FÍSICA: INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

CIDE Pro Editorial

www.cidepro.org

Freddy Patricio Guachún Lucero
Sonia Janneth Guzñay Padilla

Freddy Patricio Guachún Lucero
Sonia Janneth Guzñay Padilla

FÍSICA: INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

PHYSICS: INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS

Freddy Patricio Guachún Lucero
Sonia Janneth Guzñay Padilla

Física: Introducción a la mecánica de fluidos

Physics: Introduction to fluid mechanics

Editorial

Autores:

Freddy Patricio Guachún Lucero
Facultad de Filosofía, Letras y
Ciencias de la Educación
Universidad de Cuenca
patricio.guachun@ucuenca.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-1421-7804

Sonia Janneth Guzñay Padilla
Facultad de Filosofía, Letras y
Ciencias de la Educación
Universidad de Cuenca
janneth.guznay@ucuenca.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-2984-9265

Primera Edición, julio 2020

Física: Introducción a la mecánica de fluidos

ISBN: 978-9942-823-47-2 (eBook)
ISSN: 2600-5719 (electronic)
https://doi.org/10.29018/978-9942-823-47-2

Editado por:
Centro de Investigación y Desarrollo Profesional

Babahoyo, Ecuador
Móvil - (WhatsApp): (+593) 9 8 52-92-824
www.cidepro.org
E-mail: editorial@cidepro.org

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos con base en la normativa editorial de CIDEPRO.

Diseño y diagramación:
CIDEPRO Editorial

Diseño, montaje y producción editorial:
CIDEPRO Editorial

Hecho en Ecuador
Made in Ecuador

ÍNDICE

PREFACIO

El objetivo de esta obra es servir como texto de referencia y/o apoyo para un ciclo académico universitario en la asignatura “Introducción a la Mecánica de Fluidos” que se imparte en la Carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, dentro del grupo de asignaturas optativas, pertenecientes a la rama de la Física. Primero se introducen los conceptos básicos de fluido y sus propiedades, para luego estudiar la estática de los fluidos, las ecuaciones básicas que rigen la dinámica de fluidos, las aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y finalmente, las consideraciones básicas en la experimentación de la mecánica de fluidos.

La estructura del libro está pensada de manera que se puedan abordar progresivamente todos los contenidos durante un semestre académico. Se utiliza un lenguaje matemático sencillo pensado en los futuros lectores, de manera que les permita entender de forma concisa y discreta algunas ecuaciones básicas como la de: Bernoulli, Euler, Torricelli, Pascal, Navier-Stokes, que son muy utilizadas para plantear y resolver problemas correspondientes a la Mecánica de Fluidos. Los contenidos están divididos cuidadosamente por temas que pueden ser analizados por hora o sesión de clase. Cada tema consta de la explicación y demostración del concepto físico y/o matemático, ejemplos ilustrativos con el lenguaje matemático estudiado y ejercicios propuestos de modo que el estudiante pueda aplicar los conocimientos adquiridos en la sesión de clase de manera instantánea, de manera que el estudiante vaya consolidando el conocimiento presentado en cada tema. Los ejemplos ilustrativos y los ejercicios propuestos están pensados de modo que representen aplicaciones prácticas de la vida real, y en algunos casos se presentan ejemplos que han marcado el desarrollo histórico de la Mecánica de Fluidos, dando paso a conocer a los grandes genios de antaño que contribuyeron en esta hermosa rama de la física; Arquímedes de Siracusa, Geovanni Venturi, Blaise Pascal, Leonhard Euler, Louis Navier, Gabriel Stokes, Osborne Reynolds, Daniel Bernoulli, Alexis Clairaut, etc. De esta manera el estudiante verá la relación de la teoría con la práctica, despertando así su interés por los temas que se abordan en la presente obra.

En el primer capítulo se presenta la definición de fluido y la hipótesis del continuo, así como sus propiedades básicas como densidad, viscosidad, tensión superficial, etc.

En el segundo capítulo se estudian la estática de fluidos, conocida generalmente como hidrostática, es decir, cuando los fluidos se encuentran en reposo, se definen sus ecuaciones básicas y como aplicarlas en la resolución de ejercicios.

En el tercer capítulo se aborda la dinámica de fluidos, conocida también como hidrodinámica, es decir, los fluidos que están en movimiento, se definen sus ecuaciones principales y como aplicarlas a la resolución de ejercicios.

En el cuarto capítulo se estudia algunas aplicaciones prácticas que se desprenden de la ecuación de Bernoulli, así como su aplicación en la resolución de ejercicios.

Finalmente, en el quinto capítulo se aborda la experimentación en la mecánica de fluidos, donde se conocerán las características que deben tener los modelos a escala que se experimentan para compararlos con los diseños reales como aviones o barcos.

Actualmente la Mecánica de Fluidos está muy bien cimentada, de manera que se puede abordar cualquier problema por complejo que sea; sin embargo, en este texto se abordará una pequeña gota de un enorme océano de conocimientos, pero servirá para que el estudiante pueda darse una idea del alcance de esta rama de la física y continuar sus estudios de manera independiente y/o escolarizada.

"Se espera que esta obra sea de utilidad para los amantes de esta hermosa rama de la física"

Patricio y Sonia

PREFACE

The objective of this work is to serve as a reference text and / or support for a university academic cycle in the subject "Introduction to Fluid Mechanics" taught in the Career of Mathematics and Physics of the University of Cuenca, within the group of elective subjects, belonging to the branch of Physics. First the basic concepts of fluid and its properties are introduced, then study the static of the fluids, the basic equations that govern the dynamics of fluids, the applications of the Bernoulli equation and finally, the basic considerations in the experimentation of fluid mechanics.

The structure of the book is designed so that all content can be progressively addressed during an academic semester. A simple mathematical language intended for future readers is used, so that it allows them to concisely and discreetly understand some basic equations such as that of; Bernoulli, Euler, Torricelli, Pascal, Navier-Stokes, which are widely used to raise and solve problems corresponding to Fluid Mechanics. The contents are carefully divided by topics that can be analyzed by hour or class session. Each topic consists of the explanation and demonstration of the physical and/or mathematical concept, illustrative examples with the mathematical language studied and proposed exercises so that the student can apply the knowledge acquired in the class session instantly, so that the student consolidates the knowledge presented in each topic. The illustrative examples and the proposed exercises are designed to represent practical applications of real life, and in some cases examples are presented that have marked the historical development of fluid mechanics, giving way to know the great geniuses of yesteryear who contributed in this beautiful branch of physics; Archimedes of Syracuse, Geovanni Venturi, Blaise Pascal, Leonhard Euler, Louis Navier, Gabriel Stokes, Osborne Reynolds, Daniel Bernoulli, Alexis Clairaut, etc. In this way the student will see the relationship of theory with practice, thus awakening his interest in the topics addressed in this work.

The first chapter presents the definition of fluid and the hypothesis of the continuum, as well as its basic properties such as density, viscosity, surface tension, etc.

The second chapter studies fluid static, generally known as hydrostatic, that is, when fluids are at rest, their basic equations are defined and how to apply them in the resolution of exercises.

The third chapter addresses fluid dynamics, also known as hydrodynamics, i.e. fluids that are in motion, define their main equations and how to apply them to exercise resolution.

The fourth chapter examines some practical applications that emerge from Bernoulli's equation, as well as its application in the resolution of exercises. Finally, the fifth chapter addresses experimentation in fluid mechanics, where we will know the characteristics that scale models that are experienced to compare them with real designs such as aircraft or ships.

Currently fluid mechanics are very well grounded, so any problem can be addressed no matter how complex it is; however, this text will address a small drop of a huge ocean of knowledge, but it will help the student to give an idea of the scope of this branch of physics and continue his studies independently and/or schooled.

"This work is expected to be of use to lovers of this beautiful branch of physics"

Patrick and Sonia

A ti, mi media luna, sin ti no existirá mi motivación e inspiración.

A mi padre y a mi madre que tuvieron la genial idea de tener
un hijo y mandarlo a la universidad ¡muchas gracias!

Patricio, G.

EL FLUIDO Y SUS PROPIEDADES

Capítulo 1

EL FLUIDO Y SUS PROPIEDADES

INTRODUCCIÓN

La Mecánica de Fluidos es la parte de la Física encargada de analizar el comportamiento de los fluidos, ya sea en condiciones estáticas o dinámicas, y cómo interactúan con los cuerpos sólidos. Actos cotidianos, por ejemplo; el paso de la sangre por nuestras venas, el flujo de agua por un canal de riego, la caída de la lluvia a través de la atmósfera, las corrientes en los océanos y ríos, humo de un cigarro que corre por nuestra boca, el aire que fluye a través de un avión, son ejemplos de flujo de fluido. Por lo que el estudio de la Mecánica de Fluidos resulta necesario con el fin de comprender sus efectos y controlarlos en beneficio de la sociedad.

Lo que se conoce actualmente de la Mecánica de Fluidos como ciencia, es una combinación de la teoría procedente principalmente de matemáticos que trabajaron desde un enfoque analítico y de la parte experimental procedente de ingenieros hidráulicos que la estudiaron desde un enfoque netamente empírico.

Al integrar estos dos enfoques, se elimina la falla de generalidad derivada de un enfoque estrictamente empírico que validaba únicamente casos concretos y posibilita que en los análisis matemáticos se consideren y se incluyan convenientemente la información obtenida de trabajos experimentales, lo que ayuda a eliminar hipótesis simplificadas distantes de la realidad.

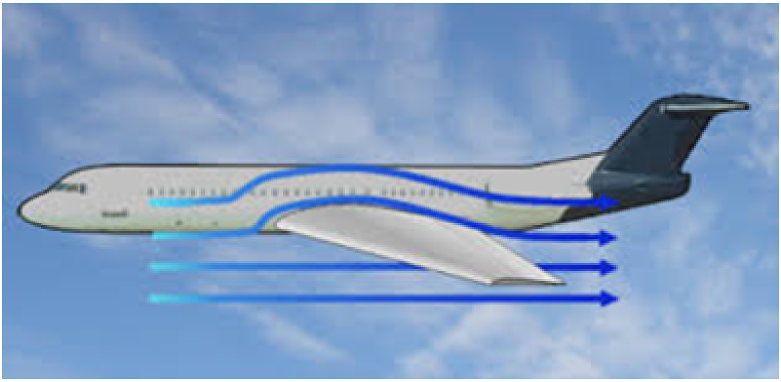


Figura 1. Flujo de aire a través de las alas de un avión

FLUIDO Y EL CONTINUO

Al preguntarnos, ¿Qué es un fluido? intuitivamente podemos pensar que es una sustancia capaz de fluir, el agua en movimiento sea nuestro primer ejemplo que tal vez se nos venga a la mente. Sin embargo, el decir que un fluido es una substancia que fluye no resulta muy útil porque necesariamente tenemos que definir estrictamente el término "fluir".

Se denomina fluido a una substancia que es capaz de cambiar su forma continuamente cuando se le aplica una fuerza cortante; sin importar lo pequeña que sea dicha fuerza, en otras palabras, siempre que se le aplique una fuerza cortante a un fluido, éste se moverá durante todo el tiempo. Algunos fluidos tienen la facilidad de moverse más rápido que otros, pero absolutamente todos se moverán. La facilidad con la que se mueven depende de una propiedad llamada viscosidad, propiedad que se estudiará en uno de los siguientes temas.

Si un sólido es sometido a una fuerza cortante experimenta un desplazamiento definido o simplemente se rompe, comportamiento que permite diferenciarlos. Por ejemplo, consideremos un elemento sólido que tiene forma paralelepípedo que al momento de aplicarle una fuerza cortante $\vec{F}$ se deforma una cierta cantidad, dicha deformación puede expresarse como $\Delta\alpha$, tal como se muestra en la figura 2. (a). En cambio, si tenemos un elemento de fluido de la misma forma, tal como se muestra en la figura 2 (b) al momento de aplicarle una fuerza cortante $\vec{F}$ no habría un $\Delta\alpha$ constante, sino que varía con el tiempo. Así esté sometido a una fuerza cortante infinitesimal el elemento de fluido sufrirá una deformación continua.

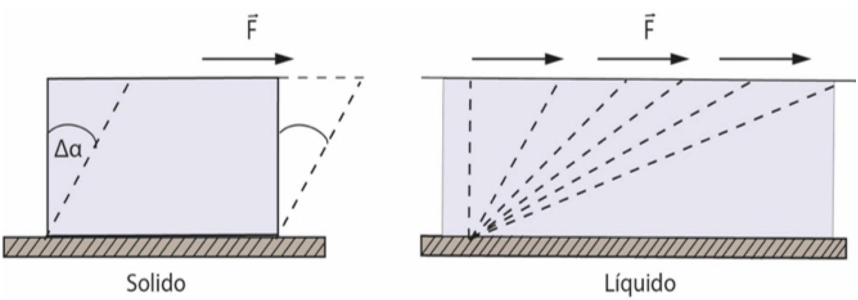


Figura 2. Comportamiento de un sólido (izq.) y de un líquido (der.) frente a una fuerza cortante

Cabe mencionar que existen algunos elementos que pueden presentar comportamientos que no pertenecen a los sólidos ni a los fluidos, por ejemplo; una substancia se comporta como un sólido cuando la fuerza cortante a la que está sometida es menor a un cierto valor, y si se supera ese valor se deforman continuamente como un fluido.

En conclusión, cuando se le aplica una fuerza cortante a un sólido, éste experimentará una deformación fija o se romperá dependiendo del valor de la fuerza, cuando lo analizamos nos referimos a un ángulo de deformación. En cambio, en los fluidos diminutas fuerzas cortantes pueden producir deformaciones indefinidas, cuando lo analizamos debemos referirnos a una velocidad de deformación.

Existen dos grandes clases de fluidos; los líquidos y los gases. La principal diferencia entre los dos radica en sus niveles de compresibilidad, propiedad que se estudiará más adelante.

- **Líquidos:** Los líquidos son prácticamente incompresibles, a una temperatura y presión determinada ocupan un volumen determinado, cuando son colocados en un recipiente, adoptan la formal del mismo. Si una presión uniforme, por ejemplo, la atmosférica, actúa sobre el líquido, éste acoge una superficie plana, este fenómeno se puede apreciar en un lago o un vaso de agua en reposo.

- **Gases:** Los gases son muy compresibles, de modo que su volumen y la densidad pueden cambiar fácilmente dependiendo las condiciones externas. En un gas las fuerzas provocadas por el movimiento térmico reprimen a las fuerzas atractivas lo que provoca que ocupen todo el volumen de un recipiente que lo contenga, por lo que no poseen una superficie libre.

Los fluidos no mantienen una forma específica, si son colocados en cualquier depósito tomarán la forma del mismo ya sea completa o parcialmente.

Actividades 1.1

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué diferencia existe entre un fluido y un sólido?

   ………..…………

   ………..………

2. ¿Qué diferencia existe entre un líquido y un gas?

   ……………………………………………………………..…………

   ……………………………..………………………………………

3. Mencione 4 líquidos que conozca e indique una característica de los mismos.

   ………....………………………………………………………………

   ……...……………………………………………..………………

4. Mencione 4 gases que conozca e indique una característica de los mismos.

   ………....………………………………………………………………

   ……...……………………………………………..………………

5. Investigue brevemente lo que es la densidad de fluidos.

   ………....………………………………………………………………

   ……...……………………………………………..………………

HIPÓTESIS DEL CONTINUO

En el mundo microscópico, un fluido está compuesto por millones y millones de moléculas que se están moviendo y chocando entre sí. Para realizar un estudio preciso de este sistema se debería considerar la acción de cada molécula o del conjunto de moléculas. La Teoría Cinética de los gases y la Física Estadística son un ejemplo de ramas de la física que consideran este análisis específico, sin embargo, es muy complicado si se desea utilizar en los trabajos y estudios sobre hidráulica.

Dentro del estudio de la hidráulica, el interés principal está en el análisis de las manifestaciones macroscópicas promedio, como la viscosidad, volumen, tensión superficial, etc. Las mismas que son producto de la acción conjunta de todas las moléculas que conforman el fluido. Para ello, en vez de analizar a las moléculas por separado, se considerará que estas manifestaciones macroscópicas, se deben a la acción de una hipotética distribución continua de materia, que se denomina "el continuo o el medio continuo".

De ahora en adelante, cuando se analice los fluidos se va a reemplazar la materia real por el medio continuo, en el que sus propiedades cambian de forma continua y expresan las propiedades macroscópicas del medio real. De esta manera se simplifica considerablemente los análisis; sin embargo, es preciso indicar que este enfoque se utiliza solamente cuando el problema proyecte resultados que sean razonablemente correctos. Es decir, no se puede utilizar en una situación en el que el desplazamiento de las moléculas del fluido es parecido a las dimensiones propias del problema, en este contexto se debe analizar por separado la acción de cada una de las moléculas.

Por ejemplo, si se tiene un tanque cerrado con un gas en su interior, se puede analizar la acción del mismo sobre la superficie de la pared del tanque; si la presión es alta existirá una enorme cantidad de moléculas colisionado contra la pared que daría lugar a una fuerza que puede considerarse constante, pero si se baja considerablemente la presión del gas, las pocas moléculas que quedaran tendrán un desplazamiento similar al de las dimensiones del tanque, por lo que ya no se podría afirmar que es una fuerza constante sino una sucesión de colisiones aleatorias de las moléculas contra la pared, este comportamiento no podría ser el de un medio hipotético continuo.

Con este antecedente podemos entender la hipótesis del continuo como:

> *La materia y las propiedades asociadas a la misma se consideran de forma continua en ella, y no concentradas en pequeñas fracciones de la misma. (Martín, 2011).*

Actividades 1.2

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tipo de manifestaciones son las que estudia la hidráulica?

   ....

   ....

2. ¿Qué es el medio continuo?

....

....

3. ¿Cuándo es factible considerar al medio como continuo?

....

....

4. ¿En un medio continuo las propiedades en cada punto vienen dadas por?

....

....

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

DENSIDAD

Es una magnitud escalar que mide el grado de compactación de un material, es decir, la cantidad de masa de un determinado volumen. Se representa con la letra griega ρ y se define matemáticamente como el cociente entre la masa de un cuerpo y el volumen que ocupa, su unidad en el SI es kg/m^3.

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1.1}$$

En un fluido homogéneo la densidad es la misma en cualquier punto, por otro lado, en un fluido no homogéneo la densidad es diferente en cualquier punto, por lo que la densidad en un punto específico es el cociente entre la masa y el volumen de un elemento diferencial en torno a ese punto y en un instante dado, es decir:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \frac{dm}{dV} \tag{1.2}$$

En los fluidos compresibles la densidad a más de depender de la temperatura depende de la presión, al analizar el caso de un gas ideal. La ecuación que describe un gas ideal es:

$$p.V = n.R.T$$

Como la cantidad de sustancia se la quiere en masa en lugar de moles, se utiliza la siguiente relación, donde (m) es la masa y (M) es la masa molar.

$$n = \frac{m}{M}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos.

$$p.V = \frac{m}{M}.R.T$$

Donde al reemplazar *m*/V por ρ, y despejando, tenemos.

$$\rho(p, T) = \frac{Mp}{RT} \tag{1.3}$$

Tabla 1. Densidades de algunos fluidos

Sustancia	Densidad (kg/m^3)
Agua de mar	1030
Agua destilada	1 000
Aire	1,290
Alcohol	810
Aceite	920
Gasolina	700
Glicerina	1 260
Hidrógeno	0,089
Aceite mineral	920
Mercurio	13 600
Oxígeno	1,429
Sangre	1 055
Petróleo	870

Tabla 2. Densidades de algunos sólidos

Sustancia	**Densidad (kg/m^3)**
Aluminio	2 700
Corcho	250
Cobre	8 960
Hielo	920
Hierro	7 900
Níquel	8 900
Madera	600
Plata	10 490
Plomo	11 340
Vidrio	2 500
Caucho	950
Oro	19 300

DENSIDAD RELATIVA

Es una magnitud adimensional, y se expresa como el cociente entre la densidad de un cuerpo y la densidad del agua destilada a presión atmosférica y a 4° C.

Tabla 3. Densidades relativas de algunos líquidos

Líquido	**Densidad relativa**
Agua dulce	1,00
Agua de mar	1,03
Vinagre	1,08
Gasolina	0,70
Alcohol comercial	0,83
Aceite de petróleo	0,82
Amoniaco	0,89
Keroseno	0,80
Aceite mineral	0,92

Ejercicio modelo 1.3.1

Para una máquina industrial se requiere un aceite cuya masa es de 1 000 kg y su volumen es de 1 500 m³. Se trasladará el aceite mediante un tanque especial que solo puede contener objetos con densidad menor que 0,5 kg/m³. ¿Se podrá trasladar el aceite con el tanque?

Primero determinamos la densidad del aceite mediante la ecuación (1.1)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1\,000\,kg}{1\,500\,m^3} = 0{,}67\,\frac{kg}{m^3}$$

Se compara con la densidad de los objetos que puede transportar el tanque, y se concluye que no se podrá trasladar el aceite.

Actividades 1.3.1

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Calcular la masa de la gasolina que ocupa un recipiente de forma cilíndrica que tiene un radio 5 cm y una altura de 150 cm.

2. Si usted tiene la fuerza para levantar un peso máximo de 200 N. ¿Qué tamaño tendrá una esfera de acero que sea capaz de levantar?

3. ¿Qué masa tiene 15 litros de un líquido cuya densidad es 12 kg/L?

4. Si la densidad del Cobre es 8,9 g/cm^3. ¿Determinar el volumen que ocupará una masa de 490 g?

5. El cerebro de un adulto tiene aproximadamente una masa de 1 400 g, y 1E11 células neuronales. Si suponemos que cada célula está compuesta de agua. Determine: a) la longitud de un lado de una célula si tuviera forma cúbica, b) Si las células se colocan como una delgada capa con un espesor de una sola célula. ¿Cuál es el área total?

PESO ESPECÍFICO

Se representa con la letra griega γ, se define matemáticamente como el cociente entre el peso de un elemento y su volumen, su unidad en el SI es el N/m^3 , es decir:

$$\gamma = \frac{mg}{V} \tag{1.4}$$

Como ρ = m/V, tenemos.

$$\gamma = \rho\, g \tag{1.5}$$

En un fluido no homogéneo, tenemos.

$$\gamma = \gamma(x, y, z, t) = g\,\frac{dm}{dV} \tag{1.6}$$

Los pesos específicos de los gases se obtienen utilizando la ecuación de estado de los gases;

$$\gamma = \frac{Mpg}{RT} \tag{1.7}$$

VOLUMEN ESPECÍFICO

Podría decirse que es el inverso de la densidad, se representa con la letra v, y se define como el volumen ocupado por una unidad de masa. En el SI su unidad es el m^3/kg, en un fluido homogéneo es igual a:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \tag{1.8}$$

Sin embargo, en un fluido no homogéneo se tiene que hablar de su valor en un punto, es decir:

$$v = v(x, y, z, t) = \frac{dV}{dm} = \frac{1}{\rho} \tag{1.9}$$

Ejercicio Modelo 1.3.2

Si un aceite posee una masa de 5 000 kg y ocupa un volumen de 10 m^3. Determinar su peso específico, su densidad y su densidad relativa.

Para determinar el peso específico utilizamos la ecuación (1.4), reemplazamos los valores que nos da el problema.

$$\gamma = \frac{mg}{V} = \frac{5\,000\ kg\ 9{,}8\ m/s^2}{10\ m^3} = 4\,900\ N/m^3$$

Para determinar la densidad del aceite utilizamos la ecuación (1.1).

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{5\,000\ kg}{10\ m^3} = 500\ kg/m^3$$

Finalmente, para determinar la densidad relativa, dividimos la densidad del aceite para la densidad del agua destilada.

$$\rho_{re} = \frac{500\ kg/m^3}{1000\ kg/m^3} = 0{,}5$$

Ejercicio Modelo 1.3.3

Determinar a qué presión el aire tendrá un peso específico de 1 410 kg/m^3, si está sometido a una temperatura de 40° C, y una masa molar de 15 g/mol.

Utilizando la ecuación (1.7) tenemos;

$$\gamma = \frac{Mpg}{RT}$$

Despejando p y reemplazando;

$$p = \frac{R\,T\,\gamma}{Mg} = \frac{8{,}314\ (273{,}15 + 40)\ 1\,410}{15E - 3\ \ 9{,}8} = 3\,003\,740{,}23\ Pa$$

Actividades 1.3.3

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Si 4 m^3 de un aceite tiene una masa de 5 000 kg. Determinar su peso específico y su densidad.
2. Determinar el peso específico, el volumen específico y la densidad de un gas que tiene una masa molar de 20 g/mol y a una temperatura de 40° C tiene una presión de 1 000 Pascales.
3. Determinar el peso específico del aire a la presión atmosférica, al nivel del mar a 16º C.
4. Determinar la masa, la densidad y peso específico, del aire que se encuentra en un cuarto que tiene dimensiones 4x5x6 m a 100 kPa y a 25 º C.

PRESIÓN

Es una magnitud física que relaciona la fuerza con la superficie en la cual actúa, se define matemáticamente como el cociente entre la fuerza perpendicular sobre una superficie y el área de la misma. Su unidad en el SI es el N/m^2 y se denomina Pascal (Pa) en honor al físico francés Blaise Pascal.

Se representa mediante la siguiente ecuación.

$$p = \frac{F}{S} \tag{1.10}$$

Consideremos un fluido en reposo, la presión que ejerce se transfiere con la misma magnitud en todas las direcciones, es decir, si tenemos un plano horizontal, la presión es igual en cualquier punto, en la figura 3, se observa la presión de un fluido sobre las paredes de un recipiente cualquiera.

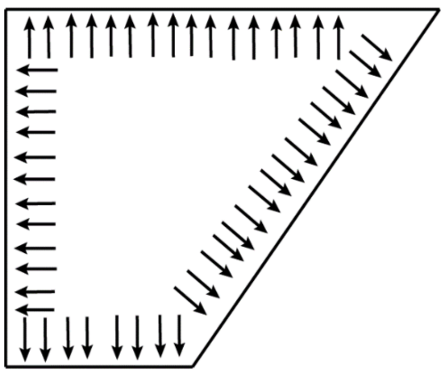


Figura 3. Presión de un fluido sobre un recipiente

Actividades 1.3.4

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Determinar la presión a la que está sometido un cierto gas que tiene un peso específico de 1 500 N/m^3, una masa molar de 30,5 g/mol y a una temperatura de 10º C.

2. Determine la presión que ejerce una fuerza de 150 N que actúa sobre una superficie plana de 200 cm^2?

3. Una persona de unos 80 kg se sitúa sobre la losa de una casa que tiene dimensiones de 5x16 m. ¿Cuál será la presión que ejerce la persona?

4. Si la presión atmosférica es de 101 325 Pa., determinar la fuerza que ejerce el aire sobre una ventana de una casa que tiene dimensiones de 30 cm x 65 cm.

5. Considere una caja de 25 kg que se coloca sobre el piso. La superficie apoyada tiene 35 cm de ancho y 65 cm de largo. ¿Qué presión ejerce la caja sobre el piso?

6. Se tiene una tubería de 20 metros y un radio de 10 cm. Un extremo está conectado a una bomba y el otro está abierto a la atmósfera, está completamente llena de alcohol. Determine la presión que debe ejercer la bomba para que el fluido se mueva con una aceleración de 0,8 m/s^2.

COMPRESIBILIDAD

La compresibilidad es una propiedad de los fluidos especialmente de los gases, provoca que disminuyan su volumen cuando son sometidos a una presión determinada manteniendo constantes otros parámetros como la temperatura. Se lo puede definir matemáticamente como la disminución del volumen por unidad de aumento de presión, su unidad en el sistema SI es el m^2/N, es decir:

$$k = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)_T \qquad (1.11)$$

El signo negativo indica que un aumento de la presión provoca una disminución en el volumen y el subíndice muestra que la compresión del fluido se lo realiza a temperatura constante.

Los gases al contener moléculas muy separadas poseen una compresibilidad mucho mayor que la de los líquidos. Generalmente, los líquidos se consideran incompresibles, sin embargo, en situaciones en los que los cambios de presión sean muy grandes la compresibilidad es importante.

DILATACIÓN TÉRMICA

Se denomina dilatación térmica al aumento de las dimensiones que experimenta un cuerpo, que puede ser sólido o fluido, debido al aumento de su temperatura. Por otro lado, la contracción térmica es la disminución de las dimensiones por reducción de la temperatura. En el estudio de fluidos consideraremos la dilatación y contracción volumétrica.

La dilatación de un fluido depende de su coeficiente de dilatación, su unidad es k^{-1} o C^{-1}, dependiendo como se realice el análisis, es decir:

$$\gamma = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \tag{1.12}$$

Tabla 4. Coeficientes de dilatación volumétrica de fluidos cerca de la temperatura ambiente.

Fluidos	$\gamma\ C^{-1}$
Agua	0,21 E-3
Alcohol	1,1 E-3
Glicerina	0,51 E-3
Mercurio	0,18 E-3
Gasolina	0,95 E-3
Acetona	1,5 E-3
Aire	3,41 E-3
Hidrógeno	3,66 E-3
Helio	3,66 E-3
Monóxido de Carbono	3,67 E-3

Actividades 1.3.6

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Si se tiene 4 L de alcohol y 4 L de glicerina a 20 ºC. ¿Cuál de los dos ocupará más volumen si se duplica la temperatura?
2. ¿Cuánto debe variar la temperatura para que 1 m^3 de helio duplique su volumen?
3. Si se tiene una masa de 0,1 kg de aire a temperatura ambiente. ¿Qué volumen ocupará si su temperatura aumenta a 35 ºC?
4. Considere un depósito construido con hierro, el mismo que tiene 280 litros de capacidad a 8 °C, se lo llena completamente con gasolina, y se lo calienta hasta a 30 °C. Determine si la gasolina se derramó y de ser el caso ¿Cuánta gasolina se derramó? $\gamma_{hierro} = 35{,}1\,E - 6\ {}^{\circ}C^{-1}$

VISCOSIDAD

Frecuentemente, en algunas situaciones las fuerzas viscosas de un fluido no pueden ser despreciadas, pues provocan que se disipe energía, de la misma manera que las fuerzas de rozamiento disipan energía de un cuerpo que se desliza sobre una superficie rugosa, en estos casos la temperatura aumenta.

La viscosidad de un fluido es la medida que expresa la oposición a las deformaciones provocadas por fuerzas externas, corresponde con el concepto informal de “espesor”, es decir, la viscosidad determina la facilidad con la que fluye un fluido cuando se le aplica una fuerza cortante. Por ejemplo, la miel tiene una viscosidad mucho mayor que el agua por lo que será mucho más difícil hacerla fluir. La viscosidad está presente en fluidos compresibles e incompresibles. En los fluidos no viscosos denominados perfectos podría despreciarse la acción de las fuerzas viscosas, sin embargos en los fluidos viscosos denominados reales la acción es considerable y no puede ser ignorado.

La viscosidad es una propiedad de un fluido real, es la causante de la resistencia u oposición que experimenta un fluido al fluir por tuberías y canales, lo que ocasiona un comportamiento diferente al de un fluido ideal. Por ejemplo, el principio de Bernoulli (que se estudiará más adelante) indica que, si un fluido ideal fluye a través de una tubería horizontal que tiene sección transversal constante, tiene velocidad y presión constantes. Tal como se puede observar en la siguiente figura.

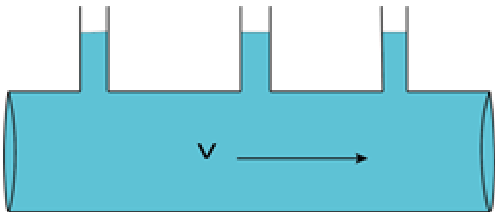


Figura 4. Flujo de un fluido ideal

Como las fuerzas de rozamiento se presentan cuando existe movimiento, por lo que no se estudia en hidrostática, estas fuerzas de origen viscoso son tangenciales y se oponen al deslizamiento de unas capas de fluido sobre otras. Eso quiere decir que las capas de fluido que están más cerca de las paredes de las tuberías se mueven más lento y detendrán a las capas interiores de fluido que se mueven más rápido.

Por ejemplo, analicemos la figura 5

Figura 5. Capas de un fluido

Como podemos apreciar en la figura anterior, cerca de las paredes de la tubería, la velocidad es prácticamente nula, por efecto de adherencia, conforme aumenta z aumenta también la velocidad, hasta el máximo valor. Esto indica que a lo largo del eje z existe un gradiente de velocidad.

