



# UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Civil

“Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones”

Trabajo de titulación previo a la  
obtención del título de Ingeniero  
Civil

Autores:

Andrés Sebastián Alvarado Cueva

CI: 0105605547

Correo electrónico: andressebas.a10@gmail.com

Pedro Esteban Siavichay Morocho

CI: 0104701008

Correo electrónico: pedritonegomas@gmail.com

Director:

Ing. Francisco Xavier Flores Solano

CI: 0301547410

**Cuenca - Ecuador**

07-marzo-2022



**Resumen:**

En este trabajo de tipo investigativo, se resume las bases técnicas y teóricas implicadas en un Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones. De una manera sutil y didáctica se conecta conceptos relacionados a algebra lineal, resistencia de materiales, dinámica estructural y diseño sísmico, presentando tanto definiciones como ejemplos para un mejor entendimiento del lector. Se explica tanto el origen de las coordenadas modales como sus implicaciones, conectándolo con conceptos algebraicos tales como cambio de coordenadas y bases. Como eje principal, se plantea una estructura simple de 2 pisos para la aplicación de un Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones de manera detallada mediante el software de cálculo matemático Mathcad Prime, finalmente, se comprueba la respuesta obtenida mediante el software SAP2000 validando así los procesos mostrados.

**Palabras Claves:** Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones. Coordenadas Modales. Rigidez en 3 Dimensiones. Espectros de Respuesta. SAP2000. Mathcad Prime.



**Abstract:**

In this investigative work, we summarize the technical and theoretical bases involved in a Spectral Modal Analysis in 3 Dimensions. In a subtle and didactic way, we connect linear algebra, resistant materials, structural dynamic and seismic design concepts, using definitions and examples for a better understanding. The work explain the modal coordinates origin and their implications, connecting it with algebraic concepts such as change of coordinates and bases. The main theme of this work is the Spectral Modal Analysis in 3 Dimensions of a simple structure, we detail the process and using SAP2000, the answer is validated.

**Keywords:** Spectral Modal Analysis in 3 Dimensions. Modal Coordinates. Stiffness in 3 Dimensions. SAP 2000. Mathcad Prime.



## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>12</b>
1.1	Introducción y Justificación .....	12
1.2	Objetivos .....	15
1.2.1	Objetivo General .....	15
1.2.2	Objetivos Específicos .....	15
<b>2</b>	<b>MÉTODO .....</b>	<b>15</b>
2.1	Alcance y Limitaciones .....	15
2.1.1	Análisis de Bases Teóricas .....	16
2.1.2	Análisis Detallado de Estructura Modelo .....	17
2.1.3	Verificación de Resultados con SAP2000 .....	17
2.2	Marco Teórico .....	18
2.2.1	Antecedentes .....	18
2.2.2	Conceptos de Algebra Lineal .....	33
2.2.3	Método Matricial de la Rigidez en 3 Dimensiones .....	41
2.2.4	Aplicación de Restricciones y Condensación Estática .....	56
2.2.5	Solución de la Ecuación de Movimiento .....	62
2.3	Análisis Modal Espectral .....	67
2.3.1	Frecuencias Naturales y Modos de Vibración .....	67
2.3.2	Ortogonalidad de los Modos .....	70
2.3.3	Normalización de los Modos .....	73
2.3.4	Sistemas con Amortiguamiento Clásico .....	73
2.3.5	Procedimiento del Análisis Modal Espectral .....	74
2.3.6	Software SAP2000 .....	75
<b>3</b>	<b>ANÁLISIS DE ESTRUCTURA MODELO .....</b>	<b>80</b>
3.1	Planteamiento de la Estructura Modelo .....	80
3.2	Análisis Modal Espectral Detallado en Mathcad Prime .....	81
3.2.1	Ensamblaje de matriz de rigidez de la estructura .....	82
3.2.2	Aplicación de Restricciones y Condensación Estática .....	91
3.2.3	Determinación de Propiedades de la Estructura .....	96
3.2.4	Obtención de Espectro .....	104
3.2.5	Análisis Modal Espectral .....	105
3.2.6	Resultados .....	109
3.3	Análisis Modal Espectral Simulado en SAP2000 .....	110
3.3.1	Modelamiento de la Estructura en SAP2000 .....	110



3.3.2	Aplicación de Restricción de Diafragma Rígido de Piso.....	113
3.3.3	Obtención de Espectro .....	114
3.3.4	Resultados.....	114
<b>4</b>	<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN. ....</b>	<b>116</b>
4.1	Solución de la Ecuación de Movimiento (interpretación algebraica y dinámica).....	116
4.1.1	Método de Resolución .....	116
4.1.2	Implicación del Cambio de Base.....	125
4.2	Comparación de Resultados Entre Análisis Detallado en MATHCAD y Simulación en SAP2000. ....	130
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES Y COMENTARIOS .....</b>	<b>133</b>
5.1	Conclusiones .....	133
5.2	Comentarios .....	134
<b>6</b>	<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>136</b>

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1.1.1:	Subducción en Ecuador. Fuente: (IGPN, 2016).....	14
Ilustración 2.2.1:	Torre con tanque de reserva. Fuente: (Pixabay, 2022) .....	19
Ilustración 2.2.2:	Estructura de 1 GDL. Fuente: Elaboración Propia .....	19
Ilustración 2.2.3:	Aceleración en sistema simple amortiguado. Fuente: (Chopra, 2012) .....	20
Ilustración 2.2.4:	Condiciones iniciales de ejemplo didáctico. Fuente: Elaboración Propia .....	28
Ilustración 2.2.5:	Desplazamiento por fuerza considerando diferentes amortiguamientos Fuente: Elaboración Propia.....	28
Ilustración 2.2.6:	Factor de amplificación dinámico. Fuente: Elaboración Propia .....	31
Ilustración 2.2.7:	Ejemplo de espectro de respuesta. Fuente: Elaboración Propia.....	32
Ilustración 2.2.8:	Sistema lineal representado en matrices. Fuente: Elaboración Propia.....	34
Ilustración 2.2.9:	Definición de espacio vectorial. Fuente: (Lay, 2007).....	35
Ilustración 2.2.10:	Definición de subespacio. Fuente: (Lay, 2007) .....	36
Ilustración 2.2.11:	Bases estándar. Fuente: Elaboración Propia .....	37
Ilustración 2.2.12:	Vector y base estándar. Fuente: Elaboración Propia.....	37
Ilustración 2.2.13	.....	39
Ilustración 2.2.14:	Sistema de referencia. Fuente: Elaboración Propia .....	46
Ilustración 2.2.15:	Pórtico de 1 Piso. Fuente: Elaboración Propia.....	58
Ilustración 2.2.16:	Sub matrices de la matriz de rigidez. Fuente: (Sennett, 1994) .....	60
Ilustración 2.3.1:	Escritorio de Trabajo de SAP200. Fuente: Elaboración Propia.....	76
Ilustración 2.3.2:	Interfaz para especificar materiales en SAP2000. Fuente: Elaboración Propia.....	76
Ilustración 2.3.3:	Interfaz para especificar secciones en SAP2000. Fuente: Elaboración Propia.....	77



Ilustración 2.3.4: Interfaz para introducir propiedades de secciones en SAP2000. Fuente: Elaboración Propia ..... 78

Ilustración 2.3.5: Interfaz para dibujo de estructuras en SAP2000. Fuente: Elaboración Propia ..... 78

Ilustración 2.3.6: Interfaz para restricciones en SAP2000. Fuente: Elaboración Propia ..... 79

Ilustración 2.3.7: Interfaz para introducir espectros en SAP2000. Fuente: Elaboración Propia ..... 80

Ilustración 3.1.1: Pórtico de caso de estudio. Fuente: Elaboración Propia ..... 81

Ilustración 3.1.2: Secciones del caso de estudio. Fuente: Elaboración Propia..... 81

Ilustración 3.2.1: Nodos y conexiones en estructura del caso de estudio. Fuente: Elaboración Propia 82

Ilustración 3.2.2: Ubicación de los nodos en caso de estudio. Fuente: Elaboración Propia ..... 83

Ilustración 3.2.3: Estructura de estudio graficada en Mathcad Prime. Fuente: Elaboración Propia ..... 87

Ilustración 3.2.4: Condensación de GDL Fuente: Elaboración Propia ..... 92

Ilustración 3.2.5: Pórtico de caso de estudio. Fuente: Elaboración Propia ..... 96

Ilustración 3.2.6: Parámetros necesarios para el espectro. Fuente: Elaboración Propia ..... 104

Ilustración 3.2.7: Obtención de parámetros para el espectro. Fuente: Elaboración Propia..... 104

Ilustración 3.2.8: Espectros para el caso de estudio. Fuente: Elaboración Propia ..... 105

Ilustración 3.3.1: Gráfica de estructura modelo. Fuente: Elaboración Propia ..... 110

Ilustración 3.3.2: Propiedades del hormigón usado para el modelo. Fuente: Elaboración Propia ..... 111

Ilustración 3.3.3: Sección de columna para el modelo usado. Fuente: Elaboración Propia..... 112

Ilustración 3.3.4: Sección de viga para el modelo usado. Fuente: Elaboración Propia ..... 112

Ilustración 3.3.5: Centro de Masa de la estructura modelo. Fuente: Elaboración Propia ..... 113

Ilustración 3.3.6: Introducción de parámetros para el espectro usado. Fuente: Elaboración Propia... 114

Ilustración 3.3.7: Respuesta gráfica de SAP2000. Fuente: Elaboración Propia ..... 115

Ilustración 4.1.1: Coordenadas con 3 entradas y su interpretación gráfica. Fuente: Elaboración Propia ..... 117

Ilustración 4.1.2: Sistema de coordenadas y su base. Fuente: Elaboración Propia..... 118

Ilustración 4.1.3: Representación gráfica de una base para coordenadas. Fuente: Elaboración Propia ..... 126

Ilustración 4.1.4: Representación de coordenadas respecto a una base. Fuente: Elaboración Propia. 127

Ilustración 4.1.5: Base distinta a la estándar. Fuente: Elaboración Propia ..... 128

Ilustración 4.1.6: Representación de coordenadas respecto a una base. Fuente: Elaboración Propia. 128

Ilustración 4.1.7: Equivalencia de coordenadas. Fuente: Elaboración Propia ..... 130



## Cláusula de Propiedad Intelectual

---

Andrés Sebastián Alvarado Cueva, autor/a del trabajo de titulación "Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 7 de marzo de 2022

Andrés Sebastián Alvarado Cueva

C.I: 0105605547



## Cláusula de Propiedad Intelectual

---

Pedro Esteban Siavichay Morocho, autor/a del trabajo de titulación "Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, 7 de marzo de 2022

---

Pedro Esteban Siavichay Morocho

C.I: 0104701008





## Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

---

Andrés Sebastián Alvarado Cueva en calidad de autor/a y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 7 de marzo de 2022

Andrés Sebastián Alvarado Cueva

C.I: 0105605547



## Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

---

Pedro Esteban Siavichay Morocho en calidad de autor/a y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Análisis Modal Espectral en 3 Dimensiones", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 7 de marzo de 2022

---

Pedro Esteban Siavichay Morocho

C.I: 0104701008



## DEDICATORIA

*A mis padres, Oswaldo Alvarado y Rocío Cueva, quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me forjaron y apoyaron cada día para cumplir siempre mis metas. Son mi pilar más importante y mi mayor ejemplo de esfuerzo y valentía.*

*A mi hermana Estefanía Alvarado, por ser mi mejor amiga, mi apoyo incondicional y por estar conmigo en todo momento. Siempre confiaste en mí y espero algún día llegar a ser como tú.*

*A la memoria de mi abuelita Graciela Noriega por su inigualable amor y su gran sabiduría que hasta el día de hoy me sigue dando lecciones de vida.*

*Andrés Alvarado Cueva*

*A mis padres, Santiago Siavichay y Fanny Morocho, quienes con su tiempo, dedicación y esfuerzo me apoyaron siempre en cumplir mis metas. Son un pilar fundamental en mi vida, así como un ejemplo para mí.*

*A mi hermano Eduardo Siavichay por ser también un apoyo importante a lo largo de mis estudios y de mi vida.*

*A toda mi familia y amigos, tanto a los que aún se encuentran en mi entorno, así como a los que ya no lo están, por haber formado parte de mi vida estudiantil.*

*Pedro Siavichay Morocho*



## AGRADECIMIENTO

*A Dios, por guiar mi camino y obsequiarme mi fabulosa familia.*

*A mis padres, hermana y abuelita por enseñarme a no temer las adversidades porque Dios está siempre conmigo, sin ustedes no podría haber llegado a este punto de mi vida. Son la mejor familia que pude tener.*

*A mi compañero de tesis y amigo Pedro Siavichay por ser un apoyo en el aula y ser prácticamente un hermano en la vida.*

*A la gloriosa Universidad de Cuenca y sus catedráticos, en especial a los ingenieros Francisco Flores, Ángel Pino y Juan Jiménez quienes nos guiaron académicamente con su experiencia y profesionalismo.*

*Andrés Alvarado Cueva*

*A Dios, por guiar mi camino y obsequiarme una gran familia.*

*A mis padres, hermano, tíos, abuelitos y familia en general por haber aportado de una u otra forma en mi vida y estudios.*

*A mi compañero de tesis y amigo Andrés Alvarado por ser un apoyo en el aula y ser prácticamente un hermano en la vida.*

*A la gloriosa Universidad de Cuenca y sus catedráticos, en especial a los ingenieros Francisco Flores, Ángel Pino y Juan Jiménez quienes nos guiaron académicamente con su experiencia y profesionalismo.*

*Pedro Siavichay Morocho*



## 1 INTRODUCCIÓN

### 1.1 Introducción y Justificación

Gracias al avance de la ciencia y específicamente de la computación, cada día es más factible crear, procesar y simular modelos matemáticos con la ayuda de un ordenador, así como manejar y operar una gran cantidad de datos. El procesamiento computacional, la gran cantidad de datos recolectados y el avance de investigaciones en ciencias aplicadas, han desembocado en una gran colección de conocimientos e información disponible para usar.

Enfocándose netamente en la Ingeniería Estructural, se puede percibir que esta ha sabido aprovechar bien los recursos y herramientas brindadas por la computación, descontinuando así, en algunos casos, a métodos tradicionales de cálculo estructural. El gran procesamiento computacional con el que contamos hoy, ha logrado brindar software de cálculo estructural altamente eficiente y de fácil operación para el usuario, algunos de estos son:

- SAP2000
- ETABS
- CYPECAD
- MIDAS
- OpenSees

Otra de las ventajas obtenidas gracias al actual procesamiento computacional, es el registro preciso de eventos sísmicos. El registro y procesamiento de estos, se han sabido aprovechar para la obtención de espectros de respuesta, que resultan ser una forma de resumir los eventos sísmicos más representativos para un determinado lugar.

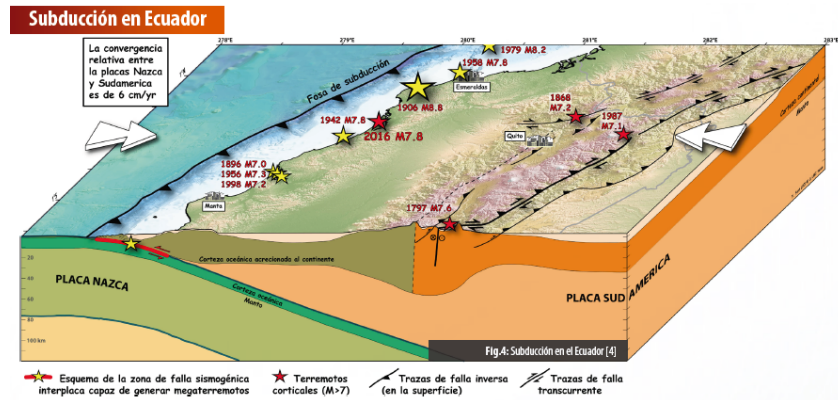
A pesar de que el uso de estos programas no tiene como requerimiento obligatorio el conocimiento de todas las teorías y modelos en los que se basan, comprender sus bases teóricas resulta fundamental en cualquier profesional cuyo enfoque es el cálculo estructural, pues, esto



permite al usuario dar un mejor uso e interpretación a los resultados arrojados por el software. De manera general, el cálculo estructural en ordenadores suele realizarse mediante el método matricial de la rigidez, aprovechando así la alta capacidad de procesamiento y la facilidad de interpretación de matrices en un ordenador. El método matricial puede ser usado tanto para análisis estáticos como para análisis dinámicos, en este caso, nos concentraremos en los dinámicos.

Un análisis dinámico de una estructura tiene el objetivo de simular y predecir el comportamiento de esta frente a una carga dinámica, es decir, una carga que puede variar en el tiempo. Los análisis dinámicos se usan ampliamente para predecir y controlar el comportamiento de una estructura frente a un evento sísmico, existiendo así dos principales tipos de análisis: Análisis Tiempo Historia y Análisis Modal Espectral. El Análisis Tiempo Historia presenta la bondad de describir el comportamiento de la estructura en función del tiempo, siendo así función de la señal sísmica que se dé como entrada. El Análisis Modal Espectral tiene como objetivo presentar el comportamiento más crítico de una estructura y se encuentra en función de un espectro de respuesta, definido generalmente por una norma en cada país.

Ecuador es un país altamente sísmico debido a su ubicación en el límite de tipo convergente entre la placa Nazca y la Sudamericana (Ilustración 1.1.1), adicionalmente, menciona que a lo largo del territorio nacional se encuentran fallas geológicas que contribuyen a la importancia sísmica en el país (IGPN, 2016). Considerando también que, las políticas de hábitat y vivienda a nivel nacional deben garantizar el desarrollo seguro y ordenado de asentamientos humanos, entonces, se puede notar la importancia que desempeñan los factores sísmicos en la construcción local. (MIDUVI, 2015).



*Ilustración 1.1.1: Subducción en Ecuador.*

*Fuente: (IGPN, 2016)*

Debido a la variedad de condiciones geológicas, tectónicas, sismológicas, tipo de suelo y con la ayuda de la información recolectada mediante registros históricos, se adoptó el uso de un espectro de diseño que considere los factores antes mencionados. El espectro considera un grupo de acelerogramas con propiedades dinámicas representativas para un periodo de retorno de 475 años. (MIDUVI, 2015)

Considerando la situación sísmica del país, la justificación de este trabajo se radica en la importancia que tienen los análisis dinámicos y sus bases teóricas para estructuras ubicadas en nuestro medio. Conocer detalladamente las bases teóricas y modelos que sigue un Análisis Modal, resulta ser la base de casi cualquier investigación en el área de dinámica estructural, por tanto, este trabajo resultará interesante y de utilidad tanto para estudiantes, como para investigadores de la rama estructural. Considerar en este trabajo el espectro de respuesta brindado por la Norma Ecuatoriana de la Construcción, resulta conveniente para los lectores, pues se mostrará también un ejemplo del correcto uso de un espectro en una estructura dividida por modos. Adicionalmente, se describirá y modelará de manera detallada una estructura en 3 dimensiones según el método matricial de la rigidez. El trabajo también aportará como literatura en español para quienes se interesen en el tema.



## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo General**

Analizar y explicar las teorías, procesos y metodologías que intervienen en un Análisis Modal Espectral en 3D, verificando así los resultados obtenidos mediante un software estructural.

### **1.2.2 Objetivos Específicos**

- Describir el método matricial de la rigidez y su aplicabilidad en las estructuras (considerando 3 dimensiones para el modelamiento).
- Describir el análisis modal de una estructura, así como sus bases de álgebra lineal más relevantes.
- Plantear y modelar una estructura simple en 3 dimensiones.
- Realizar y detallar el procedimiento del análisis modal espectral de la estructura.
- Modelar y simular el análisis modal espectral de la estructura usando SAP2000.
- Comparar los resultados.

## **2 MÉTODO**

### **2.1 Alcance y Limitaciones**

A pesar de que el trabajo tiene como propósito describir de la manera más clara y precisa todas las implicaciones teóricas que se encuentran detrás del análisis modal espectral, llegar a un nivel de detalle demasiado profundo, resultaría contraproducente para el entendimiento general del análisis modal espectral, por lo tanto, se ha seleccionado las temáticas con más relevancia y participación en el análisis propiamente dicho.





### 2.1.1 Análisis de Bases Teóricas

El análisis de las bases teóricas del Análisis Modal en 3 Dimensiones consta en describir las teorías implícitas en este método, siendo más específicos, se analizarán las siguientes temáticas:

- Conceptos de Álgebra Lineal
- Método Matricial de la Rigidez en 3 Dimensiones
- Aplicación de Restricciones y Condensación Estática
- Solución de la Ecuación de Movimiento
- Frecuencias Naturales de Vibración y Modos
- Ortogonalidad de Modos y su Interpretación
- Normalización de los Modos
- Sistemas con Amortiguamiento Clásico
- Análisis Modal Espectral

En caso lo amerite, algunas de las temáticas descritas contarán con ejemplos que faciliten la comprensión de las mismas.

El nivel de detalle para la descripción de las temáticas ya mencionadas estará sujeta a variaciones, es decir, la profundidad de cada tema dependerá de su grado de importancia para el desarrollo de este trabajo. Basados en que el objetivo del análisis de bases teóricas es lograr el conocimiento necesario para la comprensión del análisis de la Estructura modelo, se tomará un nivel de detalle más alto en los siguientes temas: ensamblaje de una matriz de rigidez que considere los grados de libertad correspondientes a un sistema de movimiento en 3 dimensiones, obtención de modos de vibración, ortogonalización de modos de vibración, reducción de un sistema de múltiples grados de libertad a múltiples sistemas de 1 grado de libertad, uso de espectros de respuesta para un análisis modal.



### 2.1.2 Análisis Detallado de Estructura Modelo

El análisis de la estructura modelo tiene como objetivo poner en práctica todas las temáticas descritas anteriormente, mostrando su aplicación para un modelo específico. Se plantea proponer una estructura modelo simple de 2 plantas y 1 vano. Se usará el programa Mathcad Prime 6 para describir de manera detallada cada uno de los pasos necesarios para llegar al resultado final, se describe de manera general los pasos a continuación.

- División y numeración de Grados de Libertad para un sistema en un espacio de 3 dimensiones
- Ensamblaje de matriz de rigidez considerando los Grados de Libertad ya obtenidos
- Condensación de la matriz de rigidez a grados de libertad de interés
- Obtención de Frecuencias, Modos de Vibración
- Ortogonalización de los Modos
- Factores de participación Modal
- Análisis Espectral Modal

### 2.1.3 Verificación de Resultados con SAP2000

La verificación de los resultados con SAP2000 tiene como objetivo validar los resultados, así también, verificar que el análisis de SAP2000 sigue la misma metodología que hemos seguido, por tanto, se espera una precisión alta.

Para la verificación de resultados y con el propósito de que este trabajo sea replicable, se detallará en medida de lo posible los siguientes ítems:

- Proceso de modelamiento en SAP2000
- Comparación de rigideces (entre SAP2000 y Análisis Detallado)
- Comparación de resultados finales para espectros de respuesta



Se define como limitación, que el proyecto no abordará el estudio de las matemáticas puras usadas en cada uno de los análisis. Respecto a las bases de algebra lineal que serán analizadas, no tendrán como objetivo principal forjar un entendimiento claro de la materia propiamente dicha, sino conocer su aplicación al campo de la ingeniería estructural y como facilita la resolución de ciertos problemas. A pesar de que el proyecto tiene como objetivo brindar una explicación clara y detallada de todos los procesos, existirán ciertos temas donde implícitamente se asume que el lector tiene entendimiento de ellos, por tanto, no serán explicados a detalle. Aunque el ejemplo que se va a usar tiene como objetivo ser representativo y generalizable, no incluye particularidades que posiblemente se encontraría en estructuras más complejas, por tanto, se podría definir como un ejemplo con fines únicamente didácticos.

