Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.

Carrera de Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física.

"Estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas con la resolución de ejercicios"

Trabajo de titulación previo a la obtención del Título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física

Autores:

Walter Daniel Roldán Jimbo

C.I. 0107345308

Correo electrónico: dannyjimbo1998@gmail.com

Joel Fabián Curillo Tigre

C.I. 0106174758

Correo electrónico: Joelcurillo@gmail.com

Tutor:

Mgt. Freddy Patricio Guachun Lucero

C.I. 0105554448

Cuenca, Ecuador

01 de septiembre de 2022

RESUMEN

El presente trabajo de titulación se encamina en elaborar una propuesta de guía didáctica para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas para los estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física espcificamente para la asignatura de funciones de varias variables, de modo que sirva como una alternativa metodológica para los docentes que buscan lograr un aprendizaje significativo en sus estudiantes. La propuesta está estructurada con distintos métodos de enseñanza que faciliten la comprensión de la temática en donde se busca que el estudiante pueda ir construyendo su propio conocimiento. Para demostrar la pertinencia que tendrá la propuesta se realizó una investigación cuantitativa mediante la aplicación de una encuesta a los estudiantes del sexto ciclo de la misma carrera. Los resultados muestran las dificultades que tienen los estudiantes para abordar la temática de integrales triples en coordenadas esféricas, por lo que esta guía didáctica de cuatro clases activas con un enfoque constructivista, con la utilización de TICS y material concreto servirán como un recurso de enseñanza para el docente.

Palabras claves: Guía didáctica. Estrategias de enseñanza. Recursos didácticos. Integrales triples. Coordenadas esféricas.

ABSTRACT

This present assignment is aimed at developing a proposal for a guide for the teaching of triple integrals in spherical coordinates for the Study Career of Pedagogy of Experimental Sciences: Mathematics and Physics it does specifically refer to all assignations of functions of various variables, so that serve as a methodological alternative for teachers who seek to achieve significant learning in their students. The proposal is structured with distinctive teaching methods that facilitate the understanding of the subject while also allowing the student to build his own knowledge of the law. I will show the relevance that the proposal will have if a quantitative research is carried out through the application of a survey to students of the sixth cycle of the same career. The results show the difficulties that students have to address the subject of triple integrals in spherical coordinates, so this tutorial of four active classes with a constructivist approach, with the use of ICTs and materials concrete will serve as a teaching resource for the learner.

Keywords: Teaching guide. Teaching strategies. Teaching resources. Triple integrals. Spherical coordinates.

TABLA DE CONTENIDO

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Walter Daniel Roldan Jimbo en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas con la resolución de ejercicios", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 01 de septiembre del 2022.

Walter Roldan

Walter Daniel Roldan Jimbo

C.I: 0107345308

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Joel Fabián Curillo Tigre en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas con la resolución de ejercicios", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 01 de septiembre del 2022.

Joel Fabián Curillo Tigre

C.I: 0106174758

Cláusula de Propiedad Intelectual

Walter Daniel Roldan Jimbo autor del trabajo de titulación "Estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas con la resolución de ejercicios", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 01 de septiembre de 2022.

Walter Roldan

Walter Daniel Roldan Jimbo

C.I: 0107345308

Cláusula de Propiedad Intelectual

Joel Fabián Curillo Tigre autor del trabajo de titulación "Estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas con la resolución de ejercicios", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 01 de septiembre de 2022.

Joel Fabián Curillo Tigre

C.I: 0106174758

DEDICATORIA

Este trabajo de titulación en primer lugar se lo dedico a Dios y la Virgen María por darme sabiduría, salud, guiando cada paso que doy para a conseguir todas mis metas y por la fortaleza que me ha dado en cada momento de dificultad.

Con mucho cariño y amor dedico este trabajo de titulación a mi abuelita Rosario que día a día ha estado conmigo de manera incondicional, dándome consejos y ayudándome a salir delante a pesar de todos mis errores es ella la que está siempre a mi lado y hoy en día comparte este logro tanto como yo.

A mis padres que a pesar de lo lejos que están ellos han sabido ayudarme de la mejor manera, inculcándome el respeto, la honestidad y motivándome para lograr todos mis sueños.

A mis amigos y familiares quienes confiaron en mí de manera directa o indirectamente favorecieron en este proceso de educación profesional.

Walter

DEDICATORIA

Este trabajo va dedicado para mis padres Fabián y María, debido al apoyo, motivación y confianza que me han brindado a lo largo de estos años, a pesar de todos mis errores, y aunque por cosas de la vida María no esté presente, seguro hubiese estado orgulloso y feliz por esta meta más cumplida.

A mis hermanos Jonnathan y Gustavo que hacen del camino de la vida algo más ligero, por su compañía sus consejos y su ayuda en momentos dificiles.

A mi Abuelita Angelita y mis tías: Sara, Rosa y Gladys que desde lejos me han ayudado con sus consejos y apoyo moral.

Joel

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer con todo mi corazón a Dios, mis padres, amigos y familia por el apoyo brindado en todo este largo camino hasta llegar a cumplir esta meta tan anhelada.

A la Universidad de Cuenca que por medio de los docentes de la Carrera de Matemáticas y Física nos han brindado sus conocimientos, experiencias y valores que nos servirán en nuestra vida laboral.

A mi tutor, Mgt. Patricio Guachún por la paciencia y el apoyo en el proceso de elaboración del trabajo de titulación.

Walter

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a: Dios, mis padres, hermanos, abuelitas y tías por estar presentes en todos estos años y ser una fortaleza y motivación para poder culminar con este trabajo.

Al magister Patricio Guachún por su paciencia infinita y su gran ayuda para poder realizar el presente trabajo, y por compartir sus conocimientos con cariño y empatía a lo largo de toda la carrera.

Joel

INTRODUCCIÓN

Este trabajo ha sido desarrollado con el objetivo de fomentar el uso de estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas, para esto se ha elaborado una guía didáctica para el docente que contiene una serie de actividades constructivistas que pretenden mejorar la enseñanza y faciliten la comprensión del tema a los estudiantes.

Las características principales de esta guía didáctica son sus diferentes clases elaboradas, ya que en ellas además de hacer uso de métodos para la enseñanza, se utilizan recursos didácticos tales como: materiales concretos, videos explicativos, uso de TICS y ejercicios lúdicos, los mismos que sirven de apoyo para la comprensión y consolidación de los conocimientos alcanzados.

El interés por efectuar este trabajo se fundamenta en la presencia de una serie de problemas que se encuentra el docente al momento de impartir las clases de integrales triples en coordenadas esféricas, por ejemplo; escases de aplicaciones para visualizaciones de integrales triples en espacios tridimensionales, falta de material didáctico para su manipulación, sumada a la carencia del conocimiento acerca de las TICS, motivo por el cual el docente es limitado a utilizar diferentes estrategias metodológicas para la enseñanza, teniendo como resultado una educación tradicional donde su única herramienta de enseñanza es el pizarrón y los libros, en consecuencia los estudiantes no pueden desarrollar su razonamiento abstracto lo que provoca una falta de interés hacia el tema, de modo que no sienten la necesidad de aprender y comprender la temática.

En el primer capítulo se aborda toda la fundamentación teórica que sirve de soporte para la elaboración de la propuesta, es decir; se aborda la teoría constructivista que es la corriente que siguió para su elaboración, se toman los fundamentos más importantes sobre el aprendizaje significativo, se detallan los beneficios de utilizar diferentes estrategias de enseñanza y recursos didácticos en el proceso educativo.

En el segundo capítulo hace mención a la metodología utilizada para la recopilación de la información que sirvió como método para garantizar la pertinencia de la propuesta. La metodología utilizada es de carácter cuantitativo, y se utilizó la técnica de la encuesta, en donde se intento conocer el uso de los recursos didácticos, estrategias metodológicas y herramientas didácticas utilizadas por el docente al momento de impartir el tema de integrales triples en coordenadas esféricas. Del mismo modo, la encuesta ayudo a reconocer las posibles causas que evitan la formación de un aprendizaje significativo en los estudiantes. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos en la encuesta, mediante la elaboración de gráficos y escala de Likert, que se aplicaron a 40 estudiantes de la carrera de Pedagogía de Ciencias Experimentales especialidad en Matemáticas y Física.

En el tercer capítulo se presenta el desarrollo de la propuesta, con base a la interpretación de los resultados obtenidos en la metodología, se elaboró la guía didáctica para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas con el uso de material concreto, y de las TICS, todo esto basado en el constructivismo. La propuesta consiste de 4 clases activas, organizadas secuencialmente, cada una de ellas estructurada con; Anticipación, Construcción y Consolidación, con el fin de fortalecer la comprensión de la temática.

CAPÍTULO I
FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1. EL CONSTRUCTIVISMO.

1.1.1. ¿Qué es el constructivismo?

- El aprendizaje significativo surge cuando el alumno, como constructor de su propio conocimiento, relaciona los conceptos a aprender y les da un sentido a partir de la estructura conceptual que ya posee (Novak, 1988). Es decir, los alumnos parten de sus conocimientos previos para generar nuevos aprendizajes, este nuevo conocimiento deja de ser conceptos o ideas sueltas y cobra sentido para llegar a ser parte de su entorno.
- El constructivismo para Jean Piaget (1980), implica que el conocimiento humano no se recibe en forma pasiva ni del mundo ni de nadie, sino que es procesado y construido activamente, el conocimiento permite que la persona organice su mundo experiencial y vivencial.
- El constructivismo tiene como finalidad que el estudiante sea un sujeto activo, pero es importante que el proceso enseñanza- aprendizaje sea dinámico, esto implica intercambio de opiniones, confrontar ideas, compartir y debatir con la ayuda del docente y así generar en el alumno conocimientos nuevos (López y Reibán, 2011).

Con base en los párrafos anteriores, al utilizar el modelo constructivista se mejora la experiencia de aprendizaje, favorece la autonomía y resolución creativa de problemas y lo más importante los estudiantes adquieren conocimientos difíciles de olvidar, pues se toma en cuenta lo que piensa el estudiante. De ahí la importancia de que los docentes utilicen este modelo de enseñanza en el día a día del profesorado.

1.1.2. La Educación enfocado en el Constructivismo.

Se sabe que la educación escolar fomenta el progreso cognitivo de los estudiantes (Coll.et al, 1993) sostienen que "La educación escolar promueve el desarrollo en la medida que promueve la actividad mental constructivista del alumno, responsable de que se haga una persona única, irrepetible, en el contexto de un grupo social determinado" (p.15).

Uno de los objetivos de la educación es transmitir o mejor, ayudar a formar conocimientos, pero no es el único, ni el más importante, el constructivismo puede ayudarnos a entender qué es lo que sucede en la mente del sujeto cuando éste forma nuevos conocimientos, es decir cuando aprende (Delval, 2001).

La educación y el constructivismo van de la mano, ya que no solo construyen su propio conocimiento a base del dinamismo en las clases, sino que siendo un sujeto activo va descubriendo nuevas formas de construir su conocimiento, forjando la manera de cómo el ve su realidad, tiene su propia visión, dando como resultado un individuo con criterio propio cimentado en sus conocimientos.

1.1.3. El constructivismo en las matemáticas.

La concepción filosófica sobre las matemáticas ha sido la formalista, que poco eficiente dar a conocer este tema, con su formalidad de dar los contenidos, sus relaciones y criterios relacionados con los objetos matemáticos para demostrar teoremas-deductivos (Moreno-Armella y Waldegg, 1992). Apunta que la matemática se expresa de una manera formal, fría, que no tiene dinámica para expresar los contenidos, el docente solo imparte los conocimientos más no crea una clase activa, y de esa forma no genera conocimientos constructivos en los estudiantes, la educación va encaminada más hacia una enseñanza tradicional y de esa manera no se puede generar un aprendizaje significativo en los estudiantes. Para esto el educador debe introducir el conocimiento en los estudiantes buscando una metodologia de enseñanza adecuada para el tema, por su parte el educando debe captar el conocimiento, analizar y construir su propio criterio sobre el contenido dado.

Las teorías constructivistas se centran en la participación activa del estudiante, en la construcción del conocimiento. Esto no significa que se tiene que dejar solo al estudiante con una actividad física, rodeado de materiales didácticos para que el de manera autónoma construya su propio conocimiento, por el contrario en la actualidad el estudiante tiene una responsabilidad que implica una intensa actividad intelectual (más que física), resultante de enfrentar situaciones peculiares o adversas que a partir de esa experiencia previa (vivida o cognitiva) generan su capacidad de razonar (Waldegg, 1998). Por otro lado, el mismo autor tambien menciona que el estudiante de matemáticas, equipado con una serie de explicaciones y operaciones provenientes de sus experiencias cognitivas previas y de los distintos contextos que han sido desarrollados, tratara de enfrentar de manera global, las nuevas experiencias, incorporándolas a su nueva visión. Es decir, que con todo lo que tiene a su alcance el estudiante, sus materiales didácticos y su experiencia previa, combinándolas para comprender la teoría y la práctica de la matemática, con lo cual vayan construyendo su propio conocimiento y generando un aprendizaje significativo.

1.2. LOS RECURSOS DIDACTICOS EN EL APRENDIZAJE.

1.2.1 ¿Los recursos didácticos ayudan al aprendizaje?

Los recursos didácticos son los medios o materiales de apoyo que utiliza el docente, para mediar los contenidos de aprendizajes significativos nuevos o de refuerzo, mediante la construcción del conocimiento por los propios estudiantes (Isidro, 2004). Esto implica un trabajo activo por parte de los alumnos, pues son ellos quienes construyen su conocimiento con base en los recursos didácticos utilizados por el docente, debido a que lo relacionan con su entorno.

González y Arévalo (2015) mencionan que ¨los resultados de utilizar recursos didácticos en el aprendizaje de sólidos, ayudaron a los alumnos a reconocer las características físicas de dichas figuras, todo esto con la manipulación y visualización de los sólidos¨ (p.7). Con base en lo anterior, vemos la importancia de los recursos didácticos dentro del aula y lo que pueden llegar a provocar en los alumnos, es decir, un aprendizaje constructivista.

1.2.2. Guía didáctica para los solidos de revolución.

Es un documento en donde se plasma toda la planificación de los contenidos por asignatura de cierto tema en donde deben constar los siguientes aspectos: lo que se expone al estudiando, procedimiento de cómo inducir al tema, detalles de lo más relevante de la asignatura, los recursos didácticos y tecnológicos que apoyarán al proceso de enseñanza - aprendizaje y cómo ejecutarlos, las pautas necesarias para el uso correcto de la metodología aplicada, los problemas de aprendizaje que se proponen, el tiempo que se emplea en el desarrollo de cada ejercicio, evaluaciones, etc. (García, 2009).

Uno de los principales recursos didácticos para la enseñanza de los sólidos de revolución es la guía didáctica, puesto que con base al autor Jean Piaget y su teoría sobre la concepción del constructivismo, la creación de una de ellas ayudaría en gran medida a mejorar las dificultades encontradas en la educación tradicional, siempre que el elemento fundamental sean los estudiantes, sin dejar de lado a los profesores, es decir, se busca que exista el apoyo entre ambas partes y así lograr con éxito que el estudiante sea capaz de construir y mejorar su aprendizaje con los conceptos básicos que le brinde el docente durante la jornada (Hernández, 2008). Por otra parte, la guía didáctica no está basada estrictamente en el modelo de Jean Piaget sino también en las perspectivas que propone el Ministerio de Educación del Ecuador (2016) mediante su currículo actualizado en donde fomenta el modelo constructivista haciendo principal responsable al estudiante de su aprendizaje contando con el apoyo del docente como guía.

1.2.3. Software en la visualización de solidos de revolución.

Los softwares son programas de computadora con una estructura de datos, gráficos que comprenden un conjunto de recursos interactivos informáticos diseñados para ser usados en el ámbito educativo, de allí la necesidad que hay en cuanto a las tareas del docente en incentivar su uso, con el objeto de que el estudiante logre un aprendizaje significativo (Fernández, Riveros y Montiel, 2017). Para el caso de la enseñanza de sólidos de revolución el software educativo: Geógebra, es una herramienta digital muy buena en el desarrollo de las demostraciones de las funciones para las diferentes esferas, donde el estudiante puede visualizar de mejor manera el concepto del mismo.

1.2.4. Las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) en la enseñanza de las matemáticas.

Las experiencias de enseñanza de las tic´s en el ámbito educativo han demostrado ser una alta motivación en el aprendizaje de los estudiantes comparada con los procesos tradicionalistas de enseñanza. Ultimamente las tics han tomado un espacio importante dentro del sistema educativo, siendo una práctica didáctica destinada a que los estudiantes aprendan a través de actividades realizadas con medios informáticos (Rosabel, 2016). En matemáticas específicamente en el tema sólidos de revolución, el maestro puede usar algunas tics como: juegos virtuales, software, simulaciones en línea, proyecciones, etc.

1.3. LA ENSEÑANZA EN LOS SOLIDOS.

1.3.1. La enseñanza de sólidos de revolución.

A muchos estudiantes se les hace complicado visualizar sólidos de revolución, este problema responde a que la enseñanza de geometría, los sólidos y sus propiedades siempre se han manejado sin mayor profundidad, más bien, solo se ha trabajado y se privilegia lo bidimensional (Gonzáles y Arévalo, 2015).

Según la investigación realizada por González y Arévalo (2015), ¨Los estudiantes trabajaron en grupos, utilizaron manipulativos tangibles para identificar las características de los sólidos y llegaron a la conclusión de que la palabra vértice era confusa y todos acordaron llamarlas puntas, de esta forma los estudiantes reconocían todos los vértices de los sólidos propuestos por el docente¨ (p.7).

Según los párrafos anteriores, para que los estudiantes desarrollen sus capacidades de razonamiento espacial se utilizó diferentes estrategias metodológicas obteniendo excelentes resultados, de ahí la importancia de aplicarlas en el aula. Pues los estudiantes manipularon los sólidos, conversaron con sus compañeros y junto al docente y llegaron a descomponer los sólidos en sus propiedades.

1.3.2. Visualización espacial.

El papel de la visualización en las características del talento ha sido abordado desde diferentes perspectivas. Según Ramirez (2017), menciona que, numerosos autores que han destacado la importancia de la visualización en las tareas de matematización, resaltando el papel que la visualización ha supuesto en la obra de grandes matemáticos y vinculándola estrechamente con el éxito en las denominadas disciplinas STEM (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas). Desde esta perspectiva de cualidad para afrontar tareas matemáticas, la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras que se usan en el trabajo geométrico y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figural en términos visuales.

Intuitivamente, la visualización se entiende como la acción de generar o completar imágenes sobre fenómenos o conceptos que pueden o no ser gráficos. Esta acción es especialmente interesante en matemáticas, como han señalado Arcavi (2003) y Hadamard (1947). Para conceptualizar la visualización y hacer operativo su análisis, utilizaremos la caracterización que realiza Gutiérrez (1996), en la que unifica muchos de los desarrollos teóricos elaborados hasta el momento y consigue establecer un marco integrador. La visualización está integrada por cuatro elementos principales: imágenes mentales, representaciones externas, procesos visuales y habilidades de visualización.

Las representaciones externas son las manifestaciones físicas de un fenómeno, representaciones gráficas o verbales de conceptos o propiedades que incluyen dibujos, esbozos, diagramas, etc., y que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual. Las imágenes mentales son representaciones estables que el sujeto hace de situaciones externas, atendiendo al menos a algunos elementos y características de la situación, son representaciones cognitivas de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales. Los procesos de visualización son las acciones mentales o físicas en las que están involucradas las imágenes y que el sujeto emplea para transformar una representación externa en una imagen mental o para transformar y actuar con las imágenes mentales para incluirlas en sus razonamientos. Las habilidades de visualización son disposiciones estables del sujeto, desarrolladas a partir de la práctica, que le facilitan llevar a cabo procesos visuales.

Arcavi (2003) aprecia que la visualización supone capacidad, proceso y producto de la actuación sobre representaciones externas figúrales. Centramos la atención sobre el análisis de las habilidades de visualización, de las que se ha reconocido su importancia para el aprendizaje geométrico, según Bishop (1980) y Hershkowitz (1990) desempeñan un papel relevante al resolver una tarea matemática, interviniendo tanto en los procesos de creación y transformación de imágenes mentales como para relacionar estas con las representaciones externas. La distinción de habilidades específicas para realizar tareas concretas ha sido frecuente en la investigación psicológica, generalmente basada en estudios factoriales. En relación con la visualización, se han realizado numerosos trabajos, muchos de los cuales emplean las habilidades visuales (Höffler, 2010).

1.3.3. Teorías sobre la tridimensionalidad.

En su teoría, Piaget (1980) plantea una evolución, por medio de estudios, señalando que este proceso es uniforme para todos los niños indistintamente del contexto en el que se aplique, por otro lado, Lowenfeld (1980) afirma, además, que en todo proceso de creación interactúan distintos factores, como ambientales, sociales y emocionales. Luego de comparar ambas propuestas, Andrade y Montecino (2009) establecen diferentes niveles de abstracción del pensamiento para los mismos rangos de edades, como se detalla a continuación:

- Según Piaget (1980) señala que a los dos años y medios los niños son capaces de interpretar propiedades físicas de los objetos que son manipulados, por ejemplo, las cualidades de perspectiva. Mientras que para Lowenfeld (1980) en esta edad se da comienzo a la autoexpresión, por lo que los individuos están más centrados en su cuerpo que en lo que sucede alrededor, aún más, señala que es en la pre adolescencia cuando surge la necesidad de expresiones tridimensionales, sin embargo sólo pocos son capaces de apreciar en el espacio estas cualidades al descubrir que pueden realizar dibujos con ilusión de profundidad.

- Entre los 10 a 12 años, Piaget (1980), asegura que se manifiestan las operaciones espaciales, estableciendo el espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento. Además, Lowenfeld (1980) afirma que en el establecimiento de las representaciones tridimensionales influyen frecuentemente las emociones, de los 7 a los 9 años son capaces de distinguir las formas de un material, pero de los 9 a los 12 las actitudes egocéntricas, características de esta etapa, conllevan a dificultades para establecer relaciones espaciales debido a que se aíslan de su entorno y se centra en el yo.