Consideremos una pequeña capa de fluido, que está dentro del fluido, a una altura z de la pared del fondo de la tubería y de espesor dz y área S.

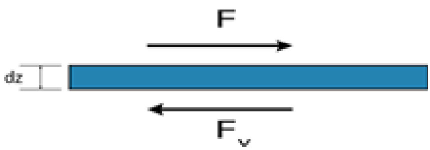


Figura 6. Pequeña capa de fluido

La fuerza tangencial experimental descubierta por Newton que se ejerce sobre esta capa se representa mediante la siguiente expresión.

$$F = \eta \, S \, \frac{dv}{dz} \tag{1.13}$$

Donde, η es el coeficiente de viscosidad y se expresa en Ns/m^2, *dv/dz* es el gradiente de velocidad en m/s.

Los fluidos que satisfacen la ecuación anterior se denominan Newtonianos, sin embargo, existen algunos fluidos que no, por ejemplo, la sangre, en donde la relación entre la velocidad de flujo y la fuerza no son directamente proporcionales, generando que un valor aumenta más rápido que el otro.

La sangre se considera un fluido no Newtoniano debido a que si la observáramos microscópicamente notaríamos que no es un fluido homogéneo, más bien es una mezcla heterogénea de partículas (glóbulos rojos) con un líquido. Si la velocidad es pequeña los glóbulos rojos están orientados aleatoriamente, pero si la velocidad es grande los glóbulos rojos tienden a orientarse en el mismo sentido, facilitando el flujo.

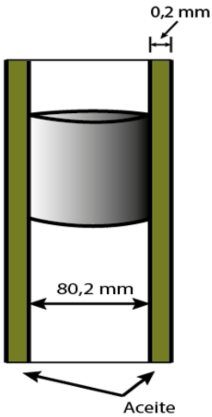
La viscosidad es sensible a la temperatura por lo que se reduce cuando aumenta la misma, tal como se observa en la tabla 5.

Tabla 5. Coeficiente de viscosidad de algunos fluidos.

Fluido	Temperatura (°C)	Coeficiente de viscosidad (Ns/m^2)
Sangre	37	4,00 E-3
Etanol	20	1,20 E-3
Glicerina	20	1,49
Mercurio	20	1,55 E-3
Aceite ligero	16	0,113
Agua	0	1,79 E-3
Agua	20	1,00 E-3
Agua	100	2,82 E-4
Aire	0	1,71 E -5
Aire	18	1,83 E-5
Helio	20	1,94 E-5
Gasolina	20	2,9 E-4
Petróleo pesado	20	11 E-2
Miel líquida	20	10

Ejercicio modelo 1.3.7

En la siguiente figura, se tiene un tubo que está cubierto en su interior con un aceite que tiene un coeficiente de viscosidad de 6 E - 3 Ns/m^2. Un cilindro sólido que tiene un radio de 40 mm, una altura de 200 mm y una masa 3 kg, se desliza dentro del tubo. Determinar la velocidad final del cilindro cuando se mueva con velocidad constante. Desprecie los efectos de presión del aire.



Utilizando la ecuación (1.13), tenemos:

$$F = \eta\, S\, \frac{dv}{dz}$$

Reemplazamos los valores que nos da el problema.

$$F = 6\,E - 3\,.\,2\,\pi\, 40\,E - 3\,.\,200E - 3\;\frac{v_f - 0}{0{,}2\,E - 3\; - \;0}$$

$$F = 1{,}5\; v_f$$

Ahora, de acuerdo la ley de Newton, tenemos:

$$F - P = 0$$

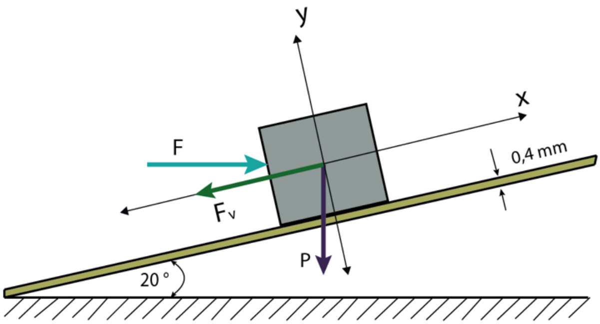
$$1{,}5\; v_f - 3\; kg\; 9{,}8\; m/s^2 = 0$$

Despejando la velocidad final.

$$v_f = 19{,}6\;\frac{m}{s}$$

Ejercicio modelo 1.3.8

En la siguiente figura se requiere subir a velocidad constante de 1 m/s un bloque que tiene una superficie en su base de 12 cm^2 y una masa de 15 kg, sobre una superficie inclinada de 20°, sobre ella se coloca una capa de aceite de 0,4 mm de espesor con η=12E-3 Ns/m^2. Determine la fuerza horizontal que debe aplicarse.



Primero, determinamos el peso del bloque $p = 15 \,.\, 9{,}8 = 147\ N$

Aplicando la ley de Newton a un cuerpo con velocidad constante, tenemos:

$$\sum Fx = F\cos\theta - P\ sen\,\theta - F_v = 0$$

Reemplazando los datos del problema.

$$F\cos\theta - 147\ sen\,\theta - 12E - 3(1{,}2E - 3)\frac{1}{0{,}4E - 3} = 0$$

Despejamos la fuerza aplicada:

$$F = 53{,}54\ N$$

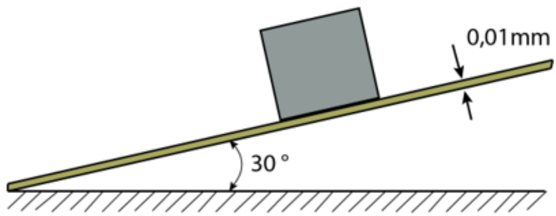
Actividades 1.3.7

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Un líquido que tiene una viscosidad de 80 poises, está entre dos superficies separadas 0,8 cm. Si las dos superficies se mueven en direcciones opuestas, con velocidades de 2,5 cm/s. Determinar el esfuerzo cortante aplicado al líquido.

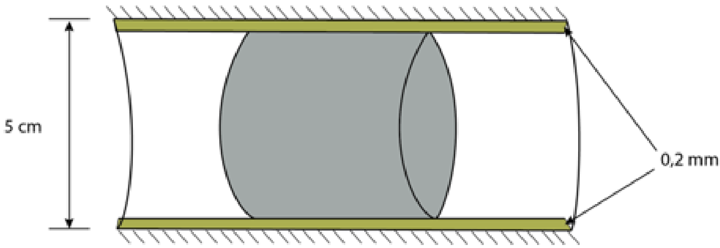
2. Se tiene un oleoducto que tiene 2 km de largo y 20 cm de radio, a través de él se requiere bombear 2 m^3/s de petróleo. Si el extremo S_2 está abierto a la atmósfera, determinar la potencia disipada por la fricción interna ocasionada por la viscosidad y la presión p1 que debe existir en el extremo S_1.

3. En la siguiente figura se observa un bloque cúbico de 100 kg de masa y 15 cm de lado que se desliza sobre una superficie inclinada que tiene una capa de aceite mineral de 0,01 mm de espesor. Determinar la velocidad final del bloque.

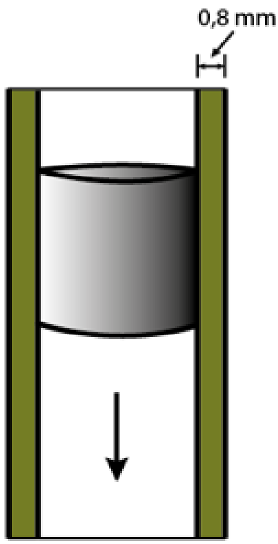


4. La siguiente figura muestra un émbolo de 2,48 cm de radio y 8 cm de largo, que se mueve a lo largo de un tubo con una velocidad de 0,5 m/s. La capa de aceite que separa el émbolo

del tubo tiene un coeficiente de viscosidad de 0,015 Ns/m^2. Determinar la fuerza que se necesita para conservar este desplazamiento.



5. Considere un cilindro de 3 cm de radio, 6 cm de altura y 3 kg de masa que se desliza por un tubo lubricado. La separación entre el tubo y el cilindro es de 0,8 mm. Si el cilindro desacelera a 20 cm/s^2 cuando la velocidad es de 10 cm/s. Determinar la viscosidad del lubricante.



TENSIÓN SUPERFICIAL

Se denomina tensión superficial a la cantidad de energía requerida para incrementar la superficie del líquido por unidad de área, este fenómeno hace que determinados insectos, como los zancudos caminen por la superficie del agua, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 7. Insecto sobre la superficie del agua

En un líquido, cada molécula experimenta la acción de varias fuerzas atractivas en todas las direcciones que en promedio se anulan, excepto en la superficie, donde la fuerza neta es hacia el interior del líquido, formando una capa que presenta una pequeña resistencia a la deformación y a destruirse, siendo capaz de soportar diminutas fuerzas externas como el peso de los insectos o de la hoja de un árbol.

Tal como se muestra en la figura 8

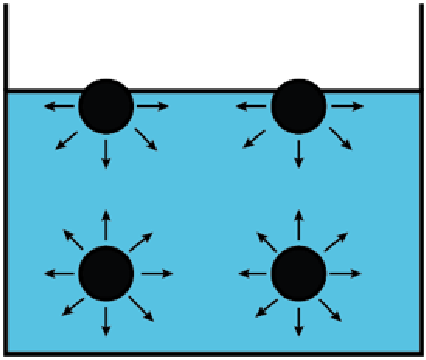


Figura 8. Fuerzas de atracción dentro de un líquido

La figura 9 muestra un alambre móvil que está sujeto en los extremos a dos alambres fijos, los mismos que son los límites de una pequeña película de jabón.

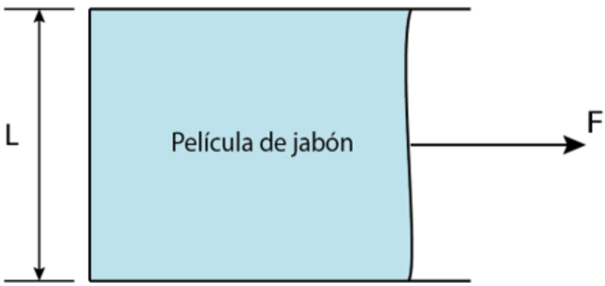


Figura 9. Análisis de la tensión superficial

Si deslizamos el alambre móvil una distancia x, la energía requerida para ello es $F.x$ y la superficie de la película de jabón aumenta en 2Lx, si se considera que consta de dos superficies.

Como la tensión superficial se define como el cociente entre la energía requerida para realizar el desplazamiento y la superficie aumentada, sus unidades típicas en el SI son el J/m^2 o N/m, es decir:

$$\sigma = \frac{energía}{área\ deformada}$$

Para nuestro caso es;

$$\sigma = \frac{F}{2L} \tag{1.14}$$

Si ahora analizamos el caso de un cilindro líquido, el mismo que es cortado por la mitad, tal como se muestra en la figura 10.

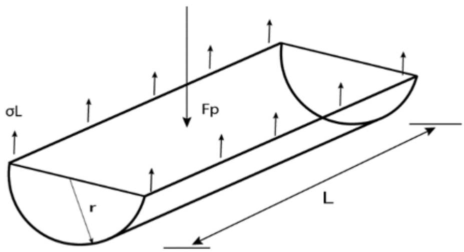


Figura 10. Aumento de la presión en un cilindro por la tensión superficial

La fuerza generada por el aumento de la presión se equilibra con las fuerzas generadas por la tensión superficial, es decir:

$$F_p = \Delta p\ (2r)(L)$$

$$F_{ts} = \sigma 2L$$

$$\Delta p\ (2r)(L) = \sigma 2L$$

Resolviendo, tenemos;

$$\sigma = \Delta p \; r \tag{1.15}$$

Ahora, estudiemos el caso de una gota esférica cortada por la mitad, tal como se muestra en la figura 11.

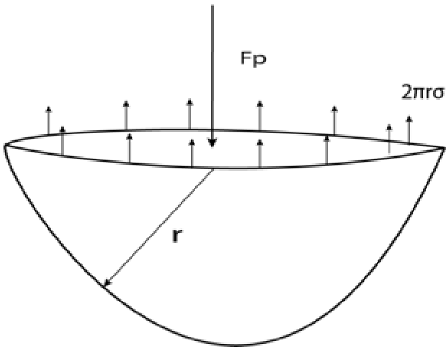


Figura 11. Aumento de la presión en una gota esférica

De la misma manera, la fuerza generada por el aumento de presión se equilibra por la fuerza generada por la tensión superficial, es decir.

$$F_p = \Delta p \, (\pi r^2)$$

$$F_{ts} = \sigma 2\pi r$$

$$\Delta p \, (\pi r^2) = \sigma 2\pi r$$

Resolviendo y despejando;

$$\sigma = \frac{\Delta p r}{2} \tag{1.16}$$

La ecuación (1.16) se conoce como LEY DE LAPLACE para una gota.

Tabla 6. Tensión superficial de algunos líquidos.

Fluido	Tensión superficial N/m
Alcohol etílico	0,022
Mercurio	0,466
Agua	0,073
Aceite	0,035
Glicerina	0,062
Petróleo	0,026
Agua Jabonosa	0,025
Miel de abeja	0,066

CAPILARIDAD

A un tubo de vidrio con diámetro interno muy pequeño y un largo reducido se lo denomina como tubo capilar, en el que debido a la tensión superficial se produce una elevación o un descenso del líquido, esto depende de la cohesión y adhesión del líquido a las paredes del tubo capilar.

En un líquido las fuerzas de atracción entre las moléculas son denominadas fuerzas de cohesión, estas son las que originan la tensión superficial. Las fuerzas de cohesión dependen únicamente de la naturaleza del líquido. En cambio, se denominan fuerzas de adhesión a las fuerzas de atracción que existen entre el líquido y el sólido cuando están en contacto, en este caso dependen de la naturaleza de los dos.

Si la adhesión es mayor que la cohesión, el líquido se eleva por la pared del tubo, a este fenómeno suele llamarse “el tubo moja la pared”, tal como se muestra en la figura 12.a, por ejemplo aire-agua-vidrio, en cambio si la cohesión es mayor que la adhesión el líquido desciende, suele llamarse como “el tubo no moja la pared”, figura 12.b, por ejemplo mercurio-aire-vidrio. Se presta mucha atención a la capilaridad en tubos que tiene un radio menor a 5 mm.

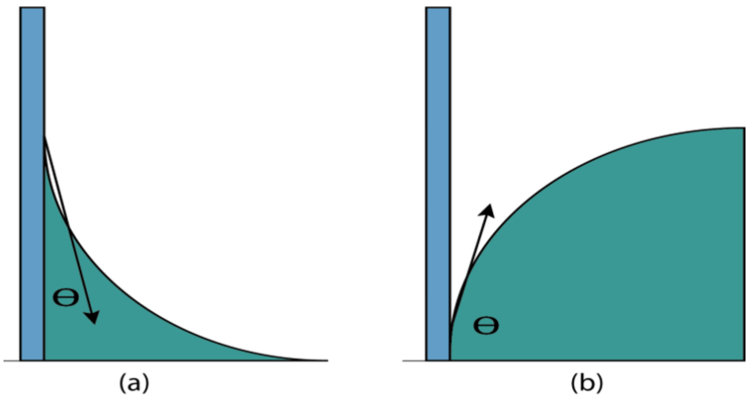


Figura 12. a) Líquido moja la pared, b) líquido no moja la pared

En la siguiente figura, se muestra dos líquidos diferentes en tubos de ensayo. Se puede observar que el primer caso se tiene agua y se puede decir que el tubo moja la pared. En el segundo caso se tiene mercurio y se puede observar que el tubo no moja la pared.

Figura 13. Menisco de agua (izquierda) y mercurio (derecha) en un tubo de ensayo

FLUIDO IDEAL

Se conoce como un fluido ideal al que no posee viscosidad, este tipo de fluido no existe en la naturaleza, $\eta = 0$ define matemáticamente un fluido ideal.

En la vida real no existe un fluido con viscosidad nula, los dos más comunes e importantes; el aire y el agua tienen viscosidad pequeña, pero ninguno es un fluido ideal.

Un fluido ideal que fluye por una tubería no experimenta pérdida de energía. Por ejemplo, un avión que vuela a través de un fluido ideal no tendría resistencia alguna.

Ejercicio Modelo 1.3.11.1

Una esfera de solución jabonosa de 1,5 cm de radio tiene una sobrepresión interior de 20 Pa. Determinar la tensión superficial de interface aire-solución jabonosa.

Utilizando la ecuación (1.16), tenemos;

$$\sigma = \frac{\Delta pr}{2}$$

$$\sigma = \frac{20 \text{ Pa} \, . \, 0{,}015 \text{ m}}{2} = 15 \frac{N}{m}$$

Ejercicio Modelo 1.3.11.2

Calcule la tensión superficial de un líquido mediante una varilla móvil de 10 cm y una fuerza de 0,5 N.

De acuerdo a la ecuación (1.14) tenemos

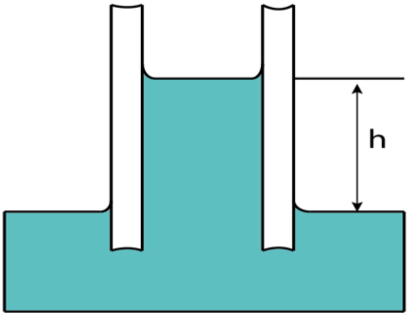
$$\sigma = \frac{F}{2L} = \frac{0{,}5 \ N}{2 \ (0{,}1) \ m} = 2{,}5 \frac{N}{m}$$

Actividades 1.3.11

1. Un insecto de seis patas que se encuentre sobre la superficie del agua genera una deformación circular en el agua de 0,5 mm radio en cada una de sus patas. Determinar el peso máximo que debe tener el insecto para mantenerse sobre el agua.

2. Determinar la diferencia de presión que existe entre el interior y el exterior de una pompa de jabón que tiene 2 cm de radio.

3. Determine la ecuación que permita encontrar la altura del líquido que sube por un tubo capilar, tal como se indica en la siguiente figura.



4. En una planta los nutrientes suben por diminutos tubos en su tallo que tienen alrededor de 0,005 mm de diámetro, en parte se debe a la capilaridad. Determine hasta qué altura subirá el agua que forma un ángulo de contacto de 18°.

ESTÁTICA DE FLUIDOS

Capítulo 2

ESTÁTICA DE FLUIDOS

ESTÁTICA DE FLUIDOS: HIDROSTÁTICA

La estática de fluidos, conocida también como Hidrostática, es la parte de la mecánica de fluidos que estudia a los fluidos en reposo. Debido a su simplicidad fue el primer ámbito de la mecánica de fluidos en ser analizada científicamente, inclusive fue la única durante mucho tiempo. A ella le pertenece uno de los descubrimientos más importantes de esta rama "el principio de Arquímedes".

Cuando un fluido está en reposo sus partículas poseen en promedio una velocidad igual a cero, es decir, no existen fuerzas tangenciales que originan movimientos tangenciales. En este caso, cuando un recipiente contiene un fluido en reposo las fuerzas que ejerce el fluido son normales a la superficie de las paredes del recipiente. Similarmente si se introduce un objeto en un fluido, éste ejercerá una fuerza normal sobre la superficie del objeto.

En la siguiente figura se puede observar a un fluido en condiciones estáticas y las fuerzas que ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene. De la misma manera se observa también las fuerzas que ejerce el fluido sobre un objeto sumergido en él. En ambas situaciones, las fuerzas son normales a las superficies y su valor viene determinada por la ecuación fundamental de la estática de fluidos.

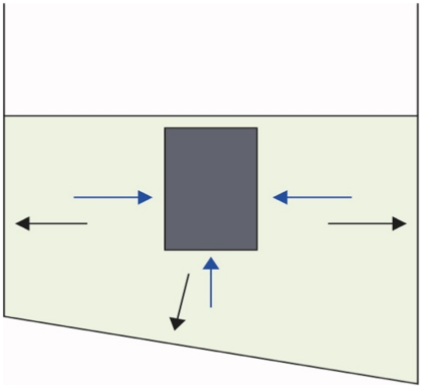


Figura 14. Presión de un líquido sobre un recipiente y un elemento

PRESIÓN EN UN PUNTO DE UN FLUIDO

Para la siguiente demostración consideremos un prisma triangular de dimensiones infinitesimales sumergido en un líquido en reposo, tal como se muestra en la siguiente figura.

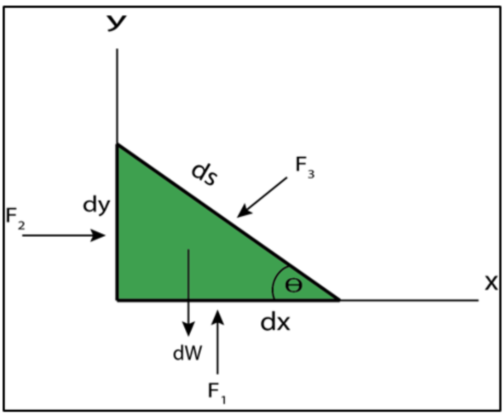


Figura 15. Presión en un punto.

Las presiones promedio que existen en cada una de las superficies son, p_1, p_2 y p_3.

Como el punto de fluido está en equilibrio, aplicando la primera ley de Newton, tenemos:

$$\sum Fx = 0 \qquad\qquad \sum Fy = 0$$

Es decir;

$$\sum Fx = F_2 - F_3 sen\theta = 0$$

$$\sum Fy = F_1 - F_3 cos\theta - dW = 0$$

Utilizando la ecuación (1.10) obtenemos:

$$p_2(dzdy) - p_3(dzds)sen\theta = 0$$

$$p_1(dxdz) - p_3(dzds)cos\theta - dW = 0$$

En el triángulo rectángulo tenemos que:

$$dy = ds\ sen\ \theta \qquad\qquad dx = ds\ cos\ \theta$$

Si utilizamos la ecuación (1.1) en dW, obtenemos:

$$dW = gm = g\rho dV = g\rho(dxdydz/2)$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores:

$$p_2(dz\ ds\ sen\ \theta) - p_3(dzds)sen\theta = 0$$

$$p_1(dxdz) - p_3(dzdx) - g\rho(dxdydz/2) = 0$$

Resolviendo algebraicamente

$$p_2(dz\,ds\,sen\theta) = p_3(dzds)sen\theta$$

$$p_1(dxdz) - p_3(dzdx) - g\rho(dydxdz/2) = 0$$

Simplificando términos semejantes,

$$p_2 = p_3$$

$$p_1 - p_3 - g\rho dy = 0$$

Como el prisma tiende a ser un punto sus dimensiones tienden a cero, por lo que dy = 0

$$p_1 = p_3$$

Finalmente tenemos que:

$$\boxed{p_1 = p_2 = p_3}$$

Lo que demuestra que las presiones en un punto son todas iguales.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS

Se considera que un fluido está en reposo cuando la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero. Estas fuerzas se clasifican en "exteriores" si actúan sobre el contorno que limita al fluido, por ejemplo, el peso. Y se clasifican en "interiores" las fuerzas ocasionadas por las interacciones entre las partículas del fluido, por ejemplo, las fuerzas de acción y reacción.

Si un fluido está en reposo, también lo estarán todas sus partes, por ejemplo; consideremos un elemento diferencial de volumen de fluido dentro de la masa del fluido, para simplificar el análisis consideramos que el elemento tiene forma paralelepípedo de dimensiones, *dx, dy, dz*, además se encuentra a una altura z, tal como se indica en la siguiente figura.

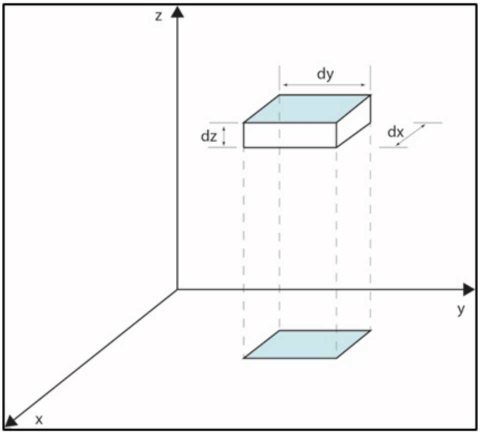


Figura 16. Diferencial de volumen de un fluido

La masa *dm* del elemento diferencial de volumen se obtiene del producto de su densidad por su volumen.

$$dm = \rho\ (dxdydz)$$

Si g es el valor de la aceleración de la gravedad el peso del elemento diferencial de volumen es:

$$dw = g\ dm = g\rho\ (dxdydz)$$

El elemento de fluido experimentará fuerzas normales a sus superficies debido a la presión del resto del fluido, sin embargo, la suma de todas las fuerzas es cero puesto que el elemento está en reposo.

Si la presión sobre la cara inferior es p sobre la cara superior es *p+dp,* la fuerza hacia arriba es *pdS* y hacia abajo es *(p+dp)dS* más el peso *dw*, por lo tanto, para que el fluido esté en equilibrio se debe cumplir.

$$pdS - (p + dp)dS - dw = 0$$

Como *dw=gρ (dxdydz)* y *dS=dxdy*, tenemos.

$$pdxdy - (p + dp)dxdy - g\rho\, dxdydz = 0$$

Resolviendo matemáticamente, tenemos.

$$pdxdy - pdxdy - dpdxdy - g\rho\, dxdydz = 0$$

De donde:

$$-dpdxdy = g\rho\, dxdydz$$

$$dp = -g\rho\, dz$$

Es decir:

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho \qquad (2.1)$$

La ecuación (2.1) indica como varia la presión con respecto a la altura sobre algún sistema de referencia en un fluido que se encuentra en reposo.

Para obtener la función *p=p (z)* debemos integrar la ecuación (2.1), para ello, debemos conocer la dependencia de densidad *p* con *z*, suponiendo que g es constante, En los líquidos la densidad es constante ya que se los considera fluidos incompresibles.

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\int_{z_0}^{z} \rho g dz$$

Integrando y reemplazando los límites superiores e inferiores, tenemos.

$$p - p_0 = -\rho g(z - z_0)$$

Despejando *p*, nos queda.

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

Si desde la superficie libre del líquido consideramos a *h* como la profundidad a la que se encuentra el elemento de fluido y la presión p_0 que actúa sobre la superficie libre como la presión atmosférica, tenemos.

$$p = p_0 + \rho g h \tag{2.2}$$

Siendo $h = z_0 - z$

La ecuación anterior se la conoce como la ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE UN FLUIDO INCOMPRESIBLE, donde h representa la profundidad y p_0 la presión atmosférica. La ecuación (2.2) nos indica también que en cualquier punto que se encuentre a la misma profundidad tendrá la misma presión, es decir, la presión hidrostática solo depende de su profundidad.

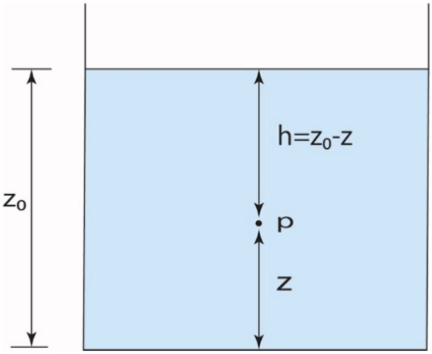


Figura 17. Presión hidrostática

De la ecuación (2.2) podemos clasificar la presión en:

- **Presión Atmosférica:** Es la presión generada por el peso de la columna de aire al nivel del mar, tiene un valor de 101 325 Pa = 1 Atm. (p_0)
- **Presión manométrica-relativa:** Se la mide con un manómetro y es la presión de fluidos en circuitos cerrados. (ρgh)
- **Presión absoluta:** Es la suma de la presión atmosférica más la presión manométrica. Ecuación (2.2). ($p=p_0+ \rho gh$)

PRINCIPIO DE PASCAL

La ecuación (2.2) nos indica el principio de Pascal, propuesto por el físico de nacionalidad francesa Blaise Pascal que vivió entre los años 1623 y 1662.

> *Si un fluido está en reposo en un recipiente la presión que se ejerce sobre un punto del fluido se transmite con la misma intensidad en todas las direcciones y en todos los puntos del fluido.*

Es decir, si la presión aumenta en un punto, aumenta de la misma manera en los demás puntos del fluido, puesto que la ecuación (2.2) nos indica que la diferencia de presiones entre dos puntos en un fluido estático sólo depende de h.

PARADOJA DE PASCAL

La ecuación (2.2) indica también que la fuerza de presión no depende de la forma ni del tamaño del recipiente que contenga el fluido. Por ejemplo, consideremos que tenemos varios recipientes de diferente forma, pero de igual base. Todos están llenos de agua hasta la misma altura, como se muestra en la figura 18. Observamos que el primero tiene la parte superior de la misma forma que la base, el segundo tiene una forma muy cerrada y el tercero en cambio muy abierta.

Resulta increíble el fenómeno de que en todos los casos la fuerza ejercida sobre la base es la misma. Sin embargo, ya no es tan sorprendente si analizamos el hecho de que las paredes del recipiente ejercen sobre el líquido una fuerza normal a la misma, que en ciertos casos poseen una componente vertical que, si bien en el primer recipiente no existe, en el segundo recipiente es hacia abajo y en el tercer recipiente es hacia arriba, provocando que el peso del fluido aumente o disminuya.

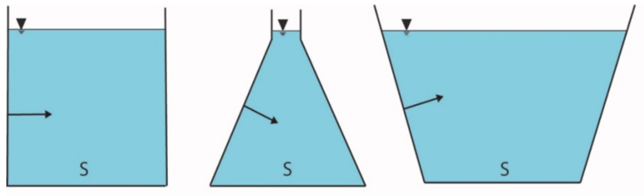


Figura18. Fluido en diferentes recipientes

VASOS COMUNICANTES

Consideremos unos recipientes que están conectados entre sí, como se muestra en la figura 19 si se vierte un líquido en un recipiente, el líquido alcanzará el mismo nivel en todos los recipientes, es decir, no depende de la forma ni del volumen del mismo.

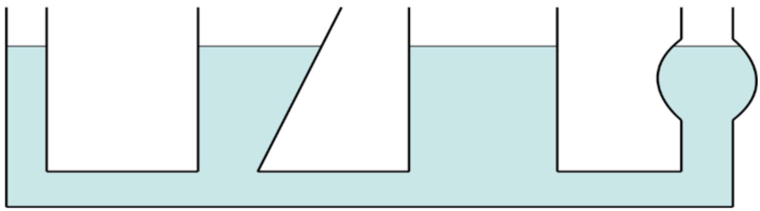


Figura 19. Vasos comunicantes

Ejercicio Modelo 2.3.1

Determinar la presión relativa que soporta un submarino que navega en el océano a 200 m de profundidad.

Utilizando la ecuación (2.2) tenemos:

$$p = \rho g h$$

Reemplazamos los datos que nos da el problema:

ρ= 1 030 kg/m^3 densidad del agua de mar

h= profundidad a la que se encuentra el submarino

g= aceleración de la gravedad

$$p = 1\,030\ \frac{kg}{m^3} 9{,}8\ \frac{m}{s^2} 200\ m$$

$$p = 20{,}18\, E\ 5\ Pa$$

Ejercicio Modelo 2.3.2

En una piscina que contiene agua hasta una altura de 1,80 m, existe un tapón circular que tiene 20 cm de diámetro. Determinar la presión que ejerce el agua sobre el tapón y la fuerza vertical que hay que realizar para elevarlo.

Utilizando la ecuación (2.2) tenemos;

$$p = \rho g h$$

Reemplazamos los datos que nos da el problema

$$p = 1\,000\ \frac{kg}{m^3} 9{,}8\ \frac{m}{s^2} 1{,}80\ m = 17\,640\ Pa$$

Ahora, utilizando la ecuación (1.10)

$$F = 17640\ Pa\ \pi\ 0{,}1^2 m^2$$

$$F = 554{,}17\ N$$

Actividades 2.3.2

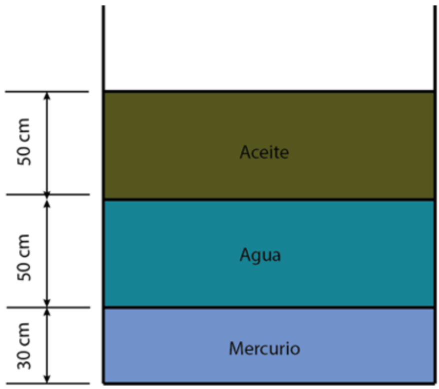
Resuelva los siguientes ejercicios

1. Determinar la presión a una profundidad de 15m de una superficie sumergida en gasolina.

2. Si un aceite tiene una densidad relativa de 0,560 determine a qué profundidad se produce una presión de 1 000 N/m^2.

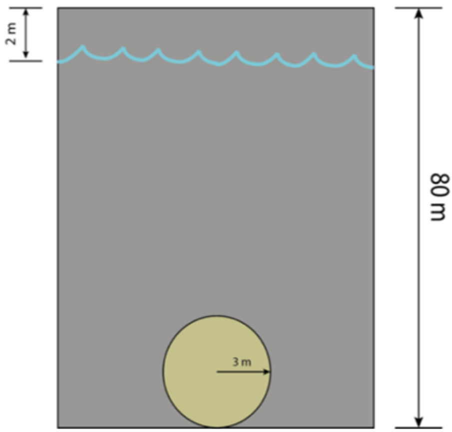
3. ¿A qué profundidad un buzo sumergido en agua de mar soporta una presión de 4 atm?