Es importante considerar que el software SAP2000 está diseñado para hacer un análisis minucioso, por tanto, hace consideraciones que a veces suelen ser omitidas por su poca influencia en los resultados finales, a lo largo de este trabajo se hablará de aquellas consideraciones y se configurará el modelo en SAP2000 de tal forma que no las considere. El análisis detallado también hará estas consideraciones con el fin de obtener los mismos resultados.

## **2.2 Marco Teórico**

### **2.2.1 Antecedentes**

#### **2.2.1.1 Sistemas de 1 Grado de Libertad y Ecuación del Movimiento**

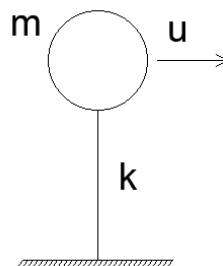
La mayoría de sistemas de 1 GDL (grado de libertad) suelen ser idealizados y únicamente usados para ejemplos educativos, sin embargo, existen sistemas reales que pueden ser modelados de manera aproximada como sistemas de 1 GDL. En este caso, tomaremos como ejemplo una torre que sostiene un tanque de agua, descrito en la Ilustración 2.2.1.



*Ilustración 2.2.1: Torre con tanque de reserva.*

*Fuente: (Pixabay, 2022)*

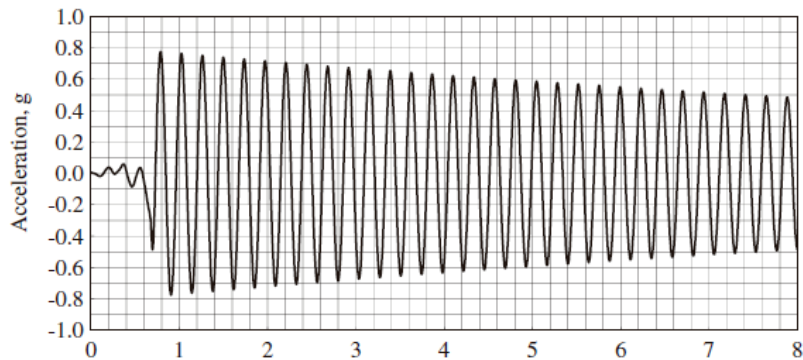
El ejemplo muestra una torre compuesta de una columna que sostiene un tanque de agua (se ignora la armadura que sostiene escaleras y corredores). Idealizando que: la masa de agua es muy superior a la masa de la columna que la sostiene (siendo esta última despreciable), la columna está completamente empotrada tanto al suelo como al tanque de agua, únicamente la columna provee de rigidez y sostén para el tanque de agua, el comportamiento estará dentro de los límites elásticos lineales; entonces, podemos modelar esta estructura como se muestra en la Ilustración 2.2.2.



*Ilustración 2.2.2: Estructura de 1 GDL.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Se puede observar que una columna de rigidez “ $k$ ” con masa despreciable, sostiene a una masa “ $m$ ” que presenta únicamente un grado de libertad horizontal llamado “ $u$ ”. Si se aplicara una fuerza inicial, entonces se generaría un desplazamiento inicial al grado de libertad “ $u$ ” que, por intuición sabríamos que este comenzaría a oscilar de manera decreciente hasta llegar al reposo nuevamente. Esta intuición fue comprobada en laboratorios, obteniéndose oscilaciones como las descritas en la Ilustración 2.2.3.



*Ilustración 2.2.3: Aceleración en sistema simple amortiguado.*

*Fuente: (Chopra, 2012)*

Se puede notar una disminución en la amplitud de onda, esto se conoce como fuerzas de amortiguamiento y se da por varios factores que disipan energía. A pesar de que el amortiguamiento se puede modelar de varias maneras, la más común y la que será usada en este trabajo, es la de considerarlo como un amortiguador viscoso.

Dado que todo se resume a un problema de fuerzas, procedemos a definir todas las que se ven implicadas en una estructura.

### **2.2.1.2 Relación Fuerza Desplazamiento**

La relación entre la fuerza interna y el desplazamiento sufrido “ $u$ ”, será de tipo lineal para deformaciones pequeña, y no lineal para grandes, en el caso de este trabajo, asumiremos



que se dan deformaciones pequeñas, es decir, una relación de tipo lineal. Bajo estas consideraciones, podemos establecer la siguiente ecuación.

$$f_s = k \cdot u$$

*Ecuación 2.2.1*

Dónde:

k= Rigidez lateral del sistema en función de las propiedades y geometría del material.

u= Desplazamiento en el grado de libertad analizado.

Una explicación más detallada del coeficiente k y su obtención se dará más adelante en la sección “Método Matricial de Rigidez en 3 Dimensiones”.

### **2.2.1.3 Fuerza de Amortiguamiento**

La fuerza de amortiguamiento es la responsable de la disipación de energía en los mecanismos, a pesar de que esta fuerza puede provenir de varias fuentes, en las estructuras de obras civiles suelen provenir de:

- Fricción de conexiones metálicas
- Aperturas y cierres de micro fracturas en el concreto
- Fricción entre elementos de la estructura
- Pequeños daños en elementos no estructurales

Debido a la variedad de posibles orígenes de la fuerza de amortiguamiento, resulta imposible describir de una manera matemática exacta todos los mecanismos. La fuerza de amortiguamiento se suele representar de una manera idealizada, que de hecho es equivalente al comportamiento de un amortiguador viscoso. Su ecuación está en función de un factor “c” y de la velocidad, se muestra a continuación.



$$fd = c \cdot u'$$

*Ecuación 2.2.2*

Dónde:

$c$ = Coeficiente de amortiguamiento para la estructura.

$u'$ = Primera derivada del desplazamiento en el grado de libertad analizado, es decir su velocidad.

#### **2.2.1.4 Ecuación de Movimiento**

Considerando que la estructura ha sufrido el desplazamiento por una fuerza externa que se encuentra en función del tiempo y denominada como “ $p(t)$ ”, según la segunda ley de Newton y basado en las fuerzas analizadas anteriormente, podemos establecer una relación que describe el comportamiento de la estructura, se muestra a continuación.

$$m \cdot u'' + c \cdot u' + k \cdot u = p(t)$$

*Ecuación 2.2.3*

Dónde:

$m$ = Masa del elemento

$u''$ = Segunda derivada del desplazamiento en el grado de libertad, es decir, su aceleración.

$c$ = Coeficiente de amortiguamiento para la estructura.

$u'$ = Primera derivada del desplazamiento en el grado de libertad analizado, es decir su velocidad.

$k$ = Rigidez

$u$ = Desplazamiento del grado de libertad en cuestión.



Nótese que, para obtener esta ecuación diferencial de segundo orden, se aplicó la segunda ley de Newton únicamente en la dirección de movimiento del grado de libertad analizado, es decir, dirección horizontal.

La ecuación asumida anteriormente se dedujo para una fuerza de excitación “ $p(t)$ ”, sin embargo, también se la puede analizar en términos de los desplazamientos que son transmitidas desde el suelo hacia la estructura, se analiza a continuación.

Involucrando a los desplazamientos del suelo, podemos deducir la siguiente ecuación.

$$u^t(t) = u_g(t) + u(t)$$

*Ecuación 2.2.4*

Dónde:

$u^t(t)$ = Desplazamiento absoluto de la masa.

$u_g(t)$ = Desplazamiento del suelo.

$u(t)$ = Desplazamiento de la masa relativo al desplazamiento del suelo.

Si realizamos un análisis igual al que se hizo para obtener la Ecuación 2.2.3, pero esta vez consideramos que no existe una fuerza de excitación “ $p(t)$ ” sino, solamente una fuerza inercial debido a la oposición de la masa al movimiento que está siendo transmitido desde el suelo, podemos llegar a la siguiente ecuación.

$$m \cdot u'' + c \cdot u' + k \cdot u = -m \cdot u''_g(t)$$

*Ecuación 2.2.5*

Nótese que al lado derecho de la igualdad se está usando la segunda derivada del desplazamiento transmitido desde el suelo, lo cual equivale a la aceleración transmitida desde





el mismo. La ecuación presentada anteriormente puede resolverse tanto de forma clásica como también por medio de métodos numéricos, sin embargo, este último método de resolución sería importante para un Análisis Tiempo Historia, más no para el Análisis Modal Espectral que se pretende explicar en este trabajo, por tanto, no se entrará en detalles de su resolución.

### 2.2.1.5 Vibración Libre

Si en la ecuación Ecuación 2.2.3 consideramos  $p(t)$  igual a 0, además de un sistema con amortiguamiento igual a 0, obtendríamos la siguiente ecuación

$$m \cdot u'' + k \cdot u = 0$$

*Ecuación 2.2.6*

Considerando que este sistema es perturbado por un desplazamiento inicial “ $u=u(0)$ ” y una velocidad inicial “ $u'=u'(0)$ ” entonces, obtendríamos como solución para esta ecuación diferencial homogénea la siguiente expresión.

$$u(t) = u(0) \cdot \cos(w_n \cdot t) + \frac{u'(0)}{w_n} \cdot \sin(w_n \cdot t) \quad \text{siendo} \quad w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

*Ecuación 2.2.7*

La ecuación descrita anteriormente, muestra que  $u(t)$  tendrá un movimiento oscilatorio con una frecuencia igual a “ $w_n$ ” que se la conoce como frecuencia de vibración natural. Adicionalmente, puede obtenerse de ella un periodo que resultaría igual a  $w_n/(2 \cdot \pi)$ . Este comportamiento es conocido como movimiento simple armónico.

Se puede observar que la frecuencia natural depende únicamente de la masa y rigidez de la estructura, obviando sus condiciones iniciales, razón por la cual se le da el adjetivo de “natural”.



Si consideramos esta vez un movimiento con amortiguamiento, planteamos la ecuación de equilibrio y resolvemos nuevamente la ecuación diferencial homogénea, entonces obtendremos como solución la siguiente ecuación.

$$u(t) = e^{-\xi \cdot w_n \cdot t} \cdot \left( u(0) \cdot \cos(w_D \cdot t) + \frac{u'(0) + \xi \cdot w_n \cdot u(0)}{w_D} \cdot \sin(w_D \cdot t) \right)$$

siendo

$$w_D = w_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

#### *Ecuación 2.2.8*

El término “ $\xi$ ” es conocido como radio de amortiguamiento, y su valor para el hormigón es de 0.05, está íntimamente relacionado con el coeficiente de amortiguamiento de la estructura “ $c$ ” cómo se verá más adelante. Nótese también que el término “ $w_D$ ” está en función de la frecuencia natural “ $w_n$ ” y del amortiguamiento “ $\xi$ ”, además, si el radio de amortiguamiento tuviera un valor de 0, “ $w_D$ ” sería igual a “ $w_n$ ”. (Chopra, 2012)

Se puede notar que, aunque el movimiento sigue siendo de tipo oscilatorio, ahora mantiene una frecuencia igual a “ $w_D$ ”, además, el radio de amortiguamiento provoca la disminución de la amplitud de onda a lo largo del tiempo. El radio de amortiguamiento para las estructuras comunes generalmente se encuentra en rangos desde 0 hasta 0.2.

#### **2.2.1.6 Respuesta a Excitaciones Armónicas**

Se describió ya la ecuación general de movimiento al aplicar una fuerza externa, sin embargo, ¿qué sucede si aplicamos una fuerza oscilatoria con una frecuencia específica? Se presenta a continuación la ecuación que describiría esta condición.





$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \rightarrow 0$$

*Ecuación 2.2.12*

Se demuestra así que el desplazamiento debido al estado transitorio deja de tener efecto en el desplazamiento total con el pasar del tiempo. Esto implica que con condiciones iniciales igual a 0, el estado transitorio no tendrá ningún efecto en el máximo desplazamiento dinámico de la estructura (premisa que nos servirá más adelante).

Cabe recalcar que los términos “A” y “B” están definidos netamente por las condiciones iniciales, es decir, para su obtención necesitamos hacer operaciones de derivación a la ecuación de “u(t)” e igualar a sus condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad.

Aplicar una carga oscilatoria brinda a la estructura un comportamiento interesante, sin embargo, ocurre un efecto aún más interesante al aplicar una carga oscilatoria con frecuencia igual a la natural. A continuación, se presenta un ejemplo, donde a una estructura con las mismas propiedades se le aplicará 3 cargas oscilatorias:

- $w = \omega_n - 0.5$
- $w = \omega_n$
- $w = \omega_n + 0.5$

Se presenta a continuación datos impuestos arbitrariamente:

\*Las unidades se encuentran según el SI de medidas.

- Condiciones iniciales:

$$u_0 := 0 \quad u'_0 := 0$$

- Datos de la estructura:

$$k := 28.1 \quad m := 1.6 \quad w_n := \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.191 \quad \xi := 0.05 \quad w_D := w_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 4.186$$

- Datos de la fuerza oscilatoria aplicada  $p(t)$

$$p_0 := 5$$

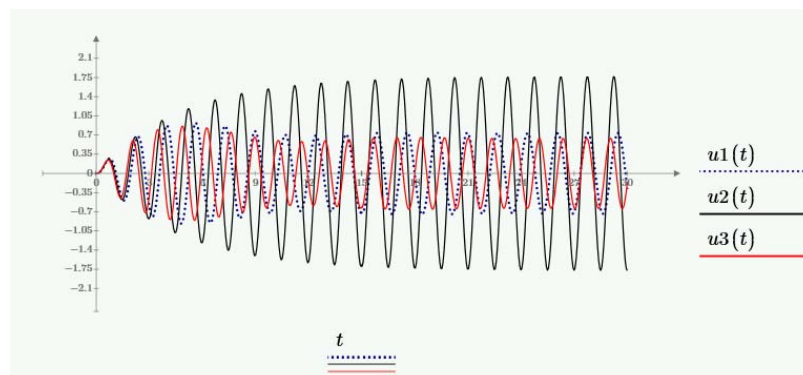
- Se considera un  $w$  menor al natural, uno igual y uno mayor

$$w_1 := w_n - 0.5 \quad w_2 := w_n \quad w_3 := w_n + 0.5$$

*Ilustración 2.2.4: Condiciones iniciales de ejemplo didáctico.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Al resolver los parámetros A y B considerando cada frecuencia y condiciones iniciales iguales a 0, obtendríamos el siguiente gráfico:



*Ilustración 2.2.5: Desplazamiento por fuerza considerando diferentes amortiguamientos*

*Fuente: Elaboración Propia*

Nótese que el desplazamiento obtenido con una fuerza oscilatoria igual a la del periodo natural es superior a la que se obtuvo al considerar las otras 2 frecuencias, reflejando así el grado de criticidad que tiene.



### 2.2.1.7 Factor de Amplificación Dinámico

La Ilustración 2.2.5 da una intuición inicial de que los máximos desplazamientos se producen cuando la fuerza oscilatoria de entrada tiene una frecuencia oscilatoria igual a la natural de la estructura, sin embargo, una manera un poco más analítica de comprobarla es con el Factor de Amplificación Dinámico, el cual tiene como fin comparar el máximo desplazamiento estático con los dinámicos en función de la frecuencia de la fuerza oscilatoria de entrada.

Definimos inicialmente el máximo desplazamiento estático. Considerando una fuerza oscilatoria de entrada  $p(t)$ .

$$p(t) = p_o \cdot \sin(w \cdot t)$$

*Ecuación 2.2.13*

Conocemos que el máximo valor que tomará “ $p(t)$ ” se dará en el instante “ $t = \pi/(2 \cdot w)$ ” y de hecho será igual a “ $p_o$ ”, por tanto, si aplicamos la fuerza “ $p_o$ ” a un sistema de rigidez “ $k$ ”, su desplazamiento será:

$$u_{st} = \frac{p_o}{k} \quad \text{Máximo desplazamiento estático}$$

*Ecuación 2.2.14*

Como se analizó con anterioridad, el desplazamiento máximo dinámico para condiciones iniciales de 0, vendrá definido por el estado permanente de la ecuación de desplazamientos. Se deduce a continuación la ecuación del Factor de Amplificación Dinámico con base a la ecuación de desplazamientos del estado permanente.

Reescribiendo la ecuación del estado permanente:



$$u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)$$

*Ecuación 2.2.15*

Siendo:

$$u_0 = \sqrt{C^2 + D^2} \quad \phi = \tan^{-1} \left( \frac{-D}{C} \right)$$

*Ecuación 2.2.16*

Considerando los valores de “C” y “D” junto al valor de “ $u_{st}$ ” ya descritos con anterioridad, y realizando operaciones algebraicas, obtenemos:

$$Rd = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot \xi \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2}}$$

*Ecuación 2.2.17*

Procedemos a graficar la curva del factor de amplificación dinámico en función de la relación de “ $\omega$ ” con “ $\omega_n$ ” y del amortiguamiento “ $\xi$ ”.

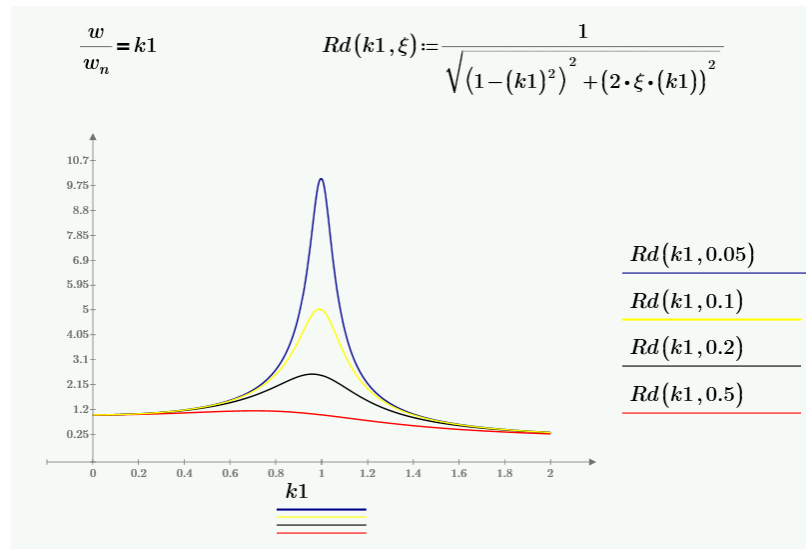


Ilustración 2.2.6: Factor de amplificación dinámica.

Fuente: Elaboración Propia

De la Ilustración 2.2.6, se pueden obtener varias conclusiones relativas al amortiguamiento y al parámetro “ $k_1$ ”. La conclusión de mayor interés, es que, a medida que el valor de “ $k_1$ ” toma un valor cercano a la unidad, el factor de amplificación dinámica va acercándose a su valor máximo que de hecho se dará en “ $k_1=1$ ”. Se puede observar también que los valores de “ $Rd$ ” van haciéndose más grandes, según “ $\xi$ ” tenga valores más pequeños (su efecto visual en el gráfico es mayor con “ $\xi=0.05$ ”, “ $\xi=0.1$ ”, “ $\xi=0.2$ ” que de hecho están dentro del rango de amortiguamientos típicos de las estructuras). Se puede concluir entonces, que los efectos más críticos en el desplazamiento dinámico de la estructura se dan cuando se aplica una fuerza oscilatoria con frecuencia igual o cercana a la frecuencia natural de la estructura.

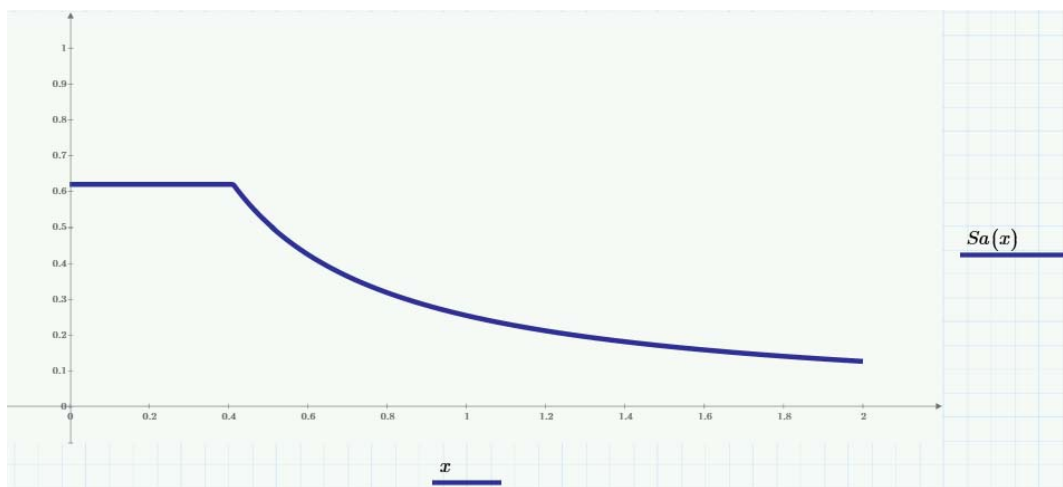
Basados en el factor de amplificación, podemos deducir que la frecuencia más crítica para una estructura es la frecuencia natural de la misma, además, podemos notar que el comportamiento de una estructura ante una excitación dinámica está en función de su amortiguamiento y periodo natural.



### 2.2.1.8 Espectro de Diseño Elástico de Respuesta

Un espectro de diseño elástico de respuesta consiste en una curva, que, en función de parámetros locales de la zona geográfica, amortiguamiento y periodo natural de la estructura, permite definir una aceleración que posteriormente se aplicará como carga sísmica en la estructura. Para la construcción de un espectro de respuesta, se requiere de una familia de sismos representativos de la zona, luego, se realiza un análisis tiempo historia con cada sismo, aplicándolos sobre supuestas estructuras con diferentes periodos naturales. Luego de obtener el comportamiento de las supuestas estructuras, se procede a buscar entre todos los análisis realizados al desplazamiento máximo para cada periodo natural analizado y a graficarlo. Finalmente se realiza un análisis estadístico y se generan ecuaciones que definan la aceleración considerada para carga sísmica en función del periodo natural y amortiguamiento, cabe recalcar que estas ecuaciones consideran también factores adicionales que vendrán definidos por el código de diseño. (Chopra pag. 230)

Se muestra a continuación un espectro arbitrario a modo de ejemplo.



*Ilustración 2.2.7: Ejemplo de espectro de respuesta.*

*Fuente: Elaboración Propia*



El eje “x” representa los valores de los periodos naturales, mientras que el eje “y” representa la pseudo aceleración que se produciría por la familia de sismos analizada.

Se puede observar que el espectro de diseño está suavizado con el objetivo de poder definirlo por funciones simples, además, a simple vista se ve que los periodos de valores altos tienden a tener una pseudo aceleración menor. (Chopra, 2012)

## **2.2.2 Conceptos de Algebra Lineal**

### **2.2.2.1 Matrices y Vectores**

Definimos a la matriz como un arreglo bidimensional de números, pudiendo ser usado en diferentes formas, una de ellas, representar la información de un sistema lineal. Las matrices están conformadas por columnas. (Lay, 2007) (pag. 4).

Se considera a un vector como una lista de números. Un vector también puede ser considerado como una matriz con una sola columna, siendo su nombre completo “Vector columna”, sin embargo, a lo largo de este trabajo se lo tratará únicamente como vector. (Lay, 2007) (pag. 28). Un vector puede conceptualizarse como un punto geométrico de “n” dimensiones (siendo “n” el número de entradas o filas), además, a veces es útil la inclusión de una flecha (segmento de recta dirigido) desde el origen, hasta el punto representado por el vector. (Lay, 2007) (pag. 29).