1.4. LOS BENEFICIOS DE UTILIZAR DIFERENTES ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA A TRAVÉS DE UNA GUÍA DIDÁCTICA.

1.4.1. Estrategias de Enseñanza en la planificación de la clase.

Los profesores utilizan estrategias para planificar actividades, generar aprendizajes en los estudiantes, explorar conocimientos previos, cumplir con los objetivos de competencia, evaluar los aprendizajes, además le permiten la evaluación, a estas se les pueden llamar estrategias de enseñanza (Torres y Girón, 2009). También se menciona que las planificaciones de las clases tienen que venir con actividades motivadoras, lúdicas, que motiven y despierten la curiosidad del estudiante a la hora de recibir conocimientos, llevándole a una participación activa, dando como resultado la construcción de su propio conocimiento y desarrollando un aprendizaje significativo.

Desde otra perspectiva se sostiene que las estrategias didácticas en la práctica diaria pueden estar entrelazadas dado que en los procesos de enseñanza y aprendizaje el estudiante como agente activo adapta y procesa la información a la par de sus expectativas y sus conocimientos previos sobre la temática a aprender; sin embargo, es importante considerar elementos comunes que convienen estar presentes en una estrategia de enseñanza y de esta manera lograr aprendizajes pertinentes y transferibles a contextos reales (Feo, 2010).

Es importante considerar que los estudiantes tienen el compromiso de aprender a aprender debido a que es un proceso intencionado de desarrollo y uso de herramientas intelectuales que poseemos, con el fin de que nos sean más útiles en el trabajo de adquisición de nuevos conocimientos, destrezas y en la formación de actitudes y valores. Para ello el docente debe de ayudar a los estudiantes a desarrollar su potencial intelectual y creativo, a través del empleo de estrategias de enseñanza, de acuerdo con los intereses de los estudiantes y demandas de la actual sociedad, para promover un aprendizaje significativo (Torres y Girón, 2009).

El docente debe generar la actividad autónoma del alumno, partiendo de orientaciones necesarias que le permitan integrar los elementos didácticos en sus clases y así guiar al estudiante hacia la activación cognoscitiva que determina en gran medida la calidad del proceso de enseñanza con lo cual la utilización de una guías didácticas y diferentes estrategias metodologías permitirá que el estudiante se vuelva un sujeto activo dentro de su aprendizaje (Pérez, 2009).

1.4.2. La Didáctica dentro de clases.

La didáctica exige la utilización de estrategias y métodos adecuados. En la actualidad se reconoce la necesidad de una didáctica centrada en que el educando aprenda, lo cual exige enfocar la enseñanza como un proceso de orientación del aprendizaje, para que los estudiantes no sólo se apropien de los conocimientos, sino que desarrollen habilidades, formen valores y adquieran estrategias que le permitan actuar de forma independiente, creando un criterio propio de los contenidos (Moyano, et al. 2021).

La estrategia didáctica tiene carácter general, teniendo en cuenta que cada acción didáctica se concreta a partir del desarrollo profesional de los docentes, del diagnóstico de los estudiantes, de las potencialidades del contenido, de la disponibilidad de medios de enseñanza, así como de las actividades y tareas de cada clase. Trimiño y Zayas (2016) hacen mención que las estrategias didácticas son para todo el ámbito educativo (cualquier nivel educativo) y se generan con base a los conocimientos del docente, su preparación formativa, su planificación de los contenidos, para llegar a una transmisión de conocimientos efectiva hacia los estudiantes, donde ellos son autónomos de su propio aprendizaje, los docentes dan las instrumentos, los estudiantes utilizan dichas herramientas para fortalecer sus conocimientos.

1.4.3. Participación de la Guía Didáctica en los Contenidos.

La Guía didáctica es un instrumento motivador de primer orden para despertar el interés por la materia o asignatura correspondiente. Debe ser un instrumento idóneo para guiar y facilitar el aprendizaje, ayudar a comprender y, en su caso, aplicar, los diferentes conocimientos, así como para integrar todos los medios y recursos que se presentan al estudiante como apoyos para su aprendizaje (García, 2009). Sostiene que una guía didáctica es la mejor manera de planificar los contenidos para impartir conocimiento, ya que es un instrumento que motiva a los estudiantes a aprender, donde se utiliza diferentes recursos didácticos y engloba todo lo necesario para que el estudiante genere un aprendizaje significativo.

Capítulo II

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

2.1 Introducción.

La metodología estudia una serie de técnicas y métodos que se utilizan en la recolección de información acerca de problemas, sucesos, situaciones en la sociedad, que se usan en investigaciones científicas para alcanzar resultados verídicos. Urbina (2010) denomina metodología: “a los pasos y procedimientos que se han seguido en una indagación determinada, para designar los modelos concretos de trabajo que se aplican en una determinada disciplina o especialidad” (p.5).

La presente investigación tiene un enfoque cuantitativo, para la recolección y análisis de datos de la población se utilizó la técnica de la encuesta de forma virtual, mediante formularios de Google-Forms, debido a la situación actual que enfrenta el país y las restricciones por el Covid–19. Con los datos obtenidos se identificó las dificultades en la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas, esto nos sirvió para elaborar la propuesta didáctica de enseñanza, que se divide en un conjunto de clases activas, las mismas que contienen una serie de herramientas y recursos que los docentes puedan utilizar en sus clases, que están basadas en el constructivismo, y así faciliten al estudiante la comprensión de la temática.

2.2. Población y muestra.

La presente investigación tomo como población a los estudiantes de la carrera de pedagogía de ciencias experimentales: matemáticas y física de la Universidad de Cuenca en jornada matutina y vespertina quienes en ese momento se encontraban cursando sexto ciclo en la materia de funciones de varias variables del periodo Marzo-Agosto de 2021, en total son 40 y se tomó como muestra a 33 estudiantes, para tener un margen de error menor al 5%.

2.3. Encuesta.

La encuesta que se aplicó para esta investigación es de tipo descriptiva que se llevó a cabo mediante un cuestionario de 8 preguntas de opción múltiple y escala Likert. Esta encuesta tuvo varias interrogantes acerca de: problemas de visualización de integrales triples en un espacio tridimensional, dificultades en la utilización de diferentes estrategias metodológicas, recursos didácticos, uso de las TICS implementadas por el docente en la clase de integrales triples.

2.4. Análisis de Resultados.

Los resultados obtenidos, luego de aplicar la encuesta a los estudiantes de sexto ciclo de la carrera de pedagogía de ciencias experimentales: matemáticas y física de la universidad de Cuenca, se presentan detalladamente a continuación:

Pregunta 1. En la escala del 1 al 4, siendo 1 la escala más baja y 4 la escala mas alta. ¿Considera Ud. que al momento de abordar el tema de integrales triples usted puede visualizar el problema en un espacio tridimensional?

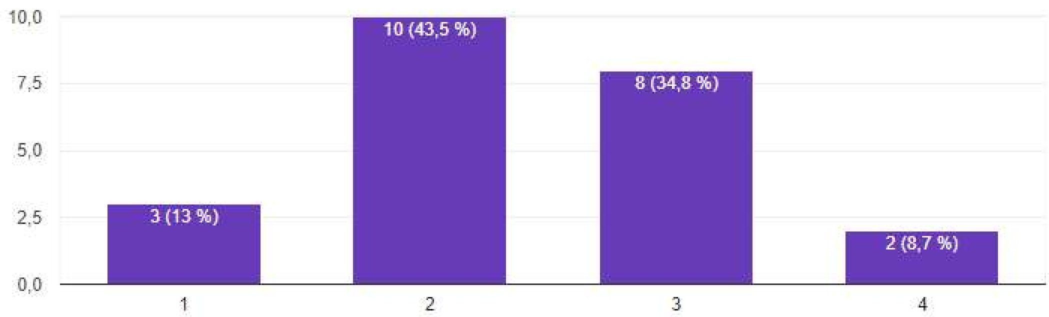


Figura 2: Visualización de integrales triples en un espacio tridimensional
Fuente: Autores

Interpretación: Con esta pregunta se pudo identificar que un 43,5% de los estudiantes no logran visualizar las integrales triples en un espacio tridimensional, lo que provoca reflexionar sobre las habilidades espaciales que tienen los estudiantes y a la vez los instrumentos que utiliza el docente para graficar dichas integrales y así mismo sus metodologías de enseñanza que utilizo en este tema, se destaca también con un

34,8% de estudiantes logran visualizar las integrales triples de forma satisfactoria en un espacio tridimensional, pues se entiende que reformando cualquiera de estas dos situaciones se mejore el aprendizaje de los estudiantes.

Pregunta 2. En escala del 1 al 4. ¿Cree Ud. que el docente deba utilizar diferentes estrategias metodológicas para abordar el tema de integrales triples en coordenadas esféricas?

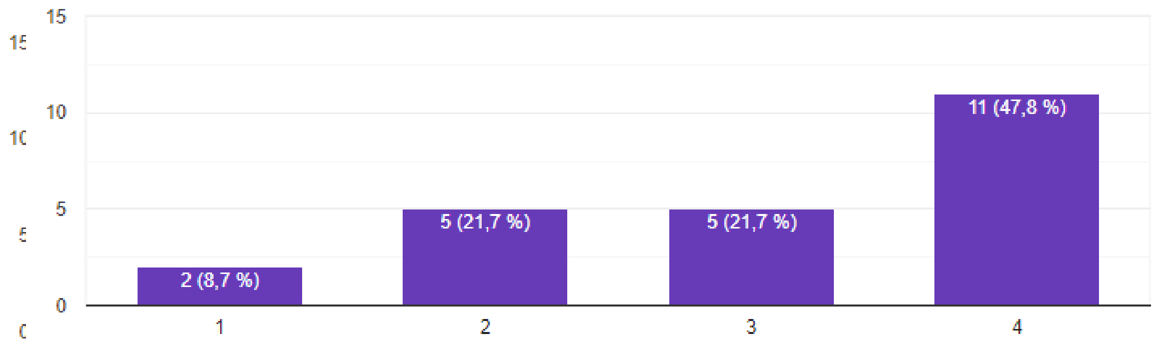


Figura 3: Utilización de diferentes estrategias metodologías en integrales triples en coordenadas esféricas.
Fuente: Autores

Interpretación: Con el gráfico se puede observar que un 47,8% estudiantes consideran que para un mejor aprendizaje de las integrales triples en coordenadas esféricas, se debe utilizar diferentes estrategias metodológicas. Evidenciando que con la utilización de diferentes métodos de enseñanza, las clases tradicionales se volverán clases más activas y así los estudiantes llegaran a construir su propio conocimiento.

Pregunta 3. Al momento de impartir la temática su docente utilizo:

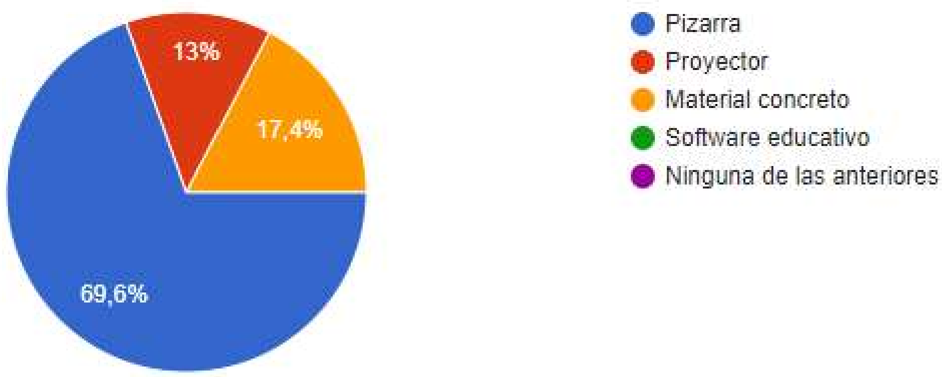


Figura 4: Utilización de recursos didácticos.
Fuente: Autores

Interpretación: En cuanto a la contextualización de esta pregunta es muy importante debido a que un 69,6% de los estudiantes enfatizaron que cuando ellos recibieron la temática, el docente utilizo solamente el pizarrón, por lo que se podría contribuir con diferentes recursos didácticos como lo son: material concreto, softwares matemáticos, entre otros dando como resultado un aprendizaje significativo.

Pregunta 4. En escala del 1 al 4. ¿Cree Ud. que es necesario que el docente utilice las TICS (Maple, Geógebra, Symbolab, entre otros) como herramientas de ayuda, para la graficación y resolución de integrales triples?

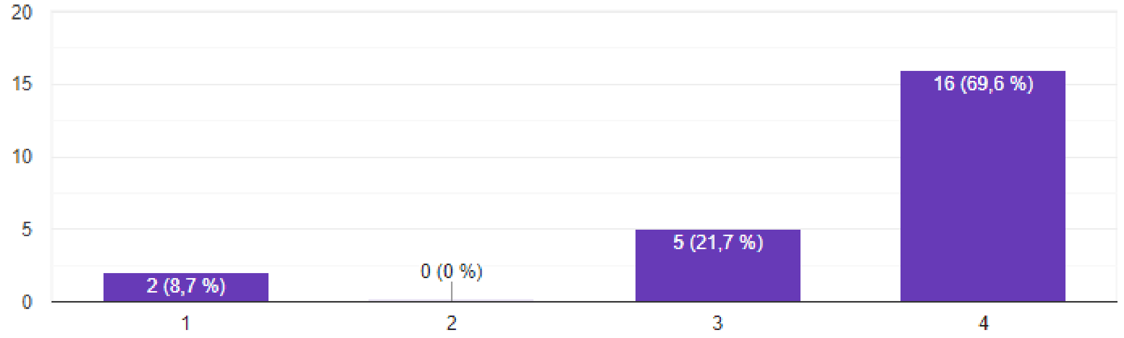


Figura 5: Utilización de las TICS.
Fuente: Autores

Interpretación: Como se evidencian en los resultados obtenidos un 69,6% piensan que la utilización de TICS ayudaría a mejorar y a retroalimentar el aprendizaje de la matemática, con lo cual el docente puede basarse en los distintos softwares para poder llegar a proponer una clase activa con diferentes metodologías de enseñanza.

Pregunta 5. ¿Qué considera Ud. que es lo más complicado al momento de resolver los ejercicios de integrales triples en coordenadas esféricas?

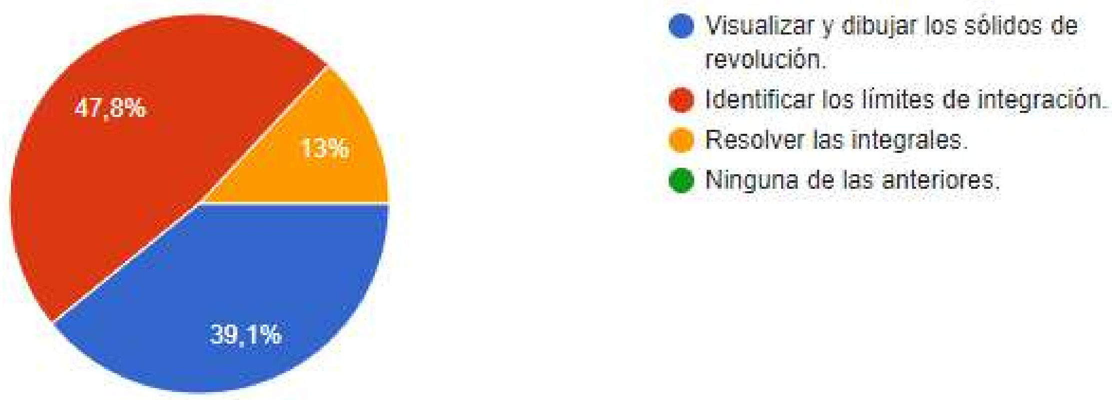


Figura 6: Dificultades al momento de resolver integrales triples en coordenadas esféricas.
Fuente: Autores

Interpretación: De acuerdo a los resultados obtenidos, se aprecia que a un 47,8% de estudiantes se les hace complicado identificar los límites de integración y un 39,1% visualizar y dibujar los sólidos de revolución, en donde el docente tiene la oportunidad de aplicar una serie de estrategías y recursos didácticos para mejorar o suprimir dichas dificultades de los estudiantes.

Pregunta 6. ¿Qué tan de acuerdo está Ud. en que se utilice material concreto para la visualización y resolución de ejercicios con integrales triples en coordenadas esféricas?

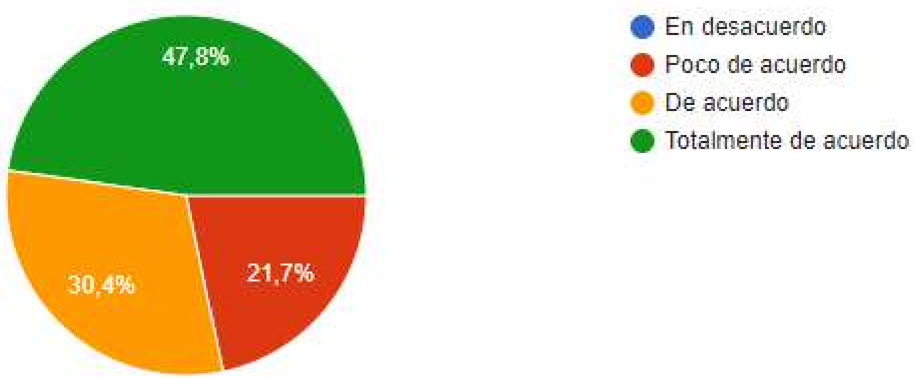


Figura 7: Utilización de material concreto para visualizar y resolver integrales triples en coordenadas esféricas.
Fuente: Autores

Interpretación: Con estos resultados se intuye que la mayoría de los estudiantes está de acuerdo en la utilización de material concreto para la visualización y resolución de integrales triples en coordenadas esféricas ya que con esto facilita el razonamiento espacial de los estudiantes y así poder llenar los espacios vacíos que deja la temática en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Pregunta 7. ¿Cree necesario el uso de material concreto palpable y tangible para mejorar el proceso de enseñanza en la temática de integrales triples en coordenadas esféricas? Argumente su respuesta.

si, ya que puede ayudar a generar una imagen mental del solido formado

Si, ya que se podrá percibir el tema de una manera mas dinámica, obteniendo una clase mas activa

Depende del tema, puesto que no en matemáticas no se puede utilizar material tangible para todos los temas

Si, porque los estudiantes relacionan la teoría con el contexto

Resulta un material que permite facilitar la comprensión y visualización de los sólidos en 3 dimensiones, que en ocasiones suele ser un poco abstracto. Sin embargo, preferiría hacer uso de software.

Si porque se puede visualizar de mejor manera

Si. Debido a que esto permite una mejor apreciación de los contenidos.

Es necesario porque no todos los estudiantes tienen una inteligencia espacial que permite visualizar como se debería para entender el tema y encontrar los límites

Interpretación: Según la base de datos los estudiantes consideran que los materiales tangibles soy muy importantes para el proceso de enseñanza de la temática, ya que cumple con varias ventajas particulares, visuales y manipulables que estas brindan, así mismo las consideran como instrumentos orientadores que benefician y mejoran el proceso educativo de una forma más dinámica, ya que facilita la comprensión y visualización de los sólidos en 3 dimensiones que en ocasiones suele ser muy abstracto la graficación de la misma, con esto se crea una armonía entre la práctica y la teoría, lo que hace que el aprendizaje sea más ameno y efectivo. Por otra parte se evidencia que algunos estudiantes prefieren programas que permiten el modelado y visualización de integrales triples e inclusive tienen facilidad de manipulación de los límites de integración.

Pregunta 8. Como futuro docente, ¿abordaría el tema de integrales triples en coordenadas esféricas con el uso de material concreto?

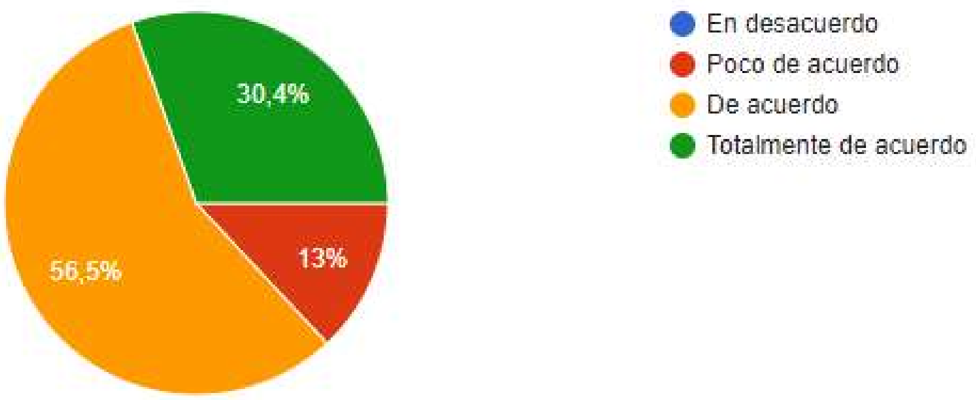


Figura 8: Utilización de material concreto para futuros docentes.
Fuente: Autores

Interpretación: Como se evidencia en los resultados, y unificando los dos porcentajes más altos, con un 87% de estudiantes afirman que cuando ellos sean docentes utilizarán materiales concretos en la temática de integrales triples en coordenadas esféricas ya que con ello podrán ayudar a una mejor visualización del sólido, mejorando el razonamiento espacial de los estudiantes con lo cual podrán adquirir el interés de los estudiantes motivándoles a generar una clase activa donde se ellos irán construyendo su propio conocimiento desarrollando un aprendizaje significativo.

2.5 Conclusiones de los resultados.

Con la encuesta realizada y debido a lo abstracto que puede ser para algunos estudiantes el visualizar y dibujar sólidos de revolución, se puede concluir que una guía didactica que proponga estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de integrales tríples en coordenadas esféricas es fáctible y puede ser una alternativa para los docentes y futuros docentes que impartán esta temática.