4. En la siguiente figura se observa un tanque que contiene tres diferentes líquidos no miscibles. Determinar la presión hidrostática en el fondo del tanque.



5. Determinar la altura que debe alcanzar un líquido en un recipiente para que el fondo experimente una presión igual a la presión ejercida por una columna de 0,18 m de mercurio. La densidad del líquido es 793 kg/m^3.

6. En una represa el muro que contiene el agua tiene una altura de 80 m, el agua está 2 m por debajo del borde del muro. En el fondo del muro existe una compuerta circular de 3 m de radio. Determine la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta.



PRENSA HIDRÁULICA

Una de las aplicaciones inmediatas del principio de Pascal es la prensa hidráulica, inventada por el inglés Joseph Bramah en 1975, la misma que consiste en dos cilindros intercomunicados llenos de un líquido, el uno tiene una sección s pequeña y el otro una sección S grande.

En la superficie del líquido se colocan unos pistones, si sobre el pistón de menor sección s se aplica una fuerza f, la presión en la superficie de contacto viene dada por la ecuación (1.10).

$$p = \frac{F}{S}$$

Como los pistones estarán a la misma altura las presiones en ambos lados será la misma.

$$p_S = p_s$$

Como:

$$p_s = \frac{f}{s} \qquad\qquad p_S = \frac{F}{S}$$

Igualando,

$$\frac{F}{S} = \frac{f}{s}$$

Esto nos indica que, si la relación entre las superficies S y s es muy grande, al aplicar una pequeña fuerza f obtendremos una fuerza F grande.

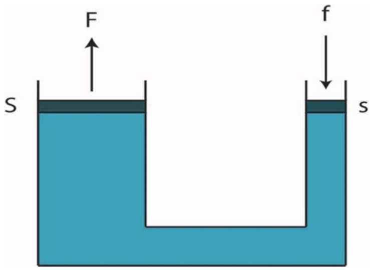
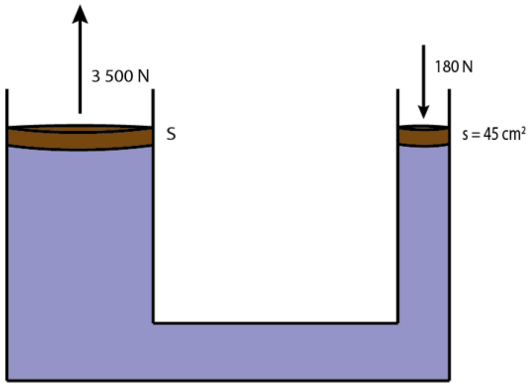


Figura 20. Prensa hidráulica

Ejercicio Modelo 2.4.1

Determinar el área que debe tener el pistón grande de una prensa hidráulica para obtener una fuerza de 3 500 N, si el pistón pequeño tiene un área de 45 cm^2 y en él se aplica una fuerza de 180 N.



De la ecuación (2.3) tenemos;

$$F = \frac{f\ S}{s}$$

Si despejamos S, que representa el área del pistón grande, obtenemos:

$$S = \frac{F\ s}{f}$$

Reemplazamos la ecuación con los valores que nos da el problema:

$$S = \frac{3\ 500\ N\ 0{,}0045\ m^2}{180\ N}$$

Finalmente,

$$S = 0{,}088\ m^2$$

Actividades 2.4.1

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Si se requiere levantar una máquina de 5 000 kg mediante una prensa hidráulica que tiene dos platos circulares de 60 y 10

cm de radio. Determinar la fuerza que se debe ejercer sobre el plato pequeño para levantar la máquina que es colocada sobre el plato grande.

2. Determinar la fuerza que se obtiene en el pistón grande de una prensa hidráulica si en el pequeño se aplica una fuerza de 15 N y el pistón grande tiene el triple del radio que el pistón pequeño.

3. Si los pistones de una prensa hidráulica tienen superficies de 10 y 80 cm^2 respectivamente, y se aplica una fuerza de 800 N en el pistón pequeño, y se tiene una carga de 8 000 N en el pistón grande. ¿Se elevará la carga? Justifica tu respuesta.

4. ¿Qué relación debe de existir entre las áreas de los pistones de una prensa hidráulica si aplicando una fuerza de 20 N en el pistón pequeño se eleva una carga de 200 N situada en el otro pistón?

TUBOS PIEZOMÉTRICOS Y MANÓMETROS

FLUIDOS MISCIBLES

La miscibilidad es un término utilizado en química para referirse a la propiedad que tienen algunos líquidos para poder mezclarse en cualquier cantidad, de modo que se forme una disolución (mezcla homogénea), por ejemplo, el agua y el alcohol etílico son dos líquidos miscibles puesto que pueden mezclarse entre ellos.

Ahora bien, consideremos un sistema tubo en U, que contiene dos líquidos miscibles de diferentes densidades, al mezclarse formarán una solución homogénea de una sola densidad ρ, como se muestra en la figura (2.8). Si llamamos A_1 y B_1 a dos puntos situados en la base del sistema, que se encuentran a la misma altura, y no existe ningún obstáculo entre ellos, por lo tanto, es fácil de concluir que la presión en los puntos será la misma, es decir:

$$p_{A_1} = p_{B_1}$$

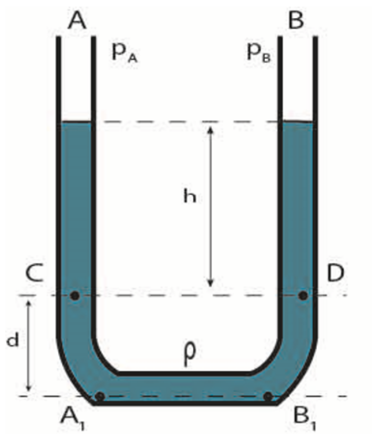


Figura 21. Presión en un tubo en U con fluidos miscibles

Sin embargo, podríamos dudar del valor de la presión en los puntos C y D, que también se encuentran a la misma altura, pero existe un obstáculo entre ellos. Los puntos C y D, están a una distancia d de los puntos A_1 y B_1, de acuerdo a la ecuación (2.2) podemos deducir la diferencia de presiones entre estos puntos:

$$p_C - p_{A_1} = -\rho g d \quad \text{y} \quad p_D - p_{B_1} = -\rho g d$$

Igualamos las dos expresiones,

$$p_C - p_{A_1} = p_D - p_{B_1}$$

Como:

$$P_{A_1} = p_{B_1}$$

Tenemos que:

$$p_C = p_D$$

FLUIDOS NO MISCIBLES

Se considera fluidos no miscibles a aquellos que no se pueden mezclar en cualquier cantidad, de modo que se forma una solución no homogénea, por ejemplo, el aceite y el agua.

Consideremos ahora un sistema tubo en U, con dos líquidos no miscibles de diferentes densidades, de manera que el líquido de la columna B tiene una densidad mayor que el líquido de la columna A, por lo que los líquidos no estarán nivelados.

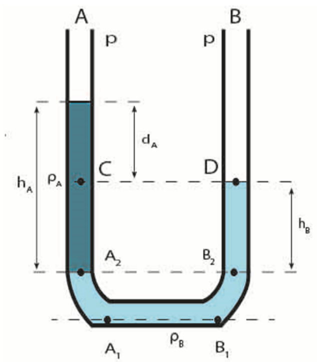


Figura 22. Presión en un Tubo en U con fluidos no miscibles

Sean C y D dos puntos que están a la misma altura, pero en diferentes líquidos, si las dos columnas del tubo están abiertas a la atmósfera, las presiones en ambos puntos serán.

$$p_C = p_{atm} + \rho_A g d_A \quad \text{y} \quad p_D = p_{atm}$$

Lo que evidencia que la presión en el punto C es mayor que en el punto D, es decir:

$$p_C > p_D$$

Lo que demuestra que en líquidos no miscibles las presiones en puntos ubicados a la misma altura son diferentes.

La figura (2.9) también nos ayuda a determinar la densidad de los dos fluidos. En este caso las presiones a lo largo del eje A_2B_2 son las mismas tanto en la columna A como en la columna B, debido a que están a la misma altura y son el mismo líquido. Podemos afirmar que:

$$p_{A_2} = p_{atm} + \rho_A g h_A$$

$$p_{B_2} = p_{atm} + \rho_B g h_B$$

Al igualar las ecuaciones anteriores obtenemos la densidad en función de las alturas de las diferentes columnas.

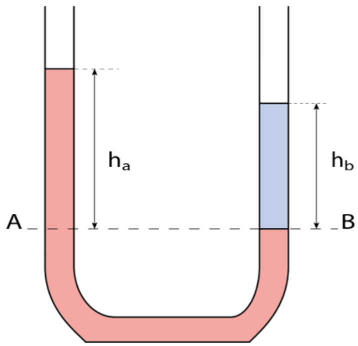
$$\rho_A g h_A = \rho_B g h_B \qquad (2.4)$$

Como $\gamma=\rho g$

$$\frac{\gamma_A}{\gamma_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{h_B}{h_A}$$

Ejercicio Modelo 2.5.1

Para determinar la densidad de un aceite especial, en un tubo que tiene forma de U se introduce agua coloreada. Seguido, se introduce un poco de aceite por el extremo A del tubo y se miden las alturas h_a y h_b con respecto a un eje de referencia. Exprese la densidad del aceite en función de la densidad del agua. Si la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3 y h_a y h_b valen 0,15 m y 0,10 m respectivamente, determinar la densidad de dicho aceite.



De acuerdo a la ecuación (2.4), sabemos que la presión a lo largo del eje AB es la misma, por lo que en ese nivel tenemos que:

$$p_{agua} = p_{aceite}$$

Es decir:

$$\rho_{agua} g h_b = \rho_{aceite} g h_a$$

Despejando, tenemos:

$$\rho_{aceite} = \rho_{agua} \frac{h_b}{h_a}$$

Reemplazando los valores nos queda.

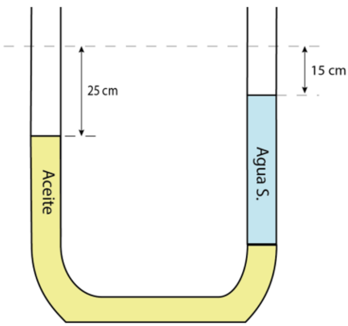
$$\rho_{aceite} = 1\ 000\ \frac{kg}{m^3}\frac{0{,}10\ m}{0{,}15\ m}$$

$$\rho_{aceite} = 666{,}66\ \frac{kg}{m^3}$$

Actividades 2.5.1

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Si se llena un tubo en forma de U con agua salada y un aceite especial, de modo que el agua quede a 15 cm de una línea de referencia y el aceite a 25 cm de la misma línea. Determinar la densidad del aceite.

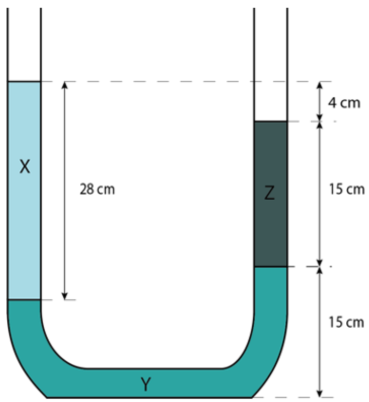


2. En un tubo que tiene forma de U se coloca agua y un líquido especial, los líquidos adquieren alturas de 60 cm y 85 cm respectivamente desde el centro del tubo. Determinar el peso específico del líquido especial.

3. En un tubo de forma U, se introduce cuidadosamente mercurio y agua de mar. Si el desnivel del mercurio es de 8 cm. Determinar la altura del agua de mar en el otro extremo del tubo.

4. Se tiene un tubo con forma de U en el que se introduce gasolina, inmediatamente se coloca un líquido que provoca un desnivel de 30 cm en la gasolina y 35 cm en el otro líquido. Determine el peso específico del líquido.

5. En la siguiente figura se muestra un tubo en U que contiene tres líquidos no miscibles, de densidades de X= 400 kg/m^3, y Z= 500 kg/m^3. Determine la densidad del líquido Y.



6. Una columna de agua de 50 cm de alto se equilibra con una columna de 37 cm de un líquido desconocido. Determinar la densidad del líquido desconocido.

MANÓMETROS

Un manómetro es un instrumento utilizado para medir la presión de fluidos que se encuentran en depósitos cerrados.

Figura 21. Manómetro Comercial

Consideremos un manómetro con el que se quiere medir la presión del recipiente A, tal como se muestra en la figura (2.11). Como a la altura de C y D hay un solo fluido, las presiones son las mismas, es decir:

$$p_C = p_D$$

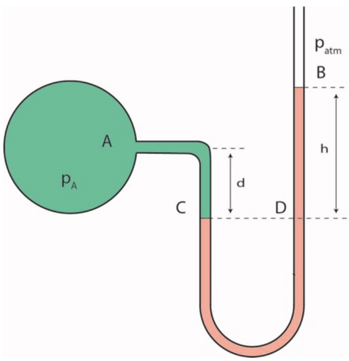


Figura 22. Manómetro normal

Ahora bien, como la presión en C está dada por:

$$p_C = p_A + \gamma_A d$$

Y la presión en D está dada por:

$$p_D = p_{atm} + \gamma_B h$$

Igualando las dos ecuaciones y despejando pA, tenemos:

$$p_A = p_{atm} + \gamma_B h - \gamma_A d \qquad (2.5)$$

Si la densidad del fluido B es mucho más denso que el fluido A, la ecuación anterior puede reducirse a:

$$p_A = p_{atm} + \gamma_B h$$

MANÓMETRO DIFERENCIAL

De la misma manera, se puede realizar el mismo razonamiento para el caso de un manómetro diferencial, tal como se muestra en la figura 23 .

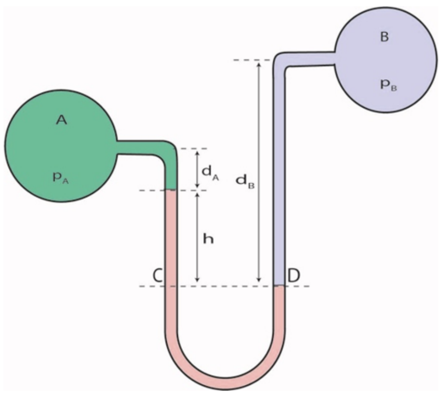


Figura 23. Manómetro Diferencial

Las presiones en C y D al ser el mismo fluido son las mismas.

$$p_C = p_A + \rho_A g d_A + \rho_c g h$$

$$p_D = p_B + \rho_B g d_B$$

Lo que da una diferencia de presiones entre A y B.

$$p_A - p_B = \rho g h + \rho_A g d_A - \rho_B g d_B$$

Siendo en el caso cuando $\gamma \gg \gamma_A \gamma_B$, tenemos:

$$p_A - p_B = \rho g h$$

BARÓMETROS

Es un instrumento para sirve para medir la presión atmosférica, fue inventado por el físico y matemático de nacionalidad italiana Evangelista Torricelli en el año de 1643.

Según la ecuación (2.2) la diferencia de presiones entre dos puntos es igual a:

$$p_2 - p_1 = \rho g h$$

El líquido comúnmente utilizado para fabricar los barómetros es el mercurio Hg, debido a que su presión de vapor es muy baja, conservando la condición p_1=0. La presión que alcanza la columna de mercurio a la presión atmosférica es de 760 mm, es decir:

$$760\ mmHg = 1\ atm$$

Como;

$$1\ atm = \rho_{Hg} g h$$

Reemplazando los valores de densidad, gravedad y altura;

$$1\ atm = 13\ 600\frac{kg}{m^3}\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ 0{,}760\ m$$

Resolviendo, tenemos:

$$1\ atm = 101\ 325\ \frac{N}{m^2} = 101\ 325\ Pa$$

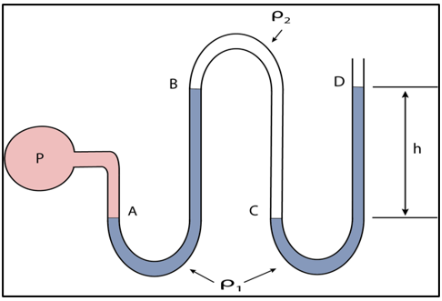
Lo que corresponde a la presión media de la atmósfera sobre el nivel del mar.

Luego de que Torricelli inventara el barómetro, expresó:

> *"Vivimos en el fondo de un océano del elemento aire, el cual, mediante una experiencia incuestionable, se demuestra que tiene peso"*

Ejercicio Modelo 2.6.1

Determinar la presión del gas que se encuentra en el siguiente manómetro.



Determinamos las presiones en cada punto, comenzamos por el punto D. Debido a que se encuentra abierto hacia el exterior, tenemos:

$$p_D = p_{atm}$$

Presión en el punto C.

$$p_C = p_{atm} + \rho_1 g h$$

Presión en el punto B.

$$p_B = p_C - \rho_2 g h = p_{atm} + \rho_1 g h - \rho_2 g h$$

Resolviendo

$$p_B = p_{atm} + (\rho_1 - \rho_2) g h$$

Presión en el punto A.

$$p_A = p_B + \rho_1 g h = p_{atm} + (\rho_1 - \rho_2) g h + \rho_1 g h$$

Resolviendo

$$p_A = p_{atm} + (\rho_1 + \rho_1 - \rho_2) g h = p_{atm} + (2\rho_1 - \rho_2) g h$$

Como

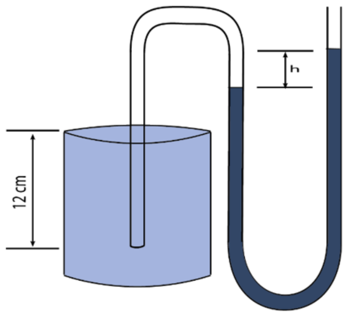
$$p = p_A$$

Tenemos que;

$$p = p_{atm} + (2\rho_1 - \rho_2) g h$$

Ejercicio Modelo 2.6.2

Si un extremo de un manómetro de mercurio se introduce 12 cm en un líquido, se puede observar que se produce un desnivel de 7 mm en el mercurio. Determinar la densidad del líquido.



La presión que marca el manómetro será,

$$P = \rho g h = 13\,600\ \frac{kg}{m^3}\ 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ 0{,}007\ m$$

$$P = 932{,}96\ Pa$$

El resultado anterior representa la presión que ejerce el líquido a 12 cm de profundidad.

Para calcular la densidad utilizamos la ecuación (2.2).

$$\rho = \frac{P}{g\,h} = \frac{932{,}96\ Pa}{9{,}8\ \frac{m}{s^2}\ 0{,}12\ m}$$

$$\rho = 793{,}33\ \frac{kg}{m^3}$$

Actividades 2.6.1

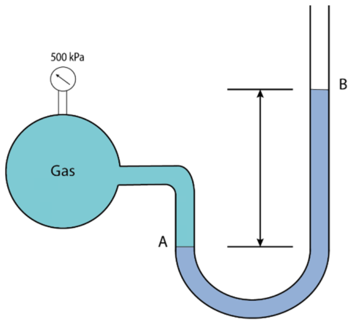
Resuelva los siguientes ejercicios:

1. ¿Por qué cree que Torricelli utilizó mercurio en sus experimentos en vez de agua? ¿Qué altura debería alcanzar la columna de agua en caso de utilizarla?

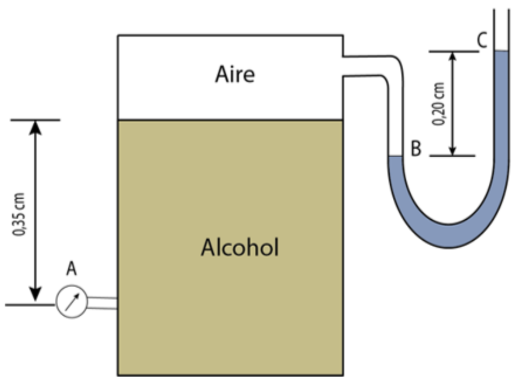
2. Determinar la presión que experimenta una persona que se encuentra en un globo aerostático a una altura de 650 m. Considere constante la densidad del aire igual 1,2 kg/m^3. Exprese el resultado en atm y mmHg.

3. En la siguiente figura, un medidor conectado a un manómetro marca 500 kPa. Determinar la distancia entre los niveles A y B

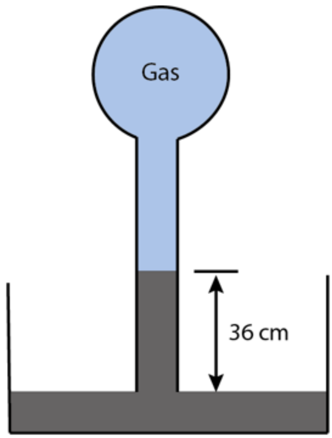
del fluido del manómetro. a) Si el fluido es mercurio y b) Si el fluido es agua salada.



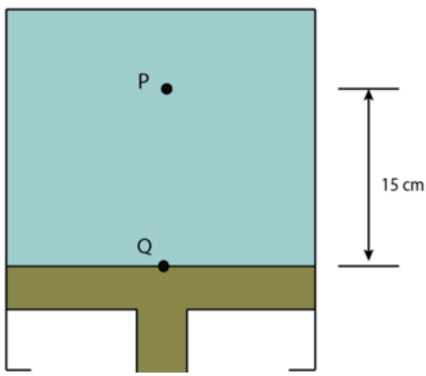
4. Un recipiente cerrado contiene alcohol industrial. Determine el valor que marcará el manómetro A. El líquido que se encuentra en el tubo en U es agua salada.



5. El Barómetro de la siguiente figura contiene mercurio hasta una altura de 36 cm. Determine la presión que ejerce el gas sobre la columna de mercurio.



6. En la siguiente figura, se observa un cilindro de 25 cm de radio. La tapa del cilindro tiene una masa de 320 kg, la densidad del líquido en el cilindro es de 980 kg/m^3 y la presión atmosférica de 100 kPa. Determinar las presiones absolutas en los puntos P y Q.



PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

Cuando se sumerge un cuerpo total o parcialmente en un fluido estático, se ve afectado por una fuerza vertical que actúa hacia arriba, debido a que la presión en el fondo del fluido es mayor que en la parte superior. Uno de los grandes físicos griegos, llamado Arquímedes de Siracusa que vivió entre los años 287 y 212 a. C. fue el que logró explicar correctamente este fenómeno que ahora tiene su nombre. "Principio de Arquímedes".

Supongamos que en el interior de un fluido tenemos una pequeña porción del mismo de masa m_f y volumen V, tal como se observa en la figura 24. Como la pequeña porción del fluido está en reposo, quiere decir que el peso de P_f de la porción estará compensado con otra fuerza a la que denominaremos empuje, E, lo que quiere decir que al estar en reposo la resultante de las fuerzas es:

$$E - p_f = 0$$

$$E = p_f = m_f g$$

Si ρ_f es la densidad del fluido, tenemos:

$$E = \rho_f V g \qquad (2.6)$$

Consideremos ahora, que reemplazamos la porción de fluido por un cuerpo sólido que tiene la misma forma y tamaño con masa mc tal como se observa en la figura 24. El empuje que experimentará dicho cuerpo sigue siendo el expresado por la ecuación anterior (2.6).

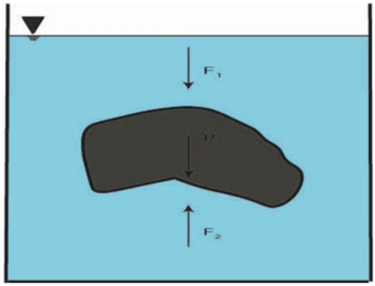


Figura 24. Empuje sobre un cuerpo sumergido en un fluido

No obstante, hay que considerar que lo que si variará es la densidad del sólido, y por ende su peso, es decir:

$$\vec{p}_c = m_c g = \rho_c V g$$

$$\vec{E} - \vec{p}_c = (\rho_f - \rho_c) V \vec{g}$$

La expresión anterior indica que, si la densidad del sólido es superior al del fluido, es decir $\rho_c > \rho_f$, el cuerpo se hunde, en cambio si sucede lo contrario, es decir, $\rho_c < \rho_f$ el cuerpo flota.

De lo analizado anteriormente podemos afirmar que el principio de Arquímedes expresa que:

> *Todo cuerpo que se sumerge total o parcialmente dentro de un fluido estático se verá afectado por una fuerza vertical y hacia arriba (empuje), de la misma magnitud que el peso del volumen del fluido desalojado.*

CENTRO DE EMPUJE

El centro de empuje es el punto de aplicación de la fuerza de empuje, se encuentra en el centro de masa de la porción del fluido desalojado. En casos sencillos supondremos que el cuerpo y el fluido son homogéneos, de modo que cuando el cuerpo este sumergido completamente, coincidirán el centro de masa y el centro de empuje.

EQUILIBRIO DE CUERPOS FLOTANTES SUMERGIDOS

Cuando se estudian los cuerpos flotantes, no sólo es necesario saber la magnitud de la fuerza empuje sino también cómo actúa en el cuerpo. Es importante comprender la capacidad que tienen los cuerpos flotantes para recobrar el equilibrio después de que se aplicara una fuerza para sacarlo de ese estado.

Sabemos que un cuerpo sumergido está en reposo cuando el peso del cuerpo tiene la misma magnitud que la fuerza empuje, pues ambas fuerzas son verticales y actúan sobre el mismo eje. La fuerza de Empuje actuará sobre el centro de empuje y el peso actuará en el centro de masa.

Se consideran dos tipos de estabilidades de cuerpos flotantes:

Estabilidad lineal: Cuando se desplaza verticalmente al cuerpo ya sea hacia arriba o hacia abajo, se originan fuerzas restauradoras que llevan al cuerpo a su posición inicial, debido a que cambia el volumen del fluido desalojado. En este caso el centro de masa y el centro de empuje permanecen en el mismo eje.

Estabilidad rotacional: Cuando se aplica un pequeño giro al cuerpo, el centro de masa y el centro de empuje no permanecen en el mismo eje generando la aparición de un par de fuerzas recuperadoras. En la figura 25 se observan diversas situaciones de equilibrio. En este caso, existen diferentes tipos de equilibrio de acuerdo a la posición del centro de masa y el centro de empuje.

a. **Equilibrio Estable:** Cuando el cuerpo sumergido tiene mayor densidad en la parte inferior del mismo, de manera que el centro de masa se ubica debajo del centro de empuje. En este caso las fuerzas recuperadoras vuelven al cuerpo a su posición inicial. Tal como se observa en la figura 25a.

b. **Equilibrio Inestable:** Cuando el cuerpo sumergido tiene mayor densidad en la parte superior del mismo, de manera que el centro de masa está se ubica por encima del centro de empuje. En este caso el par de fuerzas tiende a aumentar el giro provocando que se voltee completamente el cuerpo. Tal como se muestra en la figura 25b.

c. **Equilibrio Indiferente:** Cuando se tiene cuerpos con una densidad homogénea, el centro de masa coincide con el centro de empuje, provocando que no se generen par de fuerzas recuperadoras a pesar de desplazar angularmente al cuerpo. Tal como se puede observar en la figura 25c.

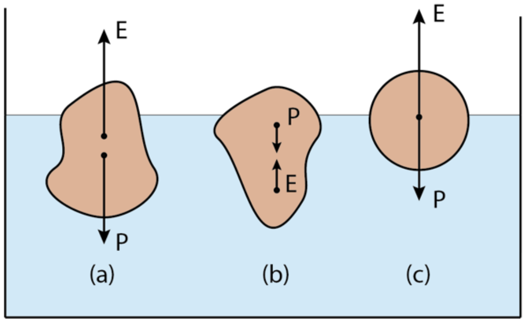


Figura 25. Tipos de equilibrio de cuerpos sumergidos

EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS PARCIALMENTE SUMERGIDOS

Analicemos el caso de un barco que está sumergido parcialmente en agua, su peso w es el mismo que el del líquido desalojado por la parte sumergida.

En la figura 26a. se tiene el barco en equilibrio con algunos elementos, denominemos al plano F-F que corta al barco de forma horizontal como el plano de equilibrio, de modo que coincida con la superficie libre del agua. Llamaremos también al eje E-E como eje de equilibrio, el mismo que pasa por el centro de masa del barco y que es perpendicular al plano de equilibrio.

Se suponen tres puntos que están ubicados en el eje de equilibrio E-E, los mismos que están representados de la siguiente manera;

G: Centro de masa del barco.

O: Centro de masa del líquido desalojado.

M: Metacentro es el punto donde se cruzan el plano de equilibrio con la fuerza de empuje F_A cuando el barco tiene una pequeña desviación.

En la figura 26 se puede ver al barco en equilibrio y los puntos mencionados anteriormente sobre el eje E-E.

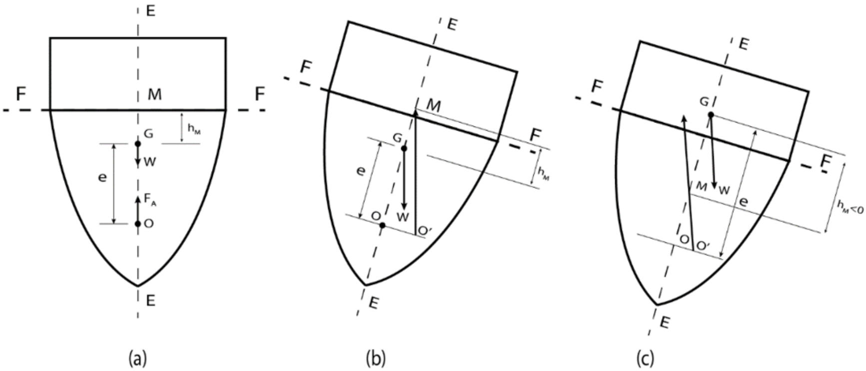


Figura 26. Equilibrio de un barco sumergido parcialmente, (b) equilibrio estable y (c) equilibrio inestable

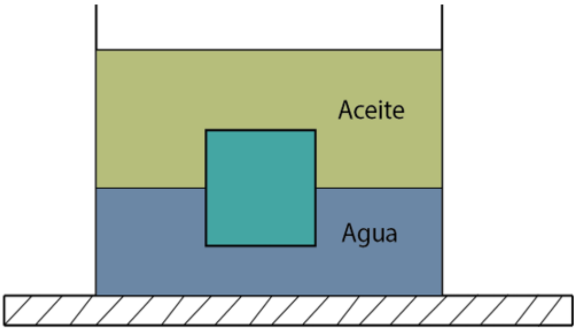
Ahora, si el Metacentro se encuentra ubicado por encima del centro de masa del barco y si se produce una inclinación cualquiera, las fuerzas w y F_A generan torques que ayudan a recobrar la posición inicial. A esto se lo conoce como equilibrio estable. Como se puede observar en la figura 26b.

En cambio, si el Metacentro se encuentra por debajo del centro de masa del barco y si se produce una inclinación cualquiera, las fuerzas w y F_A generan torques que tienden a incrementar la inclinación, lo que provocaría que se vire el barco. A esto se lo conoce como equilibrio inestable. Tal como se muestra en figura 26c.

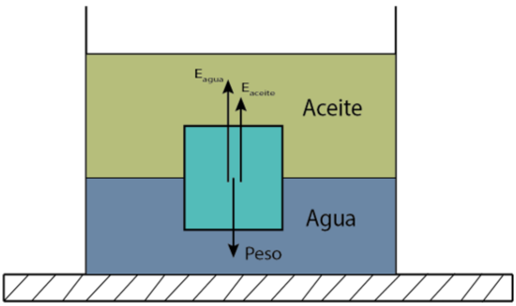
Finalmente, si el Metacentro coincide con el centro de masa del barco, el equilibrio es indiferente, de acuerdo a la figura 25c.