Existen operaciones y reglas definidas para el manejo de las matrices y vectores, que, de hecho, son las que hacen que sea una herramienta útil en las ciencias aplicadas, sin embargo, debido al alcance de este trabajo, no se tratará este tema.

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo las matrices y vectores pueden representar un sistema lineal.



Sistema lineal	Representación en Matrices y Vectores
$a1 \cdot x1 + a2 \cdot x2 + a3 \cdot x3 = a4$ $b1 \cdot x1 + b2 \cdot x2 + b3 \cdot x3 = b4$ $c1 \cdot x1 + c2 \cdot x2 + c3 \cdot x3 = c4$	<p style="text-align: center;"><b>Vector</b></p> $\begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a4 \\ b4 \\ c4 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;"><b>Matriz                  Vector</b></p>

*Ilustración 2.2.8: Sistema lineal representado en matrices.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Se puede lograr esta representación o equivalencia matricial debido al tipo de operaciones ya definidas para matrices y vectores.

Al hablar de vectores, frecuentemente se usará el término “R<sup>n</sup>” que simplemente representa a todos los vectores con “n” entradas (o, dicho de otra forma, con “n” filas). Por ejemplo, si se habla de vectores en R<sup>2</sup>, implica a todos los vectores que tengan 2 entradas (o que consten de 2 filas).

### 2.2.2.2 Vectores Linealmente Independientes

Un concepto que será usado con frecuencia en este trabajo, es la independencia de vectores, por tanto, resulta importante definirla ya que resulta ser la base de conceptos más complejos que serán tratados.

Dado un conjunto de vectores v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, ..., v<sub>p</sub>; se dice que estos son linealmente independientes si la ecuación vectorial:

$$x1 \cdot \vec{v1} + x2 \cdot \vec{v2} + \dots + xp \cdot \vec{vp} = \vec{0}$$

*Ecuación 2.2.18*



Tiene únicamente solución trivial. Interpretado de una manera menos formal, se dice que un conjunto de vectores es linealmente independiente, si ninguno de ellos puede ser representado mediante la combinación lineal de los sobrantes.

### 2.2.2.3 Espacios Vectoriales

Con el objetivo de dar una mejor definición al espacio vectorial, se muestra directamente la definición según la bibliografía analizada (Ilustración 2.2.9).

#### DEFINICIÓN

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío  $V$  de objetos, llamados *vectores*, en el que están definidas dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por escalares* (números reales), sujetas a los diez axiomas (o reglas) que se enlistan a continuación.<sup>1</sup> Los axiomas deben ser válidos para todos los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  en  $V$  y todos los escalares  $c$  y  $d$ .

1. La suma de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , denotada mediante  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ , está en  $V$ .
2.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ .
3.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ .
4. Existe un vector cero  $\mathbf{0}$  en  $V$  tal que  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ .
5. Para cada  $\mathbf{u}$  en  $V$ , existe un vector  $-\mathbf{u}$  en  $V$  tal que  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .
6. El múltiplo escalar de  $\mathbf{u}$  por  $c$ , denotado mediante  $c\mathbf{u}$ , está en  $V$ .
7.  $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ .
8.  $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ .
9.  $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ .
10.  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

*Ilustración 2.2.9: Definición de espacio vectorial.*

*Fuente: (Lay, 2007)*

Una manera sencilla de ejemplificar los espacios vectoriales, es considerar el espacio contenido en todos los vectores en  $\mathbb{R}^3$ , estos representan un espacio de tres dimensiones, similar al espacio físico en el que vivimos. Si consideramos el espacio generado por todos los vectores en  $\mathbb{R}^2$ , tendríamos un espacio bidimensional que se conceptualizaría de manera física como un plano.

También se muestra de manera directa el concepto de un subespacio (Ilustración 2.2.10).

**DEFINICIÓN**

Un subespacio de un espacio vectorial  $V$  es un subconjunto  $H$  de  $V$  que tiene tres propiedades:

- a. El vector cero de  $V$  está en  $H$ .<sup>2</sup>
- b.  $H$  es cerrado bajo la suma de vectores. Esto es, para cada  $u$  y  $v$  en  $H$ , la suma  $u + v$  está en  $H$ .
- c.  $H$  es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Esto es, para cada  $u$  en  $H$  y cada escalar  $c$ , el vector  $cu$  está en  $H$ .

*Ilustración 2.2.10: Definición de subespacio.*

*Fuente: (Lay, 2007)*

Se puede generar un subespacio mediante la combinación lineal (suma de múltiplos de escalares de vectores) de un conjunto generador de vectores, este espacio se denota como “Gen{ $v_1, \dots, v_p$ }”, siendo “ $v_1, \dots, v_p$ ” los vectores que pueden ser usados en la combinación lineal, además, si los vectores generadores están en un espacio vectorial “ $V$ ”, entonces, “Gen{ $v_1, \dots, v_p$ }” es un subespacio de “ $V$ ” (Lay, 2007).

#### **2.2.2.4 Bases de un Espacio Vectorial**

La base de un espacio vectorial, representa un conjunto de vectores linealmente independientes que generan el espacio vectorial mencionado, a continuación, se lo define de una manera más formal.

Siendo  $H$  un subespacio vectorial de  $V$  y considerando un conjunto de vectores

$B = \{b_1, \dots, b_p\}$  en  $V$ , entonces, estos vectores resultan ser una base para  $H$  si:

- 1)  $B$  es un conjunto linealmente independiente y
- 2) si el subespacio Gen{ $b_1, \dots, b_p$ } genera  $H$ .

Esta definición se aplica cuando  $H=V$ , lo cual puede suceder ya que cualquier espacio vectorial es un subespacio de sí mismo, por tanto, el conjunto  $B = \{b_1, \dots, b_p\}$  es una base para  $V$ . (Lay, 2007) (pag. 238)



Un concepto importante para el desarrollo de este trabajo, es la base estándar, por tanto, se lo define a continuación.

Si consideramos como vectores a las columnas de una matriz identidad de  $n \times n$ , entonces:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Ilustración 2.2.11: Bases estándar.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Al conjunto  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  se lo conoce como base estándar de  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.2.2.5 Cambio de Base y Coordenadas Relativas

Como se describió en la sección anterior, mediante la combinación lineal de una base para un espacio vectorial, se puede representar cualquier subespacio puntual de este espacio. A pesar de que, casi siempre, resulta más sencillo usar un sistema de base estándar, a veces para solucionar un problema, suele ser más cómodo cambiar a otro tipo de base y, por tanto, usar coordenadas relativas (Lay, 2007) (pag. 271). A continuación, se presenta un ejemplo.

Consideremos que deseamos representar el siguiente vector mediante la base estándar.

Vector a Representar	Base Estándar		
$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$	$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

*Ilustración 2.2.12: Vector y base estándar.*

*Fuente: Elaboración Propia*



Dado que la representación se debe dar mediante la combinación lineal de los vectores de la base estándar, obtendríamos lo siguiente.

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = c1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 2.2.19*

Sin embargo, esto puede representarse de una manera más compacta (Lay, 2007) (pag. 249).

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} \quad O \quad \vec{x} = [P_B] \cdot \vec{x}_B$$

*Ecuación 2.2.20*

Siendo, “P<sub>B</sub>” la matriz de cambio de coordenadas, que de hecho contiene a la base que se está usando, mientras que “x<sub>B</sub>” es el vector de coordenadas relativas. Por cuestiones didácticas, en este documento se llamará a “P<sub>B</sub>” “como matriz que contiene la base”.

Dado que en este caso se está usando el sistema de base estándar, podemos notar que la matriz de cambio de coordenadas es la matriz identidad, y de hecho las coordenadas absolutas coinciden con las relativas, sin embargo, a continuación, se muestra un ejemplo donde se establece una base cualquiera (que cumpla los requisitos para considerarse base) para representar el mismo vector del ejemplo anterior.



Vector a Representar

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base

$$\vec{e}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ilustración 2.2.13

Resolviendo:

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = c4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c4 \\ 0 \\ c4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c6 \\ c6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c4+c6 \\ c5+c6 \\ c4 \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.2.21

Encontrando los valores de las incógnitas C4, C5 y C6:

$$\begin{bmatrix} c4 \\ c5 \\ c6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c3 \\ c2 - c1 + c3 \\ c1 - c3 \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.2.22

Representamos mediante la matriz de cambio de coordenadas y el vector de coordenadas relativas.

$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c4 \\ c5 \\ c6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c3 \\ c2 - c1 + c3 \\ c1 - c3 \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.2.23





Podemos notar que, usando una base distinta a la estándar, las coordenadas relativas cambian.

### 2.2.2.6 Eigenvalores y Eigenvectores

Son conocidos también como valores y vectores propios, estos cumplen una relación interesante que resulta ser de mucha utilidad en álgebra lineal.

Considerando la ecuación matricial:

$$[A] \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

*Ecuación 2.2.24*

Se considera como vector propio de la matriz “A” a un vector “x” diferente de cero para algún escalar “λ”, a su vez, un escalar “λ” se llama valor propio de “A” si existe una solución no trivial “x” de la ecuación presentada. (Lay, 2007) (pag. 303)

Es importante recalcar que pueden existir varios valores y vectores propios para una misma matriz “A”, pues, la única condición para considerarse así, es que cumplan con la ecuación antes presentada.

### 2.2.2.7 Diagonalización de Matrices

La información de valor y vector propio de alguna matriz “A” de nxn, puede usarse con el fin de representar a la misma matriz “A” de la forma que se describe a continuación:

$$[A] = [P] \cdot [D] \cdot [P^{-1}]$$

*Ecuación 2.2.25*



Siendo “P” una matriz invertible y “D” una matriz diagonal. Esta forma de expresar una matriz resulta de mucha utilidad cuando se pretende realizar procesos de factorización con la misma, pues disminuye el tiempo de procesamiento.

Se describe a continuación el teorema de la diagonalización.

Considerando una matriz “A” de  $n \times n$ , esta es diagonalizable si y solo si “A” tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes.

De hecho,  $A=P*D*P^{-1}$ , con D como matriz diagonal, si y solo si, P contiene como columnas a los  $n$  vectores propios de “A” (siendo linealmente independientes) y siendo las entradas diagonales de “D” los valores propios de “A” que corresponden a los vectores propios de “P”. (Lay, 2007) (pag. 320)

### **2.2.3 Método Matricial de la Rigidez en 3 Dimensiones**

#### **2.2.3.1 Antecedentes Históricos**

Todo proyecto que requiera de ingeniería estructural necesita de un previo análisis estructural para conocer el comportamiento que tomará un determinado diseño debido a solicitaciones esperadas o cargas establecidas. Los resultados de este análisis que son de interés para el diseñador estructural son los esfuerzos axiales, cortantes y flectores, así como deflexiones, deformaciones y reacciones de los apoyos.

El método de la rigidez es uno de los métodos más utilizados por los software estructurales actualmente para el análisis de armaduras y pórticos. La base para el método de la rigidez fue el método clásico de pendiente-deflexión desarrollado por George A. Maney en 1915 el cual era eficaz, pero resultaba agobiante para estructuras complejas debido a los grandes sistemas de ecuaciones que se requerían solucionar manualmente. Sin embargo, el auge de las computadoras cambiaría completamente el análisis estructural debido a que los

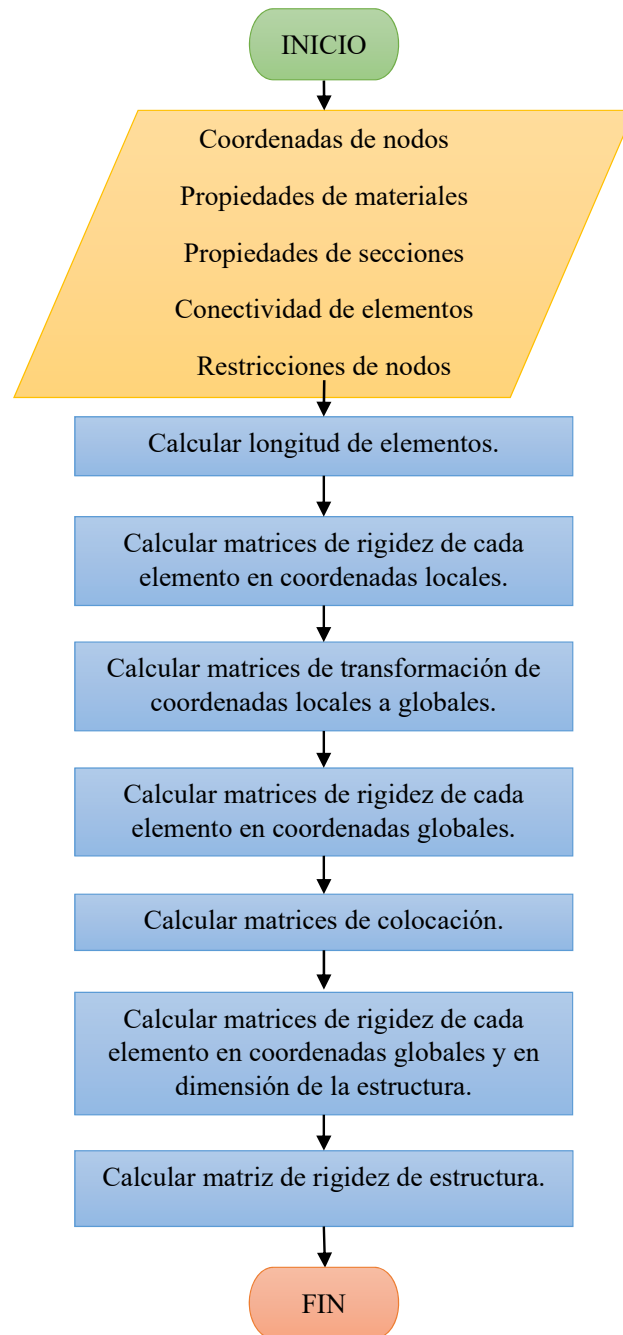


sistemas de ecuaciones se podrían expresar de forma matricial y posteriormente realizar un programa que lo solucione dando el impulso necesario para renovar o modernizar los métodos clásicos al actual análisis matricial. (Kassimali, 2010).

El método matricial de la rigidez fue formalmente redactado por R. K. Livesley y publicado en 1954 en su libro “Métodos Matriciales de Análisis Estructural” el cual muestra como los conceptos y notaciones aprendidas en el álgebra lineal pueden ser utilizados para tener un enfoque sistemático y general de las estructuras. Además, el mismo año R. K. Livesley presentó una formulación no lineal del método matricial de la rigidez lo que demuestra que con ayuda de las computadoras se dio un crecimiento acelerado del análisis matricial con aplicaciones directas en la dinámica estructural y en la no linealidad de las estructuras lo que facilitó la creación de estructuras resilientes a sismos. (Livesley, 1964)

#### **2.2.3.2 Diagrama de Flujo Para la Obtención de la Matriz de Rigidez de la Estructura**

A continuación, se presenta la secuencia lógica de pasos que se utilizó para la obtención de la matriz de rigidez de la estructura.



*Diagrama 2.2.1: Secuencia para obtener la matriz de rigidez.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 2.2.3.3 Ejecución del Diagrama de Flujo

A continuación, se presenta de forma detallada la ejecución de cada paso del diagrama de flujo.



### 2.2.3.3.1 Datos de Entrada

Los datos de entrada son números colocados convenientemente en forma de matriz para luego ser utilizados o procesados por los futuros pasos del diagrama de flujo. Estos números son todos los necesarios para obtener una representación completa de la estructura de forma numérica y de ser necesario pueden ser utilizados para representar la estructura mediante una interfaz gráfica.

#### 2.2.3.3.1.1 Coordenadas de Nodos:

Las coordenadas de los nodos se guardarán en la matriz de nombre XYZ, esta matriz es de orden  $(n \times 3)$  donde n es el número total de nodos de la estructura y cada columna representará la coordenada X, coordenada Y y coordenada Z respectivamente.

$$XYZ = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$$

*Ecuación 2.2.26*

En la Ecuación 2.2.26 cada fila representa un nodo y cada columna coordenada X, Y y Z.

#### 2.2.3.3.1.2 Propiedades de Materiales

Las propiedades de los materiales que se emplearán en la estructura se guardarán en la matriz de nombre MAT, esta matriz es de orden  $(m \times 4)$  donde m es el número total de materiales y cada columna representará el número del material, el módulo de elasticidad y el módulo de corte respectivamente.



$$MAT = \begin{bmatrix} 1 & E_1 & G_1 \\ 2 & E_2 & G_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m & E_m & G_m \end{bmatrix}$$

*Ecuación 2.2.27*

En la Ecuación 2.2.27 cada fila representa un material.

### 2.2.3.3.1.3 Propiedades de Secciones

Las propiedades de las secciones que se emplearán en la estructura se guardarán en la matriz de nombre PROP, esta matriz es de orden  $(p \times 5)$  donde p es el número total de secciones y cada columna representará el número de sección, el área de la sección, la inercia respecto al eje local del elemento Z, la inercia respecto al eje local del elemento Y y el módulo de torsión respectivamente.

$$PROP = \begin{bmatrix} 1 & A_1 & Iz_1 & Iy_1 & J_1 \\ 2 & A_2 & Iz_2 & Iy_2 & J_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p & A_p & Iz_p & Iy_p & J_p \end{bmatrix}$$

*Ecuación 2.2.28*

En la Ecuación 2.2.28 cada fila representa un conjunto de propiedades.

### 2.2.3.3.1.4 Conectividad de Elementos

La conectividad de elementos se representará en la matriz de nombre CON, esta matriz es de orden  $(e \times 9)$  donde e es el número total de elementos de la estructura y cada columna representará el número de elemento, el nodo inicial del elemento, el nodo final del elemento,

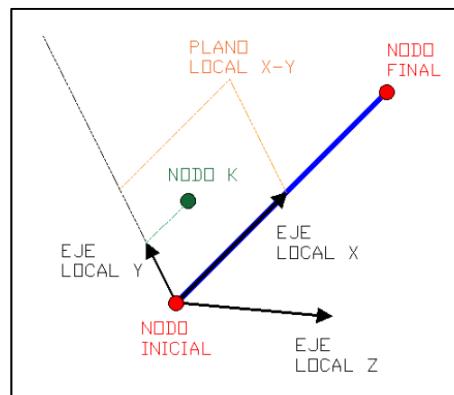
el número de material que será designado para el elemento de la matriz MAT, el número de sección que será designado para el elemento de la matriz PROP, la coordenada X del nodo K, la coordenada Y del nodo K y la coordenada Z del nodo K.

$$CON = \begin{bmatrix} 1 & N_{i_1} & N_{f_1} & N_{mat_1} & N_{prop_1} & XK_1 & YK_1 & ZK_1 \\ 2 & N_{i_2} & N_{f_2} & N_{mat_2} & N_{prop_2} & XK_2 & YK_2 & ZK_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e & N_{i_e} & N_{f_e} & N_{mat_e} & N_{prop_e} & XK_e & YK_e & ZK_e \end{bmatrix}$$

*Ecuación 2.2.29*

En la Ecuación 2.2.29 cada fila representa a un elemento con sus características.

El nodo K es un punto cartesiano cualesquiera que pertenece al plano local X-Y del elemento. En la siguiente gráfica se representa la ubicación de los ejes locales de un elemento, el eje local X siempre se encuentra sobre el elemento desde el nodo inicial hasta el nodo final, mientras que el nodo K ayuda a encontrar la dirección en la cual estará ubicado el eje local Y, luego con un vector ortogonal al plano X-Y se encuentra el eje local Z.



*Ilustración 2.2.14: Sistema de referencia.*

*Fuente: Elaboración Propia*



### 2.2.3.3.1.5 Restricciones de Nodos

Las restricciones de los nodos se guardarán en la matriz de nombre REST, esta matriz es de orden  $(r \times 7)$  donde  $r$  es el número total de nodos que tengan restricciones y cada columna representará el nodo al que se le aplicará la restricción, la restricción traslacional en X, la restricción traslacional en Y, la restricción traslacional en Z, la restricción rotacional respecto a X, la restricción rotacional respecto a Y y la restricción rotacional respecto a Z.

En el caso de haber nodos únicamente con ciertas restricciones, se colocará el número 1 de haber restricción y el número 0 de no haber restricción.

$$REST = \begin{bmatrix} n_1 & Rx_1 & Ry_1 & Rz_1 & \theta x_1 & \theta y_1 & \theta z_1 \\ n_2 & Rx_2 & Ry_2 & Rz_2 & \theta x_2 & \theta y_2 & \theta z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_r & Rx_r & Ry_r & Rz_r & \theta x_r & \theta y_r & \theta z_r \end{bmatrix}$$

*Ecuación 2.2.30*

### 2.2.3.3.2 Calcular Longitud de Elementos

La longitud de los elementos se calcula extrayendo los nodos inicial y final de cada elemento de la matriz CON para obtener las coordenadas de ambos nodos de la matriz XYZ. Una vez obtenido las coordenadas del nodo inicial y del nodo final para cada elemento se procede a aplicar la fórmula que calcula la distancia entre dos puntos.

$$L_i = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2}$$

*Ecuación 2.2.31*





A continuación, se muestra la función elaborada en Mathcad Prime que calcula las longitudes de todos los elementos de la estructura y las presenta en forma de vector. Como se mencionó anteriormente para obtener las longitudes la función necesita de la matriz CON y la matriz XYZ.

```

CalculoLongitudes(XYZ, CON) :=
  N_Elementos ← rows(CON)
  for i ∈ 1..N_Elementos
    Ni ← CONi,2
    Nj ← CONi,3
    z2 ← XYZNj,3
    z1 ← XYZNi,3
    y2 ← XYZNj,2
    y1 ← XYZNi,2
    x2 ← XYZNj,1
    x1 ← XYZNi,1
    Li,1 ← √((z2 - z1)2 + (y2 - y1)2 + (x2 - x1)2)
  L

```

*Función 2.2.1: Cálculo de Longitudes.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 2.2.3.3.3 Calcular Matrices de Rigidez de Cada Elemento en Coordenadas Locales:

Las matrices de rigidez de cada elemento en sus coordenadas locales para elementos tridimensionales se calculan mediante la matriz elemental de rigidez la cual fue obtenida efectuando un desplazamiento unitario para cada grado de libertad a la vez y obteniendo las reacciones con el uso de las ecuaciones de equilibrio y principios de resistencia de materiales. En otras palabras, los coeficientes de la matriz elemental de rigidez son las fuerzas necesarias para que el grado de libertad obtenga una deformación unitaria. (Kassimali, 2010).

A continuación, se presenta la matriz elemental de rigidez para elementos tridimensionales cuyos nodos son resistentes a momento.



$$k = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12I_z & 0 & 0 & 0 & 6LI_z & 0 & -12I_z & 0 & 0 & 0 & 6LI_z \\ 0 & 0 & 12I_y & 0 & -6LI_y & 0 & 0 & 0 & -12I_y & 0 & -6LI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJL^2}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJL^2}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6LI_y & 0 & 4L^2I_y & 0 & 0 & 0 & 6LI_y & 0 & 2L^2I_y & 0 \\ 0 & 6LI_z & 0 & 0 & 0 & 4L^2I_z & 0 & -6LI_z & 0 & 0 & 0 & 2L^2I_z \\ -AL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_z & 0 & 0 & 0 & -6LI_z & 0 & 12I_z & 0 & 0 & 0 & -6LI_z \\ 0 & 0 & -12I_y & 0 & 6LI_y & 0 & 0 & 0 & 12I_y & 0 & 6LI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJL^2}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJL^2}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6LI_y & 0 & 2L^2I_y & 0 & 0 & 0 & 6LI_y & 0 & 4L^2I_y & 0 \\ 0 & 6LI_z & 0 & 0 & 0 & 2L^2I_z & 0 & -6LI_z & 0 & 0 & 0 & 4L^2I_z \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.2.32

Se observa que los esfuerzos axiales y torsionales están desacoplados y que se posee esfuerzos flectores respecto al eje local Y y Z, además la matriz elemental de rigidez depende de la longitud, área, módulo de elasticidad, módulo de corte, inercias y módulo de torsión del elemento, por ende, la función escrita para obtener dicha matriz necesita de las matrices CON, MAT, PROP y las longitudes previamente calculadas de los elementos.