De la misma manera se generaron ideas para la elaboración de la propuesta, la misma que se plasmara en una guía didáctica que contenga recursos como: softwares, material concreto, páginas web, videos explicativos entre otros.

Por medio de una guía didáctica el docente fortalecerá la enseñanza, facilitando medios para la visualización, construcción y manipulación de solidos de revolución, para una mejor comprensión del tema, logrando la participación autónoma y activa de los estudiantes.

Esta guía didáctica está enfocada en brindar diversas alternativas para intentar suprimir el problema que existe dentro de las clases al momento de impartir el tema de integrales triples en coordenadas esféricas, ya que será una alternativa tanto para los docentes como para los estudiantes.

Capítulo III

PROPUESTA.

3.1 Introducción a la propuesta.

En este capítulo se presenta la elaboración de una guía didáctica denominada: "Guía didáctica para la enseñanza de integrales triples en coordenadas esféricas" diseñado con base a la investigación bibliográfica y cuantitativa; plasmadas en 4 clases que abarcan diferentes contenidos y actividades, dirigida hacia los docentes que imparten la temática de funciones de varias variables.

Cada una de las clases viene estructurada con los tres momentos de aprendizaje: anticipación, construcción y consolidación. Además las clases cuentan con recursos didácticos, tecnológicos, actividades para la casa, en clase, individuales y grupales, entre otros.

La propuesta tiene la finalidad de presentar a los docentes una variedad de opciones para explicar la temática y así despertar el interés de los estudiantes, ayudándoles a que tengan un papel activo en la construcción de su propio conocimiento generando su aprendizaje significativo.

3.2 Guía para el docente.

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFERICAS

GUIA DIDACTICA PARA EL DOCENTE

WALTER ROLDAN JIMBO
JOEL CURILLO TIGRE

Resultado de aprendizaje

Aplica los conceptos de integral a las funciones de varias variables

Indicador

Aplica integrales triples en la resolución de problemas.

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFERICAS

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

Universidad de Cuenca

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física

DIRECTOR:

Mgt: Freddy Patricio Guachún

AUTORES:

Walter Daniel Roldan Jimbo

Joel Fabian Curillo Tigre

2022

Introducción

Esta guía va dirigida hacia los docentes que impartan la temática de integrales triples en coordenadas esféricas.

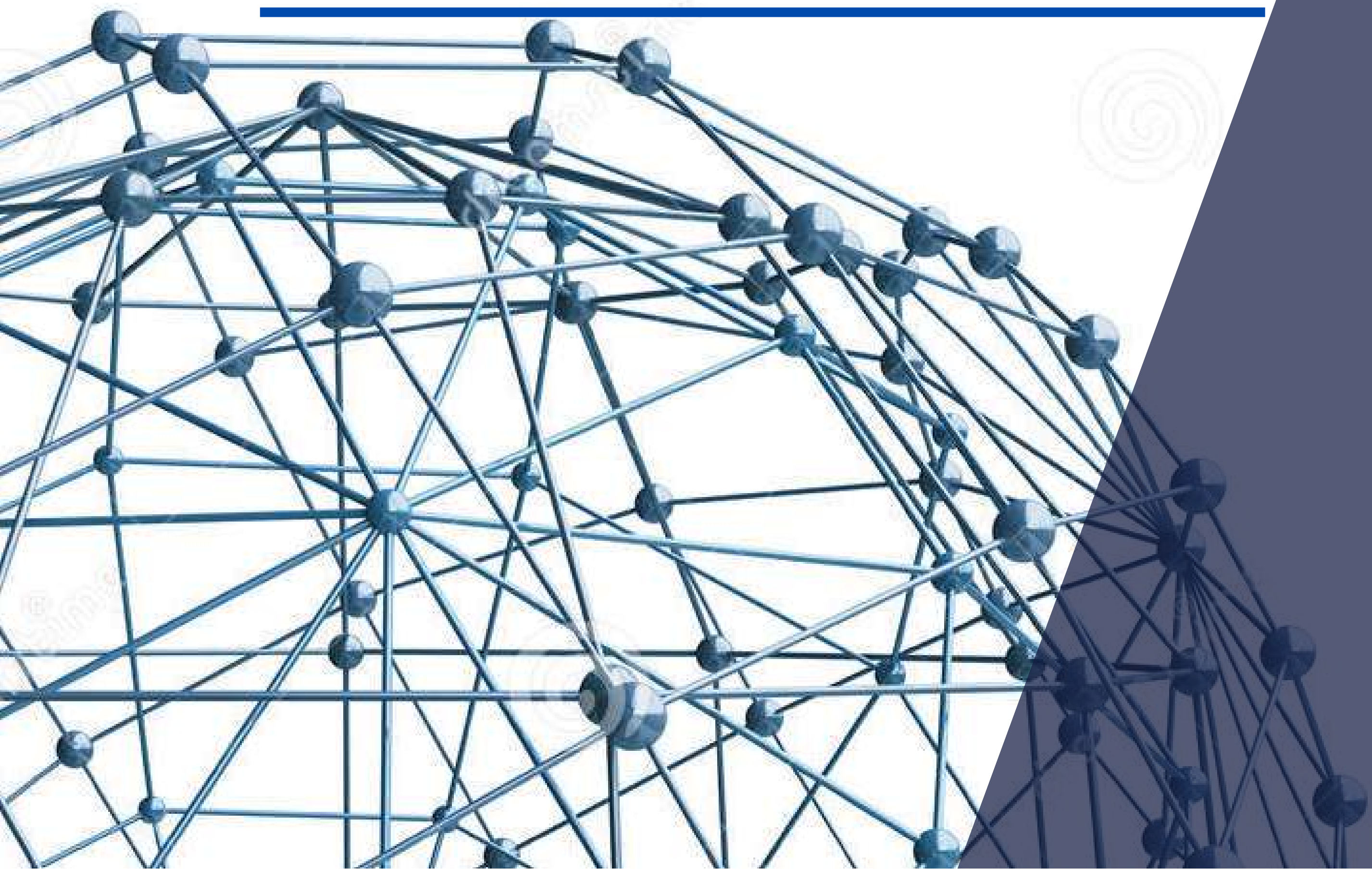
Tiene como objetivo el desarrollar estrategias metodológicas en donde el estudiante va a seguir una serie de actividades, llevando al estudiante a la activación de conocimientos previos la cual guiada por el docente irán construyendo su propio conocimiento y así llegar a la formación de un aprendizaje significativo.

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

GRAFICACIÓN DE PARES ORDENADOS EN COORDENADAS ESFÉRICAS

OBJETIVO

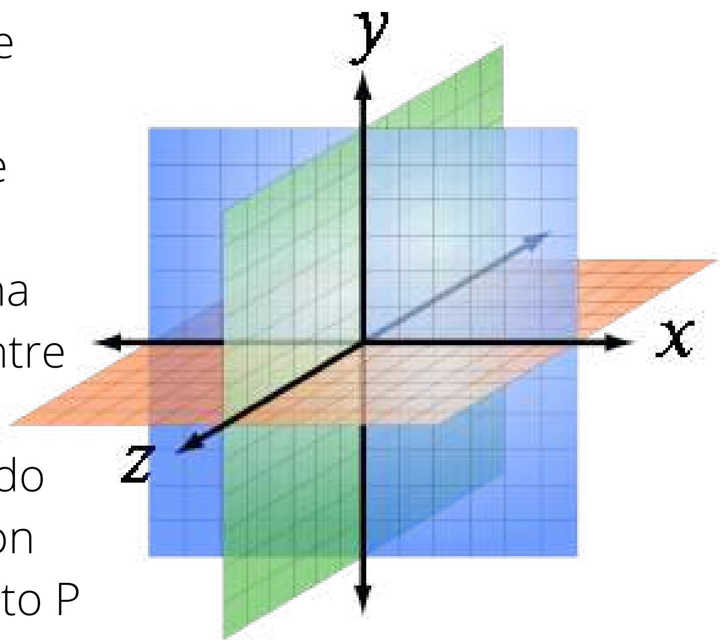
Graficar pares ordenados en coordenadas rectangulares y esféricas.



GRAFICACIÓN DE PARES ORDENADOS EN COORDENADAS ESFÉRICAS

¿Sabías que?

En el sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, la posición de cualquier punto se puede describir con un trío ordenado de números. Hay una correspondencia uno a uno entre cada punto P en el espacio tridimensional y el trío ordenado (x; y; z). Los valores de x, y, z son las coordenadas x, y, z del punto P



TIC´S

El docente podrá compartir con los estudiantes el siguiente link, o podrá proyectar en el aula de clases para analizar el sistema tridimensional.

https://www.youtube.com/watch?v=Uxu-51ZxNxE

DATO CURIOSO.

El espacio a nuestro alrededor es tridimensional a simple vista, un claro ejemplo además es el planeta Tierra.

Anticipación:

Duración de la clase: Dos horas clase.

Actividad 1.

Actividades propuestas para despertar el conocimiento previo que el estudiante posee acerca del tema.

El docente usará la imagen del radar del dragón, para realizar una lluvia de ideas sobre lo que quiere hacer Búlma con dicho objeto.

A continuación, los estudiantes se encargarán de anotar las coordenadas de de las esferas en el siguiente cuadro.

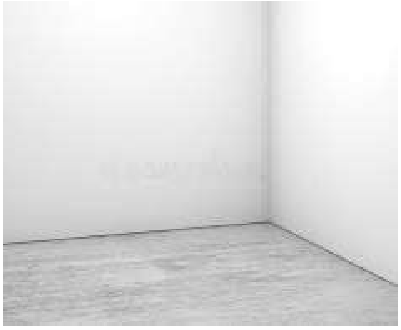
Nota: Recordar a los estudiantes que la flecha roja del radar será el punto (0,0) del plano cartesiano, y se partirá de ahí para ubicar las esferas.

Esferas	Coordenadas Rectangulares
Esfera 1	
Esfera 2	
Esfera 3	
Esfera 4	
Esfera 5	
Esfera 6	
Esfera 7	

Actividad 2.

Punto en tres dimensiones:

Mediante la esquina de la pared, los estudiantes notarán que no solo existen 2 sistemas de referencia sino 3, y a la vez existen 3 ejes: X, Y y Z.



¡Entérate!

$(x, y) \neq (y, x)$. $\longleftrightarrow$ $(x, y, z) \neq (y, x, z)$.

El orden de las componentes no puede ser cambiado.

Construcción:

Actividad:1

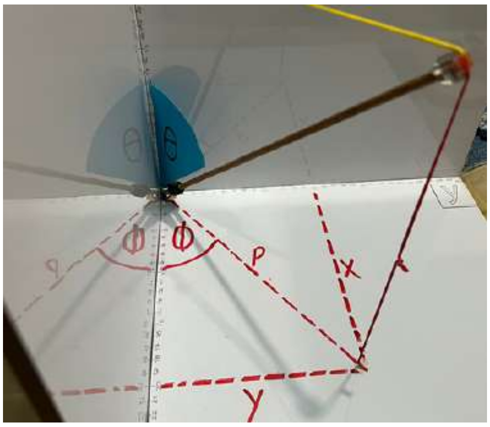
Los estudiantes serán capaces de deducir que las componentes x,y,z en coordenadas esféricas se representa por:

***p*, θ, ϕ** como analizamos en la gráfica.

¿Cómo se da la variación de *p*?
¿En qué eje varía el ángulo θ?
¿En qué eje varía el ángulo ϕ?

Luego de estas preguntas, los estudiantes deducirán junto al docente cuáles son las componentes de las coordenadas esféricas.

Mediante la manipulación de la maqueta 1, los estudiantes identificarán el punto P, el ángulo θ, y el ángulo ϕ. y responderá lo siguiente.



Los estudiantes contestarán las siguientes preguntas:

Señale lo correcto:

La coordenada radial "*p*" toma valores positivos y negativos:

Verdadero o <u>Falso</u>

Complete:

La coordenada <u>θ</u> toma como valor mínimo <u>0º</u> para puntos ubicados sobre el semieje positivo <u>Z</u> y valor máximo <u>180º</u> para los puntos que están ubicados en el semieje negativo <u>Z</u>.

Conteste:

¿Cuál es el valor mínimo y máximo que toma la coordenada azimutal ϕ?

Respuesta: <u>valor mínimo 0º y cota máxima de 360º.</u>

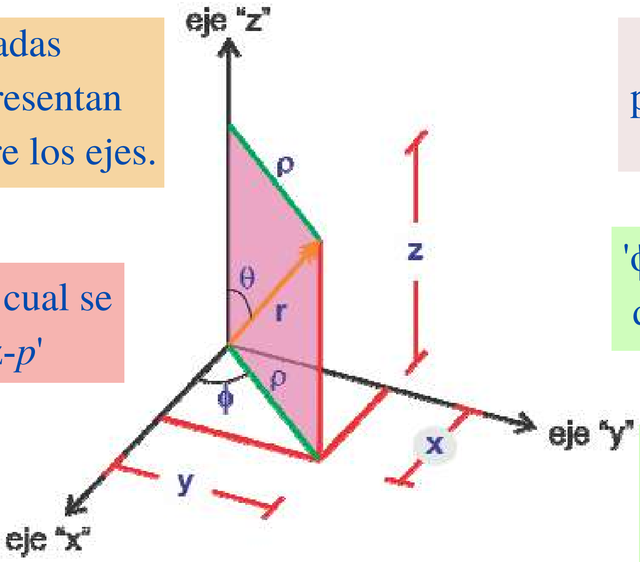
GRAFICACIÓN DE PARES ORDENADOS EN COORDENADAS ESFÉRICAS

El docente junto a los estudiantes analizaran los parámetros de la gráfica para deducir las fórmulas:

x,y,z son coordenadas rectangulares que representan longitudes medidas sobre los ejes.

'θ' es el ángulo polar, el cual se forma en el plano 'z-*p*'

Va desde del eje 'Z' positivo, hasta la línea 'r'.
0 ≥ θ ≥ π

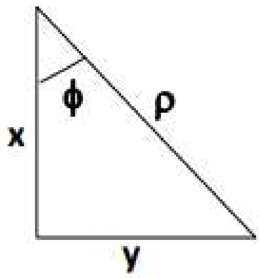


'*p*' es la longitud de la proyección del radio vector 'r' sobre el plano 'X-Y'.

'ϕ' es el ángulo azimutal y está descrito sobre el plano 'X-Y'.

'ϕ' se mide desde eje 'X' positivo, hasta la línea '*p*', siempre en sentido positivo.
0 ≤ ϕ ≤ 2π

'x', 'y', '*p*' forman un triángulo rectángulo. Donde '*p*' es la hipotenusa, 'x' el cateto adyacente a 'ϕ ' y 'y' el cateto opuesto a 'ϕ '.



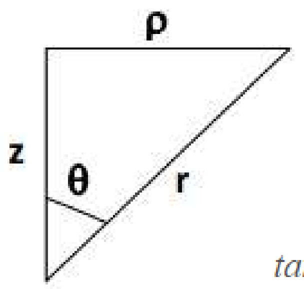
Donde:

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tan(\varphi) = \frac{C.OPU.}{C.ADY.}$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

'z', '*p*' y 'r' forman un triángulo rectángulo, donde 'r' es la hipotenusa, 'z' es el cateto adyacente al ángulo 'θ' y '*p*' es el cateto opuesto al ángulo ' '



Donde:

$$r = \sqrt{p^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

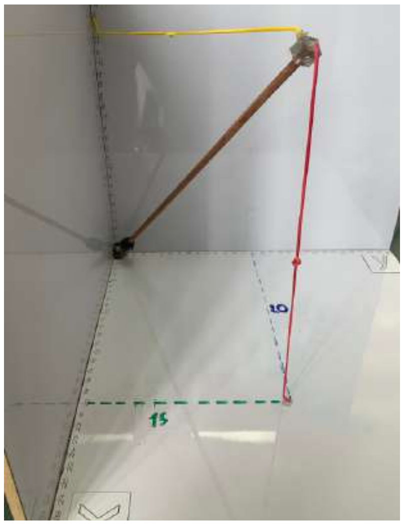
$$tan(\theta) = \left(\frac{C.OPU.}{C.ADY.}\right) \quad \theta = arctan\left(\frac{p}{z}\right)$$

$$\theta = arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

Actividad:2

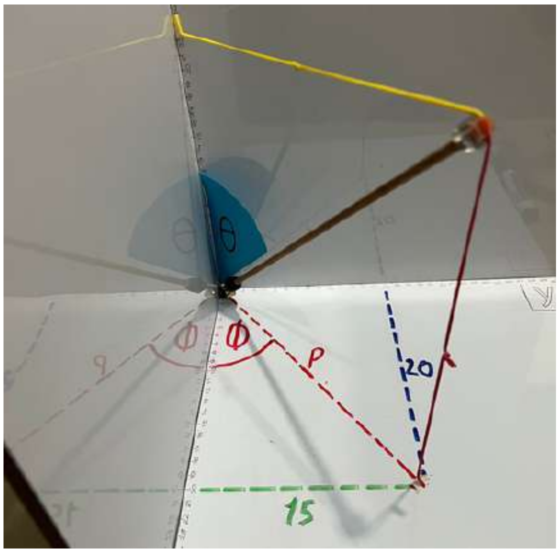
Uso de la maqueta por parte del docente.

Junto con los estudiantes manipulen la maqueta 1 y visualicen diferentes puntos en el espacio.



Dado el punto P (20,15,22) en coordenadas rectangulares, transformar dicho punto en coordenadas esféricas, haciendo uso de la maqueta propuesta.

Resultado esperado



$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow r=\sqrt{20^2+15^2+23^2} \rightarrow r=\sqrt{1154} \quad (\text{Decimal:} \quad r=33.97057\ldots)$$

$$\tan(\varphi)=\frac{C.OPU.}{C.ADY.} \rightarrow \varphi=\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \rightarrow \varphi=\arctan\left(\frac{15}{20}\right)=\arctan\left(\frac{3}{4}\right)=36.87^{\circ}$$

$$\tan(\theta)=\left(\frac{C.OPU.}{C.ADY.}\right) \rightarrow \theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \rightarrow =\arctan\left(\frac{\sqrt{20^2+15^2}}{23}\right)=\arctan\left(\frac{25}{23}\right)=47.39^{\circ}$$

Coordenadas Rectangulares **P** (20,15,22) $\longleftrightarrow$ $P=(33.97,\ 36.87^{\circ},\ 47.39^{\circ})$ **Coordenadas Esféricas**

Actividad:3

Los estudiantes junto con el docente recordaran:

La relación que existe entre las coordenadas rectangulares y esféricas.

¿Cuál es la relación para la coordenada x,y,z?

Las coordenadas esféricas son apropiadas para estudiar superficies que tenga un centro de simetría.

$X = r\,\text{sen}\Phi\cos\theta$

$Y = r\,\text{sen}\Phi\,\text{sen}\theta$

$Z = r\cos\Phi$

Partiendo de todo lo analizado anteriormente

Los estudiantes resolverán un ejercicio de transformaciones en su cuaderno y a continuación pasara un alumno al azar a resolverlo en el pizarrón.

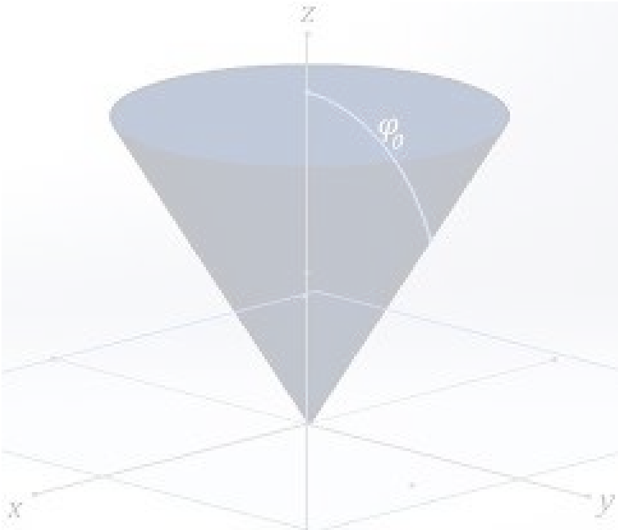
Ejercicio modelo:

Hallar una ecuación en coordenadas esféricas parar las superficies cuyas ecuaciones están en coordenadas rectangulares. Se indican a continuación:

Actividad:4

a) Cono: $x^2+y^2=z^2$

1. Graficamos en geogebra para visualizar los solidos de revolución:



2. Remplazamos las relaciones que existen de coordenadas esféricas en la ecuación del cono que esta en coordenadas rectangulares.

$$x^2+y^2 = z^2$$

$$p^2 sen^2\Phi cos^2\theta + p^2 sen^2\Phi\, sen^2\theta = p^2 cos^2\Phi$$

$$p^2 sen^2\Phi(cos^2\theta + sen^2\theta) = p^2 cos^2\Phi$$ Factor común.

$$p^2 sen^2\Phi = p^2 cos^2\Phi$$ Identidad trigonométrica.

$$sen^2\Phi / cos^2\Phi = 1 \qquad p>0$$ Identidad trigonométrica.

$$tg^2\Phi = 1$$

$$\Phi = \pi/4 \quad o \quad \Phi = 3\pi/4$$

Los estudiantes deducirán con la grafica que:
La ecuación $\Phi = \pi/4$ representa la mitad superior del cono y la ecuación $\Phi = 3\pi/4$ su mitad inferior.