Ejercicio Modelo 2.7.1

Un cubo está sumergido entre agua y aceite, tal como se muestra en la siguiente figura. Determine la densidad del cubo para que quede exactamente la mitad entre ambos líquidos:



El cubo experimenta tres fuerzas; su peso, el empuje que ejerce el agua y el empuje que ejerce el aceite, es decir:



Como el cubo está en equilibrio, tenemos que:

$$w = E_{agua} + E_{aceite}$$

El peso del cubo es igual a:

$$w = \rho\, V g$$

El empuje que ejerce el agua es debido a la parte del cubo que está sumergida en el agua.

$$E_{agua} = \rho_{agua}\, V_{sumergido\ en\ agua}\; g$$

Reemplazando en la primera ecuación, tenemos:

$$\rho\, V g = \rho_{agua}\, V_{sumergido\ en\ agua}\; g + \rho_{aceite}\, V_{sumergido\ en\ aceite}\; g$$

Como el volumen sumergido en el agua y el aceite es el mismo y es la mitad del volumen total del cubo, podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\rho\, V g = \rho_{agua}\, {}^{V}\!/_{2}\; g + \rho_{aceite}\, {}^{V}\!/_{2}\; g$$

Simplificando V y g:

$$\rho = {}^{\rho_{agua}}\!/_{2} + {}^{\rho_{aceite}}\!/_{2}$$

Reemplazando los valores de densidad:

$$\rho = \frac{1\,000\ \mathrm{kg}/m^3}{2} + \frac{920\ \mathrm{kg}/m^3}{2}$$

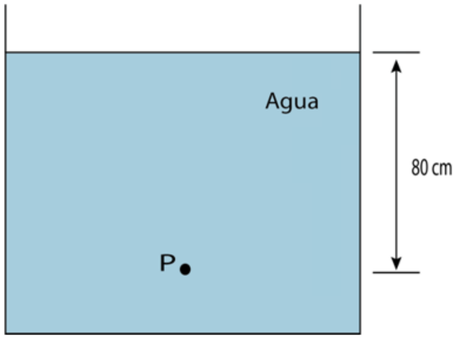
Es decir:

$$\rho = 960\ \mathrm{kg}/m^3$$

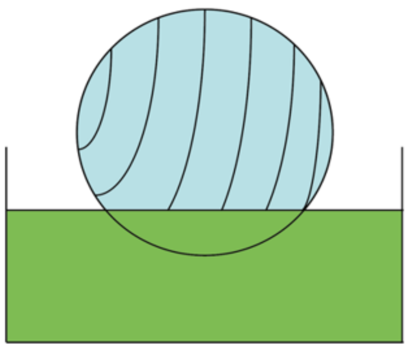
Actividades 2.7.1

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Determinar el tiempo necesario para que un cuerpo que tiene una de masa 2 kg, y una densidad 500 kg/m^3 suba hasta la superficie si es soltado en el punto P. Tal como se muestra en la siguiente figura.



2. Una pelota de niño (Plástico especial) de 12 cm de radio, se coloca sobre alcohol. El balón se hunde un 35% de su volumen total, como se muestra en la siguiente figura. Determinar la fuerza que se debe aplicar al balón para sumergirlo completamente.



3. Un congelador puede producir piezas de hielo en forma esférica y cúbica de igual masa. Si en un vaso de agua se coloca una esfera y un cubo de hielo. ¿Cuál de los dos alcanzará una mayor

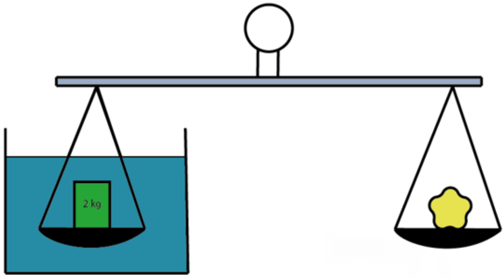
profundidad bajo la superficie? Explique.

4. Una pompa de aire tiene una temperatura de 25 °C y sube a través de un aire frío que tiene una temperatura de 10 °C. Si no se considera la resistencia del aire. Determinar la aceleración con la que sube la pompa.

5. Hace mucho tiempo atrás, el rey de Siracusa, Hierón, entregó a un joyero una cierta cantidad de oro para que fabrique una corona, para ofrecer en gratitud a los Dioses. Después de cierto tiempo el joyero entregó la corona al rey con la misma masa que el oro entregado, sin embargo; llegó a oídos del rey que la corona no estaba hecha con todo el oro. Así que el rey solicitó a Arquímedes determinar si la corona era completamente de oro, pero con la condición de que no debía dañar la corona. Ayude a Arquímedes a determinar si la corona está adulterada.

6. Se tiene un prisma de base cuadrada de 1 m de lado, el mismo que ha sido perforado coaxialmente, obteniéndose un orificio cilíndrico en su interior de 38 cm de radio. Si el prisma es capaz de flotar, con una de las caras laterales paralelas al agua y a una profundidad de 28 cm. Determinar la densidad del material con la que está construido el prisma.

7. Determinar la masa de una piedra que se encuentra en la siguiente figura, si se equilibra en agua con un bloque de oro de 2 kg.



VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA ALTURA DE UN FLUIDO ESTÁTICO COMPRESIBLE

En los problemas estudiados en el tema anterior sobre manometría, las distancias verticales consideradas eran pequeñas, por lo que se despreció la variación de la presión con la altura. Sin embargo, cuando se considere longitudes verticales de gran tamaño como cuando se estudian atmósferas de los planetas, no hay que despreciarse la variación de la presión del fluido con la altura.

En uno de los temas anteriores hemos concluido que la variación de la presión con la profundidad está determinada por la ecuación (2.2), se consideró el caso de un fluido es incompresible, es decir, γ y ρ no cambian con la presión.

Supongamos, ahora el caso en el que el fluido es compresible, para ser más específicos consideremos un gas real que tiene un comportamiento similar al de un gas ideal. Por ejemplo, el aire que bajo condiciones normales de presión y temperatura puede considerarse como un gas ideal.

Como habíamos visto en el capítulo 1, la densidad de un gas ideal depende de la temperatura y de la presión, de acuerdo a la siguiente ecuación (1.3).

$$\rho(p,T) = \frac{Mp}{RT}$$

Reemplazando en la ecuación (2.2) podemos obtener la variación infinitesimal de la presión con la altura:

$$dp = -\rho g dz = -\rho(p,T) g dz = -\frac{Mp}{RT} g dz$$

Es decir:

$$dp = -\frac{Mp}{RT} g dz \qquad (2.7)$$

Si agrupamos las variables, e integrando tenemos:

$$\int \frac{dp}{p} = \int -\frac{M}{RT} g dz$$

Resolviendo la ecuación anterior:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{R} \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{T} \qquad (2.8)$$

En general T depende de z, por lo que para determinar la variación de la presión con la altura se requiere primero conocer la función T (z).

ATMÓSFERA ISOTERMA

Supongamos la situación más sencilla, en el que tenemos una atmósfera isoterma donde $T=T_o$ = constante.

En este caso, resolviendo la ecuación (2.8) nos queda.

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{R}\frac{z - z_0}{T_0}$$

Donde la función p para pequeñas alturas es:

$$p = p_0 e^{\left[-\frac{Mg}{RT_0}(z-z_0)\right]} \qquad (2.9)$$

Utilizando la ecuación (1.3) en la ecuación anterior, obtenemos la siguiente expresión:

$$p = p_0 e^{\left[-\frac{\gamma_0}{p_0}(z-z_0)\right]} \qquad (2.10)$$

La ecuación (2.10) nos permite determinar la presión en un punto en función de la altura.

LA TEMPERATURA VARÍA LINEALMENTE CON LA ALTURA

Como es de nuestro conocimiento, a grandes alturas la temperatura de la atmósfera disminuye linealmente, aproximadamente hasta 11 000 m. Esta variación se expresa de la siguiente forma:

$$T = T_0 + Kdz \qquad (2.11)$$

En la ecuación (2.11) T_0 representa la temperatura en un punto de referencia, es decir, cuando $z = 0$. La constante K es la tasa de cambio y para problemas terrestres K se considera negativo.

Sabemos que:

$$\gamma = \frac{Mpg}{RT} \qquad (2.12)$$

Y que:

$$dz = \frac{dT}{K} \tag{2.13}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.7), tenemos:

$$-\frac{pg}{RT} = \frac{dp}{dT/K}$$

Separando variables:

$$-\frac{g\,dT}{KRT} = \frac{dp}{p}$$

Integrando obtenemos:

$$\int \frac{dp}{p} = \int -\frac{g\,dT}{KRT}$$

Resolviendo:

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{g}{KR}\ln\frac{T_0}{T}$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = \ln\frac{T_0{}^{\frac{g}{KR}}}{T}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T_0{}^{\frac{g}{KR}}}{T}$$

Despejando p y reemplazando T por la ecuación (2.11)

$$p = p_0\left(\frac{T_0}{T_0 + Kz}\right)^{\frac{g}{KR}} \tag{2.14}$$

Ejercicio modelo 2.8.1

Suponga que existe un planeta donde la atmósfera posee una temperatura de 10 °C al nivel del mar y disminuye 2 °C cada 400 m de altura que se suba. La constante R del gas de esta atmósfera tiene un valor de 150 Nm/kgK. Determinar a qué altura la presión será el 25% de la que existe sobre el nivel del mar. Considere que la gravedad en ese planeta es de 10 m/s^2.

De acuerdo a la ecuación (2.14).

$$p = p_0 \left(\frac{T_0}{T_0 + Kz}\right)^{\frac{g}{KR}}$$

Del problema sabemos qué;

$$p = p_0\ 25\% = 0{,}25\ p_0$$

Es decir;

$$\frac{p}{p_0} = 0{,}25$$

Sabemos que;

$$T_0 = 10\ °\mathrm{C} = 283{,}15\ \mathrm{K}$$

$$R = 150\ \frac{\mathrm{N\ m}}{\mathrm{kg\ K}}$$

De acuerdo a la ecuación

$$T = T_0 + Kz$$

$$K = \frac{T - T_0}{z} = \frac{281{,}15 - 283{,}15}{400}$$

$$K = -\frac{2}{400}$$

$$g = 10\ \frac{m}{s^2}$$

Reemplazando en la ecuación original

$$p = p_0\left(\frac{T_0}{T_0 + Kz}\right)^{\frac{g}{KR}}$$

$$0{,}25 = \left(\frac{283{,}15}{283{,}15 + \left(-\frac{2}{400}z\right)}\right)^{\frac{10}{-\frac{2}{400}150}}$$

Despejando z tenemos;

$$z = 5\,592{,}18\ m$$

Actividades 2.8.1

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Determinar a qué altura se obtiene una presión igual a 0,8 veces la presión que existe a nivel del mar, si es una atmósfera estándar.
2. Una atmósfera posee una temperatura de 30 °C al nivel del mar y disminuye 0,3 °C por cada 100 m de altura. La constante R del gas es de 180 Nm/kgK. Determine la altura donde la presión es la tercera parte de la que existe sobre el nivel del mar.
3. Suponga un avión que está localizado a 1200 m sobre el nivel del mar, por seguridad de los pasajeros el avión debe

conservar la presión de la cabina en un 75 % de la presión atmosférica que existe en al nivel del mar. Los fabricantes de aviones recomiendan que la relación entre la presión exterior y la interior debe ser mayor que 50E-2. Determinar la altura máxima a la que debe volar el avión.

DINÁMICA DE FLUIDOS-HIDRODINÁMICA

Capítulo 3

DINÁMICA DE FLUIDOS-HIDRODINÁMICA

Si consideramos un elemento de fluido en movimiento, en un punto se deben definir cantidades escalares como; la presión, densidad, temperatura, etc. Y cantidades vectoriales, como; la velocidad, la aceleración, fuerza, etc. Estas características de un fluido pueden cambiar de un punto a otro o pueden cambiar en el mismo punto, pero durante un intervalo de tiempo.

La región ocupada por el fluido en movimiento se lo conoce como un campo de flujo, en el que se pueden distinguir campos escalares y vectoriales. La dinámica de fluidos estudia a estos campos de flujo.

VOLÚMENES DE CONTROL

Comencemos considerando una cantidad de materia a la que llamaremos un sistema, el mismo que es capaz de cambiar su forma, posición y su condición térmica, sin embargo, siempre la cantidad de materia será constante, de modo que se mantendrá su identidad, a esta ley básica es la "Conservación de la masa". Por ejemplo; consideremos un sistema al aire que se encuentra dentro de un pistón cerrado, como se observa en la figura 27.

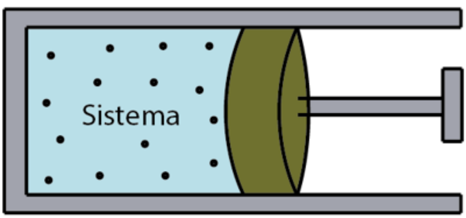


Figura 27. Un sistema

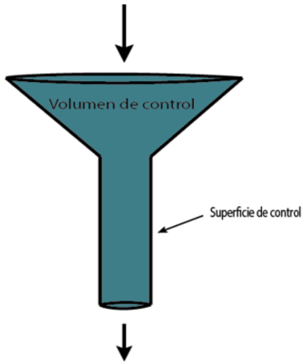


Figura 28. Volumen de control

El principio de la conservación de la masa establece que la masa que se encuentra dentro de un sistema no cambia en el tiempo, siendo m la masa total, es decir.

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

El concepto de volumen de control se utiliza en la deducción de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimientos y energía, así como en la solución de varios problemas de la mecánica de fluidos.

TIPOS DE FLUJO

Como se dijo anteriormente, el movimiento de un fluido recibe el nombre de “flujo”, al mismo que se lo puede clasificar de diferentes maneras; Turbulento, laminar, real, ideal, reversible, permanente, uniforme, etc.

Flujo Turbulento: En este tipo de flujo las moléculas del fluido recorren trayectorias irregulares, provocando un cambio en la cantidad de movimiento de un elemento de fluido a otro.

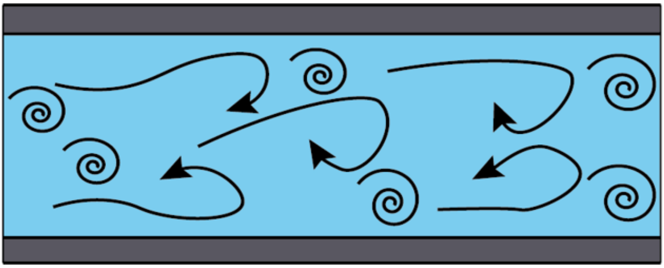


Figura 29. Flujo Turbulento

Flujo Laminar: En este flujo las moléculas se desplazan a lo largo de trayectorias paralelas, sin que puedan cruzarse denominadas líneas de corriente. En este flujo se cumple la Ley de Newton de la viscosidad. La viscosidad frena la tendencia a la turbulencia del fluido. Si la viscosidad es pequeña, el flujo laminar es estable.

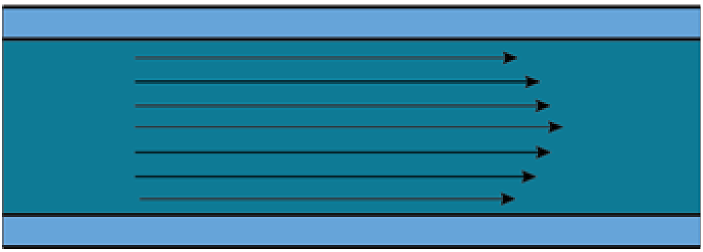


Figura 30. Flujo Laminar

Flujo ideal: Es un flujo de fluido que no tiene rozamiento e incompresibilidad. Lo que quiere decir que no tiene viscosidad.

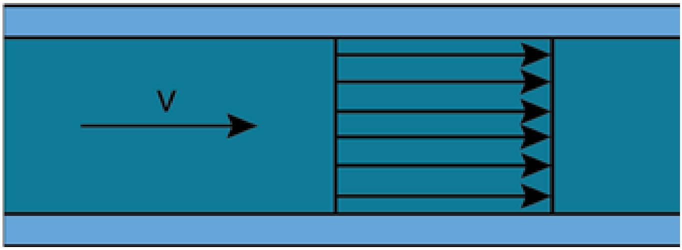


Figura 30. Flujo Ideal

Flujo estacionario y no estacionario: Un flujo se considera estacionario cuando su velocidad y la densidad en un punto no varían con el tiempo, y se considera no estacionario cuando si varían. Es preciso indicar que esto no quiere decir que la velocidad y la densidad sean constantes, sino que sólo en un punto no varían con el tiempo.

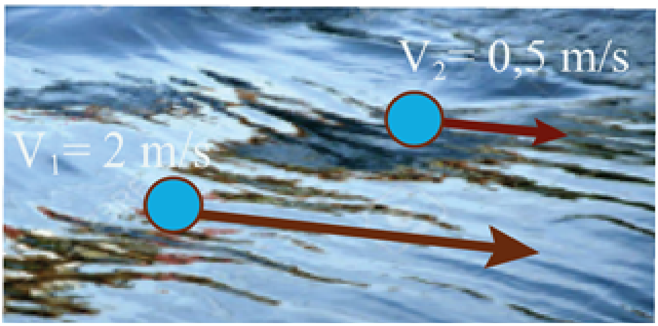


Figura 31. Flujo no estacionario

Flujo irrotacional y rotacional: Un flujo se considera irrotacional cuando una porción del fluido no presenta una velocidad angular alrededor de un punto dado y se considera rotacional cuando si lo presente. Por ejemplo, un fluido que atraviesa una tubería recta de sección constante puede considerarse como flujo irrotacional, en cambio los remolinos que se ven en un río pueden considerarse flujos rotacionales.

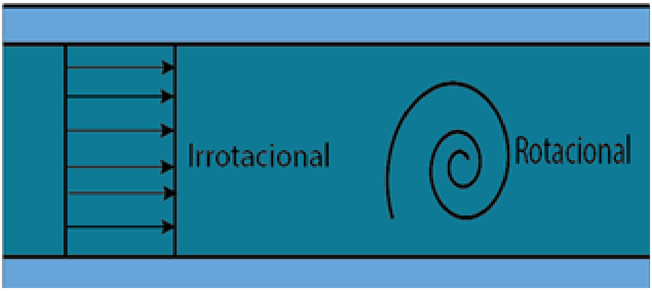


Figura 32. Flujo Irrotacional y Rotacional

Flujo compresible e incompresible: Se considera a un flujo compresible cuando su densidad cambia, por ejemplo, el flujo de gases, mientras que el flujo es incompresible si esto no ocurre o varía muy poco como sucede con el flujo de líquidos.

Flujo viscoso y no viscoso: Un fluido se considera viscoso si presentan considerables fuerzas de rozamiento, como consecuencia de ello existe una disipación de energía mecánica. Un fluido se considera no viscoso cuando la acción de las fuerzas de rozamiento es pequeña que se puede despreciar.

Flujo uniforme: Un flujo uniforme tiene la característica que su velocidad de un punto a otro no cambia, es decir;

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad \textbf{r} \text{ es el vector posición.}$$

En cambio, si el flujo es no uniforme la velocidad si cambia de un punto a otro, es decir:

$$\frac{\partial v}{\partial s} \neq 0$$

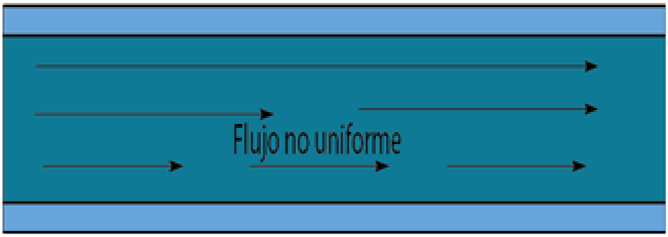


Figura 33. Flujo Uniforme y no Uniforme

Flujo Permanente: En un flujo permanente la velocidad no cambia con el tiempo, es decir:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

En cambio, si la velocidad cambia con el tiempo el flujo no es permanente o no estacionario.

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$$

LÍNEAS DE FLUJO

Para describir el movimiento de un fluido, necesitamos definir una serie de líneas, como la senda, traza, línea de corriente o línea flujo:

Senda o trayectoria: Una senda es el camino que sigue una molécula del fluido. Una senda solo se específica para una molécula durante un intervalo de tiempo. Para obtener una senda integramos el campo de velocidades obteniendo así las ecuaciones paramétricas *(x(t),y(t),z(t))*.

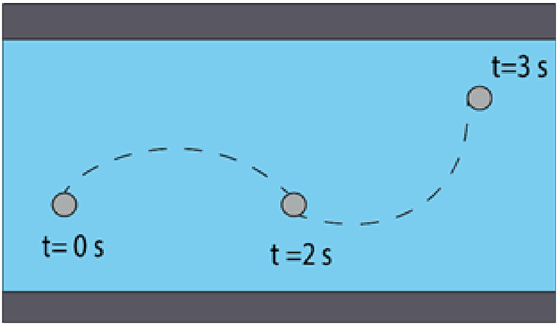


Figura 34. Trayectoria de una partícula de flujo

Línea Traza: Una línea traza es el lugar geométrico de todas las moléculas que en instantes continuos atravesaron un punto determinado. Si queremos obtener su ecuación de manera matemática, primeramente, se requiere desarrollar las integraciones y obtener las constantes de integración que corresponden a las sendas de las moléculas que en instantes t_t anteriores al tiempo t atravesaron por un punto de referencia (x_0, y_0, z_0). Se reemplazan los valores en las ecuaciones paramétricas de la senda y se obtiene las sendas para cada molécula y si se elimina tt se tiene la ecuación de la traza.

Líneas de corriente o líneas de flujo: Son líneas que en cada instante de tiempo t determinado son tangentes a la vector velocidad en un punto dado. Por ejemplo, una molécula que se encuentra en régimen estacionario prosigue por el camino establecido por las líneas de corriente.

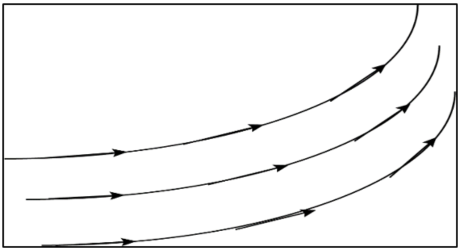


Figura 35. Líneas de Corriente

Si la velocidad es tangente en cada punto a la línea de corriente, podemos establecer que:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0 \tag{3.1}$$

Como $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, tenemos que:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dr}{v} \tag{3.2}$$

Si v_x, v_y, v_z están en función de la posición y el tiempo, son integrables de modo que pueda obtenerse la ecuación de la línea de corriente que atraviesa un punto cualquiera en un instante de tiempo t.

Tubo de corriente: Se lo define como el espacio que es limitado por las líneas de corriente que atraviesan un contorno de una superficie, ubicada en el interior del fluido.

En un fluido ideal las líneas de corriente no se cruzan y todos los puntos de una pequeña sección transversal se mueven con la misma velocidad.

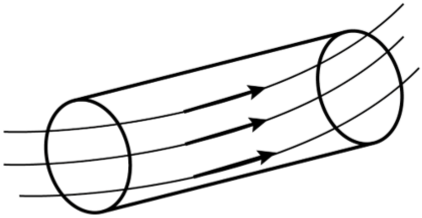


Figura 36. Tubos de Corriente

Actividades 3.3.1

Responda las siguientes preguntas.

1. A qué se conoce como trayectoria?

   ………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………

2. Una partícula que se encuentra en régimen estacionario prosigue la trayectoria establecida por?

   ………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………

3. ¿Qué es un tubo de corriente?

   ………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………

4. ¿Cuándo un flujo es estacionario?

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

…………………………………………………………………

5. ¿Cuándo un flujo es incompresible?

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

…………………………………………………………………

6. Las componentes de la velocidad de un fluido son:

$$v_x = 3 \qquad v_y = 3t \quad m/s$$

Determine la ecuación de la línea de corriente en el tiempo $t = 1$ s.

DEFINICIÓN DE CAUDAL O FLUJO VOLUMÉTRICO

Para determinar el ritmo a que fluye la masa de un fluido que atraviesa una superficie cualquiera *dS* a su paso, en la figura 37considere un paralelepípedo de sección transversal *dS*, por el que atraviesa un flujo de fluido con una velocidad constante. En un tiempo *dt*, el volumen de fluido que atraviesa a la sección *dS* es el volumen del paralelepípedo.

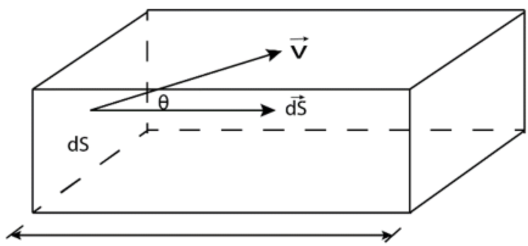


Figura 37. Paralelepípedo de sección transversal

Es decir:

$$dV = v\,dt\,dS\cos\theta$$

Definimos el caudal como:

$$\frac{dV}{dt} = Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Si la v es la velocidad media constante y perpendicular a toda la superficie, nos queda:

$$Q = v\,S \tag{3.3}$$

De acuerdo a la ecuación anterior podemos definir al caudal o gasto como:

> *La cantidad de fluido por unidad de tiempo que atraviesa de una sección transversal a la corriente. (Mataix, 1993)*

Siendo la velocidad media:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}}{S} \tag{3.4}$$

Por ejemplo, si la aplicamos a una tubería de radio r, la ecuación anterior se reduce a;

$$v = \frac{Q}{\pi r^2} \tag{3.5}$$

Que es la velocidad media en una tubería.

Si al flujo volumétrico se lo multiplica por la densidad del fluido, obtenemos el flujo másico, es decir:

$$dm = \rho\,dV = \rho\,v\,dt\,dS\cos\theta = \rho\,dt\,\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Es decir:

$$d\Phi = \frac{dm}{dt} = \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Integrando, tenemos el flujo másico total.

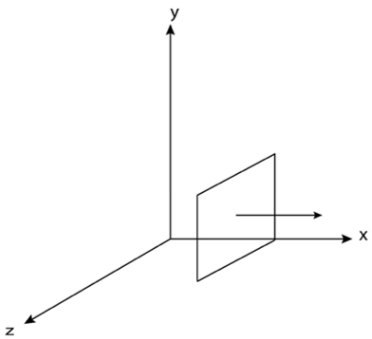
$$\Phi = \int_S \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Si la densidad es constante, tenemos.

$$\Phi = \rho\, Q \qquad (3.6)$$

Ejercicio modelo 3.4.1

Si un campo de velocidades está dado por $\vec{v} = 3\,x^2\,\vec{i} - xy\,\vec{j} - 2xz\,\vec{k}$ m/s determinar el caudal que pasa por un cuadrado cuyos vértices son los siguientes puntos (2, 0, 2), (2, 0, 0), (2, 2, 0) y (2, 2, 2) m, tal como se observa en la siguiente figura.



Como el vector normal al área es *i* y el área del cuadrado *dS* = *dy dz*, Utilizando la ecuación (3.4), tenemos:

$$Q = \int_s (3\,x^2\,\vec{i} - xy\,\vec{j} - 2xz\,\vec{j})\; dy\; dz\; \vec{i}$$

Resolviendo,

$$Q = \int_{s}^{} 3\,x^2\,dy\,dz \quad = \int_{0}^{2}\int_{0}^{2} 3\,x^2\,dy\,dz$$

$$Q = 3\,x^2[z]_0^2[y]_0^2$$

Resolviendo la integral y sustituyendo los límites, tenemos.

$$Q = 48\,\frac{m^3}{s}$$

Actividades 3.4.1

1. ¿Cómo se conoce también al caudal?

   ………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………..…

2. Si un campo de velocidades está por $v = 4\,x^3\,\vec{\imath} - 2\,xy\,\vec{\jmath} - 4xz\,\vec{k}$ m/s. Determinar el caudal que pasa por un cuadrado cuyos vértices son los siguientes puntos (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1) y (1, 1, 1) todos en metros.

3. Cuál será el volumen de agua que atraviesa en 20 s por una cañería de 0,05 m^2 de sección si la velocidad media de la corriente es de 30 cm/s.

4. Por un oleoducto que tiene 15 cm de diámetro, circula un caudal de petróleo de 0,5 m^3/s. Determinar la velocidad media del fluido.

5. Determinar el tiempo necesario para llenar un tanque que tiene

una capacidad de 11 m^3 al suministrarle un caudal de 60 l/s.

6. ¿Qué diámetro máximo debe tener una tubería por la que fluye 0,250 Kg/s de aire con una velocidad de 6 m/s? Si el aire se encuentra a una temperatura de 20 °C y a una presión absoluta de 150 000 Pa.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Cuando se tiene un flujo de fluido, en ocasiones pueden existir vertientes y sumideros, es decir, lugares por donde puede ingresar o salir fluido, lo que ocasiona que la masa de fluido saliente aumente o disminuya. Figura 38.

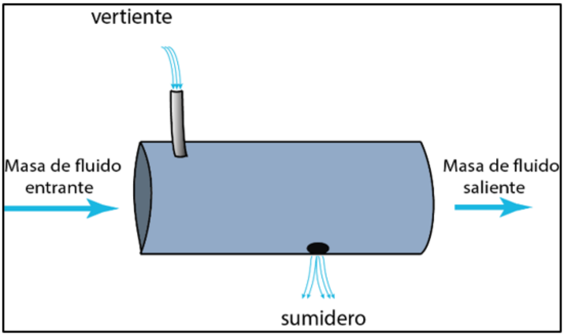


Figura 38. Flujo de fluido con vertientes y sumideros

Sin embargo, en ausencia de vertientes y sumideros la ecuación de continuidad expresa el principio de conservación de la masa líquida. La conservación de la masa de fluido entre dos secciones cualesquiera de una tubería expresa que la cantidad de masa que entra por una sección debe ser la misma que sale por la otra sección.

FORMA GENERAL

Pensemos en un conducto de corriente cualquiera, en el que su velocidad es uniforme en cada sección, tal como se muestra en la figura 39. En su interior la velocidad del flujo debe ser paralela a la línea de corriente en cualquier punto.

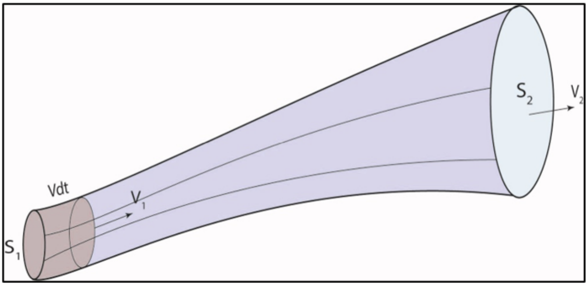


Figura 39. Tubo de corriente estrecho

Llamemos v_1 a la velocidad de una partícula que pasa por la superficie 1 y v_2 a la velocidad de una partícula que pasa por superficie 2. Las dos superficies transversales del conducto se representan por S_1 y S_2, las mismas que son perpendiculares a la línea de corriente.

Si v_1 es uniforme en S_1 y v_2 es uniforme en S_2, durante un intervalo de tiempo dt una porción de fluido se desplazará una distancia igual a *vdt*, debido a esto por la sección S_1 pasará una masa de fluido igual a.

$$dm_1 = \rho_1 dV_1 \tag{3.7}$$

Dónde ρ_1 V_1 es la densidad y el volumen del fluido que pasa por la sección S_1.

Como $V_1 = S_1\, v_1\, dt$ tenemos:

$$dm_1 = \rho_1 S_1 v_1 dt \tag{3.8}$$

Como el flujo másico fue definido como la cantidad de masa de fluido que traspasa una sección transversal durante un intervalo de tiempo, la expresión nos queda:

$$\frac{dm_1}{dt} = \rho_1 S_1 v_1 = \Phi_1$$

Para que la ecuación anterior sea válida, debe suponerse que durante ese intervalo de tiempo no varían S ni V con el desplazamiento del fluido.

De la misma manera analizamos en el punto 2, obteniendo la siguiente ecuación.

$$\frac{dm_2}{dt} = \rho_2 S_2 v_2 = \Phi_2 \tag{3.9}$$

Como el flujo es estacionario y no existen fuentes ni sumideros, la masa de fluido que ingresa por S_1 debe ser la misma que sale por S_2.

$$\Phi_1 = \Phi_2 \tag{3.10}$$

Si reemplazamos sus valores.

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

$$\Phi_m = \rho S v = constante \tag{3.11}$$

Sucederá de la misma manera en cualquier otra superficie S que sea perpendicular al flujo, de este modo la ley de conservación de la masa o ecuación de continuidad en régimen estacionario se puede expresar como.

$$\rho S v = constante$$

En el caso particular de flujo incompresible, la densidad es la misma en cualquier punto, por lo que tenemos que:

$$\rho\, S_1 v_1 = \rho\, S_2 v_2$$

Es decir

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$Q = Sv = constante \qquad (3.12)$$

Q representa el caudal o la cantidad de volumen de un fluido en que traspasa una sección por unidad de tiempo.