A continuación, se muestra la parte 1 de la función elaborada en Mathcad Prime que calcula las matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas locales, en esta parte únicamente se hace el llamado de los datos necesarios.

```
Matrizkelemento(Long, CON, MAT, PROP) :=
Nele ← rows(CON)
for i ∈ 1..Nele
  IdemA ← CONi,5
  IdemM ← CONi,4
  Ei,1 ← MATIdemM,2
  Gi,1 ← MATIdemM,3
  Ai,1 ← PROPIdemA,2
  Izi,1 ← PROPIdemA,3
  Iyi,1 ← PROPIdemA,4
  Jxi,1 ← PROPIdemA,5
```

Función 2.2.2: Cálculo de Matriz de Cada Elemento (parte 1).

Fuente: Elaboración Propia



Luego de obtener los datos necesarios se procede a colocarlos en la matriz elemental para cada elemento como se observa en la parte 2 de la función.

$k_{i,1}$	$\frac{E_{i,1} \cdot A_{i,1}}{L_{i,1}}$	0	0	0	0	0	$\frac{E_{i,1} \cdot A_{i,1}}{L_{i,1}}$	0	0	0	0	0
	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$
	0	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	0	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0
	0	0	0	$\frac{G_{i,1} \cdot J_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	0	0	0	0	$\frac{G_{i,1} \cdot J_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	0
	0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	$\frac{4 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	$\frac{2 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0
	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	0	0	$\frac{4 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	0	0	$\frac{2 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$
	$\frac{E_{i,1} \cdot A_{i,1}}{L_{i,1}}$	0	0	0	0	0	$\frac{E_{i,1} \cdot A_{i,1}}{L_{i,1}}$	0	0	0	0	0
	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$
	0	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	0	0	$\frac{12 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^3}$	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0
	0	0	0	$\frac{G_{i,1} \cdot J_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	0	0	0	0	$\frac{G_{i,1} \cdot J_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	0
0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	$\frac{2 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	0	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	$\frac{4 \cdot E_{i,1} \cdot I_{y_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	
0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	0	0	$\frac{2 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$	0	$\frac{6 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}^2}$	0	0	0	$\frac{4 \cdot E_{i,1} \cdot I_{z_{i,1}}}{L_{i,1}}$	

Función 2.2.3: Cálculo de Matriz de Cada Elemento (parte 2).

Fuente: Elaboración Propia

Esta matriz se utiliza comúnmente para obtener los esfuerzos internos de cada elemento.

### 2.2.3.3.4 Calcular Matrices de Transformación de Coordenadas Locales a Globales:

Es necesario realizar transformaciones de coordenadas para expresar los desplazamientos que sufren los nodos de la estructura en un único sistema global, ya que por el momento cada elemento posee sus propias coordenadas locales.

El cambio de coordenadas se da a cada matriz elemental de rigidez mediante una matriz de transformación  $\beta$ , la cual cambia las coordenadas locales de cada elemento a coordenadas globales de la estructura.



La matriz de transformación  $\beta$  es una matriz de orden  $(12 \times 12)$  para elementos tridimensionales y sus componentes son los cosenos directores del elemento respecto a los ejes globales X, Y y Z.

Los cosenos directores están en función de las coordenadas de los nodos y de la longitud de los elementos, por esa razón la función elaborada en Mathcad Prime que calcula las matrices de transformación requieren de la matriz XYZ, CON y las longitudes de los elementos previamente calculados. A continuación, se muestra la parte 1 de dicha función que hace el llamado de los datos necesarios.

```
MatrizBeta(XYZ, CON, Long) := | N_Elementos ← rows(CON)
                             | for i ∈ 1 .. N_Elementos
                             |   Ni ← CONi,2
                             |   Nj ← CONi,3
                             |   z2 ← XYZNj,3
                             |   z1 ← XYZNi,3
                             |   y2 ← XYZNj,2
                             |   y1 ← XYZNi,2
                             |   x2 ← XYZNj,1
                             |   x1 ← XYZNi,1
                             |   xk ← CONi,6
                             |   yk ← CONi,7
                             |   zk ← CONi,8
```

*Función 2.2.4: Cálculo de la Matriz Beta (parte 1).*

*Fuente: Elaboración Propia*

Luego de obtener los datos necesarios, se procede a calcular los cosenos directores como se muestra a continuación, en la parte 2 de la función.



$$\begin{aligned}
 Aux_{1,1} &\leftarrow \frac{x2-x1}{Long_{i,1}} \\
 Aux_{1,2} &\leftarrow \frac{y2-y1}{Long_{i,1}} \\
 Aux_{1,3} &\leftarrow \frac{z2-z1}{Long_{i,1}} \\
 Zx &\leftarrow (y2-y1) \cdot (zk-z1) - (z2-z1) \cdot (yk-y1) \\
 Zy &\leftarrow (z2-z1) \cdot (xk-x1) - (x2-x1) \cdot (zk-z1) \\
 Zz &\leftarrow (x2-x1) \cdot (yk-y1) - (y2-y1) \cdot (xk-x1) \\
 Normz &\leftarrow \sqrt{Zx^2 + Zy^2 + Zz^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Aux_{3,1} &\leftarrow \frac{Zx}{Normz} \\
 Aux_{3,2} &\leftarrow \frac{Zy}{Normz} \\
 Aux_{3,3} &\leftarrow \frac{Zz}{Normz} \\
 Yx &\leftarrow Aux_{1,3} \cdot Aux_{3,2} - Aux_{1,2} \cdot Aux_{3,3} \\
 Yy &\leftarrow Aux_{1,1} \cdot Aux_{3,3} - Aux_{1,3} \cdot Aux_{3,1} \\
 Yz &\leftarrow Aux_{1,2} \cdot Aux_{3,1} - Aux_{1,1} \cdot Aux_{3,2} \\
 Normy &\leftarrow \sqrt{Yx^2 + Yy^2 + Yz^2} \\
 Aux_{2,1} &\leftarrow \frac{Yx}{Normy} \\
 Aux_{2,2} &\leftarrow \frac{Yy}{Normy} \\
 Aux_{2,3} &\leftarrow \frac{Yz}{Normy}
 \end{aligned}$$

Función 2.2.5: Cálculo de la Matriz Beta (parte 2).

Fuente: Elaboración Propia

Finalmente, se los colocan los valores obtenidos en forma de la matriz de transformación de un elemento tridimensional como se indica en la parte 3 de la función.

$$\beta_{i,1} \leftarrow \begin{pmatrix}
 Aux_{1,1} & Aux_{1,2} & Aux_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 Aux_{2,1} & Aux_{2,2} & Aux_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 Aux_{3,1} & Aux_{3,2} & Aux_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & Aux_{1,1} & Aux_{1,2} & Aux_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & Aux_{2,1} & Aux_{2,2} & Aux_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & Aux_{3,1} & Aux_{3,2} & Aux_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Aux_{1,1} & Aux_{1,2} & Aux_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Aux_{2,1} & Aux_{2,2} & Aux_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Aux_{3,1} & Aux_{3,2} & Aux_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Aux_{1,1} & Aux_{1,2} & Aux_{1,3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Aux_{2,1} & Aux_{2,2} & Aux_{2,3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Aux_{3,1} & Aux_{3,2} & Aux_{3,3}
 \end{pmatrix}$$

Función 2.2.6: Cálculo de la Matriz Beta (parte 3).

Fuente: Elaboración Propia



Existe una matriz de transformación de coordenadas de orden  $(12 \times 12)$  para cada elemento de la estructura.

### 2.2.3.3.5 Calcular Matrices de Rigidez de Cada Elemento en Coordenadas Globales

Una vez obtenidas las matrices de transformación de coordenadas se procede a realizar el cambio de coordenadas. La forma básica de esta transformación es mostrada en la siguiente ecuación la cual cambia las coordenadas locales del elemento a coordenadas globales de la estructura.

$$[K]_{GLOBAL} = [\beta]^T \cdot [k]_{ELEMENTAL} \cdot [\beta]$$

*Ecuación 2.2.33*

La función elaborada en Mathcad Prime que realiza este procedimiento únicamente ejecuta la multiplicación matricial escrita en la Ecuación 2.2.33 para todas las matrices de rigidez y de transformación de los elementos como se muestra a continuación, obteniendo una matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales.

$$\text{MatrizKelemento}(k, \beta) := \left\| \begin{array}{l} Nele \leftarrow \text{rows}(k) \\ \text{for } i \in 1..Nele \\ \left\| \begin{array}{l} K_{i,1} \leftarrow \beta_{i,1}^T \cdot k_{i,1} \cdot \beta_{i,1} \\ K \end{array} \right\| \end{array} \right\|$$

*Función 2.2.7: Cálculo de Matriz de Cada Elemento Global.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Los datos de entrada de la Función 2.2.7 únicamente son las matrices elementales de rigidez de cada elemento en coordenadas locales y las matrices de transformación de coordenadas de cada elemento obtenidas previamente.



Las matrices de rigidez de los elementos previamente obtenidas en coordenadas globales son de orden  $(12 \times 12)$ , es decir, se encuentran en dimensión del elemento.

### 2.2.3.3.6 Calcular Matrices de Colocación

Las matrices de colocación  $L$  son las encargadas de cambiar la dimensión de las matrices de rigidez del elemento a la dimensión de la estructura con ayuda de la conectividad elemental, es decir, las matrices de rigidez de los elementos en coordenadas globales y de orden  $(12 \times 12)$  pasan a ser matrices de orden  $(6 * n \times 6 * n)$  gracias a las matrices de colocación, se recuerda que  $n$  es el número total de nodos de la estructura.

A continuación, se presenta la función elaborada en Mathcad Prime que calcula las matrices de colocación.

```

MatrizColocacion(CON, XYZ) :=
  GDLnodo ← 6
  Nnod ← rows(XYZ)
  GDL ← Nnod · GDLnodo
  Nele ← rows(CON)
  f(x, y) ← 0
  for i ∈ 1 .. Nele
    NI ← CONi,2
    NJ ← CONi,3
    LAUX ← matrix(2 · GDLnodo, GDL, f)
    for j ∈ 1 .. GDLnodo
      LAUXj, GDLnodo · NI - GDLnodo + j ← 1
      LAUXj + GDLnodo, GDLnodo · NJ - GDLnodo + j ← 1
    Li,1 ← LAUX
  L

```

*Función 2.2.8: Cálculo de Matriz de Colocación.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Esta función utiliza la conectividad elemental (matriz CON) para conocer que grados de libertad son utilizados por cada elemento y colocarlos así en dimensión de la estructura.

### 2.2.3.3.7 Calcular matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales y en dimensión de la estructura

La forma básica de este cambio de dimensión es mostrada en la siguiente ecuación.



$$[K]_{GLOBAL-ESTRUCTURA} = [L]^T \cdot [K]_{GLOBAL} \cdot [L]$$

Ecuación 2.2.34

Cada matriz de rigidez elemental tiene su propia matriz de colocación, se observa en la Ecuación 2.2.34 que la matriz de cada elemento en coordenadas globales en dimensión del elemento pasa a ser una matriz en dimensión de la estructura gracias a las matrices de colocación L.

La función elaborada en Mathcad Prime que realiza este procedimiento únicamente ejecuta la multiplicación matricial escrita en la Ecuación 2.2.34 para todas las matrices de rigidez y de colocación como se muestra a continuación, obteniendo una matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales y en dimensión de la estructura.

$$MatrizKelemento(k, L) := \left\| \begin{array}{l} Nele \leftarrow \text{rows}(k) \\ \text{for } i \in 1..Nele \\ \left\| K_{E_{i,1}} \leftarrow L_{i,1}^T \cdot k_{i,1} \cdot L_{i,1} \right\| \\ K_E \end{array} \right\|$$

Función 2.2.9: Cálculo de Matriz en Coordenadas Globales.

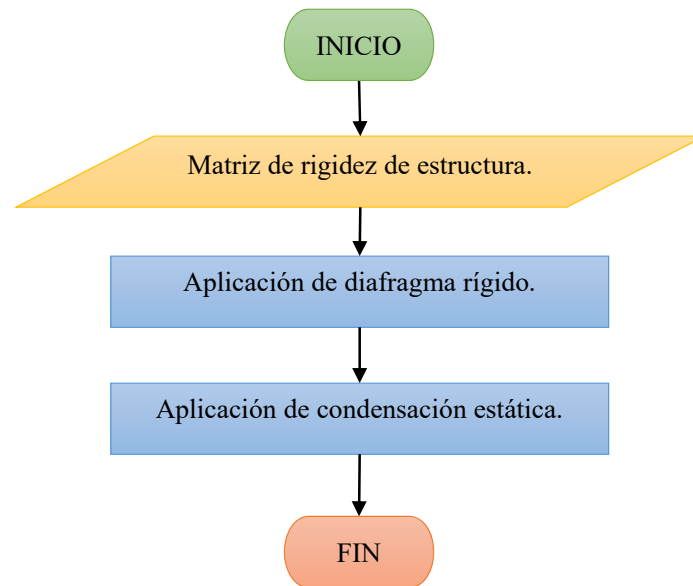
Fuente: Elaboración Propia

Los datos de entrada de la Función 2.2.9 únicamente son las matrices elementales de rigidez de cada elemento en coordenadas globales y las matrices de colocación de cada elemento obtenidas previamente.

Todas las matrices de rigidez de cada elemento se encuentran en coordenadas globales y con dimensión de la estructura.







*Diagrama 2.2.2: Aplicación de restricciones y condensación estática.*

*Fuente: Elaboración Propia*

#### **2.2.4.2 Ejecución del Diagrama de Flujo**

A continuación, se presenta de forma detallada la ejecución de cada paso del diagrama de flujo.

##### **2.2.4.2.1 Datos de Entrada**

El único dato de entrada necesario para la aplicación de las restricciones y condensación estática es la matriz de rigidez de la estructura previamente obtenida en la sección 2.2.3 Método Matricial de la Rigidez en 3 Dimensiones.

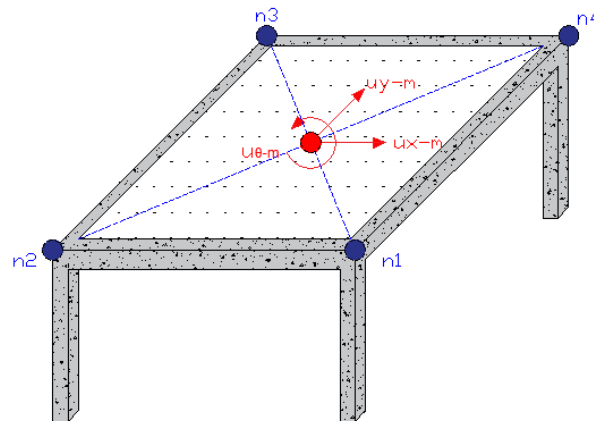
##### **2.2.4.2.2 Aplicación de Diafragma Rígido de Piso**

El diafragma rígido de piso es una restricción que se aplica en las estructuras con la finalidad de minorar el procesamiento computacional puesto que cada piso está conectado por varias columnas y cada conexión tendrá 6 grados de libertad en el espacio. Varias mediciones en distintas estructuras verifican que las deformaciones laterales de la columna en cada conexión con el piso son despreciables a comparación de la deformación total que posee dicho

piso, por ende, aplicar la restricción de diafragma rígido de piso ha sido utilizado comúnmente. (Wilson, 2002).

Esta restricción da un tratamiento al piso como cuerpo rígido y todos los grados de libertad de las conexiones columna-piso son asociados a 3 grados de libertad llamados maestros. Estos grados de libertad pueden estar ubicados en cualquier parte del piso para el caso de cargas estáticas, mientras que para el caso de cargas dinámicas este nodo maestro deberá estar colocado en el centro de masa de dicho piso. (Wilson, 2002).

A continuación, en la Ilustración 2.2.15 se indica los nodos de conexión columna-piso representados de color azul y el nodo maestro colocado en el centro de masa representado de color rojo.



*Ilustración 2.2.15: Pórtico de 1 Piso.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Para realizar la restricción de diafragma rígido de piso a una losa monolíticamente unida a las columnas, los nodos de conexión columna-piso deberán satisfacer las siguientes ecuaciones de compatibilidad.

$$\begin{aligned}u_x^{(i)} &= u_x^{(m)} - y^{(i)} u_{\theta z}^{(m)} \\u_y^{(i)} &= u_y^{(m)} + x^{(i)} u_{\theta z}^{(m)} \\u_{\theta z}^{(i)} &= u_{\theta z}^{(m)}\end{aligned}$$

*Ecuación 2.2.35*

*Fuente: (Wilson, 2002)*

En la Ecuación 2.2.35 se muestra con el súper índice  $i$  a los nodos de conexión columna-piso mientras que con el súper índice  $m$  a los nodos maestros. Esta ecuación indica que los desplazamientos laterales  $u_x^{(i)}$  y  $u_y^{(i)}$  de las columnas van a ser igual a los desplazamientos laterales  $u_x^{(m)}$  y  $u_y^{(m)}$  del nodo maestro sumados el producto de un brazo de palanca con la rotación respecto a  $z$   $-y^{(i)} * u_{\theta z}^{(m)}$  y  $x^{(i)} * u_{\theta z}^{(m)}$  respectivamente. Por otro lado, la última ecuación hace cumplir que el giro con respecto al eje  $z$  de los nodos de conexión columna-piso  $u_{\theta z}^{(i)}$  son iguales al giro con respecto al eje  $z$  del nodo maestro  $u_{\theta z}^{(m)}$ .

A continuación, se muestran dichas ecuaciones expresadas en forma matricial como una transformación hacia los desplazamientos.

$$\begin{bmatrix} u_x^{(i)} \\ u_y^{(i)} \\ u_{\theta z}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y^{(i)} \\ 0 & 1 & x^{(i)} \\ 0 & 0 & u_{\theta z}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^{(m)} \\ u_y^{(m)} \\ u_{\theta z}^{(m)} \end{bmatrix} \text{ or, } \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)} \mathbf{u}^{(m)}$$

*Ecuación 2.2.36*

*Fuente: (Wilson, 2002)*

Por ende, para realizar la restricción de diafragma rígido de piso es necesario calcular una matriz  $T$ , la cual deberá cumplir con la Ecuación 2.2.36 previamente mencionada.



### 2.2.4.2.3 Aplicación de Condensación Estática

En la sección 2.2.3 Método Matricial de la Rigidez en 3 Dimensiones se observó que una estructura puede ser representada con un sistema de  $6 * n$  ecuaciones, donde  $n$  es el número de nodos. Muchas veces, es necesario disminuir este número de ecuaciones ya sea para minorar el procesamiento computacional o para dar énfasis a ciertos grados de libertad en específico.

Por lo general, en los análisis dinámicos el número de ecuaciones debe ser disminuido para dar énfasis a los grados de libertad laterales y torsionales debido a que estos son los más afectados por un sismo, dicha disminución se da con la condensación estática.

Para realizar la condensación estática a una matriz de rigidez se requiere de grados de libertad primarios ( $p$ ) y grados de libertad secundarios ( $s$ ). Los grados de libertad primarios para este análisis son los ya mencionados laterales y torsionales, mientras que los secundarios son los grados de libertad restantes. La condensación estática no elimina o simplifica los grados de libertad secundarios, solo los representa en función de los grados de libertad primarios.

El procedimiento para condensar la matriz de rigidez de una estructura es, primeramente, particionar la matriz en las mostradas en la Ilustración 2.2.16, donde la primera letra del subíndice son las filas y la segunda letra las columnas. En términos prácticos se divide a la matriz de rigidez de la estructura en las siguientes sub matrices  $K_{pp}, K_{ps}, K_{sp}, K_{ss}$ .

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix}$$

*Ilustración 2.2.16: Sub matrices de la matriz de rigidez.*

*Fuente: (Sennett, 1994)*

A continuación, se muestra la función elaborada en Mathcad Prime que realiza la partición de matrices descrita en la Ilustración 2.2.16 requiere como datos de entrada la matriz de rigidez de la estructura, un vector que contenga las posiciones de los grados de libertad del primer subíndice y un vector que contenga las posiciones de los grados de libertad del segundo subíndice.

$$\text{MatrizKab}(K, a, b) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1.. \text{rows}(a) \\ \quad \text{for } j \in 1.. \text{rows}(b) \\ \quad \quad f \leftarrow a_{i,1} \\ \quad \quad c \leftarrow b_{j,1} \\ \quad \quad R_{i,j} \leftarrow K_{f,c} \\ R \end{array}$$

*Función 2.2.11: Función Para Partición de Matrices.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Una vez obtenidas las sub matrices mencionadas se procede a realizar la siguiente operación matricial mostrada en la Ecuación 2.2.37 para la obtención de la matriz condensada de rigidez.

$$K_{\text{CONDENSADA}} = \left( K_{PP} - K_{PS} \cdot K_{SS}^{-1} \cdot K_{SP} \right)$$

*Ecuación 2.2.37*

*Fuente: (Sennett, 1994)*



### 2.2.5 Solución de la Ecuación de Movimiento

Por facilidad didáctica, se procederá a usar la ecuación de movimiento, deducida en los capítulos anteriores, considerando una estructura en equilibrio y sin amortiguamiento.

Se presenta a continuación la ecuación matricial de la que se parte.

$$[M] \cdot \overline{x''(t)} + [K] \cdot \overline{x(t)} = \overline{0}$$

*Ecuación 2.2.38*

Donde, ‘M’ representa la matriz de masa (conocida) del sistema (NO necesariamente diagonal, pero si simétrica para sistemas de nuestro interés), ‘K’ la matriz de rigidez (conocida) del sistema (NO necesariamente diagonal, pero si simétrica para sistemas de nuestro interés), ‘x(t)’ el vector de movimiento en función del tiempo y ‘x''(t)’ la aceleración en función del tiempo.

Podemos notar que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales homogénea de segundo orden, siendo incógnitas la función ‘x(t)’ y su doble derivada.

Debido a que la matriz ‘M’ y la matriz ‘K’ no necesariamente son diagonales, ya sea por ‘M’, por ‘K’ o por las dos al mismo tiempo, se produce un acoplamiento del sistema de ecuaciones, es decir se produce una dependencia entre alguna variable ‘xi(t)’ con alguna variable ‘xj(t)’.

En el libro ‘Algebra Lineal y sus Aplicaciones (David C. Lay)’ se describe un método para el desacoplamiento de un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales. Aunque trata el problema ‘x’=A\*x’, se puede usar la misma lógica para resolver nuestro sistema de interés.

Partimos en recomodar la Ecuación 2.2.38 de la siguiente manera:



$$\overrightarrow{x''(t)} = -[M]^{-1} \cdot [K] \cdot \overrightarrow{x(t)}$$

*Ecuación 2.2.39*

Dado que tanto “M<sup>-1</sup>” como “K” son matrices con valores constantes, podemos representar a su producto como una única matriz “A”.

$$\overrightarrow{x''(t)} = -[A] \cdot \overrightarrow{x(t)} \qquad A = [M]^{-1} \cdot [K]$$

*Ecuación 2.2.40*

Esta expresión sugiere uno de los conceptos de transformaciones lineales en el álgebra lineal, donde se menciona que la diferenciación de funciones resulta ser una transformación lineal, que a su vez, puede ser representada con la pre multiplicación de alguna matriz “A”. (Lay, 2007)(pag. 353).