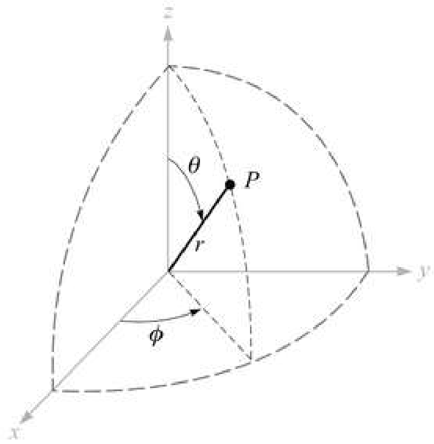
GRAFICACIÓN DE PARES ORDENADOS EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Refuerzo:

$0 \leq r < \infty$

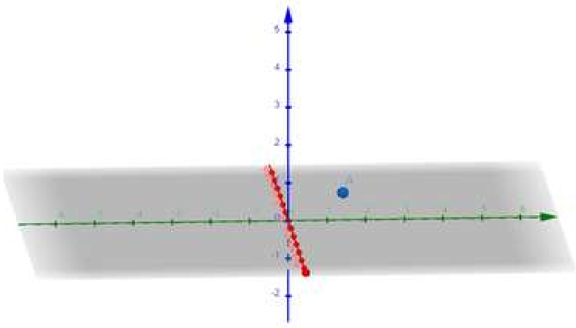
$0 \leq \theta \leq 180º$

$0 \leq \varphi < 360º$



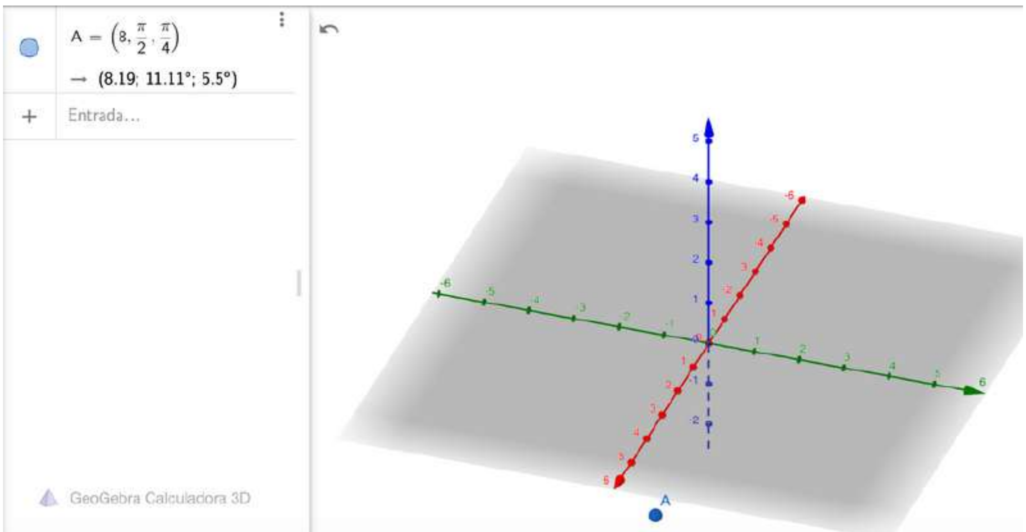
A continuación los estudiantes y el docente graficarán pares ordenados en coordenadas esféricas en geogebra.

Graficar en coordenadas esféricas el punto A: (4,65°,90°).



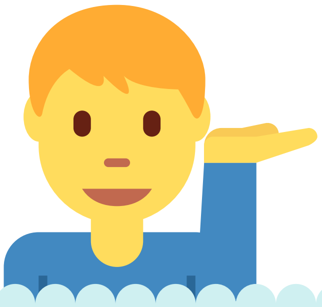
Los estudiantes graficarán un punto cualquiera en coordenadas esféricas y se procederá a realizar un sorteo para saber quien pasara a explicar su ejercicio en la pizarra con la ayuda de geogebra.

Graficar en coordenadas esféricas el punto A: (8, π/2,π/4).



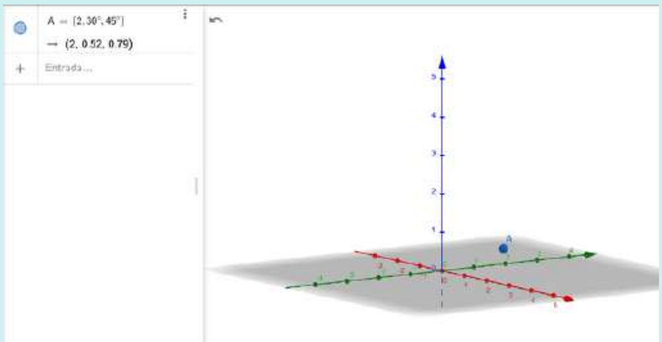
CONSOLIDACIÓN

ACTIVIDAD 1:

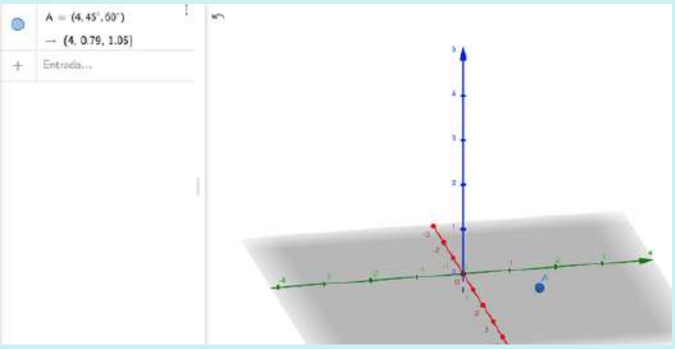


Para comprobar si los estudiantes cumplen con el resultado de aprendizaje, el docente enviará ejercicios prácticos a la casa, los cuales tienen que ser realizados de forma individual.

1) El punto (2, 30°, 45°) está dado en coordenadas esféricas. Pida a los estudiantes que grafiquen dicho punto en su cuaderno.



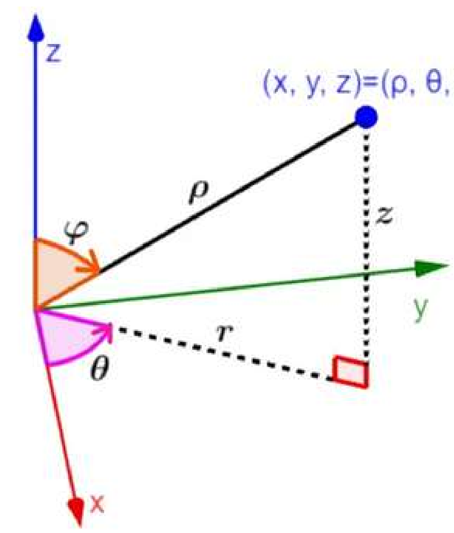
2) Realice el punto P, dado en coordenadas esféricas P(4, π/4, π/3)



Recordar a los estudiantes que en el ejercicio 2 hay que tomar en cuenta la relación: π = 180°.

ACTIVIDAD 2:

Proponer actividad que consiste en la resolución de ejercicios que servirán como conocimientos previos para la revisión del siguiente tema. Esta actividad se puede realizar de manera individual o en parejas.



El docente debe generar una retroalimentación de fórmulas para la resolución de ejercicios.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

TIC´S

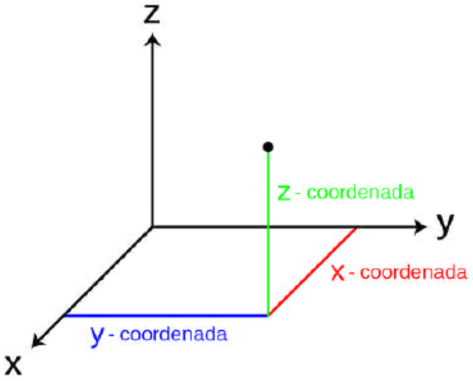
Juego en línea para la solución de ejercicios de transformación de coordenadas rectangulares a esféricas.

https://www.neurochispas.com/wiki/coordenadas-cartesianas-a-esfericas/

Ejercicios para la casa:

Teniendo al punto 1:(2, 3, 4) y el punto 2: (-4, 4, 6) en coordenadas cartesianas. ¿Cuál es su equivalencia de los puntos en coordenadas esféricas?

GRAFICACIÓN DE PARES ORDENADOS EN COORDENADAS ESFÉRICAS



Para finalizar, adjuntamos la rubrica de calificación para la tarea asignada anteriormente.

Rubrica para la calificación de tarea sobre 10 puntos.				
Puntaje:	3	2	1	0
Grafica pares ordenados en coordenadas rectangulares.				
Identifica las componentes de las coordenadas esféricas en el material didáctico.				
Transforma coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.				
Grafica pares ordenados en coordenadas esféricas.				
Identifica las diferencias de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.				
Total:				

Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\phi$.

OBJETIVO

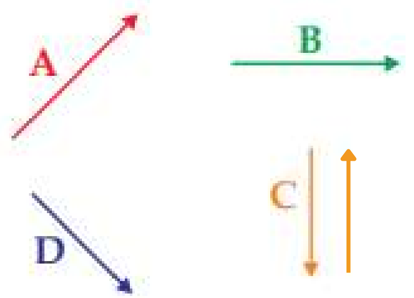
Identificar y reconocer los vectores unitarios pertenecientes a las coordenadas esféricas.

Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

Anticipación:

Duración de la clase: Dos horas clase.

Recurso visual a ser utilizado para la anticipación.



Formar grupos de 4, los estudiantes debatirán sobre las siguientes preguntas durante 5 minutos, al finalizar el tiempo, un integrante de cada grupo expondrá lo conversado.

Preguntas para la activación de conocimientos previos

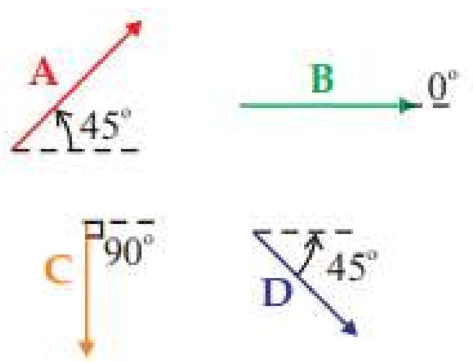
¿Qué nos representa las flechas anteriormente mostradas?

¿Afecta en algo que las flechas tengan diferente orientación?

¿Qué es la dirección de un vector?

¿A que llamamos magnitud o modulo?

Con el debate en la anticipación, el docente tendrá que definir y dejar claro los conceptos de: módulo, dirección y sentido. Además, tendrá que complementarlo con la imagen siguiente.



!Ojo¡

¿Qué se considera para medir el Angulo del vector?

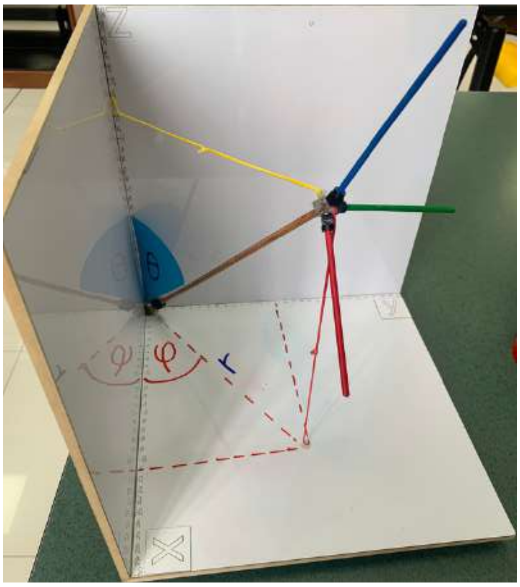
Respuesta: Se considera una recta de referencia,

Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

Construcción

ACTIVIDAD 1.

La siguiente imagen, muestra la maqueta que se elaboró para la enseñanza de vectores unitarios:



Con base a la maqueta, el docente realizará una serie de preguntas con la participación de los estudiantes sobre vectores unitarios:

¿Por que se le llama vector unitario?
¿Cuántos vectores unitarios hay y cuáles son cada uno de ellos?
¿Qué nos indica los vectores unitarios?

Con base en las respuestas de los estudiantes, construya una conclusión de los vectores unitarios.

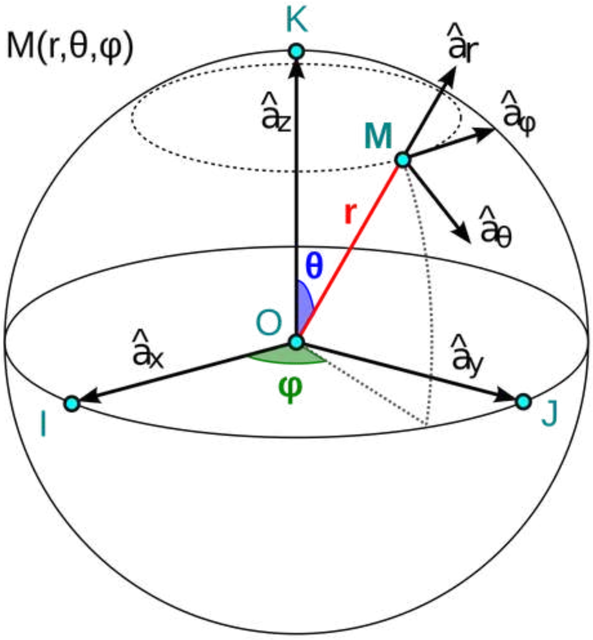
Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

Creación del nuevo conocimiento relacionándolo con sus saberes previos. Realice la siguiente experiencia.

Experiencia:

Materiales.

- Material concreto.
- Pizarra.
- Marcadores.
- Hojas de trabajo para los estudiantes.



Procedimiento.

Durante 10 minutos los estudiantes visualizarán y manipularán con cuidado la maqueta de vectores unitarios, luego, cada uno de ellos mencionará puntos interesantes de la maqueta.

Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{u}r, \vec{u}\theta, \vec{u}\phi$.

ACTIVIDAD 2.

1. Uno de los estudiantes ubicará el punto P en la maqueta.

El punto puede moverse sin problema en el sistema de 3 dimensiones, el cubo con imanes en la punta del vector expresa el punto "p".

2. A Continuación, otro estudiante localizara el vector "r" y mencionara si existe un punto de partida y un punto de llegada de dicho vector.

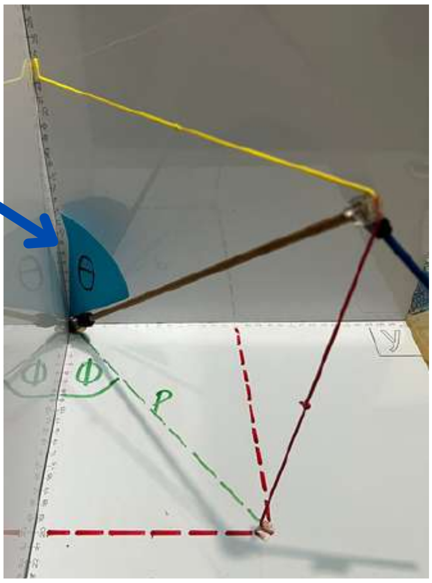
Punto de llegada

Punto de partida

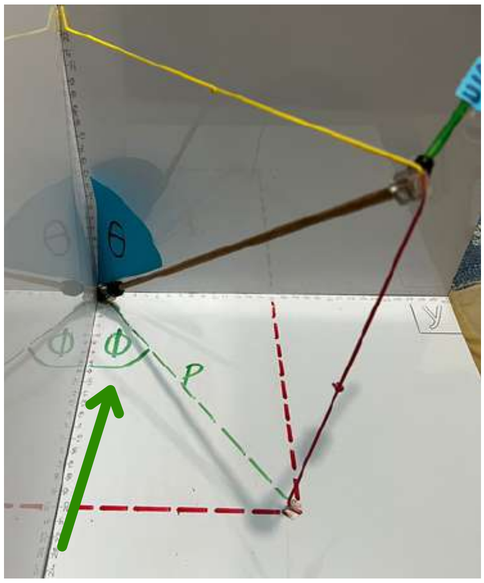
El docente debe socializar que si existe un punto de partida siendo este el origen y tiene un punto de llegada también que se lo denomina punto "p".

Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

3. Se pedirá a dos estudiantes que localicen el ángulo θ y el ángulo ϕ en la maqueta.



El docente debe indicar que el ángulo phi (color verde) se toma desde el eje "x" positivo hasta la proyección de "P", mientras que para el ángulo tetha (color azul) se toma desde el eje "Z" positivo hasta la recta "OP".



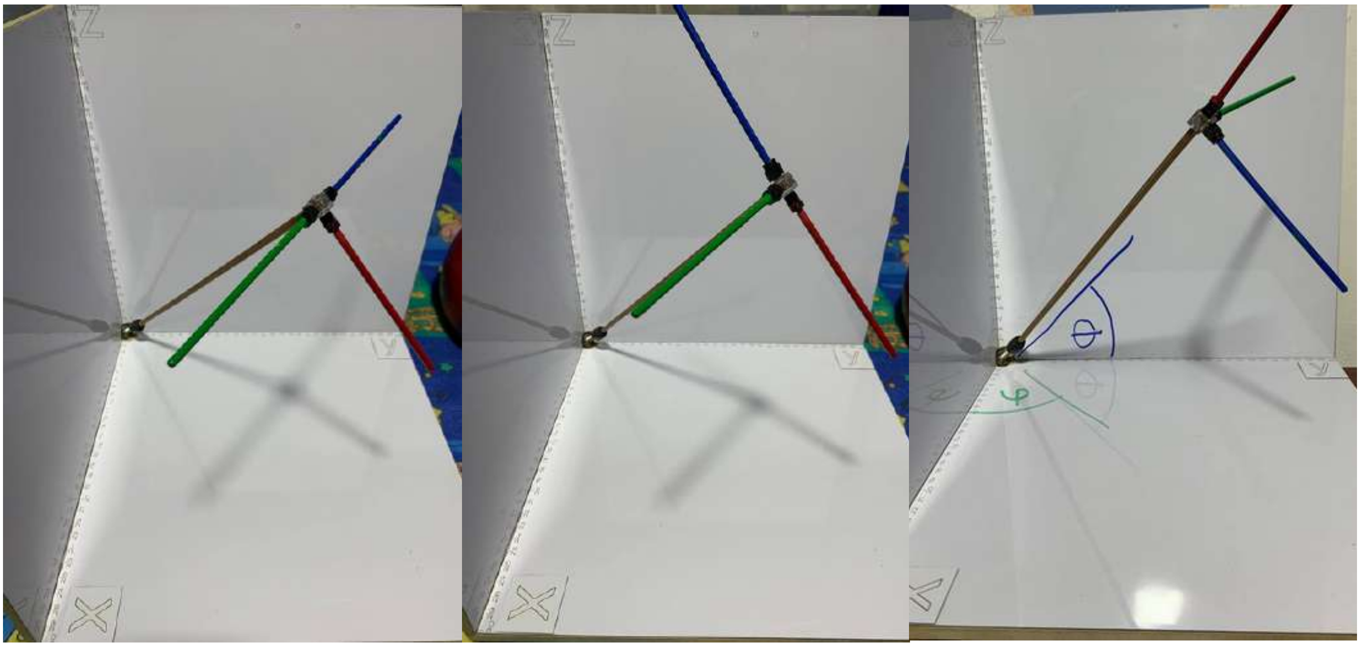
4. Pregunta a los estudiantes. ¿Qué rol cumple "r" dentro de la maqueta?
Respuesta: El vector "r" es la distancia del origen al punto P.

El vector puede moverse sin problema en el sistema de 3 dimensiones, el cubo con imanes en la punta del vector expresa el punto "p".

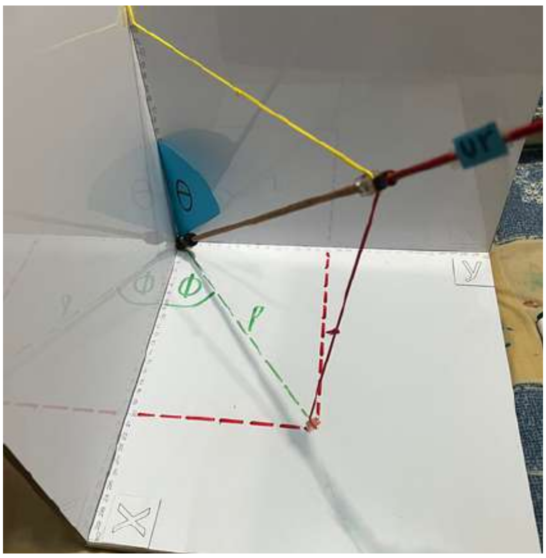
Vector "**r**".

Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

7. El docente junto con los estudiantes se ubicarán en el punto P y observaran las variaciones que realizan los vectores unitarios.



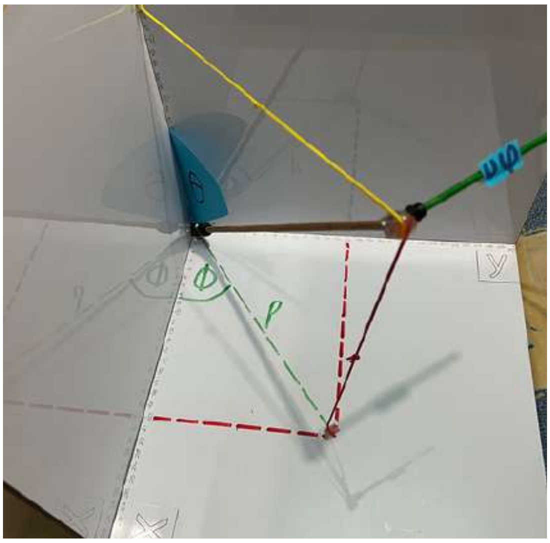
8. El docente mantiene constante θ y ϕ, y el estudiante hace que "r" aumente. ¿Qué vector unitario aparece?



Respuesta: Aparece el vector unitario ur (color rojo).