En una tubería que contenga fluido incompresible se puede obtener la relación de velocidades del fluido.

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 \qquad (3.13)$$

Es preciso indicar que en la ecuación (3.12) se ha considerado que la velocidad es uniforme, pero en los casos en que esto no sea así, se puede utilizar la velocidad promedio.

Ejercicio modelo 3.5.1

Determinar el caudal que sale por un conducto circular de 3 cm de diámetro, si el agua tiene una velocidad de 2 m/s.

Primero calculamos la superficie transversal de la tubería,

$$\pi r^2 = \pi\, 0{,}015^2 = 7{,}07\ E - 4\ m^2$$

Utilizando la ecuación (3.12)

$$Q_m = Sv$$

Reemplazamos los datos del problema

$$Q_m = 7{,}07\ E - 4\ m^2\ 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \ 1{,}414\ E - 3\frac{m^3}{\mathrm{s}}$$

Ejercicio modelo 3.5.1.2

Un líquido circula por una tubería que se ensancha al final, sus áreas transversales son de 0,34 cm^2 y 0,50 cm^2 respectivamente. Determine la velocidad que tiene el líquido en la segunda sección transversal si en la primera tiene una velocidad de 4 m/s.

Utilizando la ecuación (3.13) tenemos;

$$v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_2$$

Reemplazamos los valores que nos da el problema:

$$v_2 = 4\frac{m}{s}\ \frac{3{,}4\ E - 5\ m^2}{5\ E - 5\ m^2} = 2{,}72\ \frac{m}{s}$$

Actividades 3.5.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Determinar la cantidad de volumen de agua que atraviesa una tubería de 5 cm^2 en 14 s, si la velocidad con la que fluye el agua es de 1,2 m/s.

2. Determinar la sección transversal de una tubería, si un líquido que lo atraviesa tiene un caudal de 400 l/min y su velocidad es de 3 m/s.

3. Por un conducto plano de 35 mm de radio, circula un fluido que tiene una velocidad de 10 m/s. Determine su caudal, la velocidad de la otra sección transversal que tiene 10 mm de radio.

4. Determine la velocidad media de la sangre que fluye por una arteria de 0,6 cm de diámetro, si el caudal es de 6,2 l/min.

5. Por una manguera de 1 cm de radio fluye agua a una velocidad de 5 m/s. La manguera tiene un tapón al final con 35 orificios pequeños de 0,1 cm de radio. Determine la velocidad de salida en cada orificio.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE FORMA DIFERENCIAL: ECUACIÓN DE EULER

Leonhard Euler, fue un físico y matemático suizo que vivió entre 1707 y 1783, estudió el flujo de un fluido incompresible obteniendo así sus famosas ecuaciones de la hidrodinámica, conocidas como las ECUACIONES DE EULER.

Por simplicidad consideremos un volumen de control de forma paralelepípedo, de dimensiones dx,dy,dz, el mismo que está estático en una región del espacio, tal como se indica en la figura 40.

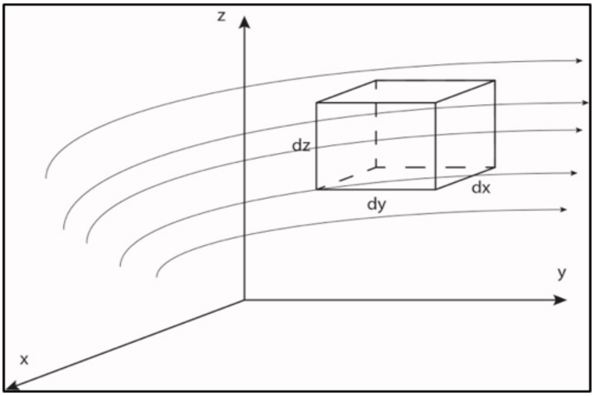


Figura 40. Elemento de fluido

Si analizamos el flujo másico que traspasa la cara trasera del paralelepípedo, paralela al plano yz, tenemos que:

$$d\Phi_x = \rho v_x dS_x$$

Como $dS_x = dy\ dz$

$$d\Phi_x = \rho v_x dy\ dz$$

Se realizamos el mismo análisis en la cara frontal del paralelepípedo, tenemos la siguiente ecuación.

$$d\Phi_{x+dx} = \rho v_x dy\ dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x dy\ dz)dx \tag{3.14}$$

Sacando factor común.

$$d\Phi_{x+dx} = \left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx\right]dzdy$$

El flujo de masa neto que traspasa las caras paralelas al plano yz es:

$$\Phi_x^{neto} = d\Phi_{x+dx} - d\Phi_x$$

$$\Phi_x^{neto} = \left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dx\right]dzdy - \rho v_x dy\, dz$$

$$\Phi_x^{neto} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dxdydz \qquad (3.15)$$

De la misma manera podemos obtener los flujos másicos netos de las demás caras del paralelepípedo, es decir, las caras paralelas a los planos xy, xz.

$$\Phi_y^{neto} = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)dxdydz \qquad (3.16)$$

$$\Phi_z^{neto} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)dxdydz \qquad (3.17)$$

Considerando que la masa total del paralelepípedo es:

$$dm = \rho dV = \rho dxdydz$$

El flujo másico total también debe ser.

$$d\Phi_{total}^{neto} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dV) \qquad (3.18)$$

La ecuación anterior expresa la rapidez con la que cambia el flujo másico de la porción de volumen, este flujo másico puede expresarse como la suma de los flujos másicos de cada una de las caras del paralelepípedo, es decir:

$$d\Phi_{total}^{neto} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)dxdydz$$

Reescribiendo, tenemos.

$$d\Phi_{total}^{neto} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]dxdydz$$

Si observamos la ecuación anterior, podemos ver que todo lo que está entre los corchetes es la divergencia de $\rho\vec{v}$, por lo que utilizando la ecuación (3.18) se puede reescribir de la siguiente manera.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla(\rho\vec{v}) \qquad (3.19)$$

La ecuación (3.19) expresa la ecuación de continuidad de forma diferencial. En el caso de un fluido incompresible donde la densidad ρ es constante todo el tiempo la ecuación anterior nos queda.

$$\nabla\vec{v} = 0$$

De la misma manera en el régimen estacionario, la densidad en un punto es constante por lo que la ecuación de continuidad queda.

$$\nabla(p\vec{v}) = 0 \qquad (3.20)$$

Ejercicio modelo 3.5.2

1. Verificar si se cumple la ecuación de continuidad en un flujo permanente e incompresible, si las componentes de la velocidad son:

$$v_x = 3x^2 - 2xz + z^2 \qquad v_y = 2x^2 - 6xy + y \qquad v_z = -x^2y + z^2 - z$$

Primero, derivamos cada componente respecto de la coordenada respectiva, es decir.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 6x - 2z \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -6x + 1 \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2z - 1$$

Utilizando la ecuación de continuidad (3.19) para un fluido incompresible y permanente.

$$\nabla \vec{v} = 0$$

Es decir

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Reemplazando los valores

$$(6x - 2z) + (-6x + 1) + (2z - 1) = 0$$

Resolviendo algebraicamente comprobamos que SÍ se cumple la ecuación de continuidad.

Actividades 3.5.2

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Los componentes de velocidad de un fluido incompresible son los siguientes:

$$v_x = 2x^2 + y + z^2 \qquad v_y = 3xy + yz + z$$

Determinar el componente v_z de modo que se satisfaga la ecuación de continuidad.

2. Si un flujo incompresible ideal, tiene el siguiente vector velocidad tridimensional.

$$\vec{v} = 3xy^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath} - f(z)\vec{k}\ m/s$$

Determinar la forma que debería tener la función f (z) de modo que se satisfaga la ecuación de continuidad.

3. En un flujo incompresible no permanente las componentes de la velocidad son:

$$v_x = (3x - 3y)t \qquad v_y = (x - 3y)t \qquad v_z = 0$$

Determinar si se cumple la ecuación de continuidad.

FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN FLUIDO

Para poder establecer la ecuación fundamental de la hidrodinámica, se requiere conocer las fuerzas que actúan en el movimiento de un fluido:

- El peso provocado por la gravedad.
- La fuerza ocasionada por la diferencia de presiones.
- La fuerza de viscosidad.
- La fuerza de la elasticidad.
- La tensión superficial.

Sólo el peso es externo al fluido las demás fuerzas son internas.

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO IDEAL ECUACIONES DE EULER

COMPONENTES DE LA ACELERACIÓN EN UN PUNTO

Considere a la figura 41, como una región en el espacio por la que fluye un fluido ideal. Sea P_1 un punto cualquiera y P_1P_2 un elemento infinitesimal de la trayectoria de P_1, que coincidirá en la línea de corriente en régimen permanente. Los puntos P_1 y P_2están separadas una distancia *ds*. Los componentes del vector velocidad v del punto P_1 son v_x, v_y, v_z, v es tangente a la trayectoria.

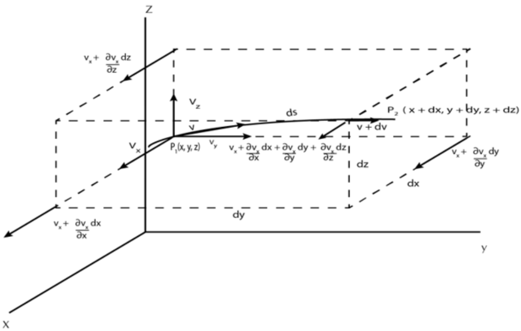


Figura 41. Elemento diferencial de la trayectoria de una partícula

La velocidad en cada punto depende del punto y del tiempo en el que se lo considere, es decir:

$$\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t) \\ v_y &= f_2(x, y, z, t) \\ v_z &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{3.21}$$

En un instante t las ecuaciones anteriores expresan las componentes de la velocidad del flujo en cada punto del espacio, en otras palabras, expresa cómo está configurado el flujo en un instante de tiempo.

Por otro lado, si tenemos un punto con coordenadas (*x, y, z*) se puede partir de las ecuaciones (3.21) para determinarla variación de la velocidad en función del tiempo, es decir.

$$\begin{aligned}
dv_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t}dt + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz \\
dv_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t}dt + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz \\
dv_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t}dt + \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Si las ecuaciones anteriores dividimos para *dt* y considerando que $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$, y que $dz/dt = v_z$, reescribiendo tenemos.

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z \\
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z \\
\frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Las ecuaciones (3.23) expresan las componentes de la aceleración del fluido en cualquier región del espacio y en cualquier tiempo. Si flujo está en régimen es permanente tenemos que;

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \tag{3.24}$$

Reemplazando la ecuación (3.24) en las ecuaciones (3.23), tenemos.

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z$$
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z \qquad (3.25)$$
$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z$$

Que no son más que las ecuaciones de la aceleración en régimen permanente.

Ejercicio modelo 3.7.1

1. Si la velocidad de un flujo en régimen permanente tiene las siguientes componentes;

$$v_x = 2x - 2y \qquad v_y = x - 3y \qquad v_z = 2x + 2z$$

Determinar las componentes de la aceleración del flujo.

Utilizamos las ecuaciones (3.25), utilizando como datos las componentes de la velocidad del flujo permanente, tenemos;

$$a_x = 2(2x - 2y) - 2(x - 3y) = 2x - y$$
$$a_y = (2x - 2y) - 3(x - 3y) = -x + 7y$$
$$a_z = 2(2x - 2y) + 2(2x + 2z) = 8x - 4y + 4z$$

Actividades 3.7.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. En un flujo permanente las componentes de la velocidad son;

$$v_x = 3x^2 - 2xy + z \qquad v_y = x^2 - 3xy \qquad v_z = 2xy + 2z$$

Determinar las componentes de la aceleración del flujo y la aceleración en el punto (2, 2, 2).

2. Si un flujo no permanente tiene el siguiente vector velocidad tridimensional.

$$\vec{v} = (3xy^2t + 2xy)\vec{\imath} + (xyt - 2z)\vec{\jmath} - (2x + 3zt)\vec{k}\ \frac{m}{s}$$

Determinar el vector aceleración.

3. Un flujo de fluido tiene el siguiente vector aceleración.

$$\vec{a} = (2x + 4xt^2)\,\vec{\imath} + (3y + 9yt^2)\,\vec{\jmath} + (4z + 16zt^2)\,\vec{k}\ \frac{m}{s^2}$$

Determinar el vector velocidad suponiendo que cada componente de la velocidad contiene una sola variable que correspondiente con su vector unitario, es decir, $x = \vec{\imath} \quad y = \vec{\jmath} \quad z = \vec{k}$.

ECUACIONES DE EULER CON CAMPO DE PRESIONES

Consideremos un fluido permanente, en el que un punto P (*x, y, z*) se encuentra en el centro de un paralelepípedo rectangular de dimensiones *dx, dy, dz*, tal como se puede observar en la siguiente figura.

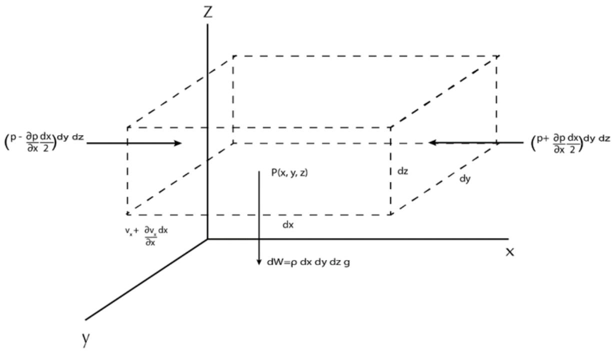


Figura 41.Elemento de un fluido permanente.
Deducción de las ecuaciones de Euler.

Si $p = f\,(x,y,z)$ la presión en el punto P. La presión en las secciones transversales es:

$$p - dp = p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \qquad (3.26)$$

$$p + dp = p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \qquad (3.26)$$

En las 6 caras del paralelepípedo actúan las fuerzas originadas por la presión, debido a cuestiones de visibilidad sólo se han colocado en el gráfico las fuerzas que son transversales al eje x, esto no quiere decir que las demás no estén presentes. A más de las fuerzas indicadas anteriores en el paralelepípedo existe el peso *dw*. Figura 41.

El peso tiene un valor de:

$$dw = \rho\, dx\, dy\, dz\, g \qquad (3.27)$$

Si se aplica la segunda ley de Newton en la dirección x, tenemos;

$$\rho\, dx\, dy\, dz \frac{dv_x}{dt} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$

Si la ecuación anterior dividimos para la masa del paralelepípedo

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.28}$$

De la misma manera con las direcciones *y* y *z*, considerando que en la dirección *z* existe el valor de la fuerza de gravedad.

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.29}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.30}$$

Si reemplazamos las ecuaciones (3.25) en las ecuaciones (3.28) (3.29) y (3.30), obtenemos las ecuaciones de Euler en régimen permanente, fluido ideal e incompresible.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ejercicio modelo 3.7.2

1. Un flujo de fluido permanente e incompresible tienen una densidad de 3 kg/m^3, la presión viene dada por:

$$p = (-3x^2 + 2xy + 3yz)Pa$$

Determine las componentes de la aceleración del flujo y el valor de la aceleración en el punto (1, 3, 8).

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{3}\big(-6(1) + 2(3)\big) \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{3}\big(2(1) + 3(8)\big) \quad \frac{dv_z}{dt} = -9{,}8 - \frac{1}{3}(3(3))$$

$$a_x = 0 \quad a_y = -\frac{26}{3} \quad a_z = -\frac{64}{5}$$

$$a = -21{,}46\, m/s^2$$

Actividades 3.7.2

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Si un campo de velocidades está dado por:

$$\vec{v} = 4tx\,\vec{i} - t^2y\,\vec{j} + 3\,xz\,\vec{k}$$

a) ¿El flujo es estacionario? justifique, b) ¿El flujo es unidireccional? c) Determinar en el punto (-1, 0, 1) el vector aceleración.

2. Si en un flujo permanente e incompresible se conoce que;

$$p = 8x^3 - 2x^2y - 6yz^2\ Pa \quad y\ que\ \ \rho = 2\,kg/m^3$$

Determine las componentes de la aceleración del flujo y el valor de la aceleración en el punto (1, 5, 3)

3. Si un flujo de fluido en régimen permanente e incompresible se mueve con la siguiente velocidad.

$$v_x = 3x^2 - 3y \qquad v_y = 4x - y \qquad v_z = 2z^2$$

Determinar el campo de presiones del flujo si la densidad del fluido es 1 kg/m^3

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA. ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO IDEAL

Daniel Bernoulli, un físico suizo que vivió entre 1700 y 1782, hizo grandes contribuciones a la hidrodinámica, siendo la más representativa la ecuación que actualmente lleva su nombre "La Ecuación de Bernoulli".

La Ecuación de Bernoulli puede obtenerse matemáticamente a partir de las ecuaciones de Euler, sin embargo, comenzaremos, haciendo un análisis diferente, para luego llegar a la misma ecuación a través de las ecuaciones de Euler. Consideremos un tubo de corriente, como el de la figura 42, en el que durante un intervalo de tiempo *dt* una porción de fluido se ha trasladado una distancia *dl*.

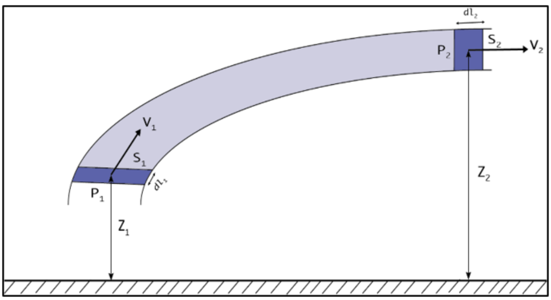


Figura 42. Tubo de Corriente

En la región 1, que tiene sección S_1, velocidad v_1, Presión p_1 y una altura h_1, la porción de fluido se ha trasladado una distancia dl_1, y en la región 2, que tiene una sección S_2, una velocidad v_2, una presión p_2 y una altura h_2 una distancia dl_2.

Las porciones de fluido trasladadas serán las mismas, por la conservación de la masa. Consideremos las secciones del tubo suficientemente pequeñas para que la velocidad sea la misma en toda la sección.

Ahora, apliquemos el principio de conservación de energía a ambas regiones del fluido, cabe recordar que la variación de la energía cinética y potencial es igual al trabajo de las fuerzas exteriores. Determinemos este trabajo, así como las variaciones de las energías. Los trabajos realizados en las regiones 1 y 2 son:

$$dW_1 = p_1 S_1 dl_1 \tag{3.32}$$

$$dW_2 = p_2 S_2 dl_2 \tag{3.33}$$

El trabajo neto es igual a:

$$dW_{net0} = p_1 S_1 dl_1 - p_2 S_2 dl_2 \tag{3.34}$$

Por otro lado, la variación de la energía potencial del fluido es:

$$dE_p = E_{p2} - E_{p1} = S_2 \rho dl_2 g h_2 - S_1 \rho dl_1 g h_1 \tag{3.35}$$

La variación de la energía cinética, al pasar la porción de fluido de la velocidad v_1 a la velocidad v_2 es:

$$dE_c = E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2}S_2\rho dl_2 v_2^2 - \frac{1}{2}S_1\rho dl_1 v_1^2 \tag{3.36}$$

Como el trabajo es igual a la variación de las energías, tenemos.

$$dW_{net0} = dE_p + dE_c \tag{3.37}$$

Reemplazamos ambos lados de la ecuación por sus respectivas igualdades.

$$p_1S_1dl_1 + p_2S_2dl_2 = S_2\rho dl_2gh_2 - S_1\rho dl_1gh_1 + \frac{1}{2}S_2\rho dl_2v_2^2 - \frac{1}{2}S_1\rho dl_1v_1^2$$

Agrupando los términos que corresponden a las regiones 1 y 2, tenemos,

$$p_1S_1dl_1 + S_1\rho dl_1gh_1 + \frac{1}{2}S_1\rho dl_1v_1^2 = p_2S_2dl_2 + S_2\rho dl_2gh_2 + \frac{1}{2}S_2\rho dl_2v_2^2$$

Aplicando factor común a ambos miembros.

$$S_1dl_1\left(p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) = S_2dl_2\left(p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) \tag{3.38}$$

Al ser el mismo fluido los volúmenes desplazados serán iguales, es decir.

$$dV = S_1dl_1 = S_2dl_2$$

Reemplazando en la ecuación (3.38) tenemos:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{3.39}$$

La ecuación presentada es la ECUACIÓN DE BERNOULLI, expuesta por Daniel Bernoulli en 1738, la misma que indica que un flujo de fluido ideal por un conducto cerrado conserva su energía total a lo largo de la trayectoria del flujo.

Se debe precisar que la presión estática (p), la presión correspondiente a la velocidad ($pv_2/2$) y la presión concerniente a la elevación (pgz), son constantes a lo largo de una línea de corriente. Se denomina "presión hidrodinámica" a la resultante de las dos primeras presiones.

Se puede reescribir la ecuación de Bernoulli, si se expresa en función de las alturas en vez de las presiones, es decir.

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = constante = h\ total \tag{3.40}$$

Dónde:

- p/pg se lo conoce como altura piezométrica
- $V_2/2g$ es la altura cinética
- Z la altura geométrica.

ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO IDEAL A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE EULER

Como punto de partida utilicemos las ecuaciones (3.28), (3.29) y (3.30) que es la forma sintetizada de las ecuaciones de Euler.

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Si a estas ecuaciones se las multiplica por *dx, dy, dz* respectivamente, tenemos;

$$\frac{dv_x}{dt}dx = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx$$
$$\frac{dv_y}{dt}dy = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy \qquad (3.41)$$
$$\frac{dv_z}{dt}dz = \left(-g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz$$

Si sumamos entre sí las ecuaciones anteriores, obtenemos;

$$\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy - \left(g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz$$

Sabemos que $dx/dt=v_x$, $dy/dt=v_y$ y $dz/dt=v_z$ por lo que la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$dv_xv_x + dv_xv_y + dv_zv_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy - \left(g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz \qquad (3.42)$$

El primer miembro de la ecuación (3.42) se puede reescribir de la siguiente manera utilizando las propiedades de los diferenciales y magnitud de un vector;

$$dv_xv_x + dv_yv_y + dv_zv_z = \frac{1}{2}d\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}d(v^2)$$

Por lo que la ecuación (3.42) finalmente nos queda:

$$\frac{1}{2}d(v^2) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy - \left(g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz \qquad (3.43)$$

Si en el segundo miembro de la ecuación (3.43) sabemos que:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Por lo que la ecuación (3.43) nos queda:

$$\frac{1}{2}d(v^2) = \frac{dp}{\rho} + gdz \tag{3.44}$$

Si integramos la ecuación (3.44) entre dos puntos, en flujo permanente e incompresible obtenemos:

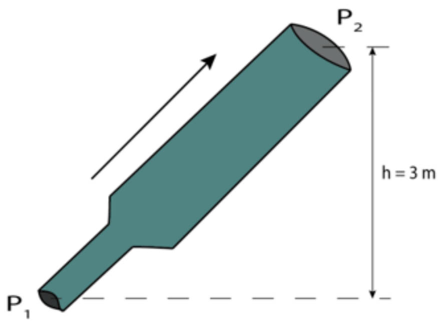
$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2}d(v^2) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + \int_{z_1}^{z_2} gdz$$

Si el resultado lo separamos entre el punto 1 y punto 2 y los dividimos para ρ, tenemos nuevamente la ecuación de Bernoulli (3.39):

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Ejercicio modelo 3.8.1

Suponga una tubería en la que fluye agua desde P_1 hasta P_2. La región P_1 tiene 4 cm de radio, una presión manométrica de 430 kPa, y una velocidad de flujo de 2,5 m/s. La región P_2 tiene un radio de 15 cm, y se encuentra 3 metros más alto que P_1. Si no existe pérdida de energía en el sistema, determinar la presión en P_2.



Para conocer la velocidad en la región P_2 utilizamos la ecuación (3.13)

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$$

Reemplazamos los datos conocidos.

$$v_2 = \frac{\pi\, 0{,}04^2}{\pi\, 0{,}15^2} 2{,}5\ m/s$$

$$v_2 = 0{,}17\ m/s$$

Ahora, utilizando la ecuación (3.39), tenemos;

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Si despejamos P_2

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho g h_2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Reemplazamos los datos que nos da problema y el dato calculado anteriormente;

$$p_2 = 430\ \text{kPa} + \frac{1}{2} 1000 \frac{kg}{m^3} (2{,}5 \frac{m}{s})^2 - 1000 \frac{kg}{m^3} 9{,}8 \frac{m}{s^2} 3\ m - \frac{1}{2} 1000 \frac{kg}{m^3} (0{,}17 \frac{m}{s})^2$$

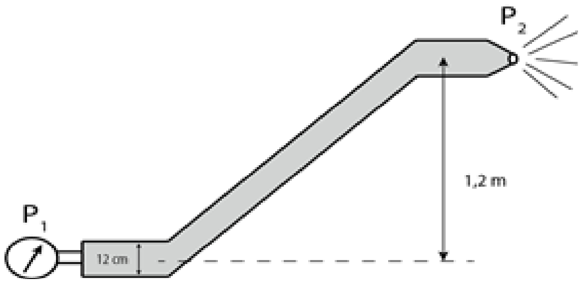
Resolviendo:

$$p_2 = 403{,}47\ \text{kPa}$$

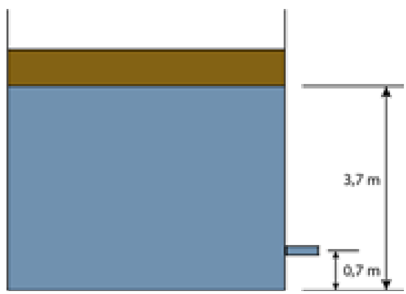
Actividades 3.8.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. En la siguiente figura considere que el agua sale libremente a la atmósfera por una abertura circular de 2 cm de radio. Si el caudal es de 15 kg/s calcular la presión que marcaría el manómetro P_1.



2. Se tiene un tanque cilíndrico que contiene agua, el mismo que está cerrado por una tapa circular de 1,4 m de radio y 1 200 kg de masa. El agua está a 3,7 m de altura. Determinar; a) La presión en el fondo del tanque, b) El caudal de agua que sale por un orificio circular de 3 cm de radio ubicado a 70 cm del fondo del tanque.



3. Para apagar un incendio un bombero mediante una manguera lanza agua con una inclinación de 45° con respecto al suelo. El chorro de agua ingresa horizontalmente por la ventana de la segunda planta del edificio, la misma que tiene una altura de 8 m. Si las mangueras comerciales tienen un diámetro 80 mm, con una boquilla de un diámetro de 20 mm. a) Calcule la cantidad litros de agua que salen por minuto a través de la boquilla. b) Determine la presión que soporta la manguera.

4. Por una tubería fluye aire, su sección transversal se reduce de 0,5 m^2 a 0,3 m^2. Si no existen pérdidas y el flujo másico es de 0,6 kg/s, determinar la variación de la presión.

5. Una tubería que tiene una inclinación de 30° se encuentran dos puntos que están separados 3 m, si el radio de la tubería cambia gradualmente de 0,3 a 0,15 m. Determinar la presión en el segundo punto si en el primero marca 150 000 Pa y el caudal del agua es de 1 500 l/h

6. Por un conducto de 80 mm de radio, fluye un aceite que tiene una densidad relativa de 0,5 a una presión de 100 000 Pa. La altura de la entrada del conducto con respecto a un plano de referencia ubicado a 2,50 m por debajo de la salida del conducto es de 20 m, determine la presión en la salida del conducto.

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO REAL. ECUACIONES DE NAVIER STOKES

El físico francés Claude-Louis Navier y el físico irlandés George Gabriel Stokes, físico alrededor del año 1822 presentaron un grupo de ecuaciones de derivadas parciales no lineales que explicaban el movimiento de un fluido, las mismas que ahora llevan sus nombres "ecuaciones de Navier-Stokes". Estas ecuaciones explican el flujo de todos los fluidos newtonianos, como la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y los flujos contorno a automóviles y aviones, etc.

Un fluido real tiene viscosidad que no puede ser despreciada, por lo tanto, requiere de un análisis más complejo que el realizado en la deducción de las Ecuaciones de Euler, este análisis no se lo hará en esta obra, solo se presentarán las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\,\nabla^2 v_x \\
\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\,\nabla^2 v_y \\
\frac{dv_z}{dt} &= -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\nabla^2 v_z
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Donde, ∇^2 es el operador de Laplace.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

A ν se la conoce como viscosidad cinemática. Para determinar la viscosidad cinemática se divide la viscosidad dinámica por la densidad del fluido, es decir; $\nu = \eta/\rho$.

Si las ecuaciones (3.45) se aplicarán a un fluido ideal, se obtienen las ecuaciones de Euler, porque $\nu = 0$.

Ejercicio modelo 3.9.1

Las componentes de la velocidad y el campo de presiones de un flujo permanente viscoso son:

$$v_x = Sen\ x - 3y \qquad v_y = 5x - y^3 \qquad v_z = -3z^2 \qquad p = 5x + xy + z^2$$

Si la densidad del fluido es 5 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 20 Ns/m^2. Determinar las componentes de la aceleración del flujo.

Utilizando las ecuaciones (3.45) tenemos que;

$$a_x = -\frac{1}{5}(5 + y) + \frac{20}{5}(-sen\ x) = -1 - \frac{y}{5} - 4\ sen\ x$$

$$a_y = -\frac{1}{5}(x) + \frac{20}{5}(-18\ y) = -\frac{x}{5} - \frac{18}{4}y$$

$$a_z = -\frac{1}{5}(5 + y + z^2) + \frac{20}{5}(-6) = -\frac{y}{5} - \frac{z^2}{5} - \frac{5}{2}$$

Las componentes del flujo son:

$$\vec{a} = -1 - \frac{y}{5} - 4\ sen\ x\ \vec{\imath} - \frac{x}{5} - \frac{18}{4}y\ \vec{\jmath} - \frac{y}{5} - \frac{z^2}{5} - \frac{5}{2}\vec{k}$$

Actividades 3.9.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Las componentes de la velocidad y el campo de presiones de un flujo permanente viscoso son:

$$v_x = x^2 - xy \qquad v_y = 3x - z \qquad v_z = y + 4z^2 \qquad p = 2xy + 3z$$

Si la densidad del fluido es 980 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 15 Ns/m^2. Determinar las componentes de la aceleración del flujo.

2. Las componentes de la aceleración y el campo de presiones de un flujo permanente viscoso son:

$$a_x = 2xy \qquad a_y = 4yz \qquad a_z = 3z \qquad p = 2x^2y$$

Si la densidad del fluido es 500 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 10 Ns/m^2. Determinar las componentes de la velocidad de flujo.

3. Los vectores aceleración y velocidad de un flujo permanente viscoso son:

$$\vec{a} = 3xy\,\vec{\imath} + 2x\,\vec{\jmath} - xz\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = 2x\,\vec{\imath} + 4y\,\vec{\jmath} - z\,\vec{k}$$

Si la densidad del fluido es 10 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 5 Ns/m^2. Determinar el campo de presiones.

ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO REAL

En un fluido real, debido a la viscosidad se generan fuerzas de rozamiento entre las moléculas del fluido y entre el fluido con el medio por el que fluye, es el caso de un conducto o tubería. Por lo que la ecuación de Bernoulli (3.39) ya no se satisface completamente. La fricción ocasiona un cambio del estado térmico del fluido. En el fluido real $du \neq 0$.

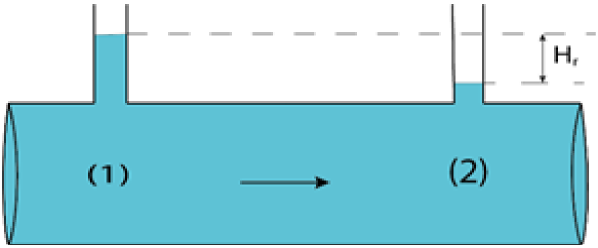


Figura 43. Flujo de un fluido real

Un fluido real puede considerarse incompresible en ciertos casos, por lo que $d\rho=0$ y $dQ\neq 0$. En este caso el rozamiento no es aprovechable, por lo que es denominada energía perdida, y en términos de altura como altura perdida H_r.

En términos de altura perdida, si a la energía que existe en el punto 1 se le resta la energía perdida se obtiene a la energía en el punto 2, expresado matemáticamente tenemos.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho g\, H_{r1-2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (3.46)$$

Donde H_{r1-2} expresa la altura perdida entre los puntos 1 y 2.