Dado que nuestro objetivo es desacoplar el sistema de ecuaciones, nuestro propósito debería ser diagonalizar la matriz “A” de tal forma que esta produzca un desacople entre “x'(t)” y “x(t)”. Se usará la misma estrategia descrita en la sección “Desacoplamiento de un sistema dinámico” de “Algebra lineal y sus Aplicaciones (David C. Lay)” pagina 358.

Consideremos que A es diagonalizable, y por tanto se puede representar de la siguiente forma.

$$[A] = [P] \cdot [D] \cdot [P]^{-1}$$

*Ecuación 2.2.41*





Donde, por conceptos ya vistos cuando se trató la diagonalización de matrices, “P” contiene un conjunto de “n” vectores que resultan ser los eigenvectores de “A”, mientras que “D” es una matriz diagonal con entradas iguales a los eigenvalores de “A”.

Realizamos un cambio de variable de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{q}(t) = [P]^{-1} \cdot \overrightarrow{x}(t) \quad \overrightarrow{x}(t) = [P] \cdot \overrightarrow{q}(t)$$

*Ecuación 2.2.42*

Considerando a  $\overrightarrow{x}(t)$  como un conjunto de coordenadas, vemos que este cambio de variable corresponde a un cambio de coordenadas, siendo la matriz de cambio de coordenadas la matriz “P” que, de hecho, contiene a los eigenvectores de “A”, además, las coordenadas relativas (o coordenadas modales, como se llamara más adelante) corresponden al vector “q(t)”.

Ahora consideramos la Ecuación 2.2.40 y Ecuación 2.2.42, obteniendo.

$$\frac{d^2}{dt^2} ([P] \cdot \overrightarrow{q}(t)) = -[A] \cdot ([P] \cdot \overrightarrow{q}(t))$$

*Ecuación 2.2.43*

Considerando que la matriz “P” está compuesta por constantes, aplicando la derivación y considerando la Ecuación 2.2.41 obtenemos:

$$[P] \cdot \overrightarrow{q}''(t) = -[P] \cdot [D] \cdot [P]^{-1} \cdot ([P] \cdot \overrightarrow{q}(t))$$

*Ecuación 2.2.44*

Realizando simplificaciones en la ecuación anterior, obtenemos:



$$[P] \cdot \overrightarrow{q''(t)} = -[P] \cdot [D] \cdot \overrightarrow{q(t)}$$

*Ecuación 2.2.45*

Pre multiplicamos a ambos lados por “P<sup>-1</sup>” y obtenemos:

$$\overrightarrow{q''(t)} = -[D] \cdot \overrightarrow{q(t)}$$

*Ecuación 2.2.46*

Dado que “D” es una matriz diagonal, hemos logrado desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales mediante el uso de cambio de variables (o implícitamente cambio de sistema de coordenadas) y diagonalización de matrices.

Para conocer el valor de la matriz “D” debemos recurrir a una propiedad clave, la ortogonalidad de los eigenvectores respecto a la matriz de masa y rigidez. En esta sección nos limitamos a usar esta propiedad, sin embargo, más adelante se la demostrara.

Considerando  $r \neq s$  y siendo “v” los eigenvectores de “M<sup>-1</sup>\*K”, además, siendo “w” los eigenvalores de “M<sup>-1</sup>\*K” y siendo  $w_r \neq w_s$ , entonces:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{v^{(r)}})^T \cdot [M] \cdot \overrightarrow{v^{(s)}} &= 0 \\ (\overrightarrow{v^{(r)}})^T \cdot [K] \cdot \overrightarrow{v^{(s)}} &= 0 \end{aligned}$$

*Ecuación 2.2.47*

Debido a esta propiedad, se puede demostrar que los siguientes productos de matrices son diagonales (Chopra, 2012) (pag. 409):



$$\begin{aligned} [P]^T \cdot [M] \cdot [P] &= [Mmod] \\ [P]^T \cdot [K] \cdot [P] &= [Kmod] \end{aligned}$$

*Ecuación 2.2.48*

Los productos de estas expresiones los llamaremos Mmod (Masa Modal) y Kmod (Rigidez Modal).

Considerando nuevamente la Ecuación 2.2.41 y la Ecuación 2.2.48, podemos realizar la siguiente deducción.

$$\begin{aligned} [P]^{-1} \cdot [A] \cdot [P] &= [D] \\ [P]^{-1} \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \cdot [P] &= [D] \\ [M]^{-1} \cdot [K] \cdot [P] &= [P] \cdot [D] \\ [K] \cdot [P] &= [M] \cdot [P] \cdot [D] \\ [P]^T \cdot [K] \cdot [P] &= [P]^T \cdot [M] \cdot [P] \cdot [D] \\ [P]^T \cdot [K] \cdot [P] &= [P]^T \cdot [M] \cdot [P] \cdot [D] \\ [Kmod] &= [Mmod] \cdot [D] \\ [Mmod]^{-1} \cdot [Kmod] &= [D] \end{aligned}$$

*Deducción 2.2.1*

Por tanto, podríamos reescribir la ecuación resultante de la Deducción 2.2.1 de la siguiente forma:



$$\begin{aligned}\overline{q''(t)} &= -[M_{mod}]^{-1} \cdot [K_{mod}] \cdot \overline{q(t)} \\ [M_{mod}] \cdot \overline{q''(t)} &= -[K_{mod}] \cdot \overline{q(t)} \\ [M_{mod}] \cdot \overline{q''(t)} + [K_{mod}] \cdot \overline{q(t)} &= \overline{0}\end{aligned}$$

*Ecuación 2.2.49*

Con las ecuaciones presentadas, podemos notar que, si “Mmod” resulta ser una matriz unitaria, entonces “D” es equivalente a “Kmod”. Como se verá a continuación, la matriz “Mmod” o de Masa Modal, puede ser unitaria mediante la normalización de los modos, o incluso puede modificarse de otras formas a conveniencia de su interpretación.

El método descrito, implícitamente usa un cambio de variable o cambio de coordenadas con el fin de desacoplar el sistema, sus implicaciones físicas se mostrarán más adelante en la sección de resultados y discusión.

## 2.3 Análisis Modal Espectral

### 2.3.1 Frecuencias Naturales y Modos de Vibración

Si consideramos vibración libre en una estructura con varios GDL, entonces existen desplazamientos iniciales específicos que, si se aplican a la estructura, cada GDL de ella vibrará en la misma fase, es decir, sus posiciones máximas, mínimas o de equilibrio, se darán en un mismo instante de tiempo. Esta vibración está sujeta a una frecuencia natural (Chopra, 2012) (pag. 405).

En estructuras con varios GDL, casi siempre existirán tantas frecuencias naturales como números de GDL, es decir, si una estructura cuenta con “n” GDL, entonces será posible encontrar “n” frecuencias naturales. Respecto a los desplazamientos iniciales que generan la vibración en frecuencias naturales, se conocen como modos de vibración.



Para hallar las frecuencias y modos naturales de una estructura, se parte por suponer que existe algún desplazamiento inicial que provoca movimiento armónico en una misma frecuencia para todos los GDL. Con esta suposición, se puede describir el movimiento de todo el sistema mediante la siguiente ecuación matricial.

$$\overrightarrow{u}(t) = q_n(t) \cdot \overrightarrow{\phi}_n$$

Ecuación 2.3.1

$$q_n(t) = A_n \cdot \cos(w_n \cdot t) + B_n \cdot \text{sen}(w_n \cdot t)$$

Ecuación 2.3.2

Siendo “u(t)” un vector de desplazamientos, “q<sub>n</sub>(t)” una función armónica simple y finalmente “Φ<sub>n</sub>” un vector con los modos o desplazamientos iniciales para la vibración periódica de todos los GDL.

Consideramos la ecuación de movimiento original.

$$[M] \cdot \overrightarrow{x}''(t) + [K] \cdot \overrightarrow{x}(t) = \overrightarrow{0} \quad \text{o} \quad [M] \cdot \overrightarrow{u}''(t) + [K] \cdot \overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{0}$$

Ecuación 2.3.3

Usando la Ecuación 2.3.1, Ecuación 2.3.2 y la Ecuación 2.3.3, y considerando “x(t)=u(t)”, entonces obtenemos.

$$\left( -w_n^2 \cdot [M] \cdot \overrightarrow{\phi}_n + [K] \cdot \overrightarrow{\phi}_n \right) \cdot q_n(t) = \overrightarrow{0}$$

Ecuación 2.3.4



Dado que el desplazamiento no puede ser 0, la única forma de satisfacer la ecuación anterior, sería que se cumpla la siguiente ecuación.

$$[K] \cdot \vec{\phi}_n = \omega_n^2 \cdot [M] \cdot \vec{\phi}_n$$

*Ecuación 2.3.5*

Si reubicamos los términos de esta ecuación, obtendríamos la siguiente expresión.

$$\left( [M]^{-1} \cdot [K] \right) \cdot \vec{\phi}_n = \omega_n^2 \cdot \vec{\phi}_n$$

*Ecuación 2.3.6*

Esta expresión se conoce como el problema de los eigenvalores y eigenvectores (tratados ya en la sección 2.2.2 Conceptos de Algebra Lineal). De esta forma se logra obtener “n” eigenvalores con sus correspondientes “n” eigenvectores.

Los eigenvalores corresponden a las frecuencias naturales elevadas al cuadrado, mientras que los eigenvectores corresponden a los modos de vibración o deformaciones iniciales para que se produzca la vibración armónica simple.

Es importante recalcar que los modos de vibración son solo una forma, es decir, no imponen la amplitud absoluta de los modos sino solo una forma o relación entre las filas del vector modo.

Se define también al conjunto de modos como una matriz de la siguiente forma:

$$[\Phi] = \left[ \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2 \dots \vec{\Phi}_n \right]$$

*Ecuación 2.3.7*



De igual manera, estableciendo una matriz diagonal con entrada del cuadrado de cada frecuencia natural o eigenvalor, obtenemos:

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_n^2 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 2.3.8*

En este punto, resulta fundamental conectar los conceptos descritos de modos y frecuencias con el método algebraico de resolución de la ecuación general que se realizó en la sección anterior.

Podemos notar las siguientes equivalencias:

$$[P] = [\Phi] \quad [D] = [\Omega^2]$$

*Ecuación 2.3.9*

Podemos observar, que implícitamente, encontramos los modos de vibración y las frecuencias al momento que resolvimos la ecuación algebraica aun sin saber el significado de estos.

### **2.3.2 Ortogonalidad de los Modos**

La ortogonalidad de los modos hace referencia a una ortogonalidad existente entre los modos y las matrices de masa y rigidez, mas no a una ortogonalidad entre los mismos modos. Se presenta a continuación las relaciones que se pueden obtener gracias a la ortogonalidad.

Considerando:



$$w_s \neq w_r$$

*Ecuación 2.3.10*

Entonces:

$$\left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [K] \cdot \vec{\Phi}_r = 0 \qquad \left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_r = 0$$

*Ecuación 2.3.11*

Se procede a demostrar esta relación. Partiendo de la ecuación matricial ya tratada:

$$[K] \cdot \vec{\Phi}_n = w_n^2 \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_n$$

*Ecuación 2.3.12*

Se sustituye 1 par de eigenvector y eigenvalor y se pre multiplica un eigenvector traspuesto y distinto al anterior.

$$\left(\vec{\Phi}_r\right)^T \cdot [K] \cdot \vec{\Phi}_s = w_s^2 \cdot \left(\vec{\Phi}_r\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_s$$

*Ecuación 2.3.13*

Se parte otra vez de la ecuación inicial y se vuelve a realizar el proceso anterior, pero con otro par de eigensoluciones y otro eigenvector.

$$\left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [K] \cdot \|\vec{\Phi}_r\| = w_r^2 \cdot \left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_r$$

*Ecuación 2.3.14*





Se restan las 2 ecuaciones anteriores y se obtiene:

$$\left(\vec{\Phi}_r\right)^T \cdot [K] \cdot \vec{\Phi}_s - \left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [K] \cdot \vec{\Phi}_r = w_s^2 \cdot \left(\vec{\Phi}_r\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_s - w_r^2 \cdot \left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_r$$

*Ecuación 2.3.15*

Sin embargo, debido a la simetría de las matrices “K” y “M” se puede establecer la siguiente relación:

$$\left(\vec{\Phi}_r\right)^T \cdot [K] \cdot \vec{\Phi}_s = \left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [K] \cdot \vec{\Phi}_r \quad \left(\vec{\Phi}_r\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_s = \left(\vec{\Phi}_s\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_r$$

*Ecuación 2.3.16*

Considerando la Ecuación 2.3.15 y la Ecuación 2.3.16, obtenemos

$$0 = \left(w_s^2 - w_r^2\right) \cdot \left(\vec{\Phi}_r\right)^T \cdot [M] \cdot \vec{\Phi}_s$$

*Ecuación 2.3.17*

Asumiendo la relación de condición inicial de la Ecuación 2.3.10, se comprueba la ortogonalidad de los eigenvectores con respecto a la matriz “M”. Se puede realizar la misma demostración con “K”. (Chopra, 2012)(pag. 409).

Una de las consecuencias físicas de la ortogonalidad modal, es que el trabajo hecho por las fuerzas iniciales de un n-ésimo modo al pasar a través de desplazamientos de un r-ésimo modo es igual a 0. (Chopra, 2012) (pag. 410).



### 2.3.3 Normalización de los Modos

Como se mencionó con anterioridad, se define a los modos como una forma, mas no como valores absolutos, por tanto, cualquier vector proporcional a un modo, es en esencia el mismo modo. La flexibilidad de poder representar un modo con diferentes vectores proporcionales entre sí, nos permite estandarizar elementos asociados con los grados de libertad a nuestra conveniencia.

Algunas ocasiones resulta conveniente normalizar los modos de tal forma que el elemento más grande de cada modo sea la unidad, en otras circunstancias se normaliza de tal forma que el grado de libertad que corresponde al piso superior de un edificio sea la unidad, sin embargo, la forma más común de normalizar los modos, es modificarlos de tal forma que la matriz  $M_{mod}$  sea igual a la matriz identidad, es decir. (Chopra, 2012)(pag. 411).

$$[M_{mod}] = [\phi]^T \cdot [M] \cdot [\phi] = [I]$$

*Ecuación 2.3.18*

Al normalizar de esta manera, obtenemos:

$$[K_{mod}] = [\phi]^T \cdot [K] \cdot [\phi] = [\Omega^2]$$

*Ecuación 2.3.19*

Recordemos que las expresiones de “Kmod” y “Mmod” ya aparecieron con anterioridad al resolver la ecuación algebraica general.

### 2.3.4 Sistemas con Amortiguamiento Clásico

El alcance de este trabajo se limita a analizar los sistemas con amortiguamiento clásico, por tanto, no se tratará con detalle otro tipo de amortiguamiento.



Al incluir amortiguamiento, la ecuación que se genera es la siguiente:

$$[M] \cdot \overline{x''(t)} + [C] \cdot \overline{x'(t)} + [K] \cdot \overline{x(t)} = \overline{0}$$

*Ecuación 2.3.20*

Dado que tratamos un amortiguamiento de tipo clásico para fines prácticos, la siguiente ecuación se satisface.

$$[C] \cdot [M]^{-1} \cdot [K] = [K] \cdot [M]^{-1} \cdot [C]$$

*Ecuación 2.3.21*

Entonces, todos los modos de vibración son idénticos al sistema no amortiguado asociado y, de hecho, se determinan resolviendo el problema del valor característico, además, tiene los mismos modos naturales clásicos. Definimos también “Cmod” de la siguiente manera:

$$[C_{mod}] = [\phi]^T \cdot [C] \cdot [\phi]$$

*Ecuación 2.3.22*

Que resulta ser diagonal para los sistemas clásicamente amortiguados. (Chopra, 2012)(pag. 424).

### **2.3.5 Procedimiento del Análisis Modal Espectral**

Un análisis modal tiene como objetivo dividir a una estructura de múltiples grados de libertad en múltiples sistemas de 1 GDL, con la intención de poder desacoplar las ecuaciones y dar solución al sistema. El análisis modal espectral, simplemente incluye el uso de un espectro de respuesta. Se muestra a continuación un resumen de los procedimientos a seguir para un análisis modal espectral. (Chopra, 2012)(pag. 477).



- 1) Definir propiedades estructurales, tales como la matriz de masa, matriz de rigidez y matriz de amortiguamiento modal.
- 2) Determinar el par de eigensoluciones, es decir, los modos y las frecuencias para la estructura, además de obtener otros elementos como factores de participación o normalización de los modos.
- 3) Establecer las múltiples estructuras de 1 GDL en el cual fue dividido el sistema de múltiples GDL.
- 4) En función de la frecuencia natural y del espectro de diseño, obtener los desplazamientos máximos para cada estructura de 1 GDL, es decir, obtener cada respuesta modal.
- 5) Combinar las respuestas modales con alguno de los métodos ya establecidos: SRSS, CQC, etc.

Se describe con mayor detenimiento el procedimiento para el análisis modal espectral mediante un caso de estudio en el capítulo 3.

### **2.3.6 Software SAP2000**

SAP2000 es un software enfocado al análisis estructural y dimensionamiento de edificios. Es una herramienta con alta capacidad para los análisis lineales y no lineales, además de ofrecer una interfaz sofisticada, intuitiva y versátil.

Para fines de este trabajo, se describirá simplemente las funciones principales.

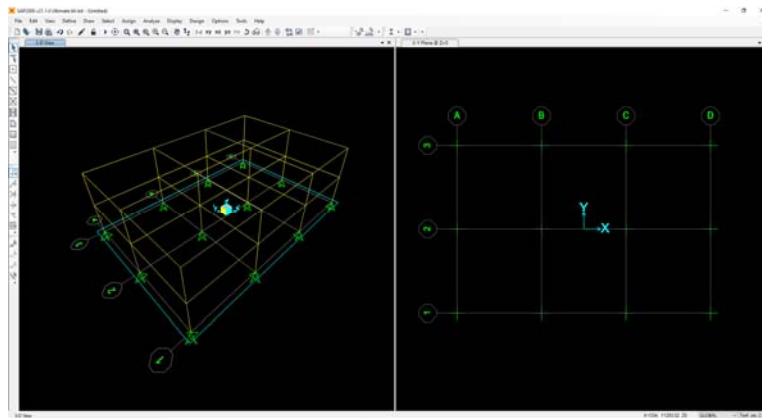


Ilustración 2.3.1: Escritorio de Trabajo de SAP2000.

Fuente: Elaboración Propia

### 2.3.6.1 Definición de Materiales

SAP nos permite usar materiales predefinidos tales como el acero y hormigón, además de ofrecernos la posibilidad de establecer nuevos materiales con sus características. (Ilustración 2.3.2).

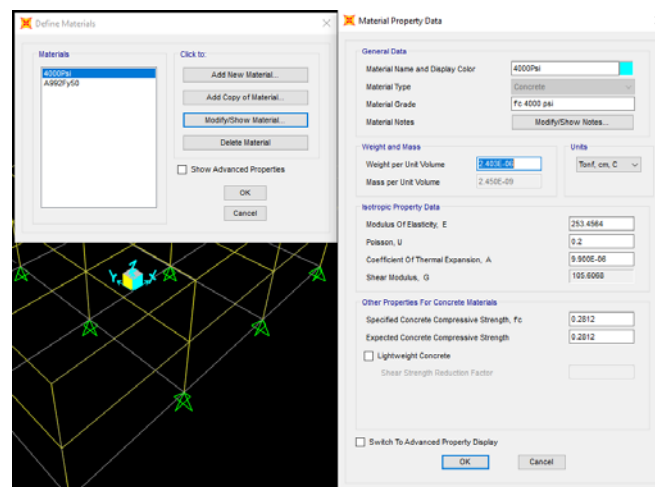


Ilustración 2.3.2: Interfaz para especificar materiales en SAP2000.

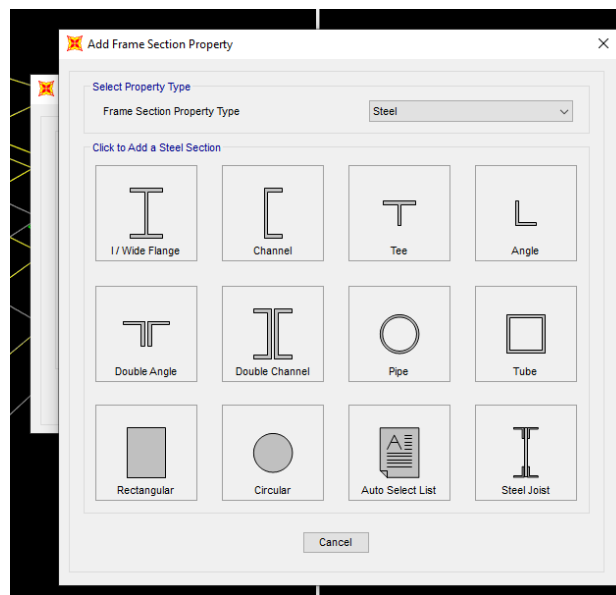
Fuente: Elaboración Propia

Podemos establecer parámetros como el módulo de elasticidad, módulo de Poisson, coeficiente de expansión térmico, módulo de corte, entre otros. Es importante recalcar que

debemos trabajar en las mismas unidades tanto en el análisis detallado de Mathcad, como en el modelamiento de este programa para asegurar la precisión de los dos resultados.

### 2.3.6.2 Definición de la Sección del Elemento

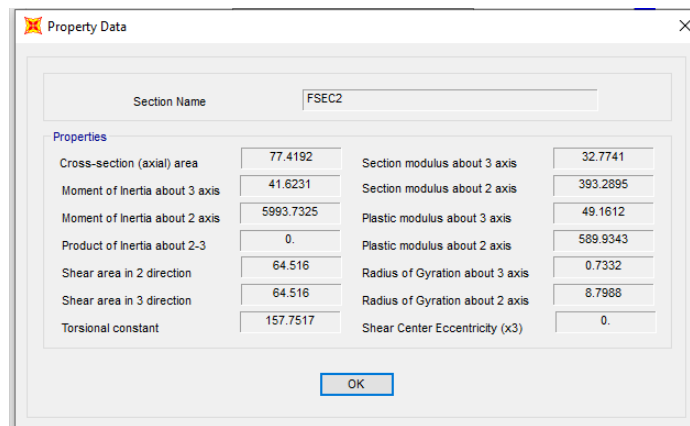
Se nos presenta la opción de usar secciones típicas como perfiles en acero, secciones rectangulares, secciones circulares, entre otras.



*Ilustración 2.3.3: Interfaz para especificar secciones en SAP2000.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Por fines prácticos el programa permite modificar parámetros que se obtienen de la geometría de una sección tal como se muestra a continuación.



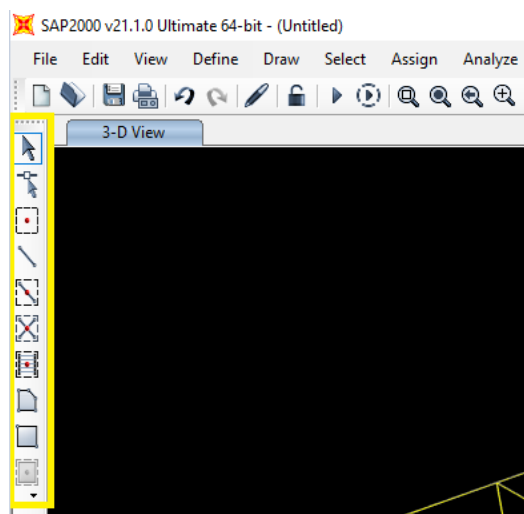
*Ilustración 2.3.4: Interfaz para introducir propiedades de secciones en SAP2000.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Esta herramienta nos resulta útil cuando usamos secciones especiales que no se encuentran entre las predeterminadas que ofrece SAP2000.