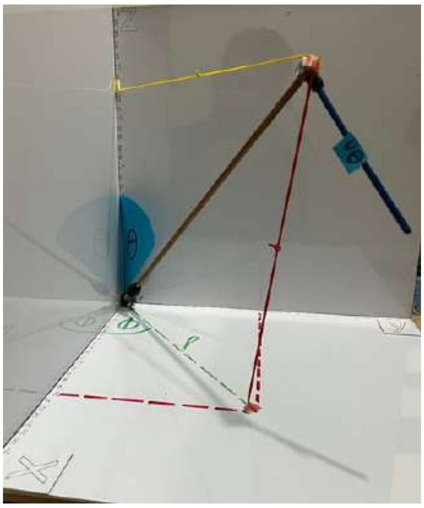
Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

9. Un estudiante mantiene constante θ y r, y otro estudiante hace que ϕ aumenta. ¿Qué vector unitario aparece?



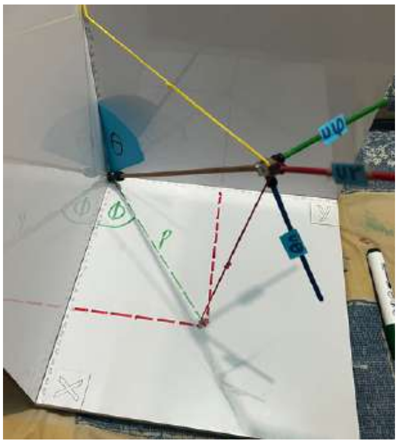
Respuesta: Aparece el vector unitario uϕ (color verde).

10. Un estudiante mantiene constante ϕ y r, y el docente hace que "θ" aumente. ¿Qué vector unitario aparece?



Respuesta: Aparece el vector unitario uθ (color azul).

11. Un estudiante aleatorio, intentará localizar los vectores unitarios: ur, uθ, uϕ.



El docente deberá realizar una retroalimentación acerca de los vectores unitarios revisados en los apartados anteriores.

Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

CONSOLIDACIÓN:

Actividad 1.

Los estudiantes graficaran las siguientes coordenadas en sus cuadernos y lo corroboraran con la maqueta, finalmente lo verificaran con geogebra,

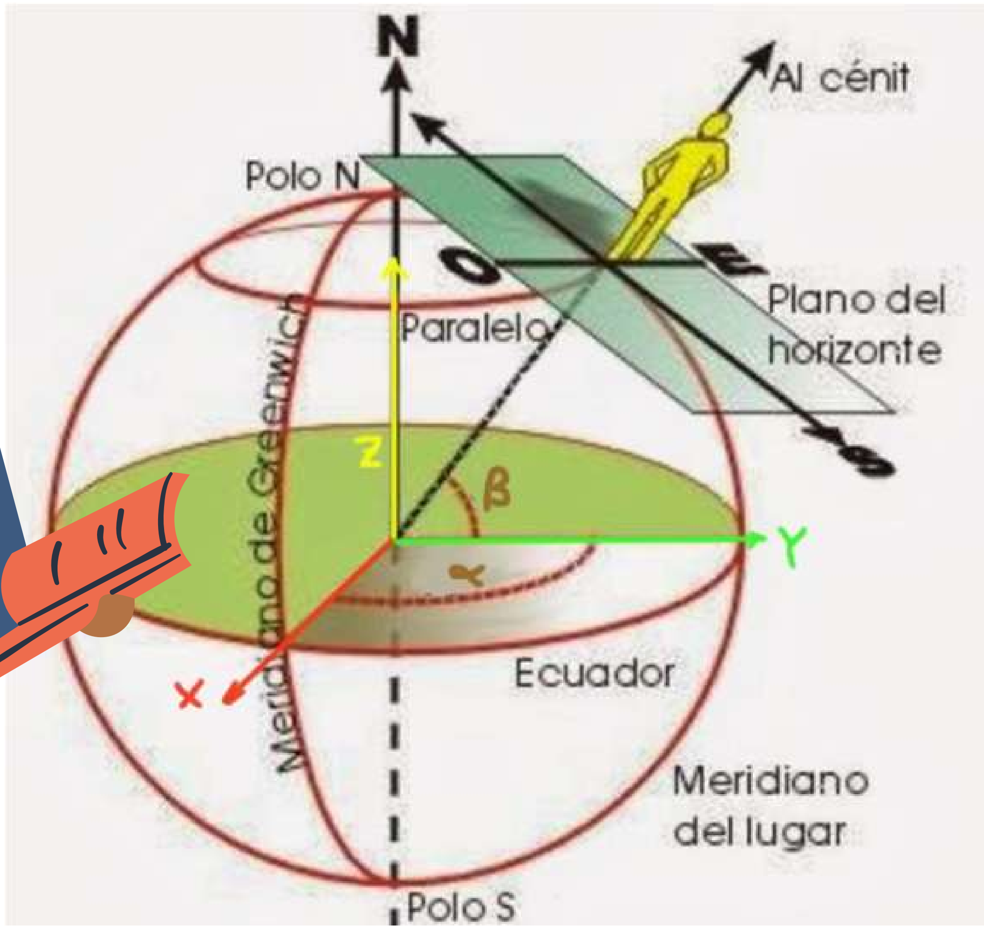
Coordenadas: (3;45°;45°); (5;40°;55°); (7;25°;75°)

Responda:

En base a la imagen: ¿Qué vectores se genera al volar una cometa ?

Actividad 2.

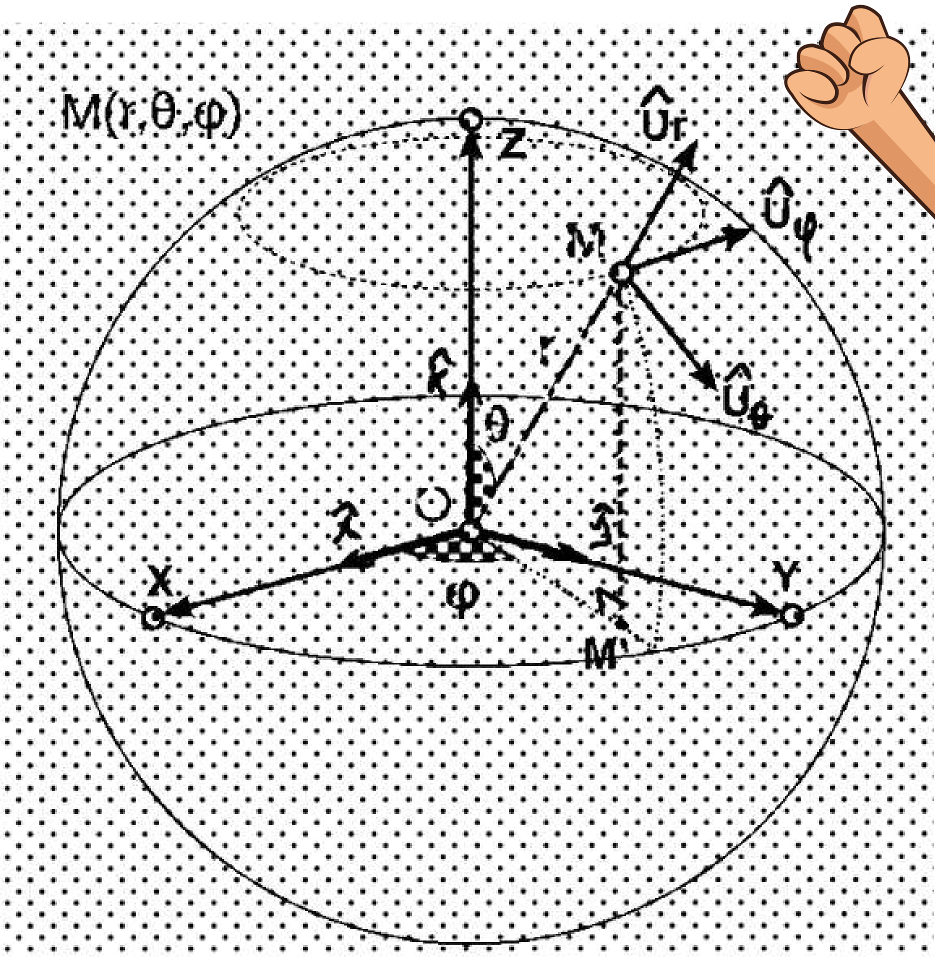
Luego de la clase, el estudiante será capaz de identificar los vectores unitarios en coordenadas esféricas, por ello el docente planteará una actividad grupal donde los estudiantes deberán llevar la teoría revisada a casos de aplicación real. Por lo tanto, el docente explicará la consigna del trabajo, indicará el número de integrantes por grupo, realizará recomendaciones explicando criterios importantes y finalmente socializará la rúbrica de calificación.



Vectores unitarios en coordenadas esféricas: $\vec{ur}$, $\vec{u\theta}$, $\vec{u\phi}$.

Consigna

Sabiendo que las islas Malvinas tienen coordenadas geográficas 59ºO 51,75ºS, determinar las coordenadas esféricas correspondientes. Recordar que el eje X va del centro de la Tierra al meridiano 0º y sobre el plano ecuatorial; el eje Y también en el plano ecuatorial y pasando por el meridiano 90º Oeste; por último el eje Z en el eje de rotación terrestre en sentido Sur-Norte.



Recomendaciones

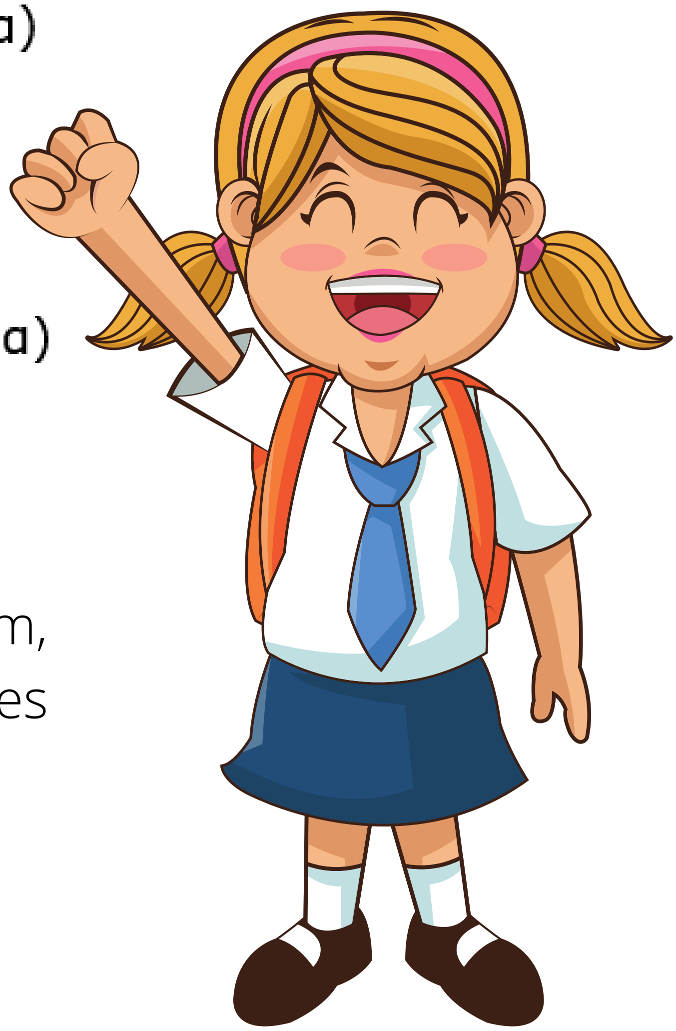
Para hallar entonces las coordenadas esféricas correspondientes usamos las fórmulas presentadas:

$\alpha E \beta N \rightarrow (Rt,\ \theta=90^o-\beta,\ \varphi=\alpha)$

$\alpha O \beta N \rightarrow (Rt,\ \theta=90^o-\beta,\ \varphi=360^o-\alpha)$

$\alpha E \beta S \rightarrow (Rt,\ \theta=90^o+\beta,\ \varphi=\alpha)$

$\alpha O \beta S \rightarrow (Rt,\ \theta=90^o+\beta,\ \varphi=360^o-\alpha)$



Solución

59ºO 51,75ºS → (r=6371 km, θ=90º+51,75º, φ=360º-59º) ,es decir

Malvinas:
(r=6371 km, θ=141,75º, φ=301º)

Rúbrica de calificación

Rubrica para la calificación de tarea sobre 10 puntos.				
Puntaje:	3	2	1	0
Define el concepto y las características de un vector.				
Identifica los vectores unitarios que existe en las coordenadas esféricas con el material didáctico.				
Identifica los roles que cumplen los diferentes vectores unitarios en coordenadas esféricas.				
Grafica pares ordenados en coordenadas esféricas con Geógebra.				
Sabe manipular y dar las características de cada vector unitario en coordenadas esféricas.				
Total:				

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

DIFERENCIAL DE VOLUMEN EN COORDENADAS CARTESIANAS Y ESFERICAS

OBJETIVO

Determinar el diferencial de volumen en coordenadas cartesianas y esféricas mediante el uso de TICS y material concreto.

DIFERENCIAL DE VOLUMEN EN COORDENADAS CARTESIANAS Y ESFÉRICAS.

Anticipación:

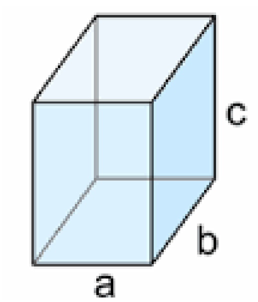
Duración de la clase: Dos horas clase.

Las siguientes actividades tienen como objetivo activar el conocimiento previo que posee el estudiante acerca del tema.

¿Cuál es el volumen de un paralelepípedo?

Respuesta:

El volumen de un paralelepípedo es base*ancho*altura = a*b*c = V.

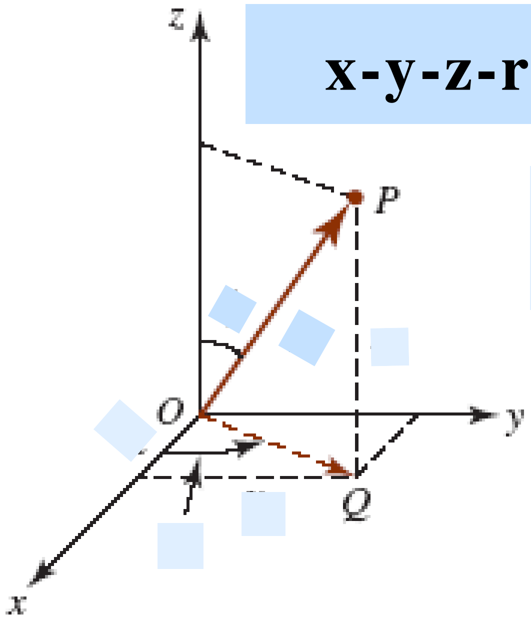


¿Qué dimensiones puede variar el paralelepípedo mostrado anteriormente?

Respuesta: ______________________________

Completar los recuadros de la siguiente grafica con los siguientes datos.

x-y-z-r-θ-ϕ



Refuerzo: ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos que pueden tomar los ángulos?

$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \theta \leq 180º$

$0 \leq \varphi < 360º$

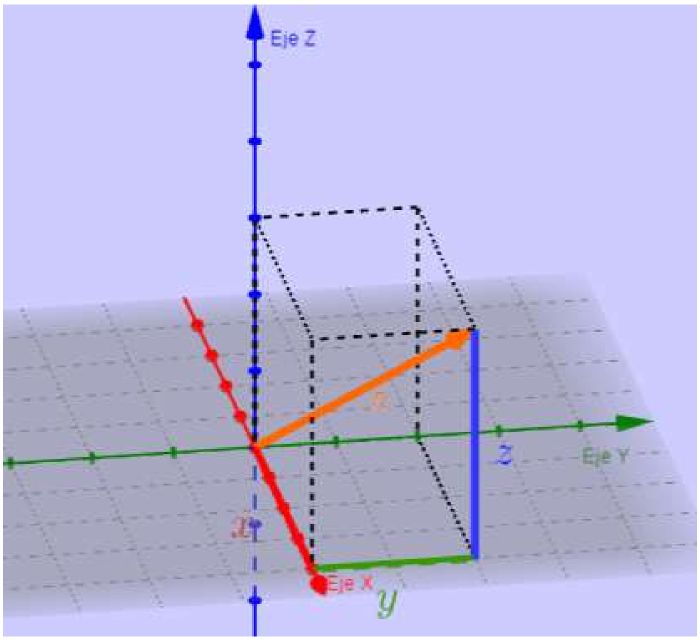
Construcción

Los estudiantes junto con el docente analizaran la siguiente grafica y responderán las siguientes conclusiones.

¿Se puede variar las dimensiones del paralelepípedo en sus diferentes ejes?

¿De acuerdo a la grafica cuáles son las coordenadas obtenidos en cada eje de coordenada?
Respuesta: x,y,z deben ser constantes, coordenadas son: (4,2,3)

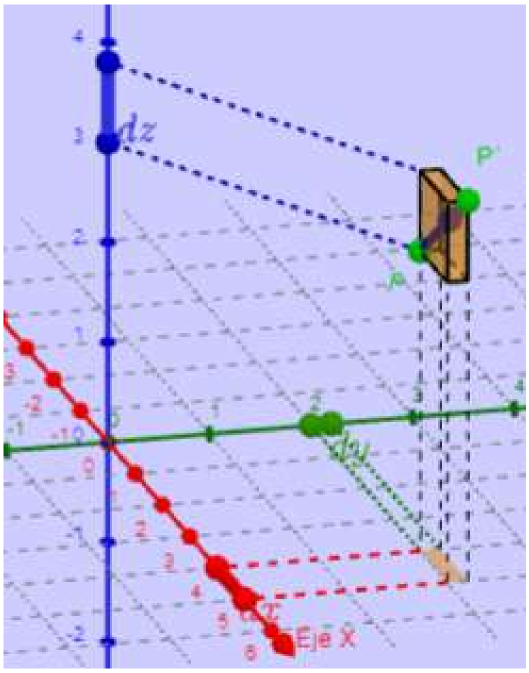
→



¿Cuál es el símbolo de variación para cualquier eje?
Respuesta: Delta "Δ"

¿De acuerdo a la grafica cuanto a variado cada eje? Si sus nuevos puntos son x=5, y= 2.2 y z=3.8

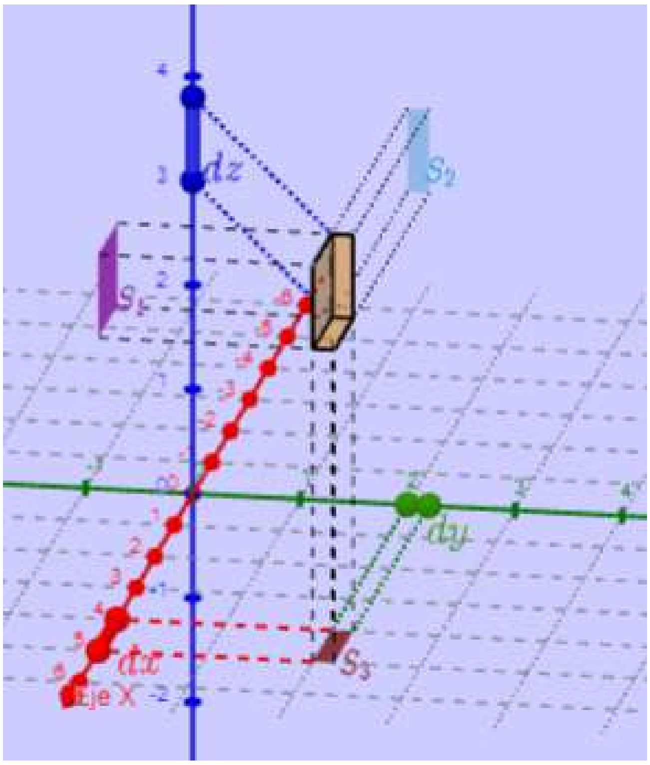
$\Delta X=(x1-x)$ $\Delta Y=(y1-y)$ $\Delta Z=(z1-z)$



DIFERENCIAL DE VOLUMEN EN COORDENADAS CARTESIANAS Y ESFÉRICAS.

Construcción

¿Cuál son las superficies de las variaciones de acuerdo al grafico?



Solución: **S1**= x*z
S2= y*z
S2= x*y

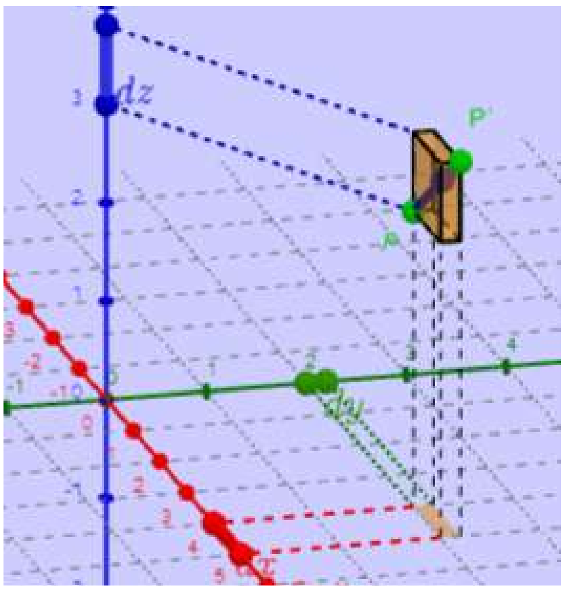
¿A que llamamos diferencial de volumen?

Respuesta: ______________________________

¿Cuál es el volumen del diferencial de la siguiente grafica?

Respuesta: $\Delta V = \Delta x * \Delta y * \Delta z$

$dV = dxdydz$

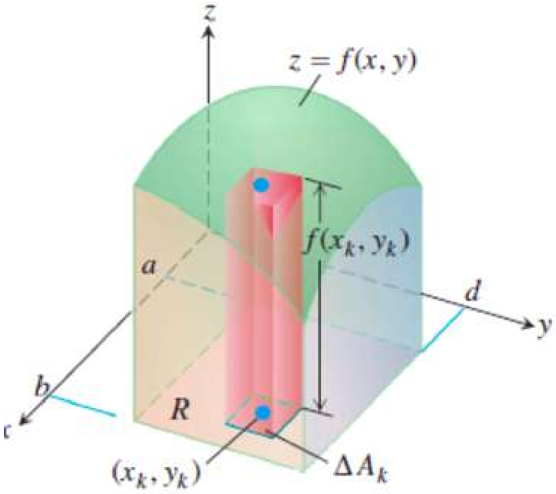


Construcción

Los estudiantes junto con el docente recordaran:

Las integrales triples son como integrales dobles, pero en tres dimensiones.

$$Z = V = \iint_R f(x, y)\, dA. \quad dA = dxdy$$



¿Cuál es la manera abstracta de escribir la integral triple?