Si la ecuación (3.46) se multiplica por el caudal, los términos que se obtienen representan la potencia en W, es decir:

$$Q\left(p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) = W \tag{3.47}$$

ECUACIONES DE BERNOULLI PARA UN GAS INCOMPRESIBLE

La ecuación (3.46) tiene dimensiones de una presión. En un gas la variación de presión geodésica $\rho g(h_1\text{-}h_2)$ es pequeña comparada con los otros términos por lo que se podría despreciar, es decir, haciendo que $\rho g(h_1\text{-}h_2)\approx 0$ y que $\rho g\ H_{r1\text{-}2}=\Delta p_{r1-2}$, presión perdida por el rozamiento entre 1 y 2, la ecuación (3.46) nos queda.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \Delta p_{r1-2} = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{3.48}$$

Qué es la *ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA UN GAS VISCOSO INCOMPRESIBLE*.

De la misma manera que en la ecuación (3.47) si a la ecuación (3.48) se multiplica por el caudal los términos que se obtienen representan potencias en W, es decir;

$$Q\left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) = W \tag{3.49}$$

Ejercicio modelo 3.9.2

Por una tubería fluye un aceite de densidad 500 kg/m^3. La sección transversal 1 de 8 cm de radio está ubicada a 4 m debajo de la segunda sección transversal 2 de 15 cm de radio. Si las presiones son 10 000 y 6 000 Pa respectivamente y el caudal es de 0,5 m^3/s. Determine la pérdida de carga en la dirección del flujo.

Utilizando la ecuación (3.46), tomando como referencia la sección transversal 1, reemplazando los datos, tenemos;

$$10\,000 + \frac{1}{2}500\left(\frac{0{,}5}{\pi 0{,}08^2}\right)^2 - 500\,9{,}8\,H_{r1-2} = 6\,000 + 500\,9{,}8\,4 + \frac{1}{2}500\left(\frac{0{,}5}{\pi 0{,}15^2}\right)^2$$

Despejando H_{r1-2}

$$H_{r1-2} = 25{,}8\,m$$

Actividades 3.9.2

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Un conducto posee un radio de 60 mm y 200 m de largo, transporta agua desde un punto que está en el piso, hasta un punto ubicado 15 m más arriba. La fuerza producida por el rozamiento es de 2,8 N. Calcule el cambio de presión y la pérdida de carga expresado en altura.

2. Si un tubo de 8 cm de radio, transporta un aceite con densidad relativa de 0,8 en un punto la presión manométrica es de 200 Pa. Si el caudal es de 100 l/s y el punto está ubicado a 1,5 m por encima del plano de referencia. Determinar la altura total si la pérdida de carga es de 0,5 m.

3. Determinar la pérdida de carga en un tubo de 60 mm de radio, si se requiere conservar la presión de 250 000 Pa en un punto

ubicado 1,2 m debajo de la sección del tubo por la que sale un caudal de agua de 50 l/s a la atmósfera.

4. De una tubería de 1,5 cm de radio fluye anhídrido carbónico que tiene una masa molar de 62,03 g/mol, a una presión de 400 kPa y una temperatura de 4° C a otra tubería de radio 0,7 cm. Si fluye un caudal de 0,040 m^3/s, desprecie el rozamiento y considere un flujo isotérmico, determine la presión en la nueva tubería de 0,7 cm.

5. Por una tubería de 10 cm de radio, fluye aire a 20 m/s y 100 Pa de presión absoluta y a 20° C. Determinar el caudal de aire que fluye. Si la tubería reduce su radio a 5 cm y la presión y la temperatura son de 80 Pa y 15° C. Determinar los caudales y la velocidad final.

BOMBAS HIDRÁULICAS-BOMBAS DE AGUA

Una bomba hidráulica es un dispositivo que sirve para elevar un líquido hasta una cierta altura. Para ello, requiere de un tipo energía que generalmente suele ser mecánica o eléctrica, para luego transformarla en energía hidráulica. Sabemos que para que fluya un líquido debe existir una diferencia de energías o presiones, por lo que una bomba hidráulica suministra la energía extra para producir el flujo, tal como se muestra en la siguiente figura.

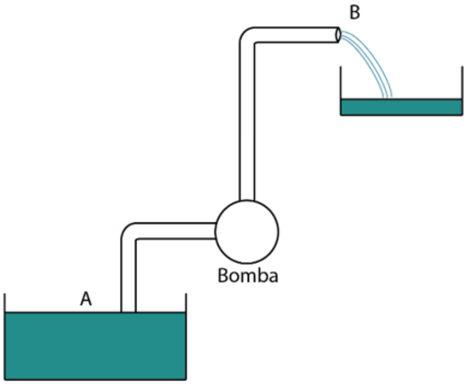


Figura 44. Flujo generado por una bomba

Partamos de la ecuación de Bernoulli para un fluido real, y agreguemos la energía suministrada por la bomba a la región 1. Esta energía tiene que vencer la diferencia alturas entre las dos secciones de la tubería y las pérdidas de carga que se pueden originar en todo el trayecto.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_b = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\, H_{r1-2} \tag{3.50}$$

En este caso p_b es la presión suministrada por la bomba y si conocemos la potencia de la misma podremos obtener su valor.

Sabemos que

$$P = \frac{F\, d}{t} = Fv\,(watios) \tag{3.51}$$

De la ecuación (1.10)

$$p_b\, S = F$$

Combinando con la ecuación (3.51), tenemos.

$$P = p_b\, S\, v \tag{3.52}$$

Considerando la ecuación (3.3) finalmente se obtiene.

$$p_b = \frac{P}{Q} \tag{3.53}$$

La ecuación (3.53) indica que se puede obtener la presión suministrada por una bomba si dividimos su potencia para el caudal.

Todas las bombas hidráulicas al igual que los motores, están caracterizadas por su rendimiento o eficiencia, el mismo que se define como la relación entre la potencia entregada y la potencia consumida, en los casos más generales la potencia consumida es la eléctrica. La eficiencia se suele expresar frecuentemente en forma de un porcentaje y en la vida real siempre será menor que 100% puesto que no existen bombas hidráulicas ideales.

$$\eta = \frac{P_{ent}}{P_{con}} \tag{3.54}$$

Si reemplazamos la ecuación obtenemos (3.54) en la (3.53)

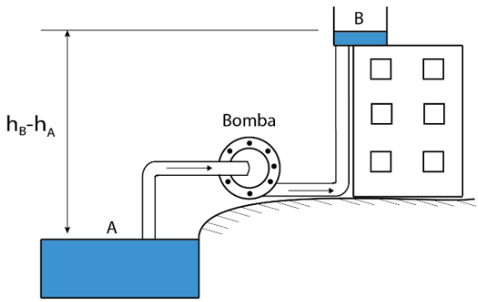
$$p_b = \frac{P_{con}\, \eta}{Q} \tag{3.55}$$

Si la ecuación (3.55) la reemplazamos en la ecuación general de Bernoulli (3.50) obtenemos una ecuación que relaciona la potencia de bombeo de la bomba hidráulica y el resto de factores que intervienen en un flujo de fluido incompresible.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \frac{P_{con}\,\eta}{Q} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\, H_{r1-2} \qquad (3.56)$$

Ejercicio modelo 3.9.3

En la siguiente figura, se requiere conocer la potencia que deberá consumir una bomba hidráulica de modo que pueda bombear 1 m^3/s de agua de un lago a un tanque reservorio que está en la azotea de un edificio de 20 m de altura. Se sabe que el diámetro de la tubería es de 20 cm, las pérdidas por viscosidad son alrededor de 4 m y la bomba tiene una eficiencia del 70%.



Si analizamos un poco el problema, en el punto A el agua está en reposo, es decir, $v_1=0$ *m/s,* y suponiendo que el lago es el punto de referencia, $h_1=0$. También, $p_1=p_2$ puesto que ambos puntos están abiertos a la atmósfera, para v_2 aplicación la ecuación (3.3)

$$v_2 = \frac{Q}{S} = \frac{1\, m^3/s}{\pi\, 0{,}1^2 m^2} = 31{,}83\frac{m}{s}$$

Utilizando la ecuación (3.56) tenemos.

$$\frac{P_{con}\,\eta}{Q} = \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\, H_{r1-2}$$

Despejando P_{con} y reemplazando los valores del problema, tenemos.

$$P_{con} = \frac{\left(1000\ 9{,}8\ 20 + \frac{1}{2}1000\ 31{,}83^2 + 1000\ 9{,}8\ 4\right)1}{0{,}7} \approx 1E6\ W$$

Actividades 3.9.3

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Una bomba hidráulica que es capaz de brindar un caudal de agua de 0,33 m^3/s, está conectada a una tubería que tiene una sección de aspiración de 200 mm de radio y una sección de impulsión de 150 mm de radio. Un manómetro conectado en la sección de aspiración que a 70 mm por debajo del eje de la bomba marca una depresión de 2 m de columna de agua y el manómetro colocado 500 mm por encima del eje de la bomba marca una sobrepresión de 10 m de columna de agua. Determine la altura a la que puede trabajar la bomba. Considere que no existen pérdidas de carga provocadas por la viscosidad.

2. Determinar el rendimiento de una bomba hidráulica comercial que bombea 0,2 m^3/s de agua de un pozo hasta un sembrío que está a una altura de 2 m. Se sabe que el diámetro de la tubería es de 15 cm, las pérdidas por viscosidad son alrededor de 0,2

m y la bomba consume 25 A de corriente conectada a una red doméstica de 220 V.

3. En una bomba hidráulica se coloca un manómetro a la entrada que marca 590 mm Hg y un manómetro a la salida que marca 9 m de columna de agua. La potencia consumida por el motor es de 20 000 W, y su rendimiento es del 80 %. Sin considerar las pérdidas de carga, determine el caudal máximo que puede transportar la bomba en posición horizontal.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

Capítulo 4

ALGUNAS APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

En este capítulo veremos algunas de las múltiples aplicaciones prácticas derivadas de la Ecuación de Bernoulli, las mismas que son utilizadas en la industria y experimentación.

TEOREMA DE TORRICELLI, VELOCIDAD DE SALIDA POR UN ORIFICIO

Analicemos el caso de un recipiente que tiene cerca de su base un orificio de sección muy pequeña comparada con la superficie libre del líquido, tal como se indica en la siguiente figura.

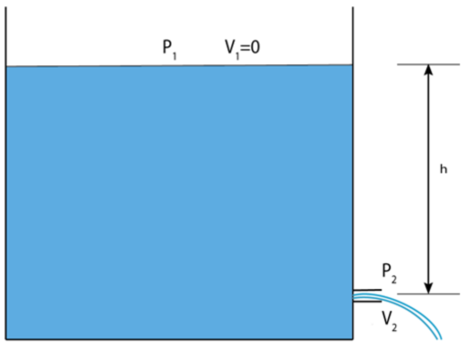


Figura 45. Velocidad de salida por un orificio

Aplicando la ecuación de Bernoulli en las regiones 1 y 2, tenemos.

$$\left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) - \left(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) = \rho g(h_1 - h_2)$$

Como es el mismo líquido la densidad no varía, por otro lado p^1 y p^2 son presiones atmosféricas por lo que serán iguales, y S_1 mucho mayor a S_2, por lo que v_1 es prácticamente cero, por lo tanto.

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g h$$

Despejamos v_2,

$$v_2 = \sqrt{2gh} \qquad (4.1)$$

La ecuación (4.1) indica la velocidad de salida del líquido por el orificio, como podemos apreciar, la velocidad de salida no depende de la densidad del líquido sino simplemente de su altura.

Ejercicio modelo 4.1.1

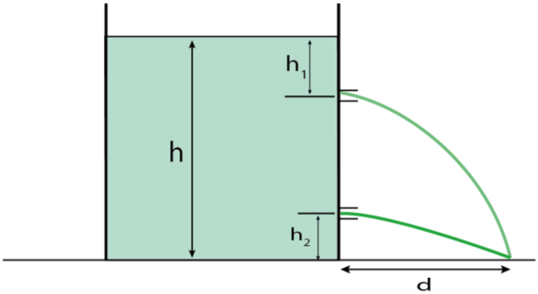
Determinar la velocidad con la que sale un líquido por un orificio ubicado a una profundidad de 1,5 m.

Utilizando la ecuación (4.1) y reemplazando los datos que nos da el problema.

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)1{,}5\,m} = 5{,}42\ \frac{m}{s}$$

Ejercicio modelo 4.1.2

A un tanque que contiene un líquido se perforan dos orificios pequeños, el primero una distancia h_1 de la superficie libre del líquido y el segundo a una distancia h_2 del fondo del tanque. Tal como se muestra en la siguiente figura. Si los chorros llegan al mismo punto en el suelo, determinar la relación que deben tener h_1 y h_2.



Los dos chorros recorren trayectorias parabólicas, por lo que la distancia d es igual a;

$$d = v_1 t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{d}{v_1} \qquad\qquad d = v_2 t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{d}{v_2}$$

Aplicando la ecuación (4.1) en ambos chorros.

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \qquad\qquad v_2 = \sqrt{2g(h - h_2)}$$

La altura que recorre cada chorro hasta llegar al suelo es h- h_1 y h_2 por lo que.

$$h - h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad\qquad h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2$$

Reemplazando los valores de velocidad y tiempo, tenemos.

$$h - h_1 = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{2gh_1} \qquad\qquad h_2 = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{2g(h - h_2)}$$

Despejamos d^2 e igualando las dos ecuaciones.

$$(h - h_1)4h_1 = h_2\, 4(h - h_2)$$

Resolviendo algebraicamente, tenemos que.

$$h = h_1 + h_2$$

Actividades 4.1.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Un tanque cilíndrico contiene un líquido de modo que su superficie libre está a una altura de 1 m. Si le perforamos al tanque en un punto ubicado a 21 cm por debajo de la superficie libre. a) ¿Cuál es la velocidad con la que sale el líquido por el orificio? B) Calcule la distancia sobre el piso donde caerá el chorro del líquido.

2. En un tanque el nivel de gasolina alcanza una altura h. Si se desea realizar un pequeño orificio lateral de modo que la gasolina salga horizontalmente. Determinar la altura h_0 que debe tener el orificio para que la gasolina cuando llegue al suelo recorra una máxima distancia horizontal con respecto al borde del tanque.

3. ¿A qué profundidad debe hacerse un orificio a un tanque que contiene aceite para que salga con una velocidad de 5 m/s?

4. Determinar a qué altura desde el fondo de un recipiente debe hacerse una perforación en un tanque de gasolina de modo que el líquido salga con una velocidad de 13 m/s.

TIEMPO DE VACIADO DE UN DEPÓSITO

Pensemos ahora en un recipiente con un orificio en su parte inferior, como se indica en la figura 46 y deseamos saber cuánto tardará en vaciarse.

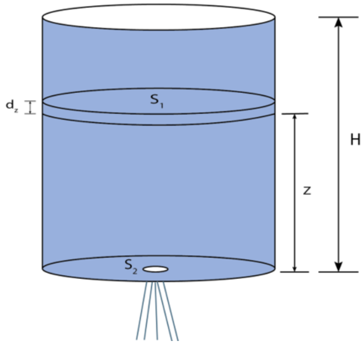


Figura 46. Tiempo de vaciado de un depósito

Durante un intervalo de tiempo *dt*, el nivel del líquido desciende en dz. La variación de volumen será.

$$-S_1 dz = S_2\sqrt{2gz}\,dt$$

El signo menos de la ecuación anterior indica que z decrece.

Agrupamos e integramos

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^{1/2}} = \int_0^t -\frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g}\,dt$$

Resolviendo el integral

$$\left[2z^{\frac{1}{2}}\right]_{z_0}^{z} = -\frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g}\,t$$

Si despejamos t, obtenemos.

$$t = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2}{g}z_0} \qquad (4.2)$$

Ejercicio modelo 4.2.1

Un tanque en la que la superficie libre de agua es de 2,5 m^2 y 1,6 m de altura, en el fondo del tanque tiene un tapón de 0,02 m^2. Si el agua está a 30 cm debajo del borde del tanque y se retira el tapón, determine el tiempo necesario para que se vacíe completamente.

Utilizando la ecuación (4.2)

$$t = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2}{g}z_0}$$

Reemplazando los datos de acuerdo al problema.

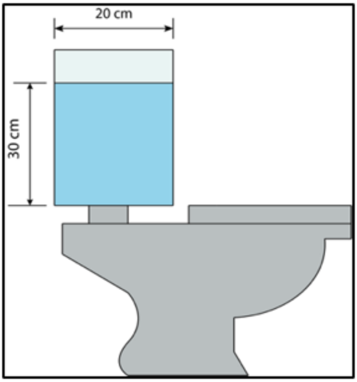
$$t = \frac{2{,}5\ m^2}{0{,}02\ m^2}\sqrt{\frac{2}{9{,}8\ m/s^2}1{,}3\ m} = 64{,}34\ s$$

Actividades 4.2.1

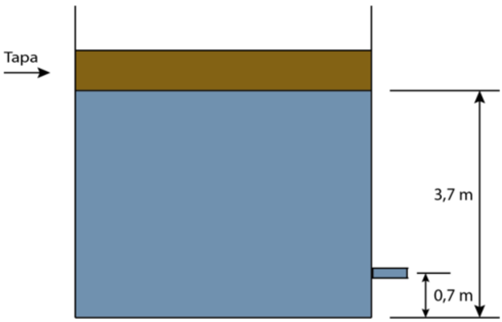
Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Un inodoro tiene un tanque de base cuadrada de 20 cm de lado por 40 cm de alto, el agua está 10 cm por debajo del borde del tanque, tal como se presenta en la siguiente figura. En el fondo del tanque hay una válvula de 1,5 cm de radio. Al momento de

tirar de la palanca o cadena, determinar la rapidez con la que el agua sale por la válvula y el tiempo de vaciado del tanque.



2. Considere un tanque de agua que está tapado con una placa deslizante de 10 m^2 y 1 500 kg de masa. El agua está a 3,7 m de altura. Determinar el caudal de agua que sale por un orificio de 8 cm de radio ubicado a 70 cm del fondo del tanque y el tiempo que demora en vaciarse hasta la altura a la que se encuentra el orificio.



3. A un depósito de gasolina de forma cilíndrica de 50 cm de radio y 2 m de altura, se le perfora en el fondo un orificio circular de 6 cm de diámetro. Determinar el tiempo que se demora en vaciarse completamente.

TUBO DE PITOT

El ingeniero y físico francés Henri Pitot en 1732 inventó un dispositivo que lleva su nombre "Tubo de Pitot" para medir la presión total o presión de estancamiento, la misma que es la resultante de la presión estática y dinámica. Este instrumento es utilizado para medir la velocidad del viento en aparatos aéreos, como por ejemplo la velocidad de un avión a través del flujo del aire.

En la figura 47 se observa un tubo de Pitot y las líneas de corriente de un flujo. En el punto 1 se crea una región donde la velocidad local del flujo se reduce a cero, por lo que la presión aumenta, conocido como punto de estancamiento.

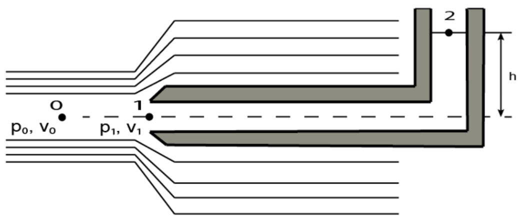


Figura 47. Tubo de Pitot

Para simplificar el análisis consideramos que los puntos 0 y 1 se encuentran a la misma altura y que las pérdidas son despreciables. Aplicando la ecuación de Bernoulli, tenemos;

$$p_1 = p_t = p_0 + \frac{1}{2}v_0^2\rho \tag{4.3}$$

Donde:

p_t Representa a presión total o presión de estancamiento.

p_0 Representa la presión de la corriente sin perturbación.

v_0 Representa la velocidad de la sin perturbación.

Ahora, utilizando la ecuación (4.3) y la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, tenemos:

$$p_t + \frac{1}{2}v_1^2\rho + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}v_2^2\rho + \rho g h_2 \tag{4.4}$$

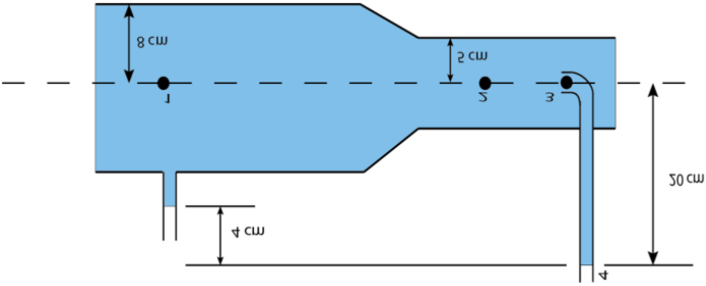
En los puntos 1 y 2 las condiciones estáticas son; $v_1=v_2=0$ y $h_2-h_1=h$

$$p_t = \rho g h + p_2 \tag{4.5}$$

La ecuación (4.5) expresa la PRESIÓN TOTAL EN UN TUBO DE PITOT.

Ejercicio modelo 4.3.1

Determinar el caudal que circula por la siguiente figura. Considere que no existen rozamientos.



Como los puntos 1 y 2 están a la misma altura, la ecuación de Bernoulli se reduce a:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Despejando p_2

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

De la misma manera, aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 2 y 3, en el punto 3 hay un punto de estancamiento por lo que v_3=0 m/s

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_3$$

Despejando el valor de p_2 en la ecuación anterior tenemos.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_3$$

Resolviendo y despejando v_1

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_3 - p_1)}{\rho}}$$

Por otro lado, aplicando la ecuación fundamental de la estática de fluidos a los puntos 1 y 3, tenemos.

$$p_3 = \rho g z_3 \qquad\qquad p_1 = \rho g z_1$$

Restando ambos miembros,

$$p_3 - p_1 = \rho g z$$

Reemplazando la ecuación anterior en la ecuación para obtener v_1

$$v_1 = \sqrt{2gz}$$

Reemplazando los datos que nos da el problema.

$$v_1 = \sqrt{2(9{,}8)(0{,}04)} = 0{,}784\frac{m}{s}$$

Aplicando la ecuación del Caudal, tenemos.

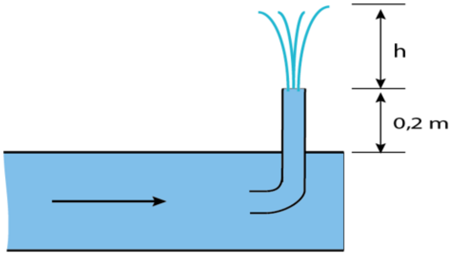
$$Q = S\,v = \pi\,(0{,}08)^2\;0{,}784 = 0{,}015\frac{m^3}{s}$$

Actividades 4.3.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

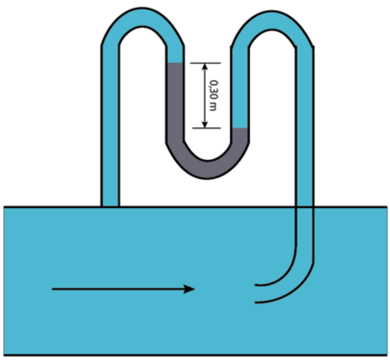
1. En la siguiente figura, considere un tubo Pitot que está sumergido en una corriente de agua, la velocidad del flujo es de

4 m/s. Si la parte superior del tubo se encuentra a 0,2 m sobre el nivel del agua y es abierto a la atmósfera determinar qué altura alcanzará el chorro de agua que sale por el tubo.



2. Si un tubo de Pitot se sumerge en la corriente de un río y el agua alcanza una altura de 0,18 m en el tubo. ¿A qué velocidad fluye el agua?

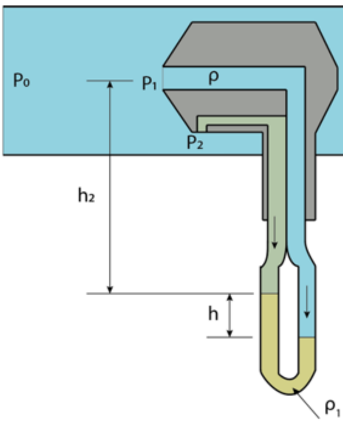
3. Determinar la velocidad de la corriente de agua en una tubería si la diferencia de alturas que marca el manómetro de mercurio unido al tubo de Pitot es de 0,30 m.



TUBO DE PRANDTL

El físico alemán Ludwig Prandtl tuvo la ingeniosa idea de combinar un Tubo de Pitot y un tubo piezométrico en un solo instrumento al que llamaremos “Tubo Prandtl”. Como ya sabemos; el Tubo de Pitot sirve para medir la presión total y el tubo piezométrico sirve para medir la presión estática, por lo que el tubo Prandtl medirá la diferencia entre estas dos presiones, obteniendo así la presión dinámica. Este instrumento se utiliza mucho en los laboratorios de investigación para determinar las velocidades del aire en estudios aerodinámicas.

En la siguiente figura tenemos un Tubo de Prandtl conectado a un manómetro diferencial e inmerso dentro de un flujo de fluido que posee una densidad ρ. El manómetro diferencial contiene un líquido con densidad ρ_1.



De la misma manera que el tubo de Pitot, si el tubo de Prandtl se introduce en el fluido provoca una perturbación, el mismo que forma en el punto 1 un estancamiento, es decir:

$$p_1 = p_t \quad \text{y} \quad v_1 = 0 \tag{4.6}$$

En el punto P_0 la corriente no perturbada tiene una presión p_θ y una velocidad v_0 que es la velocidad que se pretende medir.

El punto P_1 se encuentra en la entrada del Tubo de Pitot, y el punto 2 es la entrada del tubo piezométrico donde no existe perturbación de la corriente, por lo que se obtiene una presión estática.

Para simplificar el análisis el tubo será muy fino, las diferencias de alturas entre el punto P_0 y P2 no se considerarán, por lo que:

$$v_2 = v_0 \qquad p_2 = p_0 \tag{4.7}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos P_1 y P_2, tenemos:

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \tag{4.8}$$

Reemplazando las igualdades (4.7) en (4.8), tenemos:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \tag{4.9}$$

Por otro lado, para ir del punto 1 al punto 2 por el interior del manómetro, si los dos fluidos están en reposo podríamos aplicar la ecuación fundamental de la hidrostática, es decir:

$$p_1 = p_2 + \rho g h_2 + \rho_1 g h = \rho g h - \rho g h_2 \tag{4.10}$$

Reemplazando la ecuación (4.9) en (4.10) tenemos.

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 = (\rho_1 - \rho) g h \tag{4.11}$$

La ecuación (4.11) expresa la presión dinámica teórica del tubo de Prandtl.

Si de la ecuación (4.11) despejamos v_0, tenemos.

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g(\rho_1 - \rho)h}{\rho}} \tag{4.12}$$

La ecuación (4.12) expresa la velocidad teórica de la corriente en un tubo de Prandtl

Ejercicio modelo 4.4.1

Determine la velocidad de una corriente de agua, a la que se le ha sumergido un Tubo Prandtl, y el líquido manométrico (mercurio) tiene una diferencia de altura de 0,20 m.

Utilizando la ecuación (4.12) y reemplazando los datos que nos da el problema.

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g(\rho_1 - \rho)h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\ 9{,}8\ (13\ 600 - 1\ 000)\ 0{,}2}{1\ 000}}$$

$$v_0 = 7{,}02\frac{m}{s}$$

Actividades 4.4.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Se utiliza un tubo Prandtl para determinar la velocidad de un avión con respecto al aire. Cuando la presión estática más la presión dinámica es de 103 000 Pa, la presión atmosférica a la

altura a la que vuela el avión es de 90 000 Pa y la densidad del aire es 1,25 kg/m^3.

2. Determine la velocidad de una corriente de agua, a la que se le ha sumergido un Tubo Prandtl, y el líquido manométrico (mercurio) marca una diferencia de altura de 0,18 m.

3. Qué diferencia de altura marcará el líquido manométrico (mercurio), de un Tubo Prandtl que está sumergido en una tubería por la que fluye petróleo a una velocidad de 5 m/s, $\rho_{petroleo}$=800 kg/m^3.

EL SIFÓN

Cuando no se pueda extraer un líquido de un recipiente o depósito, se puede utilizar un sifón, instrumento que es usado por las personas desde hace muchos siglos atrás. La salida del sifón debe estar más abajo que la entrada, y el tubo debe estar desde un inicio completamente lleno del líquido, esto se lo puede hacer succionando el tubo en el extremo libre. La figura 48 muestra el boceto de un sifón en funcionamiento.

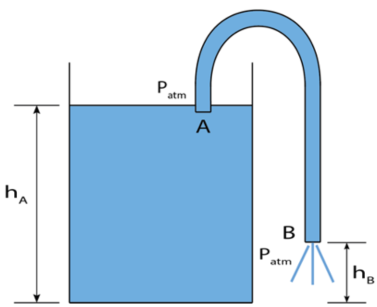


Figura 48. Bosquejo de un sifón

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos A y B, tenemos;

$$p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \tag{4.13}$$

Como ambos puntos están abiertos a la superficie, $p_A = p_B$, por lo que.

$$\rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Como la superficie S_A se considera muy grande su velocidad tiende a cero y el líquido es el mismo por lo que ρ permanece constante, es decir.

$$g h_A = g h_B + \frac{1}{2} v_B^2$$

Despejando v_B tenemos.

$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} \tag{4.14}$$

La ecuación (4.14) representa la velocidad de salida del líquido por un sifón.

Ejercicio modelo 4.5.1

Determinar la velocidad de desagüe de un sifón, en el que un extremo está a una altura de 4 m y el otro a 2 m.

Utilizando la ecuación (4.14) y reemplazando los datos que nos da el problema.

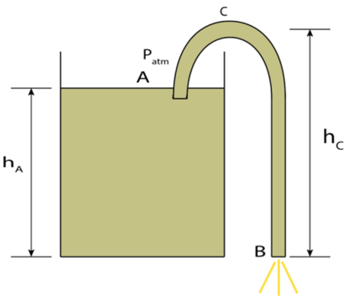
$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} = \sqrt{2\ 9{,}8\,(4-2)}$$

$$v_B = 6{,}2\,\frac{m}{s}$$

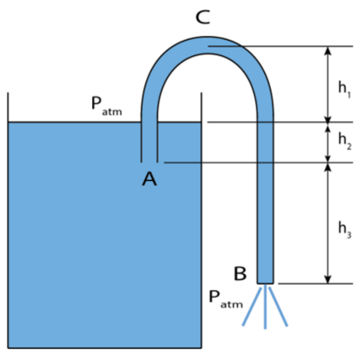
Actividades 4.5.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. El sifón de la siguiente figura por el que fluye agua, tiene un radio de 7 cm, las alturas h_A=3 m y h_C=4 m. Determine la velocidad y el caudal de desagüe en el punto B.



2. En la siguiente figura, en función de los datos que se muestran determine; a) La velocidad de salida del líquido en el punto B, b) Presión en el punto C y c) La máxima altura que debe tener h_1 para que que el sifón pueda seguir levantando agua.



MEDIDOR O TUBO DE VENTURI

En 1797 el físico italiano Giovanni Venturi demostró un fenómeno que lleva su nombre "Efecto Venturi" que consiste en la disminución de la presión cuando incrementa la velocidad del flujo al atravesar una superficie de menor tamaño. Este fenómeno se deriva de la ecuación de continuidad y de la ecuación de Bernoulli.

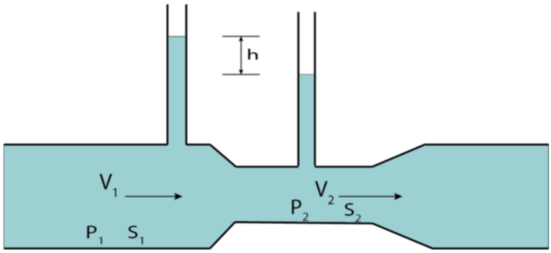


Figura 49. Efecto Venturi

Consideremos dos puntos 1 y 2 que se encuentran a la misma altura, pero con diferentes secciones S_1 y S_2, según la ecuación de Bernoulli tenemos.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como los dos puntos están a la misma altura, y al ser el mismo fluido, la ecuación de Bernoulli queda de la siguiente forma.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Una de las aplicaciones más práctica de este efecto, es el medidor de Venturi o "Venturímetro", el mismo que es un dispositivo que se utiliza para medir gastos o caudales y velocidades de fluidos en tuberías.