### 2.3.6.3 Modelación de la Estructura

La interfaz del programa permite dibujar de una manera sencilla la estructura que vayamos a usar, para esto provee una barra de herramientas ubicada al lado izquierdo.

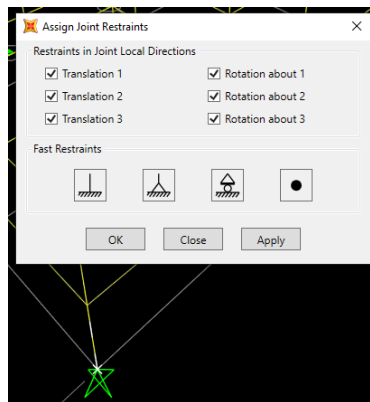


*Ilustración 2.3.5: Interfaz para dibujo de estructuras en SAP2000.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Estas herramientas nos permiten colocar nodos en las posiciones específicas para posteriormente conectarlos de una manera rápida y sencilla con elementos que llegan a ser las vigas y columnas.

También se nos brinda la posibilidad de especificar los tipos de restricciones que puede existir en los apoyos de la estructura, para nuestro caso se usará el más común, un empotramiento completo. Ilustración 2.3.6



*Ilustración 2.3.6: Interfaz para restricciones en SAP2000.*

*Fuente: Elaboración Propia*

#### **2.3.6.4 Espectro de Respuesta**

El software nos permite introducir funciones de espectro según lo requiramos, esto se puede realizar de varias formas, sin embargo, nos limitamos a su explicación.



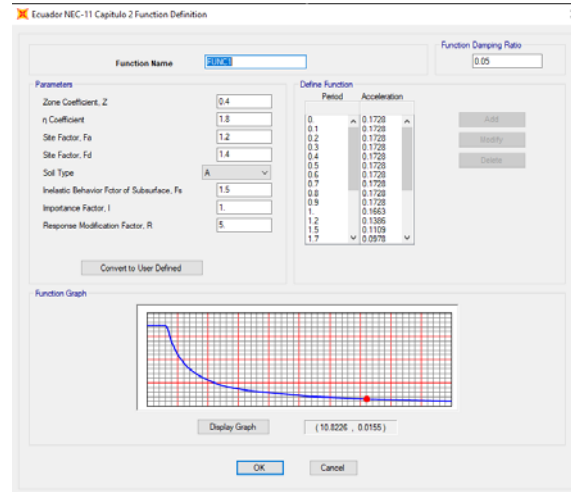


Ilustración 2.3.7: Interfaz para introducir espectros en SAP2000.

Fuente: Elaboración Propia

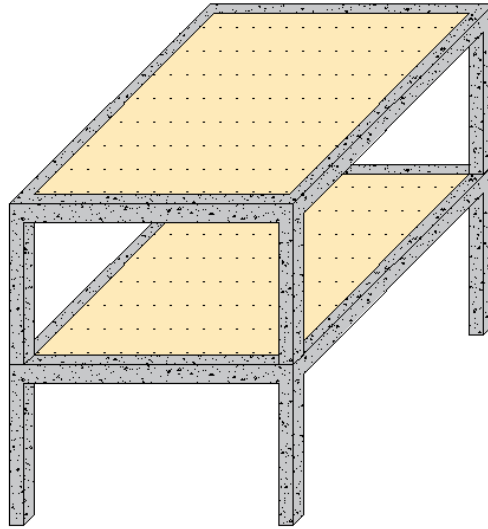
Al seleccionar la normativa ecuatoriana, nos encontraremos con todos los parámetros necesarios para formar el espectro de nuestro interés. Un parámetro importante a definirse es el porcentaje de amortiguamiento al cual corresponde el espectro.

### 3 ANÁLISIS DE ESTRUCTURA MODELO

A continuación, se presenta un análisis modal espectral desde cero de una estructura modelo elaborado en Mathcad Prime y SAP2000.

#### 3.1 Planteamiento de la Estructura Modelo

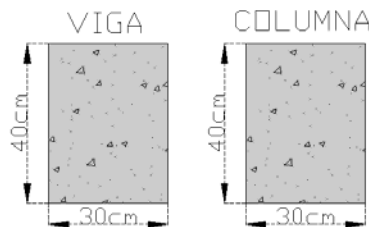
La estructura modelo es un pórtico resistente a momento de hormigón de dos pisos con una resistencia especificada a la compresión de  $280 \frac{Kgf}{cm^2}$ .



*Ilustración 3.1.1: Pórtico de caso de estudio.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Las secciones de los elementos del pórtico se muestran en la Ilustración 3.1.1 la cual indica que las vigas son de  $(40 \times 30)cm$  y las columnas de  $(40 \times 30)cm$ .



*Ilustración 3.1.2: Secciones del caso de estudio.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### **3.2 Análisis Modal Espectral Detallado en Mathcad Prime**

A continuación, se presenta el análisis modal espectral utilizando las funciones previamente explicadas en la sección “Análisis Modal Espectral”.

### 3.2.1 Ensamblaje de matriz de rigidez de la estructura

#### 3.2.1.1 Datos de entrada.

Los datos de entrada deberán ser colocados de la forma previamente mostrada en la sección “Datos de Entrada”.

##### 3.2.1.1.1 Coordenadas de Nodos

En la Ilustración 3.2.1, se muestra que los nodos necesarios para modelar la estructura son aquellos que están ubicados en los extremos de esta (color rojo) además de un nodo extra por piso ubicado en el centro de masa de cada uno (color verde).

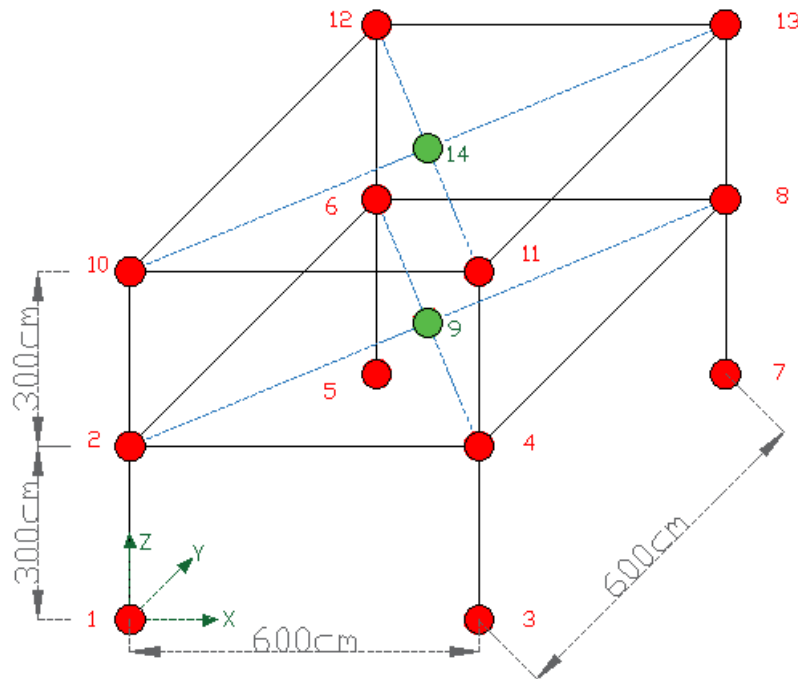


Ilustración 3.2.1: Nodos y conexiones en estructura del caso de estudio.

Fuente: Elaboración Propia

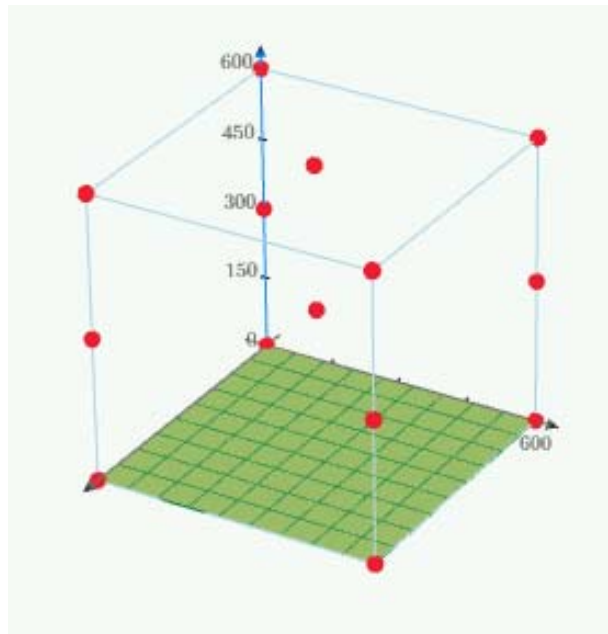
Por ende, la matriz de coordenadas de nodos XYZ que se deberá colocar en Mathcad

Prime será de la siguiente forma, donde las coordenadas están en centímetros.

$$XYZ := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \\ 600 & 0 & 0 \\ 600 & 0 & 300 \\ 0 & 600 & 0 \\ 0 & 600 & 300 \\ 600 & 600 & 0 \\ 600 & 600 & 300 \\ 300 & 300 & 300 \\ 0 & 0 & 600 \\ 600 & 0 & 600 \\ 0 & 600 & 600 \\ 600 & 600 & 600 \\ 300 & 300 & 600 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.1*

Comprobación gráfica en Mathcad Prime.



*Ilustración 3.2.2: Ubicación de los nodos en caso de estudio.*

*Fuente: Elaboración Propia*



### 3.2.1.1.2 Propiedades de Materiales

La estructura contará con dos materiales, el material 1 será el hormigón con un  $f'c = 280 \frac{Kgf}{cm^2}$  mientras que el material 2 tendrá propiedades nulas. El material 2 será utilizado para modelar elementos que no existen físicamente en la estructura, pero servirá para dar una conectividad entre los nodos extremos (color rojo) con los nodos ubicados en el centro de masa del piso (color verde).

El módulo de elasticidad del material 1 se obtendrá de la Ecuación 3.2.2 (318-ACI-Committee, 2019).

$$Ec = 15100 \cdot \sqrt{f'c}$$

*Ecuación 3.2.2*

El módulo de corte del material 1 se obtendrá de la Ecuación 3.2.3 utilizando un módulo de Poisson  $\nu = 0.2$ .

$$Gc = \frac{Ec}{2(1+\nu)}$$

*Ecuación 3.2.3*

Por ende, la matriz de propiedades de los materiales MAT que se deberá colocar en Mathcad Prime será de la siguiente forma, donde el módulo de elasticidad y corte están dados

en  $\frac{Kgf}{cm^2}$ .



$$MAT := \begin{bmatrix} 1 & 252671 & \frac{252671}{2 \cdot (1 + 0.2)} \\ 2 & 0.00000000000001 & 0.00000000000001 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.4

### 3.2.1.1.3 Propiedades de Secciones

La estructura contará con tres secciones, la sección 1 será la de la columna de  $(40 \times 30)cm$ , la sección 2 será la de la viga de  $(40 \times 30)cm$  y la sección 3 será una sección nula.

Por ende, la matriz de propiedades de las secciones PROP que se deberá colocar en Mathcad Prime será de la siguiente forma, donde el área está dada en  $cm^2$  y las inercias y módulos torsionales en  $cm^4$ .

$$PROP := \begin{bmatrix} 1 & 30 \cdot 40 & \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 40^3 & \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 30^3 & 194385.05859375 \\ 2 & 30 \cdot 40 & \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 40^3 & \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 30^3 & 194385.05859375 \\ 3 & 0.00000000000001 & 0.00000000000001 & 0.00000000000001 & 0.00000000000001 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.5

### 3.2.1.1.4 Conectividad de Elementos

La conectividad de elementos se observa de mejor manera en la Ecuación 3.2.6 la cual muestra a las columnas y vigas de color negro mientras que a los elementos con propiedades nulas de color azul.

La estructura posee 8 columnas  $(40 \times 30)cm$ , 8 vigas  $(40 \times 30)cm$  y 8 elementos con propiedades nulas. Por ende, la matriz de conectividad de elementos CON que se deberá



colocar en Mathcad Prime será de la siguiente forma, donde las tres últimas columnas pertenecientes a los nodos  $K$  están en  $cm$ .

$$CON := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 1 & 100 & 600 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 1 & 100 & 600 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 8 & 1 & 2 & 600 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 1 & 2 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 9 & 2 & 3 & 600 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 9 & 6 & 2 & 3 & 600 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 2 & 9 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 8 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 2 & 10 & 1 & 1 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 11 & 1 & 1 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 6 & 12 & 1 & 1 & 100 & 600 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 13 & 1 & 1 & 100 & 600 & 0 & 0 \\ 17 & 10 & 11 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 12 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 11 & 13 & 1 & 2 & 600 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 12 & 13 & 1 & 2 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 21 & 11 & 14 & 2 & 3 & 600 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 14 & 12 & 2 & 3 & 600 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 10 & 14 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 14 & 13 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.6*

### 3.2.1.1.5 Restricciones de Nodos

Los nodos 1, 3, 5 y 7 son los que se encuentran empotrados. Por ende, la matriz de restricciones de nodos  $REST$  que se deberá colocar en Mathcad Prime será de la siguiente forma.

$$REST := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.7*

A continuación, se presenta una comprobación gráfica elaborada en Mathcad Prime.

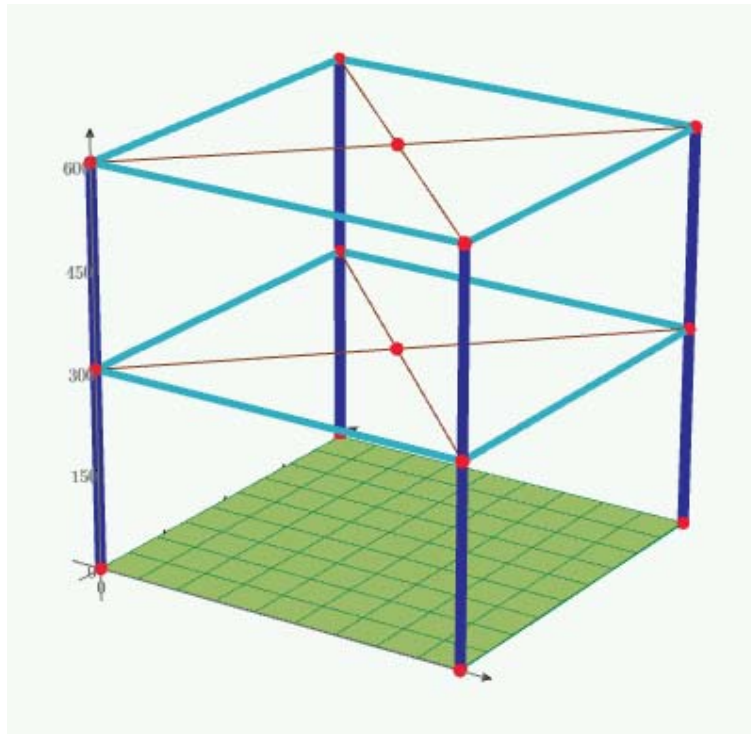


Ilustración 3.2.3: Estructura de estudio graficada en Mathcad Prime.

Fuente: Elaboración Propia

### 3.2.1.2 Calcular Longitud de Elementos

Para el cálculo de la longitud de elementos se utiliza la Función 3.2.1, al haber 24 elementos la función arroja un vector con 24 longitudes.

$$\text{Longitudes} := \text{CalculoLongitudes}(\text{XYZ}, \text{CON}) = \begin{array}{l} 1 \left[ \begin{array}{l} 300 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \\ 600 \\ 600 \\ 600 \\ 600 \\ 424.264 \\ \vdots \\ 24 \end{array} \right] \end{array}$$

Función 3.2.1: Cálculo de longitudes de elementos

Fuente: Elaboración Propia





### 3.2.1.3 Calcular Matrices de Rigidez de Cada Elemento en Coordenadas Locales

Para el cálculo de las matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas locales se utiliza la Función 3.2.2, al haber 24 elementos la función arroja un vector con 24 matrices de rigidez en coordenadas locales de orden  $(12 \times 12)$ .

$$k_{e_l} := \text{Matrizkelementolocal}(\text{Longitudes}, \text{CON}, \text{MAT}, \text{PROP}) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \\ 24 \end{matrix} \begin{bmatrix} [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

*Función 3.2.2: Cálculo de matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas locales.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.2.1.4 Calcular Matrices de Transformación de Coordenadas Locales a Globales

Para el cálculo de las matrices de transformación de coordenadas locales a globales se utiliza la Función 3.2.3, al haber 24 elementos la función arroja un vector con 24 matrices de transformación de orden  $(12 \times 12)$ .

$$\beta := \text{MatrizBeta}(\text{XYZ}, \text{CON}, \text{Longitudes}) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ \vdots \\ 24 \end{matrix} \begin{bmatrix} [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ [12 \times 12] \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

*Función 3.2.3: Cálculo de matriz de transformación de coordenadas.*

*Fuente: Elaboración Propia*



### 3.2.1.5 Calcular Matrices de Rigidez de Cada Elemento en Coordenadas Globales

Para el cálculo de las matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales se utiliza la Función 3.2.4, al haber 24 elementos la función arroja un vector con 24 matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales de orden  $(12 \times 12)$ .

$$k_{e_g} = \text{MatrizKelemento}(k_{e_l}, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & [12 \times 12] \\ 2 & [12 \times 12] \\ 3 & [12 \times 12] \\ 4 & [12 \times 12] \\ 5 & [12 \times 12] \\ 6 & [12 \times 12] \\ 7 & [12 \times 12] \\ 8 & [12 \times 12] \\ 9 & [12 \times 12] \\ 10 & [12 \times 12] \\ 11 & [12 \times 12] \\ 12 & [12 \times 12] \\ \vdots & \vdots \\ 24 & \vdots \end{bmatrix}$$

*Función 3.2.4: Cálculo de matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.2.1.6 Calcular Matrices de Colocación

Para el cálculo de las matrices de colocación se utiliza la Función 3.2.5, al haber 24 elementos la función arroja un vector con 24 matrices de colocación de orden  $(12 \times 84)$  puesto que 84 grados de libertad son los totales de la estructura.

$$L = \text{MatrizColocacion}(CON, XYZ) = \begin{bmatrix} 1 & [12 \times 84] \\ 2 & [12 \times 84] \\ 3 & [12 \times 84] \\ 4 & [12 \times 84] \\ 5 & [12 \times 84] \\ 6 & [12 \times 84] \\ 7 & [12 \times 84] \\ 8 & [12 \times 84] \\ 9 & [12 \times 84] \\ 10 & [12 \times 84] \\ 11 & [12 \times 84] \\ 12 & [12 \times 84] \\ \vdots & \vdots \\ 24 & \vdots \end{bmatrix}$$

*Función 3.2.5: Cálculo de matriz de colocación.*

*Fuente: Elaboración Propia*



### 3.2.1.7 Calcular Matrices de Rigidez de Cada Elemento en Coordenadas Globales y en Dimensión de la Estructura

Para el cálculo de las matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales y en dimensión de la estructura se utiliza la Función 3.2.6, al haber 24 elementos la función arroja un vector con 24 matrices de rigidez de orden  $(84 \times 84)$ .

```

k_es_g:=MatrizKelemento(k_e_g,L)=
1 [84 x 84]
2 [84 x 84]
3 [84 x 84]
4 [84 x 84]
5 [84 x 84]
6 [84 x 84]
7 [84 x 84]
8 [84 x 84]
9 [84 x 84]
10 [84 x 84]
11 [84 x 84]
12 [84 x 84]
⋮
24 [84 x 84]

```

*Función 3.2.6: Cálculo de matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales y dimensión de la estructura.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.2.1.8 Calcular Matriz de Rigidez de la Estructura

Para el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura se utiliza la Función 3.2.7, la cual arroja una matriz de orden  $(84 \times 84)$ .

```

K_Estructura:=KGlob(k_es_g,XYZ)=
1 [ 17967.716 0 0 0 0 0 ]
2 [ 0 10106.84 0 -1516026 0 0 ]
3 [ 0 0 1010684 0 0 0 ]
4 [ 0 -1516026 0 0 303205200 0 ]
5 [ 2695157.333 0 0 0 0 0 ]
6 [ 0 0 0 0 0 0 ]
7 [ -17967.716 0 0 0 0 0 ]
8 [ 0 -10106.84 0 0 1516026 0 ]
9 [ 0 0 -1010684 0 0 0 ]
10 [ 0 -1516026 0 0 151602600 0 ]
⋮
84 [ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ]

```

*Función 3.2.7: Cálculo final de la matriz de rigidez de la estructura.*

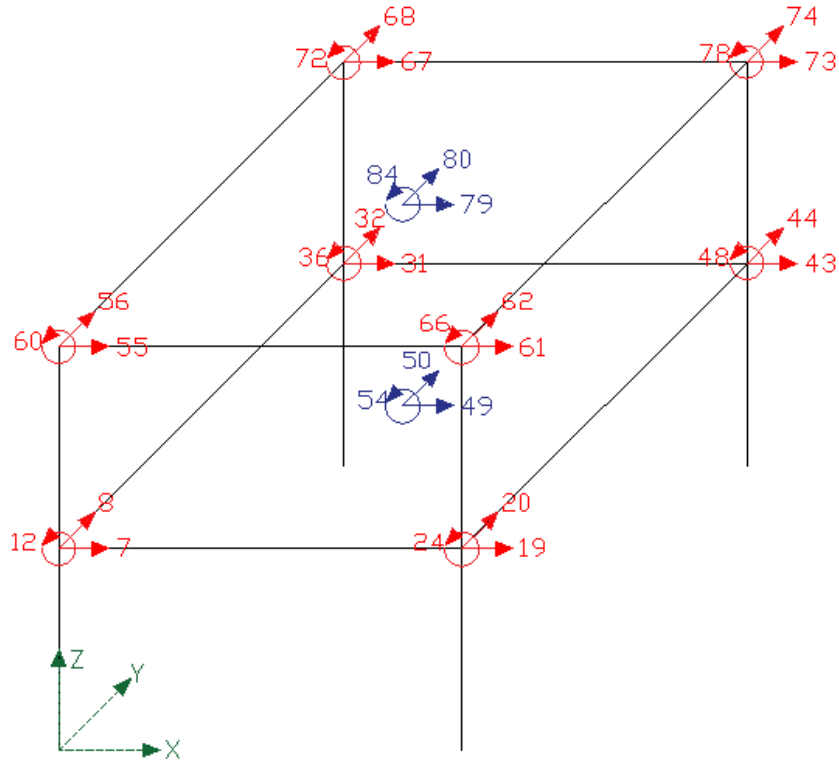
*Fuente: Elaboración Propia*



**PISO 2**

$$\begin{array}{llll}
 u_{55} = u_{79} - (300) \cdot u_{84} & u_{61} = u_{79} - (300) \cdot u_{84} & u_{67} = u_{79} - (-300) \cdot u_{84} & u_{73} = u_{79} - (-300) \cdot u_{84} \\
 u_{56} = u_{80} + (-300) \cdot u_{84} & u_{62} = u_{80} + (300) \cdot u_{84} & u_{68} = u_{80} + (-300) \cdot u_{84} & u_{74} = u_{80} + (300) \cdot u_{84} \\
 u_{60} = u_{84} & u_{66} = u_{84} & u_{72} = u_{84} & u_{78} = u_{84}
 \end{array}$$

Ecuación 3.2.9


 Ilustración 3.2.4: Condensación de GDL  
 Fuente: Elaboración Propia

A continuación, se procede a realizar el cálculo de la nueva matriz de rigidez de la estructura con la restricción de diafragma rígido de piso.



$$K\_Estructura := El^T \cdot K\_Estructura \cdot El$$

$$K\_Estructura := El \cdot K\_Estructura \cdot El^T$$

*Ecuación 3.2.10*

La aplicación de la restricción de diafragma rígido de piso traslada todas las rigideces laterales y torsionales de los nodos extremos al nodo ubicado en el centro de masa de cada piso, por ende, con la aplicación de dicha restricción la matriz de rigidez de la estructura tendrá columnas y filas completas con valores de cero donde estas rigideces pertenecían inicialmente. Por ello se requiere de una sub matriz que únicamente considere los grados de libertad que no pertenezcan a las restricciones y que no tengan un valor de cero.