Respuesta:

$$V = \iiint_R f\, dV$$

Unir:

R	Función con puntos en el espacio tridimensional.
f(x,y,z)	Diferencial de volumen.
dV	Región en el espacio tridimensional.

Concretamente: ¿Cómo se representa las tres integrales anidadas?

$$V_T = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

$$V = \iiint_Q f(x, y, z)\, dv$$

$$\underbrace{\int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \overbrace{\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx}^{\text{Esta es función solo de } y \text{ y } z.}\, dy}_{\text{Esta es función solo de } z.}\, dz$$

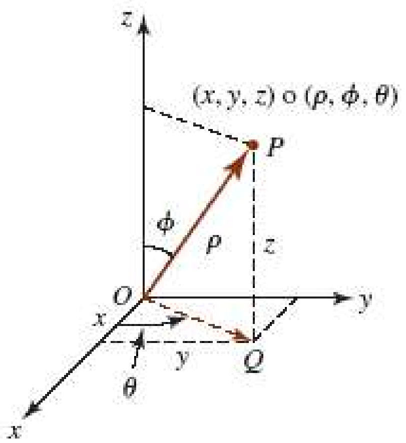
DIFERENCIAL DE VOLUMEN EN COORDENADAS CARTESIANAS Y ESFÉRICAS.

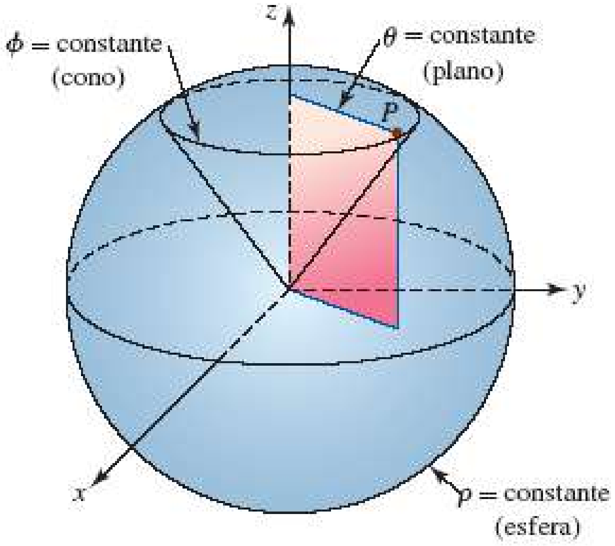
Construcción

Los estudiantes responderán las siguientes preguntas guiándose en la grafica.

¿Cuántas superficies existen sistema de coordenadas esféricas y cuáles son?

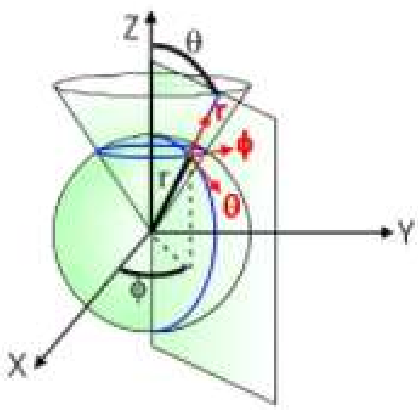
Respuesta: Existen 3 superficies las cuales son una esfera, un cono y un semiplano.





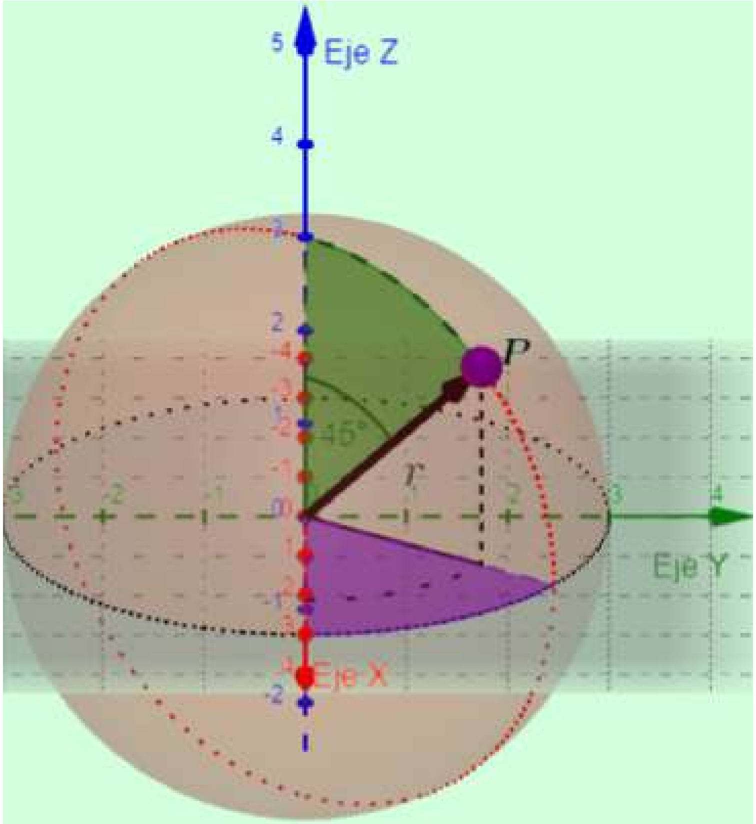
Unir: Análisis de las características de las superficies.

Esfera:	Contiene al eje z y forma un ángulo ϕ con el semiplano XZ.
Cono:	Radio r
Semiplano:	De eje z y centro en el origen, cuya superficie forma un θ ángulo con el eje z.



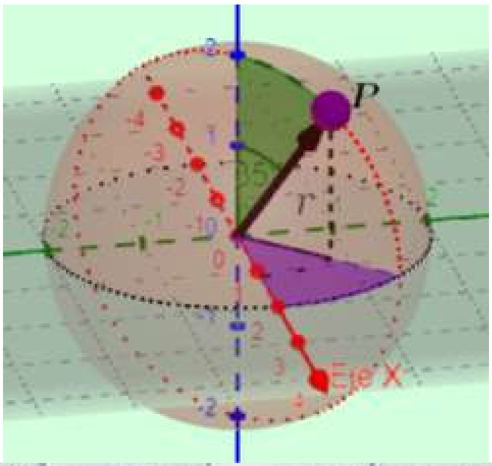
Construcción

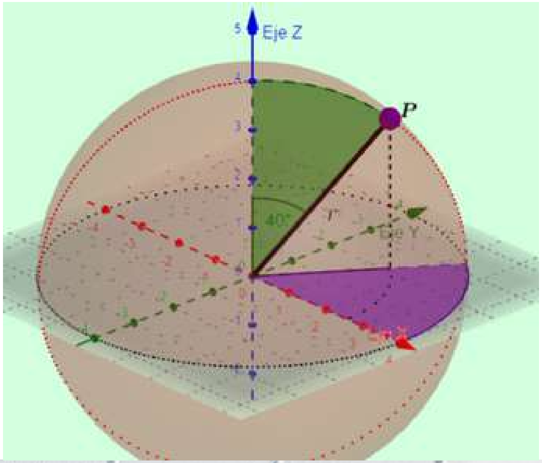
Los estudiantes junto con el docente graficaran en geogebra el siguiente punto en coordenadas esféricas: (3,55°,45°)



Pueden complementarlo graficando en: https://www.edumedia-sciences.com/es/media/269-coordenadas-esfericas#google_vignette

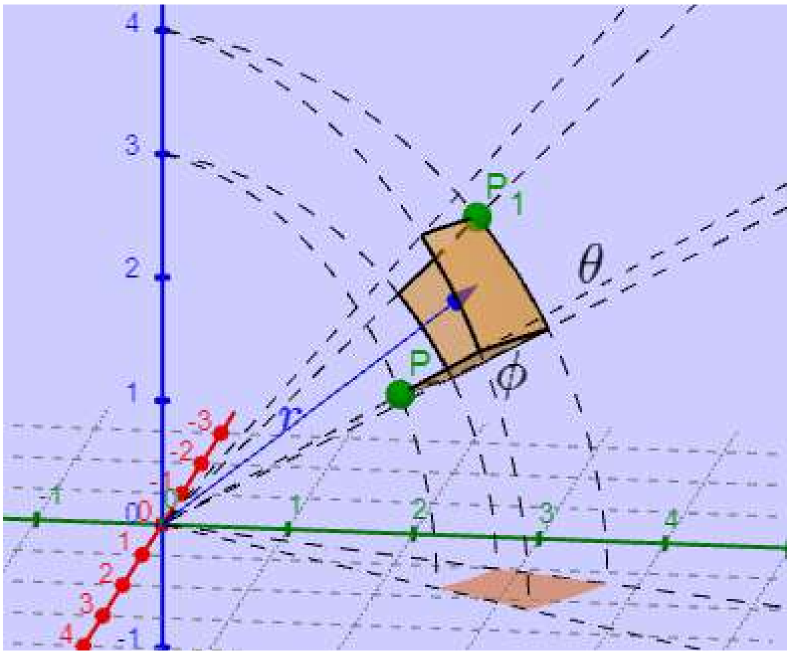
Los estudiantes en geogebra graficaran diferentes puntos en coordenadas esféricas: (2,40°,35°) y (4,55°,40°)



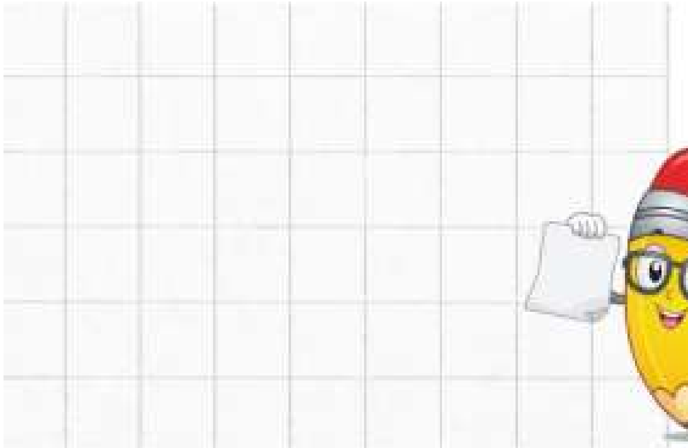


DIFERENCIAL DE VOLUMEN EN COORDENADAS CARTESIANAS Y ESFÉRICAS.

Los estudiantes en geogebra en el mismo plano graficaran los puntos (3,55°,45°) y (4,70°,60°) y responderán las siguientes preguntas:



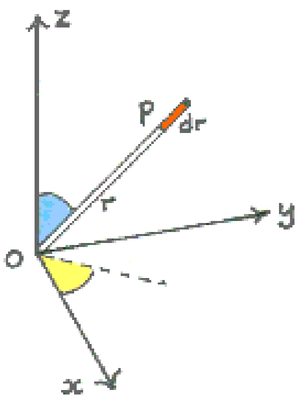
¿Enfatice sobre que es el diferencial de volumen en coordenadas esféricas?
¿Cuánto a variado r ,θ°,ϕ°?



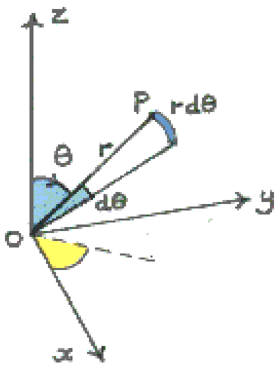
¿Cuáles son los factores de escala de las coordenadas r,ɵ,ϕ ?

Respuesta: Únicamente r es métrica y su factor de escala es 1. Para ɵ y ϕ los factores de escala son respectivamente r y rsen(ɵ).

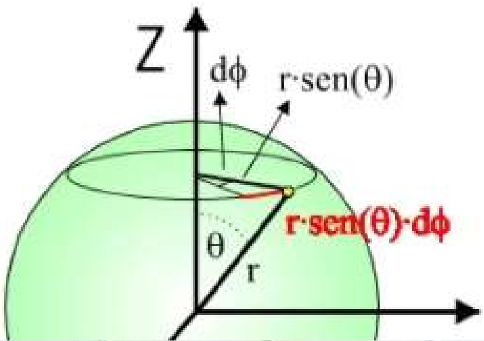
¿Cuál es el diferencial lineal de la coordenada r?
Respuesta: **dlr** = dr



¿Cuál es el diferencial lineal de la coordenada ɵ?
Respuesta: **dlɵ** = rdɵ

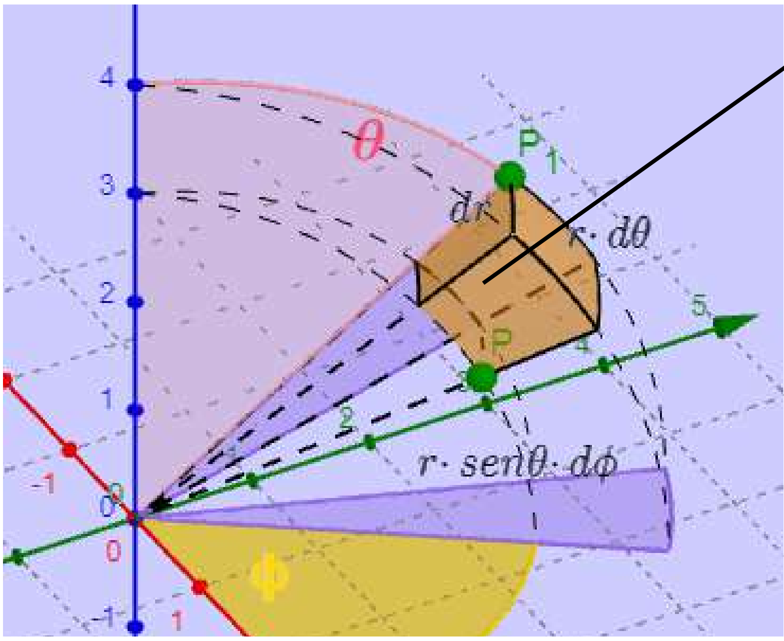


¿Cuál es el diferencial lineal de la coordenada ϕ?
Respuesta: **dlϕ** = rsen(ɵ)dϕ



Construcción

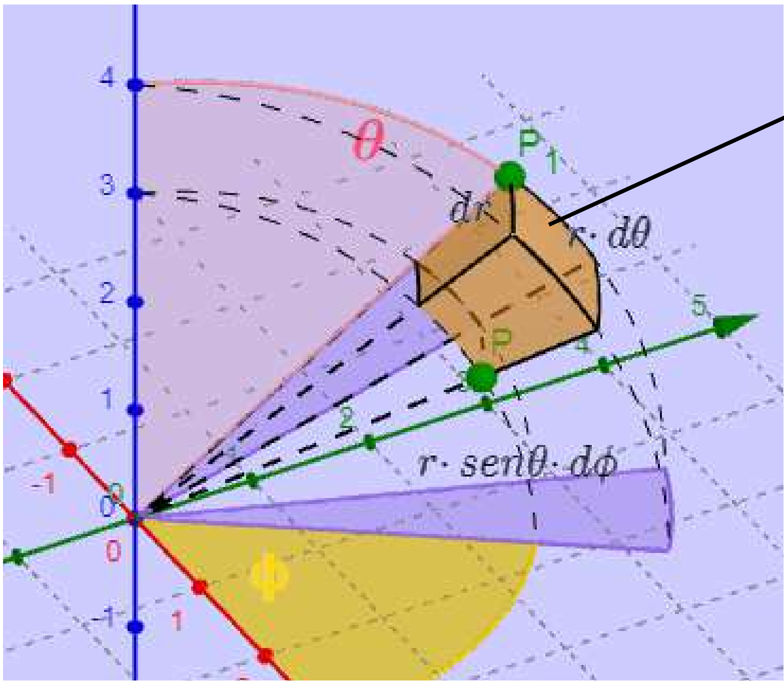
¿Cuáles son los diferenciales de superficie en base a la siguiente grafica?



Superficie 1 = dSr

Respuesta:

dSr = rdϴdr



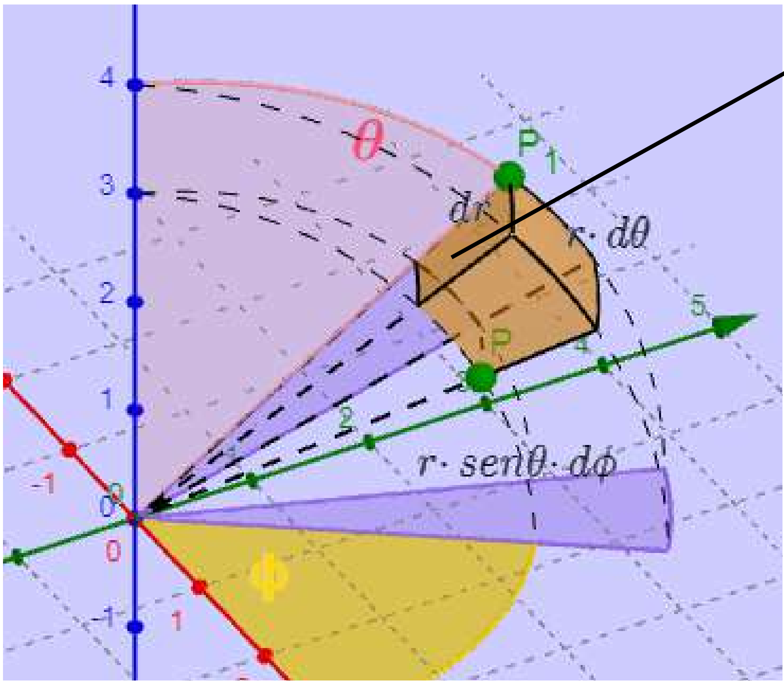
Superficie 2 = dSϴ

Respuesta:

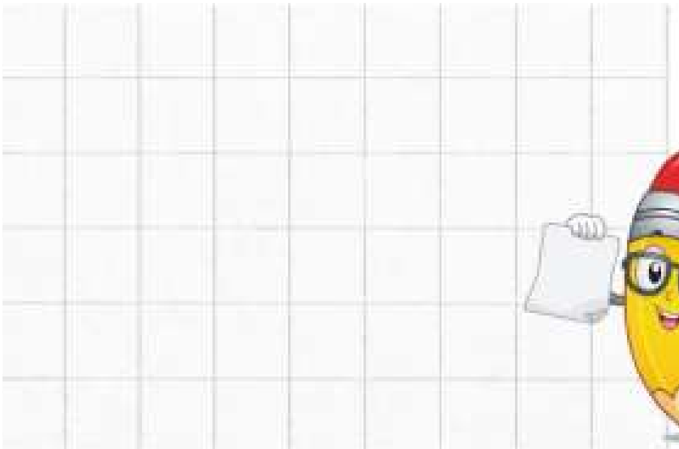
dSϴ = r²sen(ϴ)dϕdϴ

DIFERENCIAL DE VOLUMEN EN COORDENADAS CARTESIANAS Y ESFÉRICAS.

Construcción



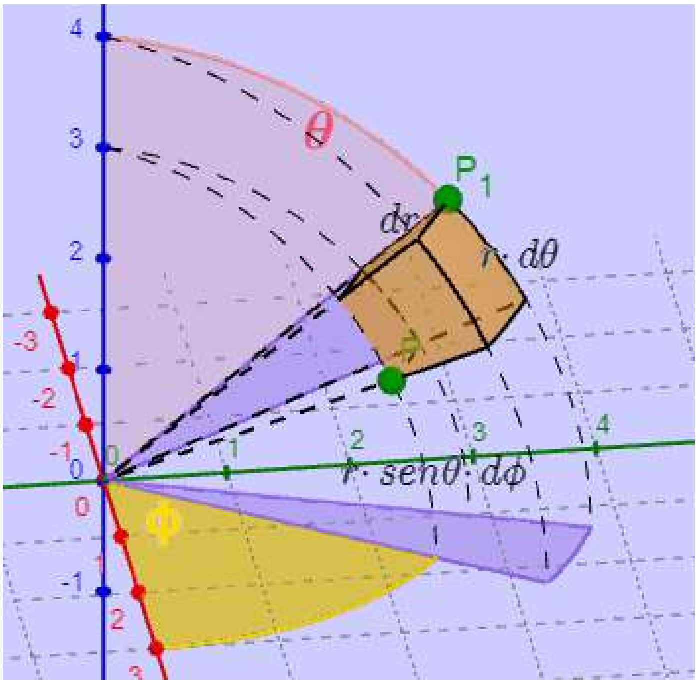
Superficie 2 = dSϕ

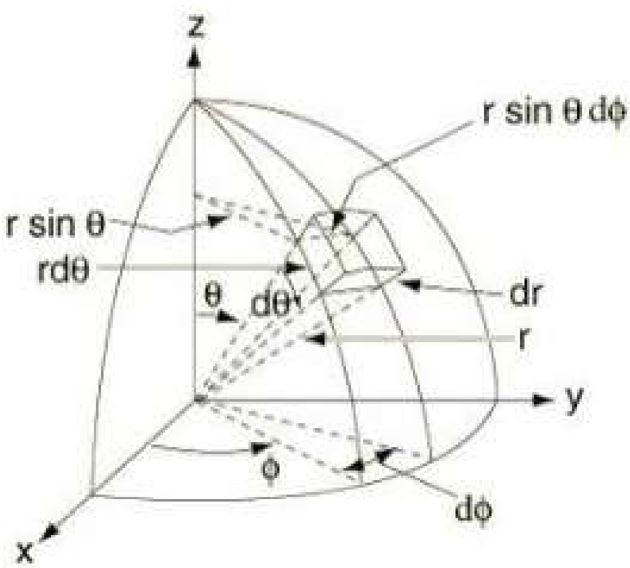


Respuesta:

dSϕ = rsen(ɵ)dɵdr

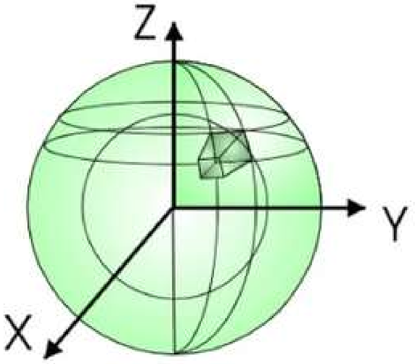
A continuación los estudiantes analizaran la gráfica y junto al docente encontraran el diferencial de volumen en coordenadas esféricas.