En la ecuación anterior aplicando el principio de continuidad, donde v_1 S_1=v_2 S_2, despejando v_2 en función de v_1, obtenemos.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1\frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

Despejamos la diferencia entre las presiones de los dos puntos.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\,\rho\left(v_1\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

Aplicando factor común.

$$\Delta p = \frac{1}{2}\,\rho v_1^2\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right] \qquad (4.15)$$

Despejando,

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]\rho}} \qquad (4.16)$$

De la ecuación del caudal, tenemos.

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$Q = S_1\sqrt{\frac{2\Delta p}{\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]\rho}} \qquad (4.17)$$

Aplicando la ecuación fundamental de la estática de fluidos en los puntos 1 y 2, tenemos que.

$$\Delta p = \rho h g$$

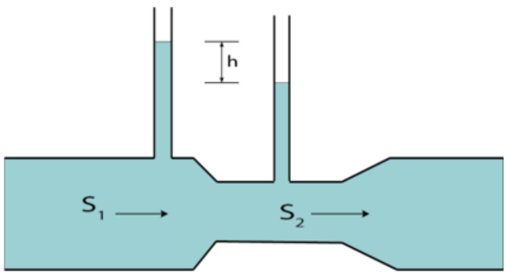
Reemplazando en la ecuación en la ecuación (4.17) tenemos que;

$$Q = S_1 \sqrt{\frac{2\rho h g}{\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]\rho}} \qquad (4.18)$$

Con la ecuación (4.18) podemos calcular el gasto y/o la velocidad del fluido midiendo la diferencia de nivel en los dos tubos verticales, h.

Ejercicio modelo 4.6.1

En la siguiente figura, las partes anchas del tubo de sección transversal S_1 tienen un área de 10 cm^2 y la parte angosta S_2 tiene 5 cm^2. Si la diferencia de alturas de los tubos manométricos *h* es de 30 cm y el líquido que fluye es agua. Determinar, a) las diferencias de presiones en S_1 y S_2, b) la velocidad en el punto S_1 y c) el caudal.



Como;

$$\Delta p = \rho h g = 1\,000\frac{kg}{m^3}0{,}3\,m\,9{,}8\frac{m}{s^2} = 2\,940\,Pa$$

Reemplazamos en la ecuación (4.16) el valor encontrado anteriormente y los valores que nos da el problema, es decir.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\ 2940\ Pa}{\left[\left(\frac{1\ E-3}{5\ E-4}\right)^2 - 1\right] 1\ 000 \frac{kg}{m^3}}} = 1{,}4 \frac{m}{s}$$

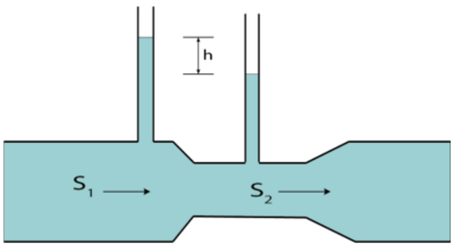
Ahora, utilizando la ecuación (4.18), y reemplazando los valores correspondientes, tenemos:

$$Q = 1E-3 \sqrt{\frac{2\ 2940\ Pa}{\left[\left(\frac{1\ E-3}{5\ E-4}\right)^2 - 1\right] 1\ 000 \frac{kg}{m^3}}} = 1{,}4\ E-3\ \frac{m^3}{s}$$

Actividades 4.6.1

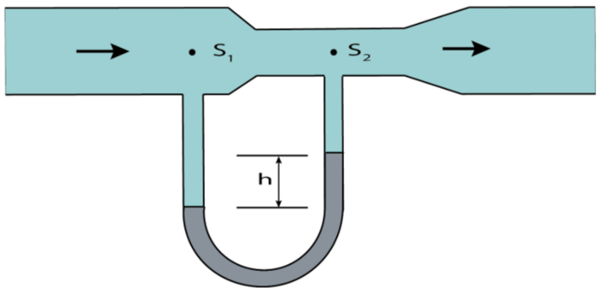
Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Un tubo de Venturi en su parte más ancha posee un diámetro de 0,2 m y una presión de 4,2 E4 Pa. En la parte estrecha, el diámetro es de 0,05 m y la presión es de 3 E4 Pa. Determinar la velocidad en la parte estrecha si el líquido que fluye es petróleo.

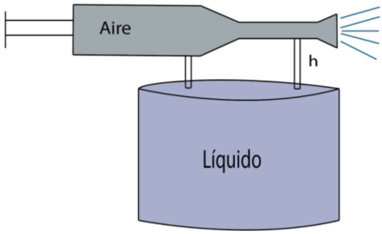


2. La parte más ancha de un tubo de Venturi tiene un diámetro de 8 cm y una presión de 3 E4 Pa. En el estrechamiento del tubo, el diámetro mide 4 cm y tiene una presión de 2 E4 Pa. Determinar la velocidad inicial del agua que fluye a través de la tubería y el caudal.

3. La tubería de la siguiente figura tiene una sección transversal S_1 = 40 cm² en la parte ancha y S_2 = 10 cm² en la parte angosta. En régimen estacionario cada 6 segundos sale de 30 litros de agua. Determinar: a) La velocidad en la parte estrecha, b) La diferencia de presión entre S_1 y S_2, c) La diferencia de alturas entre las columnas de mercurio en el tubo en U conectado debajo.



4. Una bomba manual de rociado que absorbe líquido de un recipiente, a través de una manguera de 9 cm de largo conectada a su tubería más angosta. El diámetro del tubo ancho S_1 es de 2,7 cm, el diámetro del tubo angosto S_2 es de 4 mm y el líquido en el recipiente tiene una densidad de 0,7 g/cm^3. Si la densidad del aire en la bomba es de 1,4 E-3 g/cm^3. Determinar; a) La diferencia de presiones entre S_1 y S_2, mínima para elevar el líquido desde el recipiente a la bomba. b) Las velocidades mínimas v_1 y v_2.



SUSTENTACIÓN DE UN AVIÓN

Las personas que han volado en un avión o que simplemente los han visto volar, en algún momento de su vida se debieron preguntar ¿Por qué vuela un avión?, o ¿Cómo es posible que un objeto tan pesado vuele? Preguntas que pueden ser respondidas mediante la ecuación de Bernoulli.

Como sabemos, para que un cuerpo esté en movimiento debe existir una fuerza actuando sobre él. En un avión en movimiento existen 4 fuerzas, el peso (que depende de la masa del avión), resistencia (fuerza de oposición del aire), el impulso (fuerza generada por las turbinas del avión) y la sustentación, (fuerza que estudiaremos en este tema), tal como se indica en la figura 50.

Figura 50. Fuerzas que se encuentran en un avión

La sustentación es la fuerza que se origina cuando un cuerpo se desplaza a través de un fluido, su dirección es perpendicular a la velocidad de la corriente incidente (Llana y Pérez, 2015)

Para comprender mejor esta definición vamos a centrarnos en el ala de un avión, tal como se muestra en la siguiente figura.

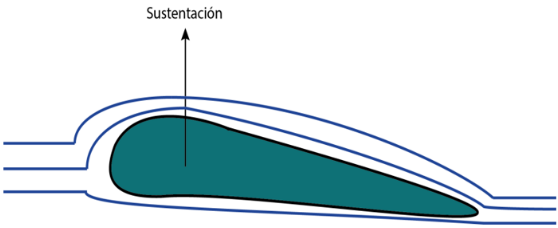


Figura 51. Perfil de ala de un avión

La figura 51 muestra el ala de avión a la que se ha realizado un corte transversal, consideremos que el ala se mueve a través del fluido aire.

Al momento que llega el aire al ala del avión, las partículas de aire se separan, parte de ellas se van por la parte superior del ala y otra parte por la parte inferior. Si observamos la imagen anterior, podemos apreciar que las partículas que fluyen por la parte superior del ala tienen que recorrer mayor distancia (debido a la forma del ala) comparada con las partículas que fluyen por la parte inferior.

Al recorrer mayor distancia en el mismo tiempo su velocidad tiende a aumentar, por lo que, de acuerdo al principio de Bernoulli, si la velocidad aumenta, la presión disminuye. Provocando que la presión sea mayor debajo del ala que en su parte superior. Esta diferencia de presiones genera una fuerza hacia arriba, la misma que se conoce como fuerza de SUSTENTACIÓN. Si partimos de la ecuación de Bernoulli entre dos puntos a la misma altura, tenemos.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Si consideramos que el punto 1 es la región sobre el ala del avión y el punto 2 la región inferior, tenemos que:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_2 - P_1$$

Reemplazamos al segundo término de la ecuación por Δp.

$$\frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2) = \Delta p$$

De acuerdo a la ecuación, (1.10) sabemos qué.

$$F_s = \Delta p\, S$$

Es decir

$$F_s = \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2) S \tag{4.19}$$

Sin embargo, es preciso indicar que la ecuación anterior no se cumple a cabalidad en el ala de un avión, debido en gran medida a la forma y el ángulo de ataque con el que el avión atraviesa el fluido, eso provoca que se le dificulte al fluido seguir el perfil del ala provocando un pequeño flujo turbulento.

A la ecuación (4.19) se la corrige agregando un coeficiente aerodinámico adimensional llamado coeficiente de sustentación, que es propio de cada ala de avión, el mismo que depende de su forma y material con el que se elabora, este coeficiente se determina experimentalmente en los laboratorios aerodinámicos.

Por lo que la fuerza de sustentación queda determinada mediante la siguiente ecuación.

$$F_s = \frac{1}{2}\rho\, v^2 S\, C_s \tag{4.20}$$

Donde:

- S es la superficie que produce la sustentación
- C_s, es el coeficiente de sustentación.
- v es la velocidad relativa del fluido.
- ρ es la densidad del fluido.

Los aviones frecuentemente vuelan a una altura aproximadamente de 11 000 m, denominada altura crucero, donde la densidad del aire es de 0,3629 kg/m^3 y cuentan con una menor resistencia del aire, por lo que pueden viajar más rápido y gastar menos combustible.

Otro dato importante, es que la fuerza de sustentación es perpendicular a la dirección de flujo, no importa la posición que tenga. En la siguiente figura se observa casos de fuerzas de sustentación.

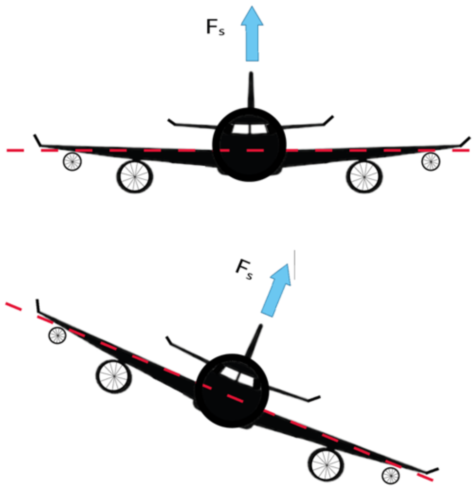


Figura 51. Fuerzas de Sustentación en diferentes posiciones de vuelo.

La fuerza de sustentación no está presente únicamente en los aviones, también la podemos encontrar en los autos de fórmula 1. En estos autos las alas son colocadas inversamente de modo que la fuerza de sustentación mantenga al auto sobre el piso cuando se desplace a grandes velocidades, a esas alas se las conoce como arelones. Tal como se puede observar en la siguiente figura.

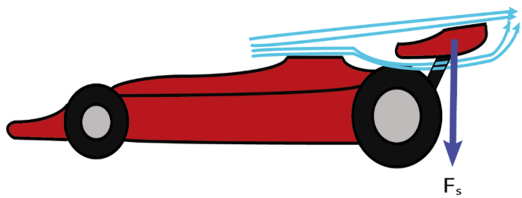


Figura 52. Fuerzas de Sustentación en diferentes posiciones de vuelo

Ejercicio Modelo 4.7.1

Determinar la fuerza de sustentación que experimenta un perfil de ala de un avión modelo Airbus, que tiene un coeficiente de sustentación de 0,49. El mismo que se desplaza con una velocidad de 600 km/h. Considere que tiene una superficie alar de 126 m^2 y la densidad del aire en condiciones normales.

Utilizando la ecuación (4.20).

$$F_s = \frac{1}{2}1{,}290\ (166{,}66)^2(126)(0{,}49) = 1\ 106\ 086{,}50\ N$$

Actividades 4.7.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Determine la fuerza neta sobre las alas de un avión cuya superficie alar es 350 m^2, si se desplaza a 920 km/h a una altura de 11 000 metros y la diferencia de velocidades del aire arriba y abajo del ala es de un 12% de la velocidad inferior. Considere la fuerza de sustentación sin corregir.

2. Si la fuerza de sustentación que experimenta el ala de un avión cuando despega es de 500 000 N, y la velocidad relativa con la que vuela el avión es de 420 km/h y el coeficiente de sustentación del perfil de ala es de 0,5. Determinar la superficie que produce la sustentación.

3. Para la construcción de aviones comerciales se exige una fuerza de sustentación de aproximadamente 2 000 N/m^2 al nivel del

mar a temperatura ambiente. El flujo de aire por la cara inferior del ala tiene una velocidad de 130 m/s. Determine la velocidad que debe existir en la cara superior para conseguir la fuerza de sustentación exigida de acuerdo a la ecuación sin corregir.

4. Suponga un pequeño aeroplano de 1500 kg de masa que vuela a través del aire. El flujo de aire por sus alas tiene velocidades de 80 m/s en la cara superior y 69 m/s en la cara inferior. Si la superficie de sus alas es de 17 m^2. Calcule la fuerza de sustentación neta que actúa sobre ellas al nivel del mar.

EFECTO MAGNUS

Todos los amantes de los deportes que conlleven un balón como instrumento de juego, hemos visto como éste describe movimientos antinaturales que pareciera que desafían a la física. Tomemos como ejemplo un balón de futbol, con el que se han marcado a lo largo de la historia asombrosos goles, en muchos casos para entrar en la portería describieron trayectorias curvas que terminaron engañando al portero.

El caso más conocido es del jugador Roberto Calos, quien en 1997 marcó un gol de tiro libre, donde la trayectoria del balón describió una curvatura tan pronunciada que el portero francés Fabián Barthez quedó atónito y perplejo en la línea de meta. Tal como se observa en la figura 53.

Figura 53. Trayectoria del gol de Roberto Carlos

La explicación a este gol y a muchos otros más está en el "Efecto Magnus", fenómeno físico llamado así en honor al físico y químico de nacionalidad alemana Heinrich Gustav Magnus quién lo pudo explicar correctamente en 1853.

El efecto Magnus se origina cuando un cuerpo en rotación se traslada a través de un fluido, de modo que la rotación afecta a la trayectoria seguida por el cuerpo. Por ejemplo, en un partido de futbol si se lanza un balón sin que tenga rotación, las capas de aire fluyen a su alrededor de manera uniforme, después de terminado el impulso inicial, el balón viaja bajo la acción de la fuerza de la gravedad y la fuerza de fricción originada por el aire, a este tipo de movimiento se lo conoce en física como movimiento de un proyectil, tal como se indica en la figura 54.

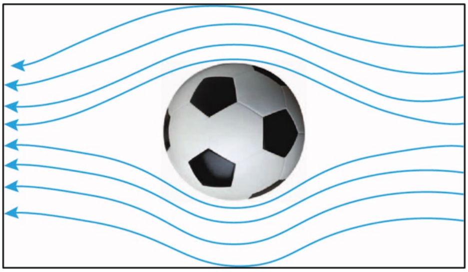


Figura 54. Líneas de flujo en un balo con velocidad lineal

Ahora, si al mismo balón se lo lanza de manera que rote, debido a la fricción con el aire el balón arrastrará las capas de aire más cercanas, ocasionando que se cree una especie de remolino a su alrededor.

Es decir, cuando un balón gira, por efecto de la viscosidad se genera un flujo rotacional de aire a su alrededor. De modo que sobre una parte del balón el movimiento de rotación tiene igual sentido que la corriente de aire, causando que la velocidad aumente y disminuya la presión, en cambio en la otra parte del balón, la rotación es en sentido contrario a la corriente de aire, por lo que la velocidad disminuye y la presión aumenta, tal como se observa en la figura 55.

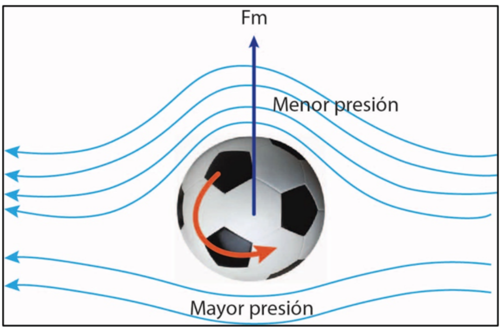


Figura 55. Líneas de flujo de aire en un balón con velocidad lineal y angular

De acuerdo al principio de Bernoulli, ecuación (3.39) se puede concluir que en un punto si la velocidad disminuye la presión aumenta y viceversa. Esto provocará que exista una diferencia de presiones en los dos lados opuestos del balón, esta diferencia de presiones de acuerdo a la ecuación (1.10) generará una fuerza llamada "Fuerza Magnus", la misma que desplaza al balón de la trayectoria que tendría si no estuviera dentro del aire.

Se puede determinar la expresión que define la fuerza de Magnus, para un balón de radio R, si la velocidad angular se representa con ω, la velocidad lineal se obtiene mediante la siguiente relación: $v=\omega R$

Partiendo de la ecuación de Bernoulli (3.39).

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Cómo los dos puntos están a la misma altura.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Despejando las presiones.

$$p_1 - p_2 += \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

De acuerdo al análisis, en un extremo del balón las velocidades se suman y en el otro extremo se restan, por lo que:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho[(v + \omega R)^2 - (v - \omega R)^2]$$

Resolviendo.

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho\,(4v\omega R) = 2\rho v\omega R \tag{4.21}$$

Utilizando la ecuación (1.10) y teniendo en cuenta que la superficie en contacto del balón con las líneas de flujo de aire es aproximadamente la cuarta parte de la superficie total, la fuerza de Magnus es:

$$Fm = 2\rho v\omega R\, S = 2\rho v\omega\pi R^3 \tag{4.22}$$

De modo que la Fuerza de Magnus depende la densidad del aire, la velocidad de flujo, la velocidad angular y las dimensiones del balón.

No solamente se considera el efecto Magnus en el deporte, también es muy importante en la navegación, existen algunos barcos que contienen cilindros verticales giratorios de modo que cuando exista un flujo de viento considerable aprovechan el efecto Magnus para impulsarse. Tal como se observa en la siguiente figura.

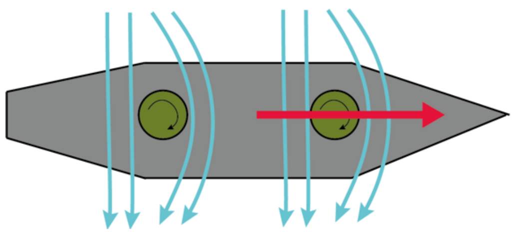


Figura 56. Fuerza de propulsión por efecto Magnus

El ingeniero Anton Flettner fue pionero en utilizar este efecto en un barco Buckau, los dos cilindros verticales que rotan generan un impulso al barco cuando existen vientos fuertes.

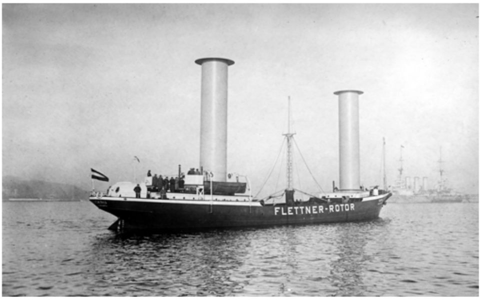


Figura 57. Barco rotor Flettner

Actividades 4.8.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. ¿Es posible que debido a la rotación de la tierra exista el efecto Magnus en el espacio? Justifique.

   …………………………………………………………………

   …………………………………………………………………

   …………………………………………………………………

2. Deduzca la ecuación que expresa la fuerza de Magnus por unidad de longitud para un cuerpo cilíndrico.

3. Determine el valor de la fuerza de Magnus que experimenta un balón oficial de futbol (diámetro promedio 22 cm) que se desplaza a través del aire con la velocidad lineal de 25 m/s, si rota con una velocidad angular de 5 rad/s mientras se desplaza.

4. Qué velocidad lineal debe imprimirle Leonel Messi a un balón de futbol para que adquiera una fuerza Magnus de 3 N, si lo golpea de tal manera que adquiera una velocidad angular de 8 rad/s.

LA EXPERIMENTACIÓN EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Capítulo 5

LA EXPERIMENTACIÓN EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS

SEMEJANZA DE MODELOS

Con el avance de la tecnología, hoy en día se cuentan con supercomputadoras que son capaces de resolver muchos problemas relacionados a la mecánica de fluidos. Sin embargo, existen problemas que sólo se lo pueden hacer experimentalmente.

Esto se debe a que cuando se desea construir algún tipo de máquina hidráulica, se necesitan hacer pruebas experimentales, donde se verifiquen algunos parámetros relacionados con su diseño, para este proceso se pueden realizar de dos maneras;

- **a.** Construir un prototipo de dimensionales iguales.
- **b.** Considerar una variable dependiente en función de las restantes que existen.

Estos procedimientos sin embargo no se pueden realizar, debidos a que, por un lado, si se desea por ejemplo construir una turbina para una represa eléctrica, resultaría muy costoso construir un prototipo del mismo tamaño en donde se puedan realizar modificaciones según los requerimientos del estudio. Por el otro lado, al considerar un análisis de las curvas de una variable en función de varias variables necesitaríamos una gran cantidad de datos experimentales que también sería muy costoso y demorado obtenerlos.

Por lo que se suele hacer en estos casos es construir un prototipo a escala, mucho más pequeño y reducir el número de variables a una dependiente y otra independiente. Donde una vez que se estudie el modelo experimental se puede predecir el comportamiento del modelo real.

La reducción de las variables originó la aparición de números adimensionales como; número de Euler, número de Froude y número de Reynolds. De esta forma se estudia un fenómeno experimental de la función de una variable en función de cualquiera de las otras.

Al utilizar modelos reducidos en la mecánica de fluidos para construir y experimentar; ríos, puertos, estructuras hidráulicas, represas, máquinas hidráulicas como bombas y turbinas, barcos, aviones experimentados en túneles de viento, donde se estudian todos los parámetros involucrados.

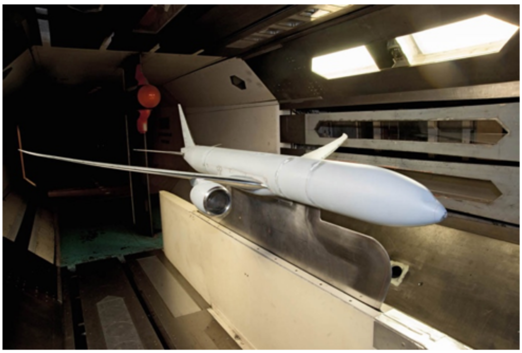


Figura 58. Boeing 777X en el túnel de viento para diferentes fases de vuelo

Actividades 5.1

Responda las siguientes preguntas.

1. ¿De qué maneras se pueden realizar pruebas experimentales cuando se requiere fabricar máquinas hidráulicas?

   ....

   ....

   ....

2. ¿Qué se debe realizar para reducir el coste de las pruebas experimentales en máquinas hidráulicas?

   ....

   ....

   ....

3. ¿Qué originó la aparición de los números de Euler, Reynolds y Froude?

   ....

   ....

   ....

TEORÍA DE MODELOS

Después de realizar los cálculos con los modelos a escala, tal vez nos preguntemos, ¿Cómo predecir ahora el comportamiento del diseño real? Para ello, tendremos en cuenta los siguientes aspectos.

1. El modelo debe ser geométricamente semejante al diseño real.

El modelo y el diseño real deben ser geométricamente semejantes, caso contrario sería imposible comparar los resultados. Para diferenciarlos asignaremos el subíndice *m*, al modelo a escala y el subíndice *r* al diseño real, para longitudes d, superficies S, y volúmenes V, tenemos;

$$\frac{d_r}{d_m} = \lambda \qquad \frac{S_r}{S_m} = \lambda^2 \qquad \frac{V_r}{V_m} = \lambda^3 \qquad (5.1)$$

Donde λ es la escala del diseño real en relación a la del modelo.

2. El modelo debe ser dinámicamente parecido al diseño real.

Al momento de comparar los fenómenos del diseño real y del modelo a escala, no es suficiente con que sean geométricamente iguales, además los flujos o las líneas de corriente deben ser iguales. Por lo que se requiere que parámetros como la velocidad, aceleración, fuerzas, etc., se determinen en relaciones bien especificadas, las mismas que se derivan de la igualdad de los números de Euler, Froude, Reynolds, etc.

Actividades 5.2

Responda las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo debe ser el modelo a escala para predecir el comportamiento en el diseño real?

   ....

2. ¿Qué se deduce de la igualdad de los números de Euler, Froude, Reynolds, etc.?

   ....

SEMEJANZA DINÁMICA Y GRADIENTE DE PRESIONES: NÚMERO DE EULER

Consideremos que deseamos determinar las fuerzas a las que estará sometido la columna de un puente que tiene la forma de la siguiente figura.

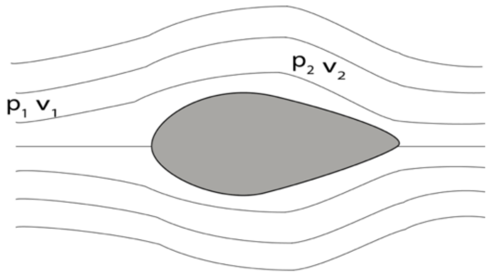


Figura 59. Líneas de corriente en torno al perfil de la columna de un puente

Se hará el estudio con un modelo a escala qué puede tener por ejemplo 50/1.

En la gráfica 59 tenemos un fluido bidimensional, las fuerzas originadas por la viscosidad podrán despreciarse, por lo que las únicas fuerzas que tendremos en cuenta son las originadas por el gradiente de presiones en el perfil de la columna. Se sabe que en el punto 1 la corriente es uniforme, por lo que su velocidad v_1 en todos los puntos será constante.

Aplicando la Ecuación de Bernoulli en dos puntos del flujo, tenemos:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como los dos puntos están a la misma altura y si separamos términos semejantes, la ecuación anterior se reduce a:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

Factor común v_1^2

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$$

Si $p_2 - p_1 = \Delta p$ y despejándola.

$$\frac{2\ \Delta p}{\rho v_1^2} = 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \qquad (5.1)$$

Si aumenta v_1 aumentará también v_2 por lo que tendremos una constante en el segundo miembro de la ecuación.

$$\frac{2\ \Delta p}{\rho v_1^2} = K \qquad (5.2)$$

Reescribiendo tenemos.

$$\frac{v_1^2}{2\Delta p/\rho} = K \qquad (5.3)$$

La raíz de una constante será otra constante

$$\frac{v_1}{\sqrt{2\Delta p/\rho}} = K \qquad (5.4)$$

A la constante K de la ecuación (5.4) se lo denomina Número de Euler y se lo representa con Eu.

$$Eu = \frac{v_1}{\sqrt{2\Delta p/\rho}} \qquad (5.5)$$

El número de Euler, es un número adimensional de semejanza para los análisis de fenómenos donde actúen las fuerzas originadas por el gradiente de presiones, si el modelo es geométricamente igual a diseño real y no existen otras fuerzas, el número de Euler será el mismo entre puntos homólogos.

Por ejemplo si queremos construir un modelo de una escala 20/1, podríamos construir la columna de puente de un material por ejemplo plástico y colocarlo en un canal, donde podríamos hacer fluir un caudal de agua a través de una bomba, obteniéndose las velocidades requeridas, en el modelo se toman las medidas de presión en todo el contorno de la columna y la presión en un punto homólogo en el diseño real se determinaría mediante la igualdad de los números de Euler, es decir.

$$Eu_r = Eu_m \tag{5.6}$$

$$\frac{v_{1r}}{\sqrt{2\Delta p_r/\rho_r}} = \frac{v_{1m}}{\sqrt{2\Delta p_m/\rho_m}} \tag{5.7}$$

Despejando el gradiente de presiones del diseño real y como el fluido en ambos casos será agua, tenemos.

$$\Delta p_r = \frac{v_{1r}^2\ \Delta p_m}{v_{1m}^2} \tag{5.8}$$

Si la ecuación (5.8) la aplicamos punto a punto en el modelo a escala podemos determinar la distribución de presiones en el diseño real de la columna del puente y sin tener que construirlo.

Actividades 5.3.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Si en la ecuación (5.7) utilizamos en el modelo a escala, aire en vez de agua para la prueba experimental, determine la nueva ecuación (5.8).

2. El número de Euler puede expresarse también como el cociente entre la fuerza de inercia (ma) y la fuerza originada por el gradiente de presiones ($\Delta p\ d_2$). Establezca este cociente y compruebe si se obtiene la ecuación (5.5).

3. Determine la variación de presión que experimentará la columna de un puente que estará sumergido en agua de mar que tiene una velocidad de 30 m/s, si el prototipo a escala sumergido en agua dulce experimenta una variación de presión de 1000 Pa, cuando la corriente fluye a 5 m/s.

SEMEJANZA DINÁMICA CON PREDOMINIO DE LA GRAVEDAD: NÚMERO DE FROUDE

Cuando se estudian máquinas hidráulicas que contengan, orificios, tubos, vertederos, etc. hay que tener en cuenta a la gravedad, ya que no basta con que el modelo y el diseño sean geométricamente iguales para que los números de Euler sean iguales en puntos homólogos.

Analicemos ahora el cociente entre la fuerza de la inercia y la fuerza peso.

$$\frac{Fuerza\ de\ inercia}{Fuerza\ peso} = \frac{ma}{mg} = \frac{\rho d^3 a}{\rho d^3 g} = \frac{\rho d^3 \frac{v}{t}}{\rho d^3 g} = \frac{\rho d^2 v^2}{\rho d^3 g} \qquad (5.9)$$

Donde d es una longitud cualquiera, v la velocidad del flujo y ρ densidad del fluido. Simplificamos la ecuación (5.9)

$$\frac{v}{\sqrt{dg}} = K \qquad (5.10)$$

Esta relación nos da una constante adimensional conocida como el número de Froude en honor al ingeniero inglés William Froude, es un parámetro de semejanza en los problemas dónde interviene significativamente la gravedad, mientras mayor sea el número de Froude mayor será la importancia de la gravedad.

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{dg}} \qquad (5.11)$$

Para que las pruebas sean dinámicamente semejantes entre el modelo y el diseño real, en los puntos homólogos el número de Froude debe ser el mismo.

$$Fr_r = Fr_m \qquad (5.12)$$

Si observamos las ecuaciones del número de Euler y el número de Froude podemos concluir que el número de Euler es una función del número de Froude, por lo que si los números de Froude del diseño real y el modelo a escala son los mismos también lo serán los números de Euler.

Tanto en el diseño real como en el modelo el valor de la aceleración de la gravedad es el mismo.

$$Fr_r = Fr_m$$

$$\frac{v_r}{\sqrt{d_r g}} = \frac{v_m}{\sqrt{d_m g}}$$

Simplificando tenemos.

$$\frac{v_r}{\sqrt{d_r}} = \frac{v_m}{\sqrt{d_m}} \tag{5.13}$$

En este caso la constante que se obtiene ya no es adimensional.

Ejercicio modelo 5.4.1

A partir de la relación del número de Froude entre el diseño real y modelo a escala determinar la escala de velocidades, es decir v_r / v_m.

Utilizamos la ecuación (5.13)

$$\frac{v_r}{\sqrt{d_r}} = \frac{v_m}{\sqrt{d_m}} \Rightarrow \frac{v_r}{v_m} = \frac{\sqrt{d_r}}{\sqrt{d_m}}$$

Unificando tenemos

$$\frac{v_r}{v_m} = \sqrt{\frac{d_r}{d_m}}$$

De acuerdo a la ecuación (5.1) para longitudes sabemos que $d_r/d_m=\lambda$

$$\frac{v_r}{v_m} = \sqrt{\lambda}$$

La ecuación anterior representa la escala de velocidades según la ley de Froude.

Actividades 5.4.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. A partir de la relación del número de Froude entre el diseño real y modelo a escala determinar la escala de caudales, es decir Q_r/Q_m
2. A partir de la relación del número de Froude entre el diseño real y modelo a escala determinar la escala de tiempos, es decir t_r/t_m sabiendo que $t=d/v$
3. A partir de la relación del número de Froude entre el diseño real y modelo a escala determinar la escala de fuerzas, es decir F_r/F_m
4. Se requiere construir un barco de 100 m de largo que navegará

aproximadamente a una velocidad de 15 m/s, para conocer su comportamiento se construirá un modelo a escala de 2 m de longitud. Determinar la velocidad a la que debe ir el modelo a escala para que se mantenga constante el número de Froude y por ende existe semejanza dinámica.

