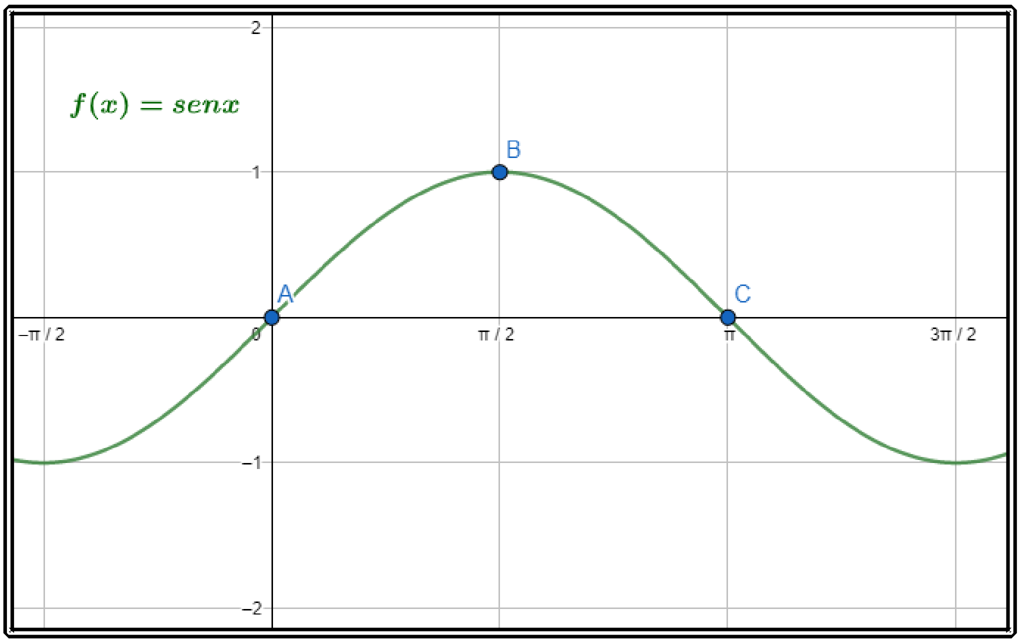
   ____

   ____

2. **Escriba cuál es la derivada de la función: $f(x) = cosx$. Justifique su respuesta.**

3. **¿Cuál es la interpretación geométrica de derivada?**

4. **En la siguiente imagen trace un gráfico que caracterice la derivada de la función en los siguientes puntos.**
   - $A(0,0)$
   - $B\left(\frac{\pi}{2},1\right)$
   - $C(\pi,0)$



5. **Las siguientes son ejemplos de funciones trascendentes:**
   - $f(x) = e^x$
   - $f(x) = senx$
   - $f(x) = tanx$
   - $f(x) = \ln x$
   - $f(x) = a^x$
   - $f(x) = log_a x$

   Elija dos de ellas y demuestre la regla de derivación haciendo uso de la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

6. La ley de enfriamiento de Newton expresa que un cuerpo que se encuentra a una temperatura superior a la del ambiente que lo rodea habrá de enfriarse según la siguiente expresión matemática:

$$T(t) - T_{ambiente} = ce^{kt}$$

Supongamos que hacemos un paseo al Cajas y en el viaje hacemos una parada en el restaurante Dos Chorreras, siendo en ese momento la temperatura de 10°C; en el lugar pedimos un chocolate caliente, en el instante que nos sirven el chocolate medimos su temperatura y podemos observar que este se encuentra a $70°C$. Hacemos un recorrido por las afueras del local mientras se enfría nuestro chocolate y luego de 2 minutos realizamos una nueva medición y vemos que ha disminuido a $55°C$.

a) Haga uso de los datos proporcionados y modele una función, la cual nos ayude a determinar cuál es la temperatura de nuestro chocolate en cualquier instante.
b) Una vez que cuente con la función, determine cuál es su derivada.
c) Con relación a la situación expuesta, ¿qué podemos concluir de la derivada de la función?

Rúbrica de Evaluación

	CATEGORIA	4	3	2	1	0
PREGUNTA 1	Conceptos Matemáticos	La explicación demuestra completo entendimiento del concepto matemático usado para resolver los problemas	La explicación demuestra entendimiento sustancial del concepto matemático usado para resolver los problemas	La explicación demuestra algún entendimiento del concepto matemático necesario para resolver los problemas	La explicación demuestra un entendimiento muy limitado de los conceptos suyacentes necesarios para resolver problemas	Sin Responder
PREGUNTA 2	Explicación	La explicación es detallada y clara.	La explicación es clara.	La explicación es un poco dificil de entender, pero incluye componentes críticos	La explicación es dificil de entender y tiene varios componentes ausentes	Sin Responder
PREGUNTA 3	Diagramas y Dibujos	Los diagramas y/o dibujos son claros y ayudan al entendimiento de los procedimientos.	Los diagramas y/o dibujos son claros y fáciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos son algo difíciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos son difíciles de entender	Sin Responder
PREGUNTA 4	Diagramas y Dibujos	Los diagramas y/o dibujos son claros y ayudan al entendimiento de los procedimientos.	Los diagramas y/o dibujos son claros y fáciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos son algo difíciles de entender.	Los diagramas y/o dibujos son difíciles de entender	Sin Responder
PREGUNTA 5	Estrategia / Procedimientos	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no lo hace consistentemente.	Raramente usa una estrategia efectiva para resolver problemas.	Sin Responder
PREGUNTA 6	Razonamiento Matemático	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.	Sin Responder