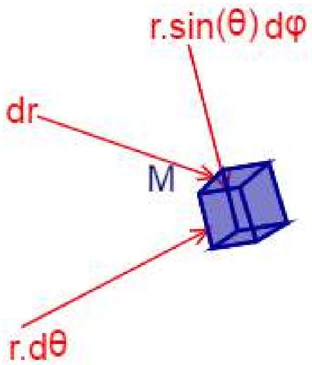


Construcción

Por lo tanto: ¿Cuál es el diferencial de volumen en coordenadas esféricas?



Las regiones infinitesimales en coordenadas esféricas tienen la forma de la figura:



Nota: Para encontrar el volumen de la figura se multiplica cada lado.

dv=rdθrsinθdϕdr

Ordenando.

dv = r²sinθdrdθdϕ

Los estudiantes junto con el docente enfatizaran la manera de escribir de manera abstracta la integral triple en coordenadas esfericas:

$$V = \iiint_R f\, dV = \iiint_R f(r,\phi,\theta)\, dV$$

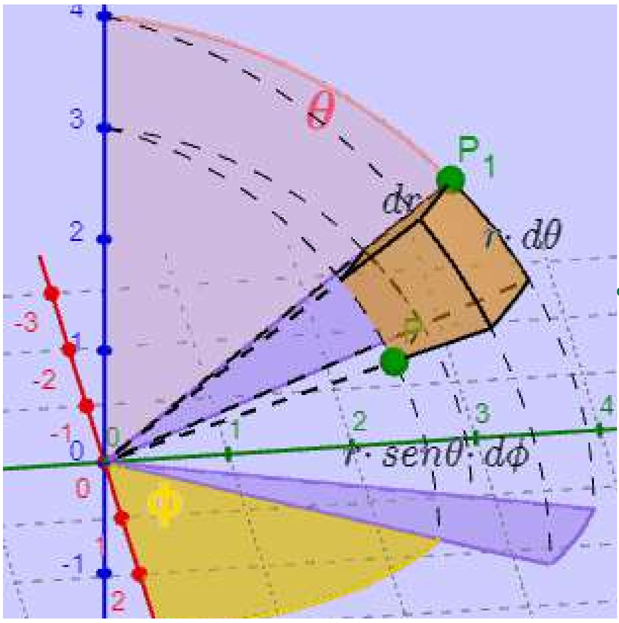
$$V = \iiint_R f(r,\phi,\theta)\,(dr)(r\, d\phi)(r \sin(\phi)\, d\theta)$$

$$V = \iiint_R f(r,\phi,\theta)\, r^2 \sin(\phi)\, d\theta\, d\phi\, dr$$

Consolidación:

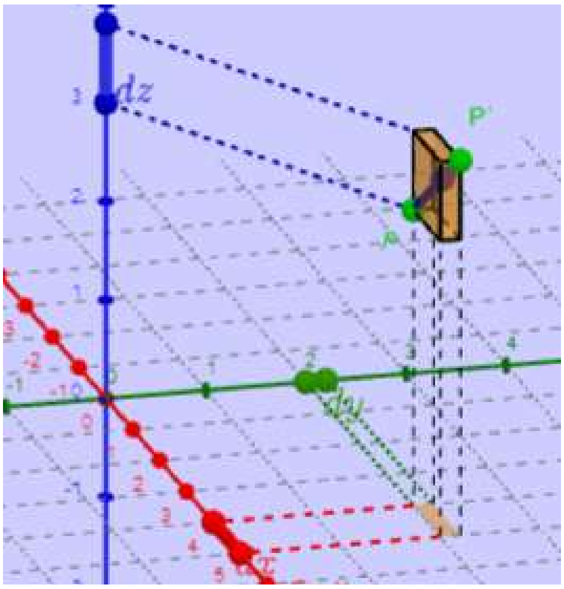
Actividad 1:

Los estudiantes en una hoja graficaran y escribirán el diferencial volumen de las variaciones infinitesimales:



En coordenadas esféricas:

dv = r²sinϴdrdϴdϕ



En coordenadas cartesianas:

dv = dxdydz

Actividad 2:

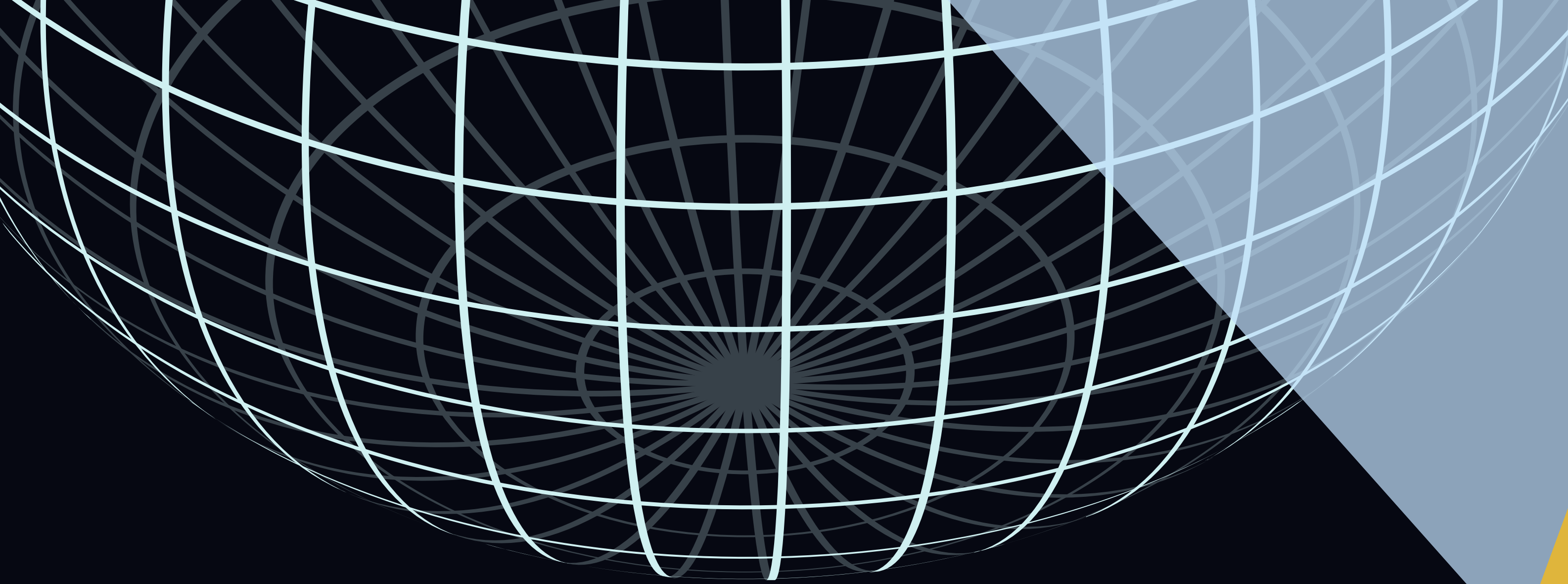
Los estudiantes graficaran dos puntos simultáneamente en el mismo plano en coordenadas cartesianas y esféricas, luego procederán a sacar el diferencial y su el volumen del mismo.

Puntos: - (3;6;7) y (4;5;7.25;)

- (4;40°;65°) y (5;50°;75°)

Rúbrica de calificación

Rubrica para la calificación de tarea sobre 10 puntos.				
Puntaje:	3	2	1	0
Reconoce las variaciones de las superficies en coordenadas rectangulares.				
Identifica el diferencial de volumen en coordenadas rectangulares.				
Identifican las variaciones de las superficies en coordenadas esféricas.				
Reconoce el diferencial de volumen en coordenadas esféricas.				
Representa integrales triples en coordenadas rectangulares y esféricas.				
Total:				



RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS DE INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS.

OBJETIVO

Identificar y resolver ejercicios de integrales triples en coordenadas esféricas.

GUÍA DIDÁCTICA PARA EL DOCENTE

Anticipación:

Duración de la clase: Dos horas clase.

Tic´s

El docente tiene como recurso antes de iniciar con la clase, un vídeo explicativo de la resolución de integrales triples en coordenadas esféricas.
https://www.youtube.com/watch?v=PAg5HCY8BzE

Retroalimentación de coordenadas esféricas.

Las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de un punto P en el espacio se ilustran en la figura 1, donde $\rho = |OP|$ es la distancia del origen a P, θ es el mismo ángulo en coordenadas cilíndricas, y ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta OP. Nótese que

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

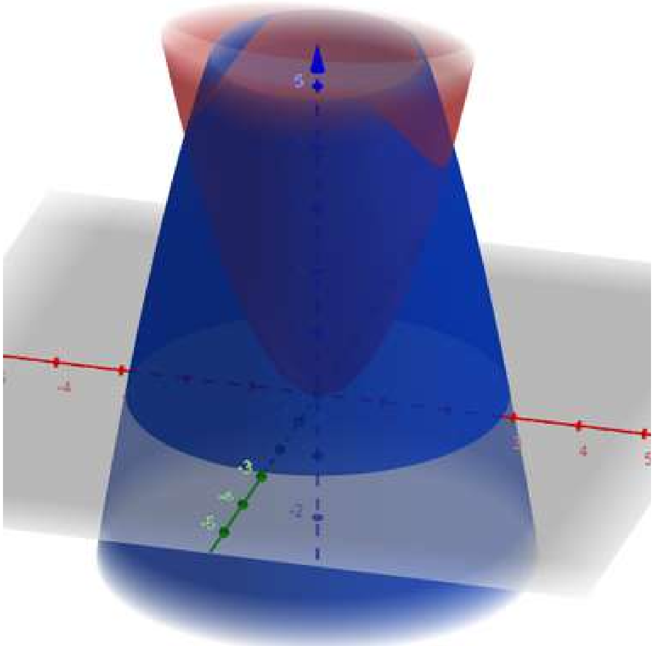
El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas donde hay simetría respecto a un punto, y el origen se coloca en este punto. Por ejemplo, la esfera con centro en el origen y radio c tiene la muy sencilla ecuación $\rho = c$ (véase la figura 2); ésta es la razón del nombre de coordenadas "esféricas". La gráfica de la ecuación $\theta = c$ es un plano vertical (véase la figura 3), y la ecuación $\phi = c$ representa un semicono con el eje z en su eje (véase la figura 4).

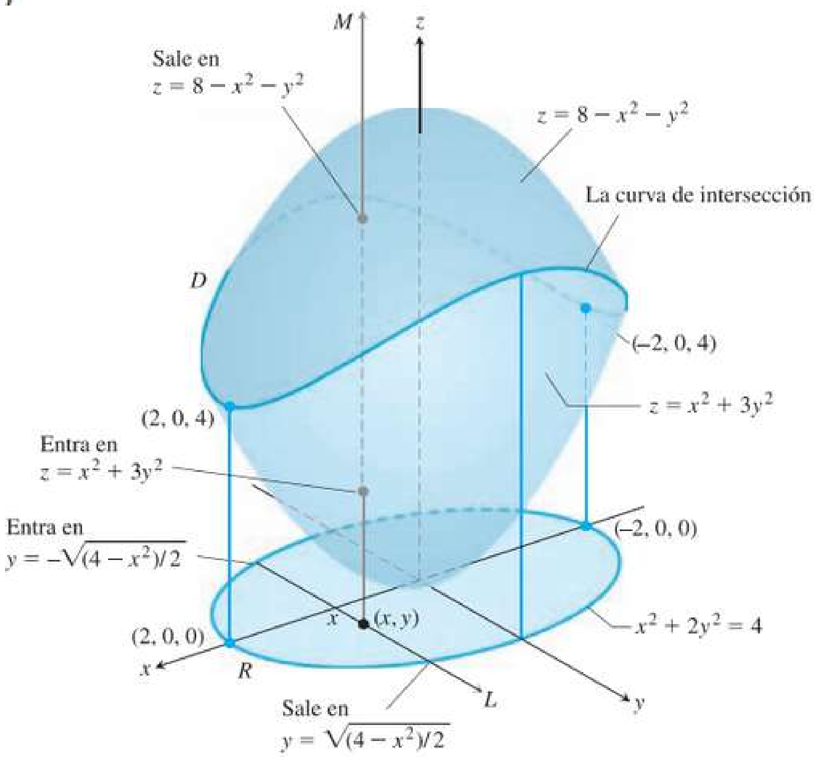
Anticipación:

Los estudiantes resolverán ejercicios de integrales triples en coordenadas rectangulares.

Calcule el volumen de la región D encerrada entre las superficies $z=x^2+3y^2$ y $z=8-x^2-y^2$

Solución: El volumen es: $$V = \iiint_D dz\,dy\,dx,$$





Procedimiento:

$$V = \iiint_D dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}(8-2x^2-4y^2)\,dy\,dx$$

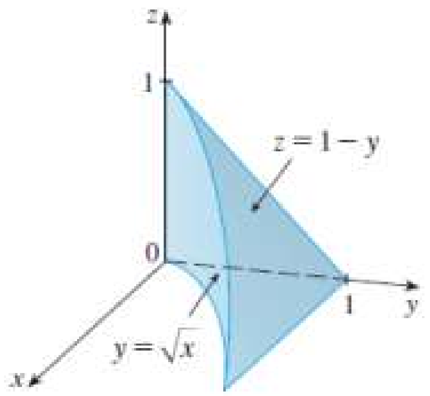
$$= \int_{-2}^{2}\left[(8-2x^2)y-\frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(2(8-2x^2)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right]dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,dx$$

$$= 8\pi\sqrt{2}.$$ Después de integrar con la sustitución $x = 2\ \mathrm{sen}\ u$

Determine el volumen del siguiente sólido.



$$V = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dzdydx$$

Procedimiento:

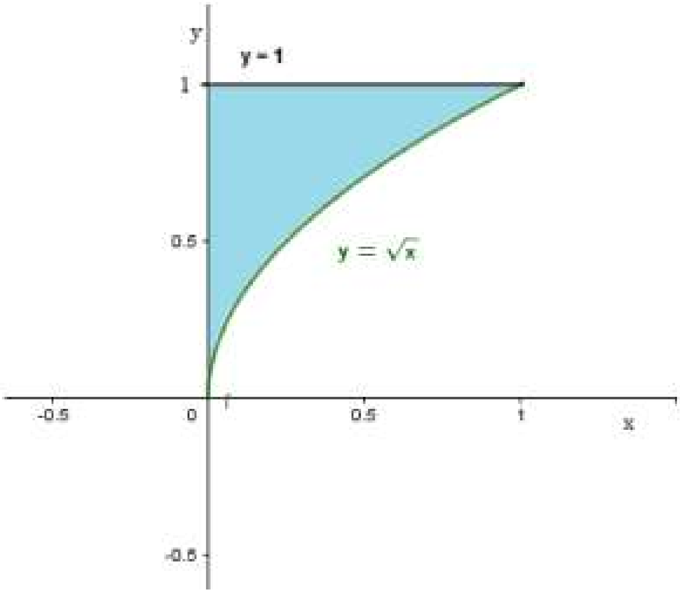
Proyección del sólido en el plano xy

Se tiene que ,

$$0 \leq x \leq 1 \quad ;$$

$$\sqrt{x} \leq y \leq 1 \quad ;$$

$$0 \leq z \leq 1 - y$$



$$V = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dzdydx$$

$$V = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} dzdydx$$

$$V = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 z|_0^{1-y} dydx =$$

$$= \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (1-y)dydx$$

$$V = \int_0^1 \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{x}}^1 dx =$$

$$V=\int_0^1\left[\left(1-\frac{1^2}{2}\right)-\left(\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\right)\right]dx$$

$$V=\int_0^1\left[\frac{1}{2}-\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)\right]dx$$

$$V=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)dx$$

$$V=\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$V=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)-0$$

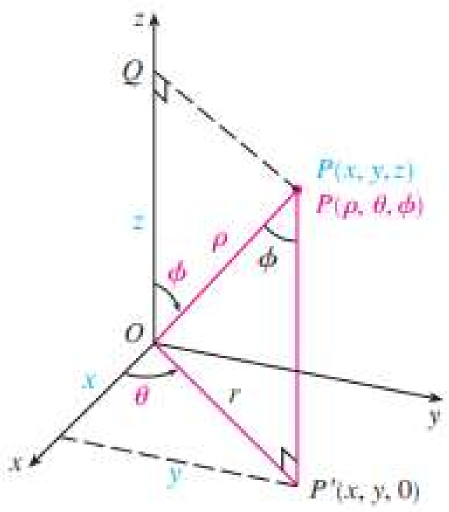
$$V=\frac{1}{12}\ \text{u}^3$$

Los estudiantes recordaran la relación que existe para convertir de coordenadas esféricas a rectangulares.

$$x=\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \qquad y=\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \qquad z=\rho\cos\phi$$

¿Cuál es la fórmula de la distancia para convertir las coordenadas rectangulares a esféricas?

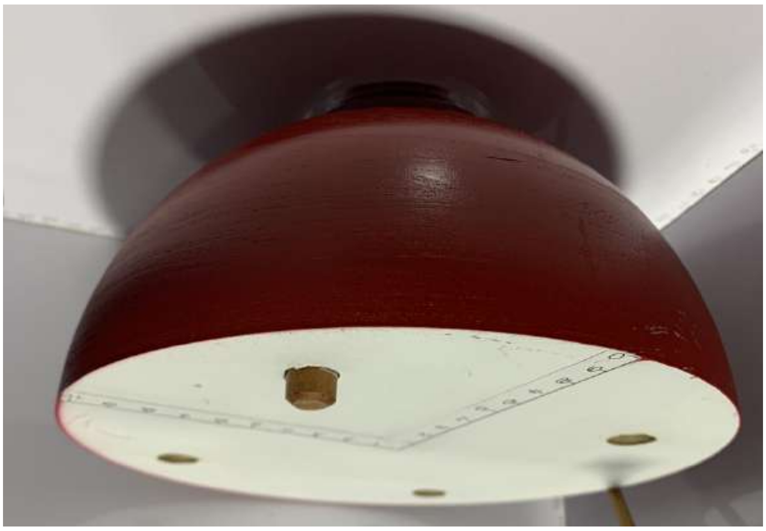
$$\rho^2=x^2+y^2+z^2$$



CONSTRUCCIÓN

Actividad 1.

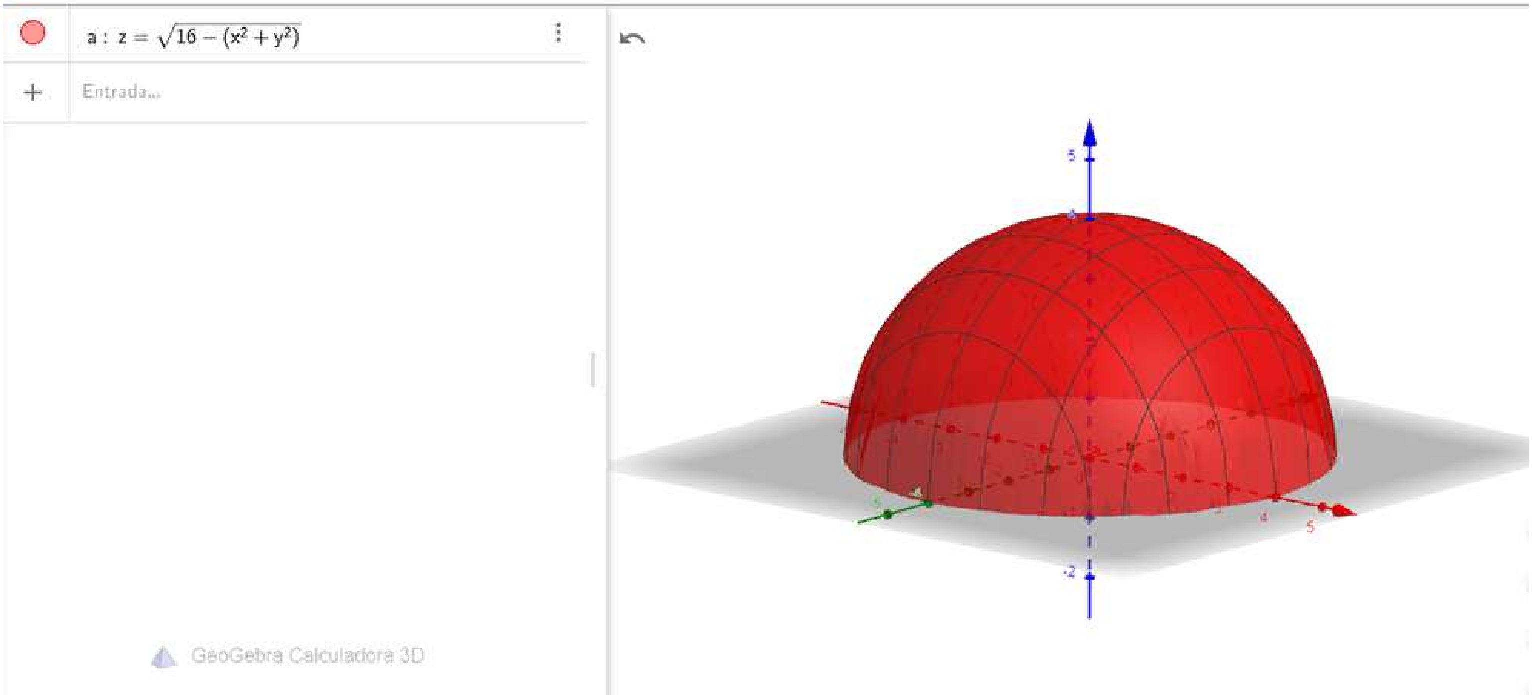
Los estudiantes manipularan el siguiente material concreto y junto al docente sacaran la ecuación para encontrar el volumen de la media esfera.