Figura 60. Modelo a escala de un avión en un túnel de viento

SEMEJANZA DINÁMICA CON PREDOMINIO DE LA VISCOSIDAD: NÚMERO DE REYNOLDS

En algunos experimentos que se realizan además de considerar la fuerza ocasionada por el gradiente de presiones, se considera la fuerza ocasionada por la viscosidad.

De los capítulos anteriores sabemos que la fuerza de viscosidad es proporcional a $\eta v d$, de modo que el cociente entre la fuerza de inercia y la fuerza de viscosidad es:

$$\frac{Fuerza\ de\ inercia}{Fuerza\ de\ la\ viscosidad} \propto \frac{\rho d^3 a}{\eta\ d^2 \frac{v}{d}} = \frac{\rho d^3 a}{\eta d v} = \frac{\rho d^2 v^2}{\eta d v} = \frac{\rho d v}{\eta} \qquad (5.14)$$

Como $\eta/\rho=\nu$

$$\frac{\rho d v}{\eta}=\frac{d\ v}{\nu}=K$$

A esa constante adimensional se la conoce como el número de Reynolds, un parámetro de semejanza que se utiliza en análisis de fenómenos dónde los efectos de la viscosidad son considerables.

$$Re=\frac{\rho d v}{\eta}=\frac{d\ v}{\nu} \tag{5.15}$$

Para que los experimentos del diseño real y el modelo a escala sean dinámicamente iguales es necesario que los números de Reynolds sean iguales. Si el número de Reynolds es mayor, menos importancia tiene la fuerza de viscosidad.

$$Re_r=Re_m \tag{5.16}$$

Es decir,

$$\frac{\rho_r d_r v_r}{\eta_r}=\frac{\rho_m d_m v_m}{\eta_m} \tag{5.17}$$

El número de Reynolds es función del número de Euler, por lo que cuando los números de Reynolds son los mismos deben ser también los números de Euler.

RELACIÓN DE VELOCIDADES

Si utilizamos el mismo fluido en el diseño real y en el modelo a escala el coeficiente de viscosidad dinámica es el mismo, por lo que si en la ecuación (5.16) se reemplaza la igualdad $v_r = v_m$

$$\frac{d_r\ v_r}{\nu_r} = \frac{d_m\ v_m}{\nu_m}$$

$$d_r\ v_r = d_m\ v_m$$

Es decir,

$$\frac{v_r}{v_m} = \frac{d_m}{d_r}$$

Finalmente, de acuerdo a la ecuación (5.1), tenemos.

$$\frac{v_r}{v_m} = \frac{1}{\lambda} \tag{5.18}$$

Ejercicio modelo 5.5.1

Un modelo a escala de un avión tiene un λ=25 y se lo experimentará en un túnel de viento a la misma velocidad que el diseño real, considere que la temperatura del aire será también la misma y que el diseño real volará a una altura donde la presión atmosférica es de 70 000 Pa. Determinar la presión del aire que debe haber en el túnel para que exista semejanza dinámica entre el modelo a escala y el diseño real.

Para que exista semejanza dinámica deben ser iguales los números de Reynolds, utilizando la ecuación (5.17), tenemos.

$$\frac{\rho_r d_r v_r}{\eta_r} = \frac{\rho_m d_m v_m}{\eta_m}$$

Según los datos sabemos que $v_r = v_m$ y como la viscosidad depende de la temperatura $\eta_r = \eta_m$. La ecuación anterior se reduce a;

$$\rho_r d_r = \rho_m d_m$$

Despejando la densidad del modelo a escala.

$$\rho_r \frac{d_r}{d_m} = \rho_m$$

Como $d_r/d_m = \lambda$, tenemos que;

$$\rho_r \, \lambda = \rho_m$$

Es decir,

$$\rho_r \, 25 = \rho_m$$

Según la ecuación (1.3), sabemos que:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}$$

Es decir

$$\frac{Mp_r}{RT} \, 25 = \frac{Mp_m}{RT}$$

Finalmente

$$p_r \, 25 = p_m$$

$$p_m = 25 \; 70000 = 1\;750\;000 \; Pa$$

Actividades 5.5.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Si a un modelo a escala de un avión, 10 veces más pequeño que el diseño real, se lo experimenta en un túnel de viento, con una velocidad tres veces mayor que el diseño real. Si la temperatura del aire es la misma, y el diseño real volará a una altura donde la presión atmosférica es de 65 000 Pa. Determinar la presión del aire que debe haber en el túnel de viento para que exista semejanza dinámica.

2. Calcule el número de Reynolds de una corriente de agua que fluye a una velocidad de 3 m/s a través de una tubería de 8 cm de radio si la temperatura es de 20 °C.

3. Se requiere conocer las fuerzas que actúan sobre una chimenea originadas por la presión dinámica del aire que fluye a 25 m/s. Para ello se construye un modelo a escala 12 veces más pequeño que el original, se lo estudia en un túnel cerrado de laboratorio, en el que el aire se conserva a una densidad 4 veces mayor que la normal y la temperatura es la misma que en la que se tendrá en el diseño real. Determine el momento de flexión en la chimenea real si en el modelo a escala tiene un valor de 18 N.m.

NÚMERO DE REYNOLDS

El comportamiento de un fluido depende de su velocidad, puesto que cuando la velocidad alcanza un valor crítico su naturaleza del flujo se vuelve muy complicada, por ejemplo; en la capa límite del fluido, cerca de las paredes del tubo el flujo sigue siendo laminar, como se demostró anteriormente la velocidad aumenta hacia el centro del tubo, sin embargo más allá de la capa límite, el flujo del fluido es muy irregular, lo que ocasiona la aparecen de corrientes circulares conocidas como vórtices que producen un aumento de resistencia al movimiento, a este tipo de flujo se lo conoce turbulento, como se indica en la figura 61.

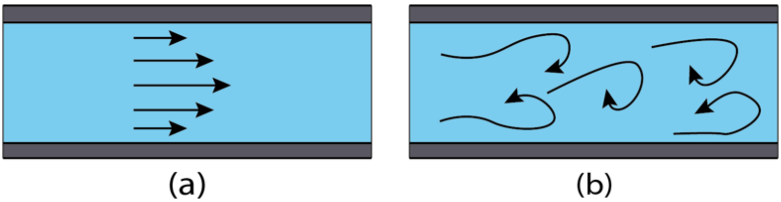


Figura 61. (a) Flujo laminar, (b) flujo turbulento

Múltiples estudios han demostrado que para que un flujo sea laminar o turbulento depende de cuatro factores, la densidad ρ, la velocidad media v_m, el coeficiente de viscosidad η, y el diámetro del tubo circular D. A esta combinación se lo conoce como el NÚMERO DE REYNOLDS **Re** en honor al físico irlandés Osborne Reynolds quien lo propuso en 1883, es un número adimensional y se representa como:

$$Re = \frac{\rho v_m D}{\eta} \tag{5.19}$$

Los estudios han demostrado que si *Re*<2 000 el flujo es laminar y si es *Re*>3000 el flujo turbulento, Si 2 000<*Re*<3 000 el comportamiento del fluido es inestable, por lo que puede cambiar de laminar a turbulento o viceversa.

Cuando *Re*=2 000, la velocidad del fluido es la velocidad crítica Vc, el mismo que se representa mediante la siguiente ecuación.

$$v_c = \frac{2\,000\,\eta}{\rho\, D} \tag{5.20}$$

Ejercicio modelo 5.6.1

Por una tubería que tiene 4 cm de radio circula glicerina a una velocidad media de 2 m/s a 20 °C. Determinar si el flujo es laminar o turbulento.

Utilizando la ecuación (5.19).

$$Re = \frac{\rho v_m D}{\eta}$$

Reemplazando los valores que nos da el problema tenemos;

$$Re = \frac{1\,260\,\frac{kg}{m^3}\,2\,\frac{m}{s}\,0{,}08\ m}{1{,}49} = 135{,}30$$

Como el número de Reynolds es menor que 2 000 se puede afirmar que el flujo es laminar.

Actividades 5.6.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Por una tubería tiene 5 cm de radio y circula agua a 0,3 m/s a 20 °C. Determinar si el flujo es laminar o turbulento.

2. Calcule la velocidad crítica de un flujo de agua a 20 °C que circula por una tubería de 2 cm de radio, para cual el flujo es turbulento.

3. Encontrar el número de Reynolds para un flujo de un aceite ligero a 16 °C, que fluye por una tubería de 2 cm de radio, si la rapidez del flujo es de 0,20 cm/s.

4. Determine si el flujo es laminar o turbulento, de la glicerina a 20 °C que circula por una tubería de 120 mm de radio. La velocidad promedio es de 4 m/s.

LEY DE STOKES

En el caso de un cuerpo esférico que se mueve en el seno de un fluido estacionario, o si un fluido ideal se mueve en torno al cuerpo, se observa que las líneas de corriente toman una forma simétrica alrededor de la esfera, tal como se observa en la figura 62.

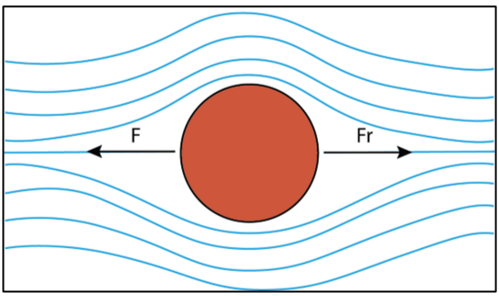


Figura 62. Líneas de corriente alrededor de un cuerpo esférico

En cambio, si el fluido es viscoso, la resistencia al movimiento *Fr*, está en función de la viscosidad η, el radio del cuerpo esférico *r* y la velocidad con respecto del fluido *v*, como muestra en la ecuación (5.21).

$$Fr = \eta 6\pi v r \tag{5.21}$$

La ecuación (5.21) es denomina LEY DE STOKES en honor al físico irlandés George Stokes quien la planteó en 1845.

Por otro lado, sabemos que el peso es la fuerza que hace caer al cuerpo esférico al fondo del fluido, y empuje es la fuerza que ejerce el fluido sobre el cuerpo, por lo tanto;

$$F = p - E = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g \tag{5.22}$$

La fuerza (5.22) ocasiona que el cuerpo caiga aceleradamente, sin embargo, cuando aumenta la velocidad también aumenta la fuerza de resistencia al movimiento *Fr*. Si la velocidad es muy alta la Fuerza *Fr* se equilibrará con la fuerza *F*, lo que ocasiona que el cuerpo se mueva con velocidad constante.

Si igualamos las dos fuerzas, tenemos:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g = \eta 6\pi v r$$

Despejamos v

$$v = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} \tag{5.23}$$

A la velocidad de la ecuación (5.23) se define como VELOCIDAD LÍMITE.

Este efecto tiene múltiples aplicaciones, un caso particular es el experimento de Millikan en donde se determina la carga del electrón mediante una gota de aceite cargada en caída libre en el aire.

Ejercicio modelo 5.7.1

Determine la velocidad límite que adquiere una esfera de acero de 0,3 cm de radio, cuando cae en agua. La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.

Utilizamos la ecuación (5.23)

$$v = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta}$$

Reemplazamos los valores que nos da el problema.

$$v = \frac{2(0{,}003\ m)^2 \left(7\,850 \frac{kg}{m^3} - 1\,000 \frac{kg}{m^3}\right) 9{,}8\ m/s^2}{9(1\ E - 3\ \ Ns/m^2)}$$

$$v = 134{,}26\ m/s$$

Actividades 5.7.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Determine la velocidad límite de caída de bola de cobre que tiene 0,045 cm de diámetro, en agua a 20 °C.

2. Calcule la velocidad límite de la bola de cobre del ejercicio anterior, pero está vez en glicerina a 20 °C.

3. Una esferita de vidro de 4 mm de diámetro, se deja caer en un aceite especial que tiene una densidad de 950 kg/m^3. La esfera recorre una altura de 60 cm en 4,6 s. Determinar la viscosidad del aceite.

LEY DE POISEULLE

Si consideramos un fluido ideal que fluye en régimen estacionario a través de una tubería, podemos apreciar que las velocidades de todas las partículas de la misma sección transversal son todas iguales, tal como se muestra en la siguiente figura.

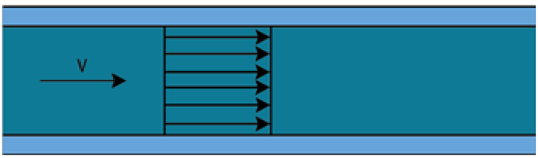


Figura 63. Velocidad en un fluido ideal

Ahora, si consideramos un fluido real o viscoso, las velocidades de las partículas de la misma sección transversal ya no serán iguales, las paredes ejercen una resistencia sobre la capa más externa del fluido, tal como se observa en la siguiente figura.

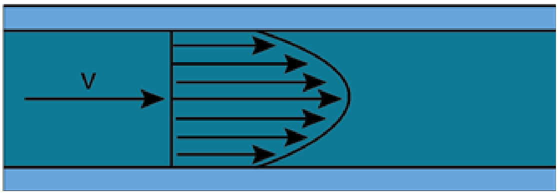


Figura 64. Velocidad en un fluido real o viscoso

En la figura anterior se observa que la velocidad es máxima en el centro de la tubería y disminuye conforme se acerca hacia las paredes.

Para el análisis, consideremos un fluido de coeficiente de viscosidad η que fluye a través de un tubo cilíndrico, de radio r y longitud L, como se indica en la siguiente figura.

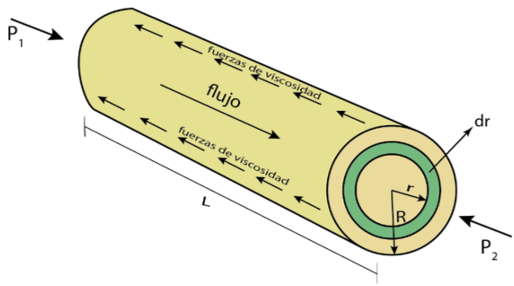


Figura 65. Flujo de un fluido viscoso

Si P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, se tiene que:

$$P_1 = \frac{F_1}{\pi r^2} \qquad y \qquad P_2 = \frac{F_2}{\pi r^2}$$

Como $P_1 > P_2$ la fuerza impulsadora del movimiento del pequeño cilindro de radio r será ocasionada por la diferencia de presiones menos la fuerza retardadora ocasionada por la viscosidad.

La fuerza por la diferencia de presiones viene dada por;

$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2 \tag{5.24}$$

Como el pequeño cilindro no tiene aceleración, puesto que está en equilibrio, la fuerza impulsadora es igual a la fuerza de retardo viscoso en la superficie de dicho cilindro.

La fuerza de viscosidad viene nada por;

$$-\eta S\frac{dv}{dr} = -\eta 2\,\pi r L\frac{dv}{dr} \tag{5.25}$$

Donde *dv/dr* es el gradiente de la velocidad a una distancia r, el signo menos indica que la velocidad se reduce cuando r aumenta. Al igualar las ecuaciones (5.25) y (5.25) tenemos;

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta 2\,\pi r L\frac{dv}{dr}$$

Al despejar *dv/dr*, se obtiene.

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}$$

Integrando;

$$-\int_v^0 dv = \frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}\int_r^0 r\,dr$$

Resolviendo,

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \tag{5.26}$$

Como se puede apreciar en la ecuación (5.26), no es más que la ecuación de una parábola en r, que describe perfectamente la figura (5.25). Si nos percatamos en la ecuación (5.26) la velocidad máxima sucede cuando $r = 0$.

La ecuación (5.26), se puede usar para calcular el flujo total por unidad de tiempo del fluido a través del tubo. De la figura (5.8) observamos que el fluido que atraviesa entre los límites r y $r+dr$ tiene un elemento de área igual a;

$$dS = 2\pi r dr$$

Es conocido que el gasto es igual al producto de la velocidad por el área.

$$dQ = vdS = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)2\pi r dr$$

Si integramos, tenemos:

$$Q = \frac{2\pi(P_1 - P_2)}{4\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)\, r dr$$

Resolviendo;

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P_1 - P_2) \qquad (5.27)$$

La ecuación (5.27) recibe el nombre de la LEY DE POISEUILLE en honor el médico fisiólogo francés Jean Léonard Poiseuille, quien la dedujo experimentalmente en 1838.

Ejercicio modelo 5.8.1

Considere un tubo que tiene 50 cm de longitud y 6 mm de radio por el que fluye agua a 20 °C. Si la diferencia de presión entre dos puntos es de 50 000 Pa. Determinar la cantidad de agua que fluye en 10 minutos.

Utilizando la ecuación (5.27) tenemos;

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P_1 - P_2)$$

Reemplazamos los valores que nos da el problema y el valor de la viscosidad de la tabla 3.

$$Q = \frac{\pi(6\,E-3)^4}{8(1E-3)(0{,}5)}(50\,000) = 0{,}050\,\frac{m^3}{s}$$

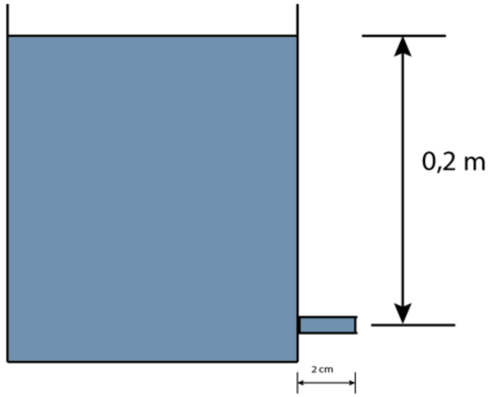
Como el problema nos pide la cantidad de agua que fluye en dos horas, multiplicamos el resultado anterior por el intervalo de tiempo, es decir.

$$V = 0{,}050\,\frac{m^3}{s}\,(10\,.\,60\,) = 30{,}5\;m^3$$

Actividades 5.8.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. Por un tubo que tiene un radio de 0,6 mm y 30 cm de longitud circula agua con un caudal a 0,5 ml/s. Determinar la diferencia de presiones que se necesita para impulsar el agua, considere que el flujo es laminar.
2. Considere una arteria que tiene una longitud de 1 mm y un radio de 0,02 mm. Determine la resistencia al flujo y el caudal, si existe una diferencia de presiones de 1500 Pa.
3. Suponga un tanque lleno de glicerina, a 20 cm debajo del nivel del líquido se coloca un tubo capilar de 2 cm de longitud y 2 mm de radio. Determine el tiempo que tarde 4 cm^3 de glicerina pasar por el tubo capilar.



4. Se tiene un aceite ligero que se lo pretende hacer fluir por un tubo capilar de 2 mm de diámetro, el tubo tiene una longitud de 9 cm. Determine qué diferencia de presiones debe existir para mantener el caudal en 7 ml/min.

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES FIN DE TEMA

Actividades 1.3.1

1) $8,25\ kg$

2) $r = 8\ cm$

3) $180\ kg$

4) $55,06\ cm^3$

5) $2,41\ E-5\ m^3$ $\quad 58,09\ m^2$

Actividades 1.3.3

1) $\rho = 1250\,\frac{kg}{m^3}$ $\quad \gamma = 12\ 250\ N/m^3$

2) $\gamma = 0,075\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}$ $\quad v = 130\,\frac{m^3}{kg}$ $\quad \rho = 7,68\ E-3\ kg/m^3$

3) $\gamma = 11,26\ N/m^3$

4) $m = 140,4\ kg$ $\quad \rho = 1,17\,\frac{kg}{m^3}$ $\quad \gamma = 11,47\ N/m^3$

Actividades 1.3.4

1) $1,18\ E\ 6\ Pa$

2) $7\ 500\ Pa$

3) $9,8\ Pa$

4) $19\ 758,3\ N$

5) $1\ 076,92\ Pa$

Actividades 1.3.6

1) $alcohol\ con\ 4,09\ L$

2) $\Delta T = 273,22\ K$

3) $0,081\ m^3$

4) $0,280\ m^3$ $\quad 0,285\ m^3$ $\quad 5,652E-3\ m^3$

Actividades 1.3.7

1) $50\ N/m^2$

2) $p = 101\ 333{,}75\ Pa \quad P = -17{,}49\ W$

3) $3{,}11\ m/s$

4) $0{,}467\ N$

5) $21{,}28\ Ns/m^2$

Actividades 1.3.11

1) $1{,}37E - 3\ N$

2) $p = 5\ Pa$

3) $h = \dfrac{2\sigma \cos\theta}{r\rho g}$

4) $5{,}64\ m$

Actividades 2.3.2

1) $102\ 900\ Pa$

2) $0{,}182\ m$

3) $40{,}15\ m$

4) $49\ 392\ Pa$

5) $3{,}08\ m$

6) $2{,}11E7\ N$

Actividades 2.4.1

1) $1\ 361{,}11\ N$

2) $135\ N$

3) No se puede elevar

4) $10/1$

Actividades 2.5.1

1) $\left(1030 + \frac{103}{h_{aceite}}\right) kg/m^3$

2) $6\,917{,}64\ N/m^3$

3) $1{,}05\ m$

4) $5\,880\ N/m^3$

5) $411{,}11\ kg/m^3$

6) $1\,351{,}35\ kg/m^3$

Actividades 2.6.1

1) $10{,}34\ m$

2) $0{,}924\ atm\ y\ 702{,}66\ mmHg$

3) $h_{mer} = 2{,}99\ m \quad h_{as} = 39{,}49\ m$

4) $101\,372{,}78\ Pa$

5) $53\,344{,}2\ Pa$

6) $p_Q = 84\,028{,}46\ Pa \quad p_P = 82\,587{,}86\ Pa$

Actividades 2.7.1

1) $0{,}4\ s$

2) $37{,}37\ N$

3) $Los\ dos\ flotan\ por\ tener\ la\ misma\ densidad$

4) $0{,}51\ m/s^2$

5) $Aplicación\ principio\ de\ Arquimedes$

6) $381{,}81\ kg/m^3$

7) $1{,}897\ kg$

Actividades 2.8.1

1) $1\,761{,}19\ m$

2) $5\,935{,}66\ m$

3) $8\,285{,}88\ m$

Actividades 3.3.1

6) $y = -x$

Actividades 3.4.1

2) $-1\ m^3/s$

3) $0,3\ m^3$

4) $28,29\ m/s$

5) $183,33\ s$

6) $0,172\ m$

Actividades 3.5.1

1) $8,4\ E-3\ m^3$

2) $2,22\ E-3\ m^2$

3) $0,038\ m^3/s$ $\qquad$ $122,5\ m/s$

4) $3,6\ m/s$

5) $14\ m/s$

Actividades 3.5.2

1) $-4xz - 3xz - z^2/2$

2) $3y^2z + xz$

3) $Si\ se\ cumple$

Actividades 3.7.1

1) $92\,\vec{i} + 36\,\vec{j} + 16\,\vec{k}\ m/s^2$

2) $(7xy^2 + 12xy^3t + 9xy^4t^2 + 6x^2y^2t^2 - 12xyzt + 2x^2yt - 4xz)\vec{i}$

$(xy + 3xy^3t^2 + 2xy^2t + x^2yt^2 - 2xzt + 4x + 6zt)\vec{j}$

$(-3z - 6xy^2t - 4xy + 6xt + 9zt^2)\vec{k}$

3) $2xt\,\vec{i} + 3yt\,\vec{j} + 4zt\,\vec{k}$

Actividades 3.7.2

1) $(-4-16t^2)\vec{\imath}+(9-12t)\vec{k}$

2) $-2\,\vec{\imath}+28\,\vec{\jmath}+80{,}2\,\vec{k}$

3) $P_x=-4{,}5\,x^4+6x^2+9x^2y-3xy$

$P_y=-12\,x^2y+\dfrac{11}{2}y^2+4xy$

$P_z=-2\,z^4-9{,}8\,z$

Actividades 3.8.1

1) $184\,312{,}35\;Pa$

2) $139\,494{,}86\;Pa$ $\quad 0{,}022\;m^3/s$

3) $330\;l/\min$ $\quad 257\,500\;Pa$

4) $1{,}02\;Pa$

5) $135\,299{,}98\;Pa$

6) $87\,750\;Pa$

Actividades 3.9.1

1) $a_x=-2{,}04E-3y+0{,}03$

$a_y=-2{,}04E-3x$

$a_z=-9{,}6$

2) $\nabla^2 v_x=100{,}4\,xy$

$\nabla^2 v_y=200yz+6{,}2\,x^2$

$\nabla^2 v_z=-150\,z+490$

3) $\vec{P}=-15x^2y\,\vec{\imath}$ -20xy $\vec{\jmath}+\;(5xz^2-98z)\vec{k}$

Actividades 3.9.2

1) $147\,205{,}87\;Pa$ $\quad 0{,}025\;m$

2) $2{,}29\,\dfrac{m}{s}$

3) $13{,}97\;m$

4) $336\,325{,}88\;Pa$

5) $0{,}161\;{}^{m^3}/_{s}$ $\quad 20{,}6\;m/s$

Actividades 3.9.3

1) $13{,}3\ m$

2) $78\ \%$

3) $1{,}67\ m^3/s$

Actividades 4.1.1

1) $2{,}02\ m/s$ $0{,}81\ m$

2) $h/2$

3) $1{,}67\ m$

4) $(h - 8{,}62)\ m$

Actividades 4.2.1

1) $2{,}42\ m/s$ $14\ s$

2) $0{,}16\ m^3/s$ $3{,}13\ min$

3) $2{,}95\ min$

Actividades 4.3.1

1) $0{,}61\ m$

2) $1{,}87\ m/s$

3) $8{,}94\ m/s$

Actividades 4.4.1

1) $144{,}22\ m/s$

2) $6{,}66\ m/s$

3) $0{,}079\ m$

Actividades 4.5.1

1) $7{,}66\ m/s$ $0{,}12\ m^3/s$

2) $10{,}3\ m$

Actividades 4.6.1

1) $5{,}26\ m/s$

2) $1{,}15\ m/s$ $\quad$ $5{,}77\ m^3/s$

3) $1{,}25\ m/s$ $\quad$ $11\ 718{,}75\ Pa$ $\quad$ $0{,}09\ m$

4) $617{,}4\ Pa$ $\quad$ $0{,}65\ m/s$ $\quad$ $29{,}70\ m/s$

Actividades 4.7.1

1) $1\ 055\ 246{,}075\ N$

2) $113{,}91\ m/s$

3) $141{,}42\ m/s$

4) $3\ 271\ N$

Actividades 4.8.1

2) $2\rho v\omega\pi R^2$

3) $1{,}34\ N$

4) $35\ m/s$

Actividades 5.3.1

1) $\Delta p_r = \dfrac{v_{1r}^2\ \Delta p_m \rho_r}{v_{1m}^2\ \rho_m}$

3) $37\ 080\ Pa$

Actividades 5.4.1

1) $\lambda^{5/2}$

2) $\lambda^{1/2}$

3) $F_m = \lambda^3$

4) $2{,}12\ m/s$

Actividades 5.5.1

1) $216\ 666{,}6\ Pa$

2) $48\ 000$

3) $864\ Nm$

Actividades 5.6.1

1) $Turbulento$

2) $0{,}05\ m/s$

3) $65{,}13$

4) $Laminar$

Actividades 5.7.1

1) $0{,}87\ m/s$

2) $5{,}69\ E-4\ m/s$

3) $0{,}10\ Ns/m^2$

Actividades 5.8.1

1) $29\ 473{,}13\ Pa$

2) 2,35 E-11 m^3/s

3) $7{,}68\ s$

4) $187{,}75\ Pa$

ACERCA DE LOS AUTORES

FREDDY PATRICIO GUACHÚN LUCERO

Licenciado en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas y Física. Magíster en Docencia de las Matemáticas. Magíster en Física Aplicada. Doctorado en Enseñanza de la Física. Docente en la Universidad de Cuenca. Coordinador de Investigación de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Cuenca. Autor de artículos en enseñanza de la Matemática y la Física. Ponente en eventos académicos.

SONIA JANNETH GUZÑAY PADILLA

Licenciada en Ciencias de la Educación Mención Matemáticas y Física. Magíster en Docencia de las Matemáticas. Docente en la Universidad de Cuenca. Docente de la Unidad Educativa Fray Vicente Solano.

REFERENCIAS DE IMÁGENES

- Figura 1. Aggregate (2014) http://www.aggregatte.com/blog/4909-un-matematico-kazajo-dice-haber-resuelto-uno-de-los-problemas-del-milenio-la-solucion-a-unas-complejas-ecuaciones-sobre-fluidos-y-que-pueden-aplicarse-al-flujo-de-aire-sobre-el-ala-de-un-avion-los-proyectiles-las-corrientes-oceanicas-o-el-choque-de-un-tsunami.
- Figura 7. Porto, J. y Merino, M. (2014). Definición de: Definición de tensión superficial. https://definicion.de/tension-superficial/
- Figura 12. Sin autor. (2019). La capilaridad y el cobre. https://capilaridadcobre.wordpress.com/2019/03/07/introduccion/
- Figura 51. Sin autor, (2010). La pelota no dobla http://la-pelota-no-dobla.blogspot.com/2010/10/el-tiro-libre-de-roberto-carlos.html.
- Figura 57. United States Librarys of Congress's (2006). The Buckau, the Flettner Rotor Ship, photographed in 1924. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Buckau_Flettner_Rotor_Ship_LOC_37764u.jpg
- Figura 58. Calvo, L. (2014). Boeing 777X en el túnel de viento http://fly-news.es/aviacion-comercial/aviones/boeing-777x-en-el-tunel-de-viento/
- Figura 60. Sin autor. (2007). Teoría de las Semejanzas. https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_las_semejanzas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arregui de la Cruz, F., Cabrera, E., Cobacho, R., Gómez, E. y Olivares., J. (2017). Apuntes de Mecánica de Fluidos, España: Universitat Politècnica de València.
- Balcazar, J. (2013). Mecánica de Fluidos, Colombia: Universidad de Colombia.
- Bergadá, J. (2006). Mecánica de fluidos. Problemas resueltos, España: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Cergel, Y. (2006). Mecánica de Fluidos, . México: McGraw W-Hill.
- Borges, R. y Monteagudo, J. (2016). Mecánica de Fluidos. Teoría Básica y Problemas, Cuba: Universo Sur.
- Gratton, J. (2002). Introducción a la Mecánica de Fluidos, Argentina: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. http://www.lfp.uba.ar/es/notas%20de%20cursos/notasestructura1juliogratton/Fluidos.pdf
- Heras, S. d. (2012). Mecánica de Fluidos en Ingeniería. Catalunya: Service Point.
- Hernández, P. G. (2016). Mecánica de fluidos. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Llana, S. y Perez, P. (2015). Biomecánica básica: Aplicada a la actividad física y el deporte, España: Editorial Paidotribo.
- Martín, A. (2011). Apuntes de Mecánica de fluidos. http://oa.upm.es/6531/1/amd-apuntes-fluidos.pdf

- Mataix, C. (1993). Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas, España: Ediciones del Castillo.
- Martín, R., Font, R. y Salcedo, R. (2011). Mecánica de fluidos. Tema 1. Flujo interno de fluidos incompresibles y compresibles.
- https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/20299/1/tema1_Flujo%20interno.pdf
- Martín, A. (2001). Apuntes de Mecánica de Fluidos, España: Universidad Politécnica de Madrid. http://oa.upm.es/6934/1/amd-apuntes-fluidos.pdf
- Medina, H. (2009). Física 2. Mecánica de Fluidos. http://anyflip.com/tvznx/zuda/basic/151-200
- Modon, A. (2017). Teoría de mecánica de los fluidos. Apuntes. http://ingenieria.uncuyo.edu.ar/catedras/apuntes-teoricos-de-mecanica-de-los-fluidos-rev9-doc-prot.pdf
- Mott, R. (2006). Mecánica de fluidos. México: Pearson.
- Pasinato, H. (2008). Fundamentos de Mecánica de Fluidos, Argentina: Universidad Tecnológica Nacional. http://www.edutecne.utn.edu.ar/mecanica_fluidos/mecanica_fluidos_2.pdf
- Solé, A. C. (2013). Neumática e Hidráulica. Madrid, España: Marcombo.
- Shames, I. (1995). Mecánica de fluidos. 3d. Colombia: Martha Edna Suárez.
- Terán, H., Torres, G., Arteaga, O. y Sánchez, W. (2018). Mecánica de Fluidos, Ecuador: Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

- White, F. (2015). Mecánica de Fluidos (6ta ed.), España: McGraw Hill.

Centro de Investigación
y Desarrollo Profesional
Generador de Conocimientos...

ISBN: 978-9942-823-47-2

9 789942 823472

Editorial