Para el cálculo de la sub matriz de la estructura se utiliza la Función 3.2.8, la cual requiere como entrada un vector que contenga la columna o fila a la que pertenecen los grados de libertad que se requieran. A continuación, en la Ecuación 3.2.11 se muestra dicho vector.

$$p2 := \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \cdot 10 \\ 1.1 \cdot 10 \\ 2.1 \cdot 10 \\ 2.2 \cdot 10 \\ 2.3 \cdot 10 \\ 3.3 \cdot 10 \\ 3.4 \cdot 10 \\ 3.5 \cdot 10 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.11*

Cálculo de sub matriz.

$$K_{pp} := \text{MatrizKpp}(K_{\text{Estructura}}, p2) = \begin{bmatrix} 1 & 2025860 & 673789 & -673789 & \dots & 30 \\ 2 & 673789 & 910034097 & 0 & & \\ 3 & -673789 & 0 & 1381686630 & & \\ 4 & -2246 & 0 & 673789 & & \\ 5 & 0 & -34107963 & 0 & & \\ 6 & -673789 & 0 & 134757867 & & \\ 7 & -2246 & -673789 & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 30 & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

*Función 3.2.8: Obtención de la matriz kpp.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.2.2.2 Aplicación de Condensación Estática

Para el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura condensada en sus grados de libertad primarios se utiliza la Función 3.2.8, la cual requiere como entrada un vector que contenga las posiciones de los grados de libertad primarios y un vector que contenga las posiciones de los grados de libertad secundarios. A continuación, en la Ecuación 3.2.12 se muestran dichos vectores.

$$t := \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 28 \\ 29 \\ 30 \end{bmatrix} \quad o := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.12*

A continuación, el cálculo de sub matrices necesarias para la condensación estática.



$$\begin{aligned}ktt &:= \text{MatrizKab}(Kpp, t, t) \\kto &:= \text{MatrizKab}(Kpp, t, o) \\kot &:= \text{MatrizKab}(Kpp, o, t) \\koo &:= \text{MatrizKab}(Kpp, o, o)\end{aligned}$$

*Ecuación 3.2.13*

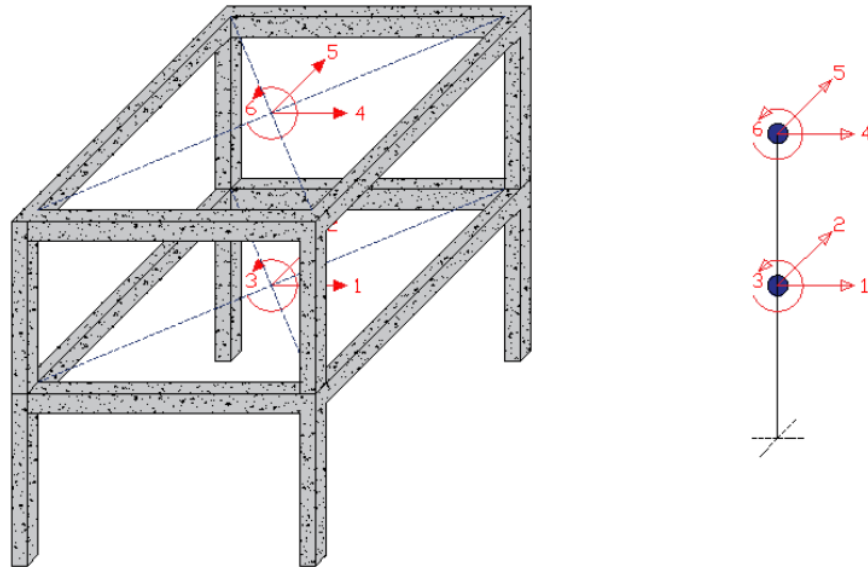
Luego se procede a aplicar la Ecuación 3.2.14 para obtener la matriz de rigidez de la estructura condensada en los grados de libertad laterales y torsionales del centro de masa de cada piso.

$$kcond := ktt - kto \cdot koo^{-1} \cdot kot = \begin{bmatrix} 111143.91 & 0 & 0 & -45168.02 & 0 & 0 \\ 0 & 67368.3 & 0 & 0 & -28943.77 & 0 \\ 0 & 0 & 16951266492.24 & 0 & 0 & -7196896452.77 \\ -45168.02 & 0 & 0 & 30372.22 & 0 & 0 \\ 0 & -28943.77 & 0 & 0 & 21536.96 & 0 \\ 0 & 0 & -7196896452.77 & 0 & 0 & 5265243200.22 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.14*

La matriz obtenida es una matriz de orden ( $6 \times 6$ ) donde a continuación se muestra una figura que ubica cada grado de libertad de dicha matriz.





*Ilustración 3.2.5: Pórtico de caso de estudio.*

*Fuente: Elaboración Propia*

La Ilustración 3.2.5 indica que los grados de libertad 1 y 4 son los laterales correspondientes al eje X, los grados de libertad 2 y 5 los laterales correspondientes al eje Y y los grados de libertad 3 y 6 los torsionales correspondientes al giro respecto al eje Z.

### **3.2.3 Determinación de Propiedades de la Estructura**

A continuación, se presenta las propiedades necesarias para el análisis modal espectral.

#### **3.2.3.1 Matriz de Rigidez de Estructura “K”**

A continuación, se muestra la matriz de rigidez de la estructura previamente calculada en “Aplicación de Condensación Estática” la cual viene dado en  $\frac{Kgf}{cm}$ .



$$K := \begin{bmatrix} 111143.91 & 0 & 0 & -45168.02 & 0 & 0 \\ 0 & 67368.3 & 0 & 0 & -28943.77 & 0 \\ 0 & 0 & 16951266492.24 & 0 & 0 & -7196896452.77 \\ -45168.02 & 0 & 0 & 30372.22 & 0 & 0 \\ 0 & -28943.77 & 0 & 0 & 21536.96 & 0 \\ 0 & 0 & -7196896452.77 & 0 & 0 & 5265243200.22 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.15

### 3.2.3.2 Matriz de Masa de Estructura “M”

La matriz de masa de la estructura es una matriz diagonal de mismo orden que la matriz de rigidez de la estructura la cual presenta las masas que posee los grados de libertad correspondientes en el caso de ser laterales y las inercias en el caso de ser torsionales.

Para el caso de este análisis se eliminó el peso propio de los elementos y se asumió que cada nodo extremo tiene una masa de  $m = 2 \text{ Kg}$ , por ende, la masa total lateral por piso de la estructura será de  $8 \text{ Kg}$ . A su vez, la inercia rotacional será de  $4 * m * r^2$  donde  $r$  es la distancia que existe entre el nodo ubicado en el centro de masa con los nodos extremos.

A continuación, se muestra la matriz de masa de la estructura la cual viene dada en  $\text{Kg}$  para las columnas 1, 2, 4 y 5 mientras que para las columnas 3 y 6 en  $\text{Kg} * \text{cm}^2$ .

$$M := \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1440000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1440000 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.16



### 3.2.3.3 Modos de Vibración de Estructura

Se recuerda que los eigenvalores entre las matrices  $K$  y  $M$  son las frecuencias naturales de vibración elevadas al cuadrado y por lo general estos se ordenan de menor a mayor.

#### 3.2.3.3.1 Frecuencias Naturales de vibración

Para el cálculo de las frecuencias naturales de vibración se utiliza la función de Mathcad Prime “genvals” que devuelve un vector que satisface el problema de los eigenvalores además de la función “sort” que ordena los valores de este vector. A continuación, se presenta el cálculo del vector que contiene las frecuencias naturales de vibración de la estructura y viene dado en Hz.

$$wn := \text{sort} \left( \sqrt{\text{genvals}(K, M)} \right) = \begin{bmatrix} 30.6911216733966 \\ 35.6509369803278 \\ 35.7273826214468 \\ 100.852430179814 \\ 118.96085852874 \\ 128.134800196612 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.17

#### 3.2.3.3.2 Periodos Naturales de Vibración

A continuación, se presenta el cálculo del vector que contiene los periodos naturales de vibración de la estructura a partir de sus frecuencias y viene dado en segundos.

$$Tn := \frac{2 \cdot \pi}{wn} = \begin{bmatrix} 0.204723 \\ 0.176242 \\ 0.175865 \\ 0.062301 \\ 0.052817 \\ 0.049036 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.18

### 3.2.3.4 Forma Modal de Estructura

Para el cálculo de la forma modal de la estructura se utiliza la función de Mathcad Prime “genvecs” que devuelve una matriz que satisface el problema de los eigenvectores. A continuación, se presenta el cálculo de la matriz que contiene los vectores modales de la estructura.

$$\Phi := \text{genvecs}(K, M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.4473 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0.4837 \\ 0 & -1 & 0 & 0.4762 & 0 & 0 \\ -0.4473 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4837 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0.4762 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.19

Cada columna de la matriz de forma previamente obtenida es un vector modal, sin embargo, es conveniente normalizar estos vectores con la finalidad de obtener una matriz de masa modal igual a la identidad. A continuación, se muestra la normalización de la matriz de forma modal.

Coefficientes de normalización que transformarán a la matriz de forma modal con la finalidad de obtener la matriz de masa modal en una matriz identidad.

$$\begin{aligned} a1 &:= \sqrt{\frac{1}{\langle \Phi^{(1)} \rangle^T \cdot M \cdot \Phi^{(1)}}} = 0.32274 & a4 &:= \sqrt{\frac{1}{\langle \Phi^{(4)} \rangle^T \cdot M \cdot \Phi^{(4)}}} = 0.00075 \\ a2 &:= \sqrt{\frac{1}{\langle \Phi^{(2)} \rangle^T \cdot M \cdot \Phi^{(2)}}} = 0.00075 & a5 &:= \sqrt{\frac{1}{\langle \Phi^{(5)} \rangle^T \cdot M \cdot \Phi^{(5)}}} = 0.32274 \\ a3 &:= \sqrt{\frac{1}{\langle \Phi^{(3)} \rangle^T \cdot M \cdot \Phi^{(3)}}} = 0.31827 & a6 &:= \sqrt{\frac{1}{\langle \Phi^{(6)} \rangle^T \cdot M \cdot \Phi^{(6)}}} = 0.31827 \end{aligned}$$

Ecuación 3.2.20



A continuación, se multiplica cada vector modal con su respectivo factor de normalización y se obtiene la matriz de forma modal normalizada.

$$\Phi_n := \text{augment} (a_6 \cdot \Phi^{(6)}, a_5 \cdot \Phi^{(5)}, a_4 \cdot \Phi^{(4)}, a_3 \cdot \Phi^{(3)}, a_2 \cdot \Phi^{(2)}, a_1 \cdot \Phi^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 & -0.144 & 0 & 0 & 0 & 0.323 \\ -0.154 & 0 & 0 & -0.318 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001 & 0 \\ 0 & -0.323 & 0 & 0 & 0 & -0.144 \\ -0.318 & 0 & 0 & 0.154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.21*

### 3.2.3.5 Matriz de Rigidez Modal de Estructura

Para el cálculo de la matriz de rigidez modal de la estructura se realiza la siguiente operación matricial con la matriz de forma modal normalizada.

$$K_{mod} := \Phi_n^T \cdot K \cdot \Phi_n = \begin{bmatrix} 941.9449 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1270.9893 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1276.4459 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10171.2127 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14151.6859 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16418.527 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.22*

La presente matriz de rigidez modal mostrada en la Ecuación 3.2.22 señala la rigidez lateral o torsional que posee cada modo.

### 3.2.3.6 Matriz de Masa Modal de Estructura

Para el cálculo de la matriz de masa modal de la estructura se realiza la siguiente operación matricial con la matriz de forma modal normalizada. Como se esperaba, debido a la normalización previamente realizada esta matriz es una matriz identidad.

$$M_{mod} := \Phi n^T \cdot M \cdot \Phi n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 3.2.23*

### 3.2.3.7 Factores de Participación Modal

Los factores de participación modal requieren de vectores de incidencia de movimiento del suelo los cuales indican cuando el movimiento es únicamente lateral en X, Y o torsional. A continuación, se presentan los vectores de incidencia. Como se observa en la Ilustración 3.2.5 los grados de libertad que apuntan en la dirección X son el 1 y el 4, por ende, su vector de incidencia tendrá el valor de la unidad en estas posiciones y cero en las demás. Se procede de la misma manera con las otras direcciones.

Vector de incidencia en X	$i_x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	Vector de incidencia en Y	$i_y := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	Vector de incidencia en ZZ	$i_{zz} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
------------------------------	---	------------------------------	---	-------------------------------	--

*Ecuación 3.2.24*

Para el cálculo de los factores de participación modal se realizan las siguientes operaciones, como se observa existe un factor de participación modal por cada grado de libertad y por cada dirección, es decir 18 en total para la presente estructura.



$$\begin{aligned}\Gamma_{nx_1} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(1)} \rangle^T \cdot M \cdot ix}{M_{mod_{1,1}}} = 0 & \Gamma_{ny_1} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(1)} \rangle^T \cdot M \cdot iy}{M_{mod_{1,1}}} = 3.78 \\ \Gamma_{nx_2} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(2)} \rangle^T \cdot M \cdot ix}{M_{mod_{2,2}}} = 3.74 & \Gamma_{ny_2} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(2)} \rangle^T \cdot M \cdot iy}{M_{mod_{2,2}}} = 0 \\ \Gamma_{nx_3} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(3)} \rangle^T \cdot M \cdot ix}{M_{mod_{3,3}}} = 0 & \Gamma_{ny_3} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(3)} \rangle^T \cdot M \cdot iy}{M_{mod_{3,3}}} = 0 \\ \Gamma_{nx_4} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(4)} \rangle^T \cdot M \cdot ix}{M_{mod_{1,1}}} = 0 & \Gamma_{ny_4} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(4)} \rangle^T \cdot M \cdot iy}{M_{mod_{1,1}}} = 1.31 \\ \Gamma_{nx_5} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(5)} \rangle^T \cdot M \cdot ix}{M_{mod_{2,2}}} = 0 & \Gamma_{ny_5} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(5)} \rangle^T \cdot M \cdot iy}{M_{mod_{2,2}}} = 0 \\ \Gamma_{nx_6} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(6)} \rangle^T \cdot M \cdot ix}{M_{mod_{3,3}}} = -1.43 & \Gamma_{ny_6} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(6)} \rangle^T \cdot M \cdot iy}{M_{mod_{3,3}}} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{nzz_1} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(1)} \rangle^T \cdot M \cdot izz}{M_{mod_{1,1}}} = 0 \\ \Gamma_{nzz_2} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(2)} \rangle^T \cdot M \cdot izz}{M_{mod_{2,2}}} = 0 \\ \Gamma_{nzz_3} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(3)} \rangle^T \cdot M \cdot izz}{M_{mod_{3,3}}} = -1599.36 \\ \Gamma_{nzz_4} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(4)} \rangle^T \cdot M \cdot izz}{M_{mod_{1,1}}} = 0 \\ \Gamma_{nzz_5} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(5)} \rangle^T \cdot M \cdot izz}{M_{mod_{2,2}}} = 567.5 \\ \Gamma_{nzz_6} &:= \frac{-\langle \Phi n^{(6)} \rangle^T \cdot M \cdot izz}{M_{mod_{3,3}}} = 0\end{aligned}$$

Ecuación 3.2.25



## 3.2.3.8 Factores de Participación de Masa

$$\begin{aligned}
 M_{totx} &:= M_{1,1} + M_{4,4} & M_{toty} &:= M_{2,2} + M_{5,5} \\
 meff1X &:= \frac{\Gamma_{nx_1}^2 \cdot M_{mod_{1,1}}}{M_{totx}} = 0 & meff1Y &:= \frac{\Gamma_{ny_1}^2 \cdot M_{mod_{1,1}}}{M_{toty}} = 0.89 \\
 meff2X &:= \frac{\Gamma_{nx_2}^2 \cdot M_{mod_{2,2}}}{M_{totx}} = 0.87 & meff2Y &:= \frac{\Gamma_{ny_2}^2 \cdot M_{mod_{2,2}}}{M_{toty}} = 0 \\
 meff3X &:= \frac{\Gamma_{nx_3}^2 \cdot M_{mod_{3,3}}}{M_{totx}} = 0 & meff3Y &:= \frac{\Gamma_{ny_3}^2 \cdot M_{mod_{3,3}}}{M_{toty}} = 0 \\
 meff4X &:= \frac{\Gamma_{nx_4}^2 \cdot M_{mod_{4,4}}}{M_{totx}} = 0 & meff4Y &:= \frac{\Gamma_{ny_4}^2 \cdot M_{mod_{4,4}}}{M_{toty}} = 0.11 \\
 meff5X &:= \frac{\Gamma_{nx_5}^2 \cdot M_{mod_{5,5}}}{M_{totx}} = 0 & meff5Y &:= \frac{\Gamma_{ny_5}^2 \cdot M_{mod_{5,5}}}{M_{toty}} = 0 \\
 meff6X &:= \frac{\Gamma_{nx_6}^2 \cdot M_{mod_{6,6}}}{M_{totx}} = 0.13 & meff6Y &:= \frac{\Gamma_{ny_6}^2 \cdot M_{mod_{6,6}}}{M_{toty}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{totzz} &:= M_{3,3} + M_{6,6} \\
 meff1ZZ &:= \frac{\Gamma_{nzz_1}^2 \cdot M_{mod_{1,1}}}{M_{totzz}} = 0 \\
 meff2ZZ &:= \frac{\Gamma_{nzz_2}^2 \cdot M_{mod_{2,2}}}{M_{totzz}} = 0 \\
 meff3ZZ &:= \frac{\Gamma_{nzz_3}^2 \cdot M_{mod_{3,3}}}{M_{totzz}} = 0.89 \\
 meff4ZZ &:= \frac{\Gamma_{nzz_4}^2 \cdot M_{mod_{4,4}}}{M_{totzz}} = 0 \\
 meff5ZZ &:= \frac{\Gamma_{nzz_5}^2 \cdot M_{mod_{5,5}}}{M_{totzz}} = 0.11 \\
 meff6ZZ &:= \frac{\Gamma_{nzz_6}^2 \cdot M_{mod_{6,6}}}{M_{totzz}} = 0
 \end{aligned}$$

Ecuación 3.2.26



### 3.2.4 Obtención de Espectro

A continuación, se presenta el desarrollo de un espectro de respuesta para Cuenca con un suelo de tipo E según la Norma Ecuatoriana de la Construcción. (MIDUVI, 2015).

$Z := 0.25$	Factor De Zona Sísmica	(NEC – SE – DS) (10.2)
$F_a := 1.5$	Coficiente De Amplificación	(NEC – SE – DS) (3.2.2.a)
$F_d := 1.75$	Coficiente De Amplificación	(NEC – SE – DS) (3.2.2.b)
$F_s := 1.6$	Coficiente De Amplificación	(NEC – SE – DS) (3.2.2.c)
$\eta := 2.48$	Razón Sa y PGA	(NEC – SE – DS) (3.3.1)
$r := 1.5$	Factor De Suelo	(NEC – SE – DS) (3.3.1)

Ilustración 3.2.6: Parámetros necesarios para el espectro.

Fuente: Elaboración Propia

Construcción de espectro de respuesta elástico e inelástico con una importancia de  $I = 1$  y un factor de  $R = 8$ .

$$T_o := 0.1 \cdot F_s \cdot \frac{F_d}{F_a} = 0.1867$$

$$T_c := 0.55 \cdot F_s \cdot \frac{F_d}{F_a} = 1.0267$$

$$S_a(T) := \begin{cases} \text{if } 0 \leq T < T_c \\ \quad \left\| \begin{array}{l} R \leftarrow \eta \cdot Z \cdot F_a \\ \text{else if } T > T_c \\ \quad \left\| \begin{array}{l} R \leftarrow \eta \cdot Z \cdot F_a \cdot \left(\frac{T_c}{T}\right)^r \\ R \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{array}{l} I := 1 \\ R := 8 \end{array}$$

$$S_{ad}(T) := \frac{S_a(T) \cdot I}{R}$$

Ilustración 3.2.7: Obtención de parámetros para el espectro.

Fuente: Elaboración Propia

A continuación, se grafica el espectro de diseño elástico e inelástico correspondientes a un suelo de tipo E para la ciudad de Cuenca.

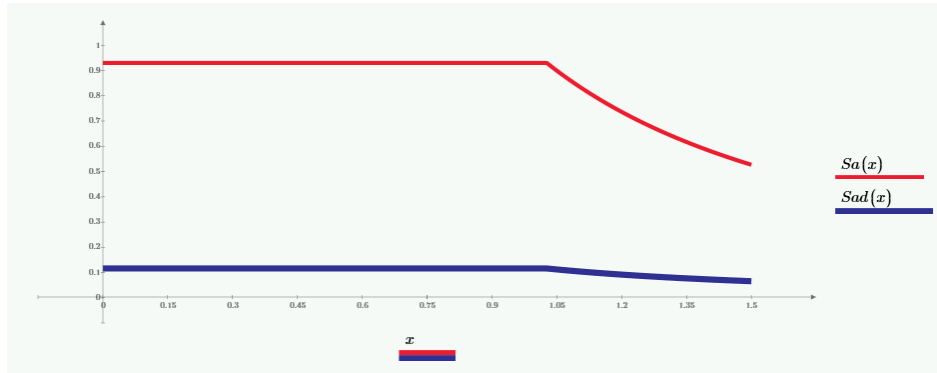


Ilustración 3.2.8: Espectros para el caso de estudio.

Fuente: Elaboración Propia

### 3.2.5 Análisis Modal Espectral

A continuación, con fines académicos el espectro inelástico de respuesta será aplicado en la dirección X y Y de la estructura simultáneamente.