Material concreto

El estudiante acompañado por el docente verificaran la ecuación de la media esfera en geogebra:

Se muestra a continuación:



Los estudiantes encontraran el volumen de la media esfera que vieron anteriormente.

Actividad 2.

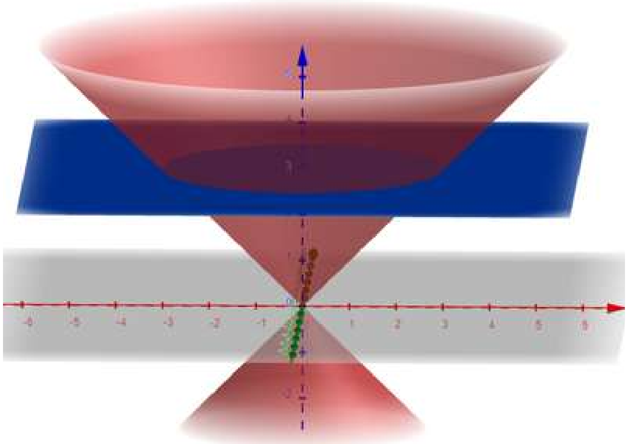
Los estudiantes encontraran el volumen del primer octante de la esfera.

Respuesta: 1/48

Actividad 3.

1- Encontrar los limites de integracion de los solidos.

- $z^2=x^2+y^2$
- $z=3$



2- Encontrar el volumen del solido delimitado por el plano de la grafica anterior.

Respuesta: $\pi/6$

Actividad 4:

De coordenadas cartesianas transformé a coordenadas esféricas y encuentre su volumen:

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 4$$

$$\rho^2 \sin^2\phi + (\rho\cos\phi - 2)^2 = \rho^2 - 4\rho\cos\phi + 4 < 4$$

$$0 \le \rho \le 4\cos\phi.$$

$\rho \le 4\cos\phi$, so $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = (\rho^2)^{3/2} = \rho^3$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{4\cos\phi} (\rho^3)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi =$$

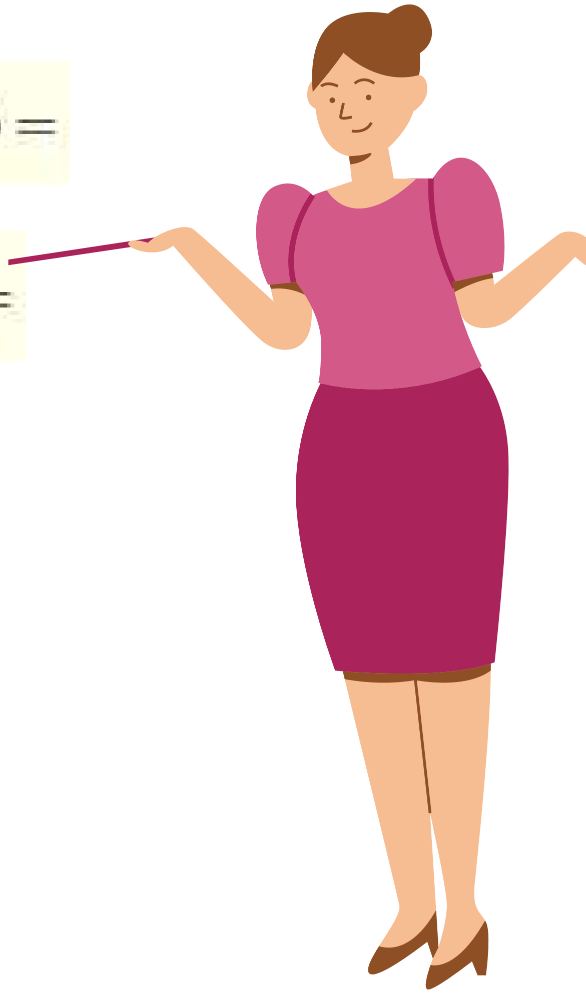
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin\phi \left[\tfrac{1}{6}\rho^6\right]_{\rho=0}^{\rho=4\cos\phi} d\theta \, d\phi =$$

$$\tfrac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin\phi \left(4096\cos^6\phi\right) d\theta \, d\phi$$

$$= \tfrac{1}{6}(4096) \int_0^{\pi/2} \cos^6\phi \sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \tfrac{2048}{3} \left[-\tfrac{1}{7}\cos^7\phi\right]_0^{\pi/2} \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2048}{3}\left(\frac{1}{7}\right)(2\pi) = \frac{4096\pi}{21}$$



Actividad 5.

Un modelo para la densidad δ de la atmósfera terrestre cerca de la superficie es

$$\delta = 619.09 - 0.000097\rho$$

donde ρ (la distancia del centro de la Tierra) es medida en metros y δ es medida en kilogramos por metro cúbico. Si tomamos la superficie de la Tierra como una esfera con radio 6 370 km, entonces este modelo es razonable para $6.370 \times 10^6 \leqslant \rho \leqslant 6.375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar la masa de la atmósfera entre el suelo y una altitud de 5 km.

Respuesta: $4\pi\left(1.944 \times 10^{17}\right) \approx 2.44 \times 10^{18}$ kg

CONSOLIDACIÓN:

El docente realizará una actividad de manera grupal en la resolución de ejercicios con el uso de material concreto y el software Geogebra.

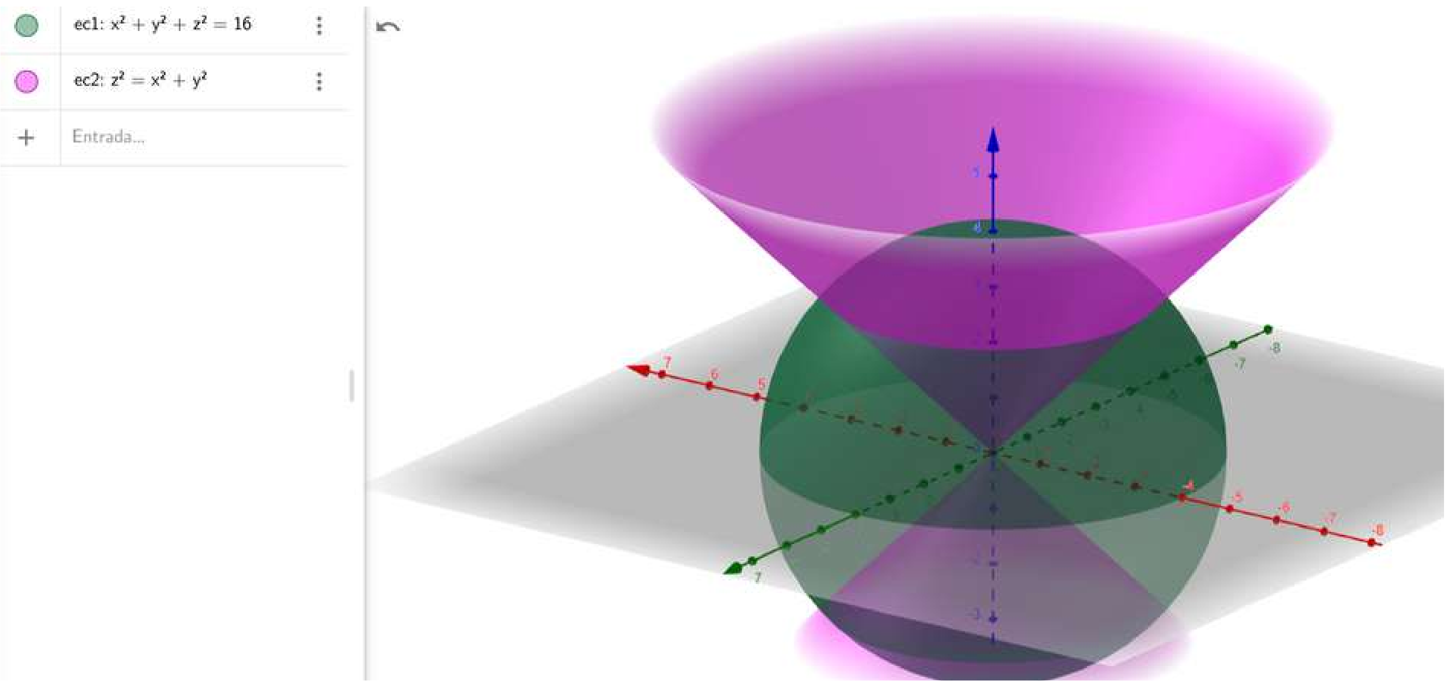
Para la actividad se tomará la esfera de color verde, misma que tiene diferentes variaciones para ejercicios, donde el docente puede intercambiar variables, formas , etc. O a su vez interactuar con las simulaciones del software.

Material concreto

El docente en el caso de ser necesario, puede compartir el link del video dónde se realizan ejercicios similares para el mayor entendimiento por parte de los estudiantes.

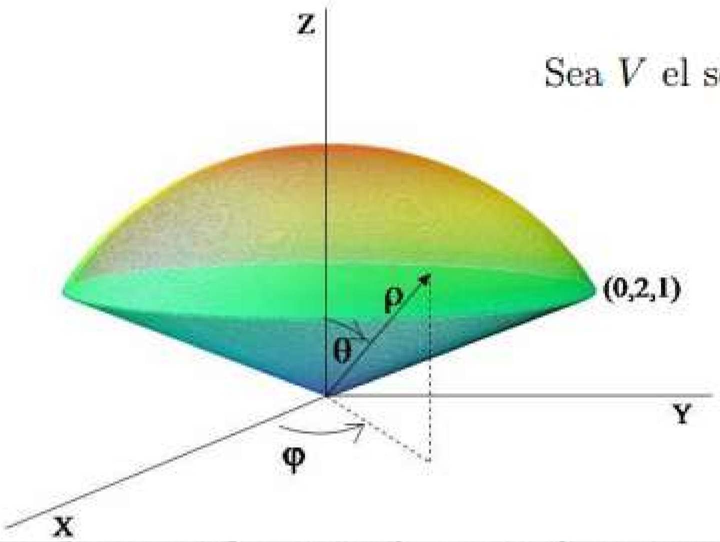
Actividad 1.

Encontrar el volumen del cono:



Resolución

Calcule, mediante integración, el volumen del sólido limitado por el cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, siendo $z \geq 0$.



Sea V el sólido considerado. Su volumen es

$$\mu(V) = \int\int\int_V dxdydz$$

Resolución:

Procedimiento:

Para calcular esta integral haremos un cambio a coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad J_T(\rho,\varphi,\theta) = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La variación del ángulo θ dentro del recinto de integración viene dada por el ángulo que forma la generatriz del cono con el eje OZ en un punto de la intersección de las dos superficies, por ejemplo el punto $(0,2,1)$. En este punto $\tan\theta = 2$ y por lo tanto $\theta = \arctan 2$. El radio vector ρ variará desde 0 al radio de la esfera $\sqrt{5}$ y el ángulo φ debe recorrer toda la circunferencia, de modo que si consideramos el conjunto

$$Q = \left\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le\rho\le\sqrt{5},\ 0<\varphi<2\pi,\ 0<\theta\le\arctan 2\right\}$$

su imagen mediante T es el recinto V (salvo un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^3$: los puntos para los que $\varphi = 0$ ó $\theta = 0$). Entonces

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_Q \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 d\rho \int_0^{\arctan 2} \mathrm{sen}\,\theta d\theta = 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}}\left[-\cos\theta\right]_0^{\arctan 2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{5}}{3}\pi\left[-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right]_0^{\arctan 2} = \frac{10}{3}\pi(\sqrt{5}-1).$$

El uso de una calculadora científica en este tipo de ejercicios es fundamental.

Actividad 2.

Encuentre el volumen de las distintas variaciones que tiene la siguiente esfera, ayudándose con el material concreto.

Esfera completa

1/16 parte de esfera

1/4 de esfera

Semi esfera

Para finalizar, adjuntamos la rúbrica de calificación para la tarea asignada anteriormente.

Rubrica para la calificación de tarea sobre 10 puntos.				
Puntaje:	3	2	1	0
Reconoce la relación que existe entre las coordenadas esféricas y rectangulares.				
Grafica sólidos de revolución y encuentra sus intersecciones.				
Identifica los límites de integración con los distintos materiales didácticos				
Plantea ejercicios de integrales triples en coordenadas esféricas.				
Resuelve ejercicios de integrales triples en coordenadas esféricas.				
Total:				

Conclusiones.

- Las diferentes estrategias metodológicas promueven al constructivismo, actuando el docente como orientador de los saberes y al alumno como el protagonista de su aprendizaje. Por lo cual esta guía presenta una serie de actividades individuales y grupales, actividades virtuales y herramientas como los softwares para que el docente desarrolle sus clases.
- El uso de softwares virtuales como herramientas educativas le dan una innovación a la educación, ya que facilitan la transmisión de conocimientos y ayudan a analizar procesos de diversos temas en donde se hacen difícil en el cuaderno o pizarrón.
- Entre uno de los recursos didácticos más considerables dentro de la guía es la esfera de madera, que servirá como apoyo de enseñanza para el docente al momento de graficar sólidos y ayudara a encontrar el volumen de diferentes medidas de la esfera por ejemplo ¼ de la esfera. Lo más destacado es que el estudiante pueda palpar dicho material y así verificar las medidas de los sólidos, analizando a la par con Geógebra una de las aplicaciones más valiosas al momento de resolver ejercicios matemáticos.
- La guía didáctica permite al docente aplicar diferentes métodos activos, utilizando: softwares para visualizar solidos (Geógebra), diversos recursos didácticos, materiales concretos, el uso de las TICS entre otros, llevándolos a cabo en tres momentos (anticipación, construcción y consolidación), dando como resultado el dinamismo dentro de la clase de integrales triples en coordenadas esféricas.

Recomendaciones.

Luego de terminar este trabajo de titulación, se presentan las siguientes recomendaciones:

- Para continuar con el aprendizaje de integrales triples en coordenadas esféricas se recomienda plantear actividades con problemas relaciones con la vida cotidiana, con la finalidad de enlazar lo que se aprende en clases con el entorno de cada uno.
- Se recomienda a los docentes a interactuar más con softwares matemáticos que permiten mejorar el proceso de enseñanza, en donde los estudiantes se centran más en aprender cuando se utiliza tecnologías de enseñanza.
- Se recomienda, al momento de resolver integrales triples en coordenadas esféricas realicen la graficación del sólido (la superficie que lo determina), es decir graficar las superficies que se interceptan para lograr establecer los límites de la integración.
- Se recomienda utilizar un sistema de coordenadas que se adapte mejor a la superficie de integración, para que pueda hacer un adecuado cambio de variables.
- Se recomienda a los docentes usar guías didácticas que mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje, en donde al usarlas se crea un ambiente participativo y liberal dentro de clases.

Referencias Bibliográficas:

Andrade, M. y Montecino, A. (2009). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. Antecedentes para una propuesta centrada en el aprendizaje reflexivo.

Arcavi, A. (2003). El papel de las representaciones visuales en el aprendizaje de las matemáticas. Estudios educativos en matemáticas, 52, 215 – 224.

Bishop, A. (1990). Habilidades Espaciales y Educación Matemática: Una revisión. *Estudios educativos en Matemáticas*, 11(3), 257 – 269.

Coll, C. Coll, S. Ortega, E.M, Majos, T.M, Mestres, M.M, Goñi, J.O, Gallart, I.S y Vidiella. A.Z. El constructivismo en el aula. Editorial GRAO. 1993. Disponible en: https://books.google.es/books?id=BzOef9UlDb4C&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Delval, J. (15 de Octubre de 2001). Hoy todos son constructivistas. Educere, 8. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/356/35651520.pdf

Feo, R. (2010). Orientaciones básicas para el diseño de estrategias didácticas. Tendencias pedagógicas, 16, 220-236. Recuperado de http://www.tendenciaspedagogicas.com/Articulos/2010_16_13.pdf

Fernández, I. Riveros, V y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia, (23), 11-15*. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/737/73753475002.pdf

García Aretio L. La guía didáctica. Editorial del BENED [Internet]. 2009 [citado 24 Mar 2013]. Disponible en: http://www.uned.es/catedraunesco-ead/editorial/p7-2-2009.pdf

González, O y Arévalo, C. (2015). *Utilidad de los recursos didácticos, para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, desde la situación ¨Recorrido por el mundo geométrico¨*. México: Chiapas.

Gutiérrez, A. (1996): Visualizació n en geometría tridimensional: En busca de un marco, Actas de la 20ª Conferencia PME, 1, 3-19.

Hadamard, J. (1947). Psicología de la invención en el campo matemático. Buenos Aires: España – Calpe Argentina, S. A.

Hershkowitz, R. (1990). Aspectos psicológicos del aprendizaje de la geometría. Matemáticas y cognición. Cambridge: Ed. Prensa de la Universidad de Cambridge. Pág. 70 – 95.

Höffler, T. (2010). Habilidad especial: su influencia en el aprendizaje con visualizaciones–un meta-analítico revisión. *Revisión psicológica educativa*, 22, 245-269.

Isidro, H. (2004). *"La utilización de medios y recursos didácticos en el aula"*. Recuperado de: https://webs.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf.

Jean Piaget. (1980). *"Desarrollo cognitivo".* Recuperado de: http://www.paidopsiquiatria.cat/files/teorias_desarrollo_cognitivo_0.pdf

López, J. F y Reibán, G. R. (2011). *Incidencia de la motivación en el adolescente relacionado con el proceso enseñanza- aprendizaje.* Recuperado de: http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/2215/1/tps716.pdf

Lowenfeld, V. (1980). *Desarrollo de la capacidad creadora*. Ed kapelausz, Buenos Aires.

Moreno-Armella,L. y Waldegg,G. (1992). Constructivismo y Eduacion Matematica. *Educacion Matematica*, 9. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/9535/1/Constructivismo1992Moreno.pdf

Moyano, E. Jerez, M. Romano, L. Villarreal, M. Moncho, M. Villanueva, T. Rigoni, B. Andrade, D. Iost, D. (2021). Diseño de estrategias didácticas para la enseñanza de ingeniería de requerimientos. Red de Universidades con Carreras en Informática. Recuperado de: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/120468/Ponencia.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ramírez, Rafael; Flores, Pablo (2017). *Habilidades de visualización de alumnos con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas.* Enseñanza de las Ciencias, 35(2), pp. 179-196 .

Rosabel, R. (2016). *Tecnología, innovación e investigación en los procesos de enseñanza – aprendizaje*. España: Octaedro.

Trimiño, B. y Zayas, Y. (2016). Estrategia didáctica para el fomento de la lectura en las clases. EduSol, Recuperado de: file:///C:/Users/la%20troncal/Downloads/Dialnet-EstrategiaDidacticaParaElFomentoDeLaLecturaEnLasCl-5678502.pdf

Torrez, M; y Giron, D.(2009). Didáctica General: Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Básica. (vol.9.). San José, Costa Rica: Editora,S.A.

Waldegg, G. (1998). Principios Constructivistas para la Matematica. *EMA*, 16. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1085/1/46_Waldegg1998Principios_RevEMA.pdf

Anexos

Encuesta en línea

Link de la encuesta:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeuGWa39azbhuly7H7UEwymdNDLr-9uJTb9CtxNVFDd7tchxg/viewform?usp=sf_link

Encuesta de percepción.

La siguiente encuesta, tiene como finalidad recolectar información sobre las dificultades que tiene el docente al momento de impartir sus clases, en el tema de integrales triples en coordenadas esféricas.

Le pedimos de la manera mas encarecida, que complete la información de la presente encuesta con el mayor detalle posible. La información suministrada será manejada confidencialmente, y esta tendrá únicamente fines académicos.

¿Considera Ud. que al momento de abordar el tema de integrales triples puede visualizar el problema en un espacio tridimensional?

1 2 3 4

¿Cree Ud. que el docente deba utilizar diferentes estrategias metodologicas para abordar el tema de integrales triples en coordenadas esféricas?

1 2 3 4

Al momento de impartir la temática su docente utilizo:

- Pizarra
- Proyector
- Material concreto
- Software educativo
- Ninguna de las anteriores

¿Cree Ud que es necesario que el docente utilice las TICS (Maple, Geógebra, Symbolab, entre otros) como herramientas de ayuda, para la graficación y resolución de integrales triples?

1	2	3	4
○	○	○	○

¿Qué considera Ud. que es lo más complicado al momento de resolver estos ejercicios?

- ○ Visualizar y dibujar los sólidos de revolución.
- ○ Identificar los límites de integración.
- ○ Resolver las integrales.
- ○ Ninguna de las anteriores.

¿Qué tan de acuerdo está Ud en que se utilice material concreto para la visualización y resolución de ejercicios con integrales triples en coordenadas esféricas?

- ○ En desacuerdo
- ○ Poco de acuerdo
- ○ De acuerdo
- ○ Totalmente de acuerdo

¿Cree necesario el uso de material concreto palpable y tangible para mejorar el proceso de enseñanza? Argumente su respuesta.

Texto de respuesta larga

Como futuro docente, ¿abordaría el tema de integrales triples en coordenadas esféricas con el uso de material concreto?

- ○ En desacuerdo
- ○ Poco de acuerdo
- ○ De acuerdo
- ○ Totalmente de acuerdo

Links de simuladores online.

https://www.edumedia-sciences.com/es/media/269-coordenadas-esfericas

https://www.geogebra.org/m/qxbw2pnf

https://www.geogebra.org/m/a5gvbqhj