#### 3.2.5.1 Desplazamientos Máximos

Existen desplazamientos espectrales únicamente en la dirección X y Y, ya que el espectro fue aplicado únicamente a estas direcciones.

$$\begin{aligned}
 SDx &:= \begin{bmatrix} \frac{Sad(Tn_1)}{wn_1^2} \\ \frac{Sad(Tn_2)}{wn_2^2} \\ \frac{Sad(Tn_3)}{wn_3^2} \\ \frac{Sad(Tn_4)}{wn_4^2} \\ \frac{Sad(Tn_5)}{wn_5^2} \\ \frac{Sad(Tn_6)}{wn_6^2} \end{bmatrix} \cdot 980.665 = \begin{bmatrix} 0.121 \\ 0.09 \\ 0.089 \\ 0.011 \\ 0.008 \\ 0.007 \end{bmatrix} & \quad SDy &:= \begin{bmatrix} \frac{Sad(Tn_1)}{wn_1^2} \\ \frac{Sad(Tn_2)}{wn_2^2} \\ \frac{Sad(Tn_3)}{wn_3^2} \\ \frac{Sad(Tn_4)}{wn_4^2} \\ \frac{Sad(Tn_5)}{wn_5^2} \\ \frac{Sad(Tn_6)}{wn_6^2} \end{bmatrix} \cdot 980.665 = \begin{bmatrix} 0.121 \\ 0.09 \\ 0.089 \\ 0.011 \\ 0.008 \\ 0.007 \end{bmatrix} & \quad SDz &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ecuación 3.2.27



A continuación, se multiplica los valores obtenidos en la Ecuación 3.2.27 por su factor de participación modal correspondiente para obtener la respuesta máxima de cada grado de libertad.

$$\begin{aligned}
 X_{max} &:= \begin{bmatrix} \Gamma_{nx_1} \cdot SDx_1 \\ \Gamma_{nx_2} \cdot SDx_2 \\ \Gamma_{nx_3} \cdot SDx_3 \\ \Gamma_{nx_4} \cdot SDx_4 \\ \Gamma_{nx_5} \cdot SDx_5 \\ \Gamma_{nx_6} \cdot SDx_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.335 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01 \end{bmatrix} &
 Y_{max} &:= \begin{bmatrix} \Gamma_{ny_1} \cdot SDy_1 \\ \Gamma_{ny_2} \cdot SDy_2 \\ \Gamma_{ny_3} \cdot SDy_3 \\ \Gamma_{ny_4} \cdot SDy_4 \\ \Gamma_{ny_5} \cdot SDy_5 \\ \Gamma_{ny_6} \cdot SDy_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.457 \\ 0 \\ 0 \\ 0.015 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &
 ZZ_{max} &:= \begin{bmatrix} \Gamma_{nzz_1} \cdot SDzz_1 \\ \Gamma_{nzz_2} \cdot SDzz_2 \\ \Gamma_{nzz_3} \cdot SDzz_3 \\ \Gamma_{nzz_4} \cdot SDzz_4 \\ \Gamma_{nzz_5} \cdot SDzz_5 \\ \Gamma_{nzz_6} \cdot SDzz_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ecuación 3.2.28

### 3.2.5.2 Desplazamientos Relativos Máximos Modales

Los desplazamientos relativos máximos modales se obtienen multiplicando las respuestas máximas obtenidas previamente por el vector de forma modal correspondiente a cada grado de libertad.

$$\begin{aligned}
 X_{mod1} &:= \Phi n^{(1)} \cdot X_{max_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &
 Y_{mod1} &:= \Phi n^{(1)} \cdot Y_{max_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.07 \\ 0 \\ 0 \\ -0.146 \\ 0 \end{bmatrix} &
 ZZ_{mod1} &:= \Phi n^{(1)} \cdot ZZ_{max_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ecuación 3.2.29

$$\begin{aligned}
 X_{mod2} &:= \Phi n^{(2)} \cdot X_{max_2} = \begin{bmatrix} -0.048 \\ 0 \\ 0 \\ -0.108 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &
 Y_{mod2} &:= \Phi n^{(2)} \cdot Y_{max_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &
 ZZ_{mod2} &:= \Phi n^{(2)} \cdot ZZ_{max_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ecuación 3.2.30



$$X_{mod3} := \Phi n^{(3)} \cdot X_{max_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_{mod3} := \Phi n^{(3)} \cdot Y_{max_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ZZ_{mod3} := \Phi n^{(3)} \cdot ZZ_{max_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.31

$$X_{mod4} := \Phi n^{(4)} \cdot X_{max_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_{mod4} := \Phi n^{(4)} \cdot Y_{max_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.005 \\ 0 \\ 0 \\ 0.002 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ZZ_{mod4} := \Phi n^{(4)} \cdot ZZ_{max_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.32

$$X_{mod5} := \Phi n^{(5)} \cdot X_{max_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_{mod5} := \Phi n^{(5)} \cdot Y_{max_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ZZ_{mod5} := \Phi n^{(5)} \cdot ZZ_{max_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.33

$$X_{mod6} := \Phi n^{(6)} \cdot X_{max_6} = \begin{bmatrix} -0.003 \\ 0 \\ 0 \\ 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_{mod6} := \Phi n^{(6)} \cdot Y_{max_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ZZ_{mod6} := \Phi n^{(6)} \cdot ZZ_{max_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.34

Como se observa en: Ecuación 3.2.29, Ecuación 3.2.30, Ecuación 3.2.31, Ecuación 3.2.32, Ecuación 3.2.33, Ecuación 3.2.34, existen valores distintos de cero únicamente en los máximos correspondientes a la dirección X y Y debido a que el espectro fue aplicado en estas direcciones.



### 3.2.5.3 Combinación Modal Utilizando el Criterio SRSS

Se recuerda que las respuestas máximas previamente obtenidas se pueden dar en cualquier tiempo y no necesariamente ocurren simultáneamente, por ende, para la combinación modal se debe utilizar criterios establecidos.

Criterio de la raíz cuadrada de la suma de lo cuadrados o SRSS, es de los criterios más utilizados y existentes en los programas estructurales. Este criterio asume que cada respuesta máxima es estadísticamente independiente. (Aguiar, 2012).

A continuación, se presenta la aplicación del criterio SRSS para combinar las respuestas máximas según su dirección.

$$\begin{aligned}
 U1 &:= \sqrt{X_{mod1}^2 + X_{mod2}^2 + X_{mod3}^2 + X_{mod4}^2 + X_{mod5}^2 + X_{mod6}^2} = \begin{bmatrix} 0.048493 \\ 0 \\ 0 \\ 0.108183 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 U2 &:= \sqrt{Y_{mod1}^2 + Y_{mod2}^2 + Y_{mod3}^2 + Y_{mod4}^2 + Y_{mod5}^2 + Y_{mod6}^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0706 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1455 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 U3 &:= \sqrt{ZZ_{mod1}^2 + ZZ_{mod2}^2 + ZZ_{mod3}^2 + ZZ_{mod4}^2 + ZZ_{mod5}^2 + ZZ_{mod6}^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

*Ecuación 3.2.35*

A continuación, se presenta la aplicación del criterio SRSS para realizar la combinación modal.



$$\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} = \begin{bmatrix} 0.048493 \\ 0.070552 \\ 0 \\ 0.108183 \\ 0.14554 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2.36

### 3.2.6 Resultados

A continuación, se presenta dos tablas de resumen con los resultados obtenidos del análisis modal espectral elaborado paso a paso en Mathcad Prime.

*Tabla 3.2.1: Modos, Frecuencias y Periodos.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Modo	Frecuencia natural de vibración (1/s)	Periodo natural de vibración (s)
1	30.691122	0.204723
2	35.650937	0.176242
3	35.727383	0.175865
4	100.852430	0.062301
5	118.960859	0.052817
6	128.134800	0.049036

*Tabla 3.2.2: Modos, Rigidez modal, Masa modal, Desplazamiento máximo.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Modo	Rigidez modal (Kgf/cm)	Masa modal	Desplazamiento máximo con SRSS (cm)
1	941.9449	1	0.048493
2	1270.9893	1	0.070552
3	1276.4459	1	0
4	10171.2127	1	0.108183
5	14151.6859	1	0.14554
6	16418.527	1	0

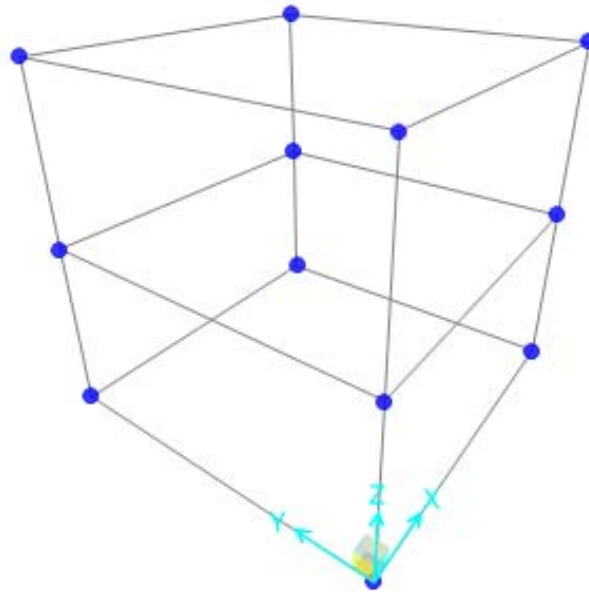
### 3.3 Análisis Modal Espectral Simulado en SAP2000

#### 3.3.1 Modelamiento de la Estructura en SAP2000

##### 3.3.1.1 Coordenadas de Nodos

Las coordenadas de los nodos necesarios para modelar a la estructura, serán los mismos utilizados en la sección “Coordenadas de Nodos” con la excepción de los nodos centrales ya que el SAP2000 calcula estos de forma automática al aplicar la restricción de diafragma rígido de piso.

Comprobación grafica en SAP2000.

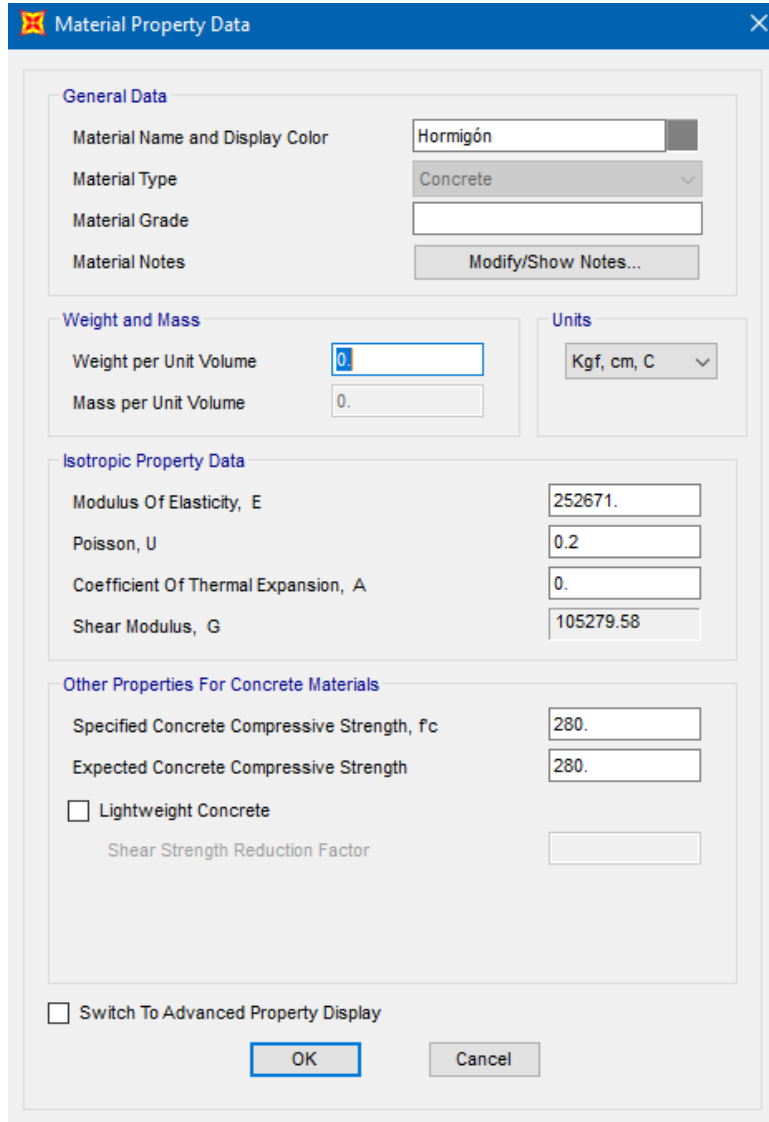


*Ilustración 3.3.1: Gráfica de estructura modelo.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.3.1.2 Propiedades de Materiales

A continuación, se muestra las propiedades del hormigón con un  $f'c = 280 \frac{Kgf}{cm^2}$  en la pantalla de materiales de SAP2000.



The screenshot shows the 'Material Property Data' dialog box with the following values:

Section	Property	Value
General Data	Material Name and Display Color	Hormigón
	Material Type	Concrete
	Material Grade	
	Material Notes	Modify/Show Notes...
Weight and Mass	Weight per Unit Volume	0.
	Mass per Unit Volume	0.
Isotropic Property Data	Modulus Of Elasticity, E	252671.
	Poisson, U	0.2
	Coefficient Of Thermal Expansion, A	0.
	Shear Modulus, G	105279.58
Other Properties For Concrete Materials	Specified Concrete Compressive Strength, f'c	280.
	Expected Concrete Compressive Strength	280.
	<input type="checkbox"/> Lightweight Concrete	
	Shear Strength Reduction Factor	

At the bottom, there is a checkbox for 'Switch To Advanced Property Display' (unchecked) and two buttons: 'OK' and 'Cancel'.

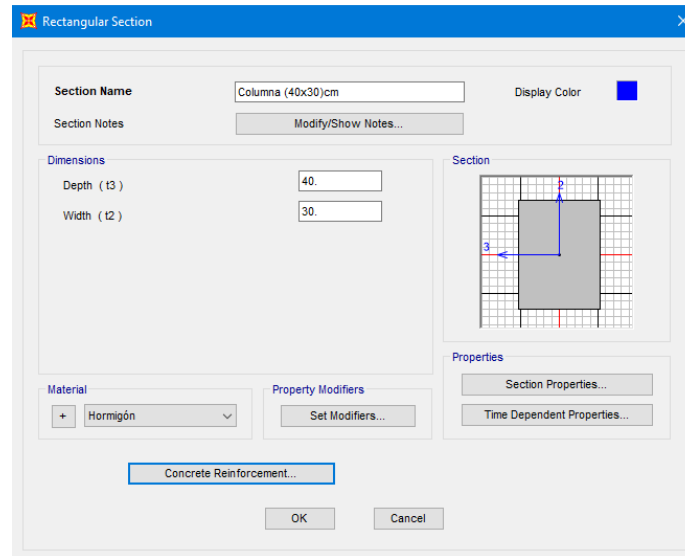
Ilustración 3.3.2: Propiedades del hormigón usado para el modelo.

Fuente: Elaboración Propia



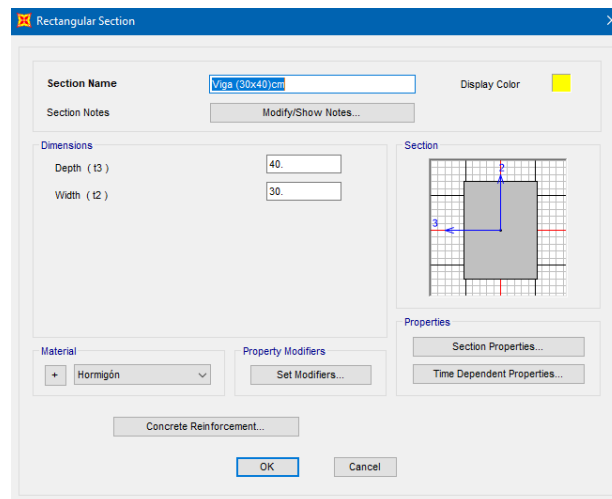
### 3.3.1.3 Propiedades de Secciones

La estructura contará con dos secciones, la sección 1 será la de la columna de  $(40 \times 30)cm$ , la sección 2 será la de la viga de  $(40 \times 30)cm$ .



*Ilustración 3.3.3: Sección de columna para el modelo usado.*

*Fuente: Elaboración Propia*

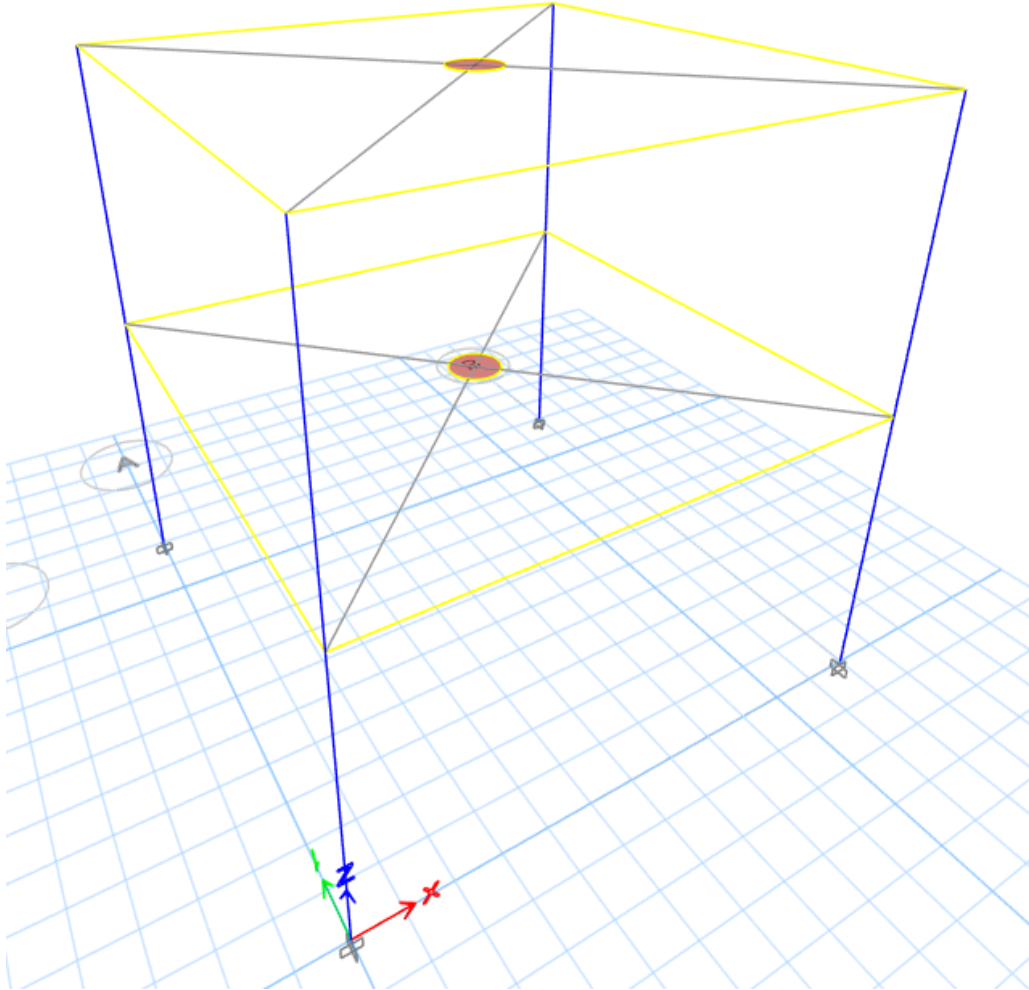


*Ilustración 3.3.4: Sección de viga para el modelo usado.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.3.2 Aplicación de Restricción de Diafragma Rígido de Piso

El software estructural SAP2000 calcula automáticamente el centro de masa del piso, por eso no fue necesario colocar los nodos centrales ni los elementos sin propiedades mecánicas que conecten estos con los demás como se realizó en el cálculo manual.

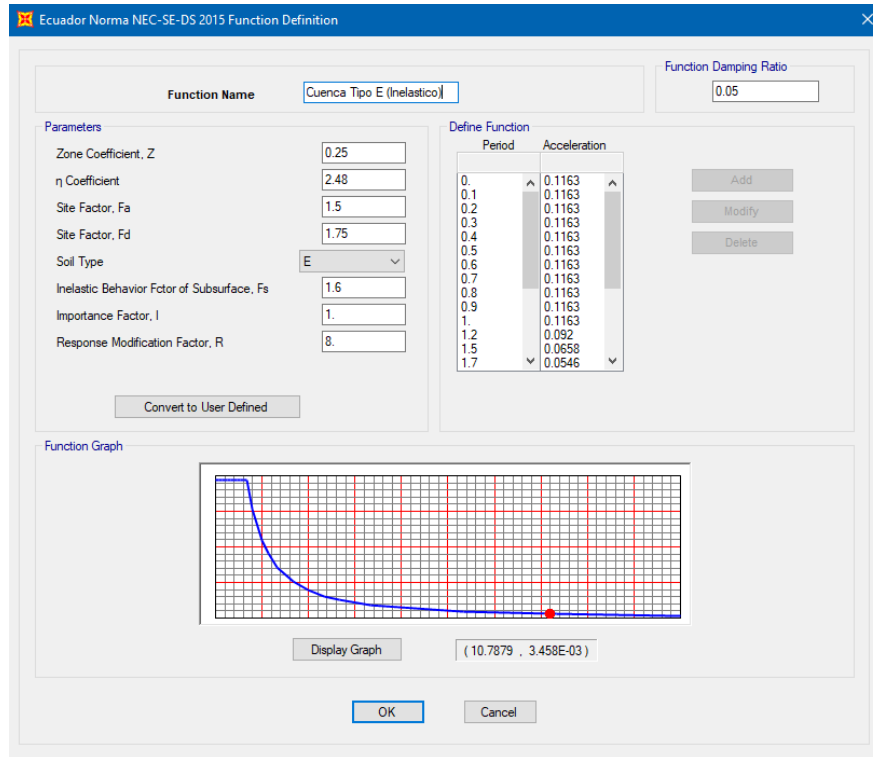


*Ilustración 3.3.5: Centro de Masa de la estructura modelo.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.3.3 Obtención de Espectro

SAP2000 posee en sus funciones la creación de un espectro con la norma ecuatoriana. (MIDUVI, 2015).

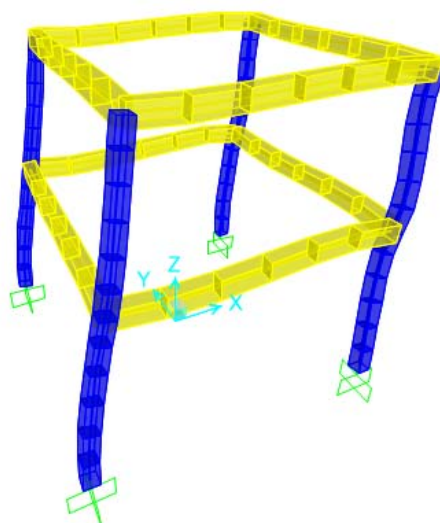


*Ilustración 3.3.6: Introducción de parámetros para el espectro usado.*

*Fuente: Elaboración Propia*

### 3.3.4 Resultados

A continuación, se presenta la respuesta gráfica obtenida en SAP2000.



*Ilustración 3.3.7: Respuesta gráfica de SAP2000.*

*Fuente: Elaboración Propia*

A continuación, se presenta dos tablas de resumen con los resultados obtenidos del análisis modal espectral elaborado en SAP2000.

*Tabla 3.3.1: Modos, Frecuencias y Periodos.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Modo	Frecuencia natural de vibración (1/s)	Periodo natural de vibración (s)
1	30.691122	0.204723
2	35.650937	0.176242
3	35.727383	0.175865
4	100.852430	0.062301
5	118.960859	0.052817
6	128.134800	0.049036



Tabla 3.3.2: Modos, Rigidez, Masa Modal y Desplazamientos Máximos (SRSS).

Fuente: Elaboración Propia

Modo	Rigidez modal (Kgf/cm)	Masa modal	Desplazamiento máximo con SRSS (cm)
1	941.9449	1	0.048493
2	1270.9893	1	0.070552
3	1276.4459	1	0
4	10171.2127	1	0.108183
5	14151.6859	1	0.14554
6	16418.527	1	0

## 4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

### 4.1 Solución de la Ecuación de Movimiento (interpretación algebraica y dinámica)

#### 4.1.1 Método de Resolución

Esta sección es casi idéntica a la sección 2.2.5 “Solución de la Ecuación de Movimiento”, sin embargo, contiene pequeños conceptos y detalles que nos ayudarán a entender la manera de solucionar la ecuación general desde un punto de vista algebraico y dinámico a la vez. Para empezar con esta sección, se necesita diferenciar dos conceptos fundamentales, el espacio físico y el espacio vectorial.

En los capítulos anteriores ya se trató el espacio vectorial, sin embargo, describiéndolo de manera rápida, podemos decir que un espacio vectorial es un conjunto de vectores en el cual están definidas ciertas operaciones. Para definir un espacio vectorial se puede usar vectores generadores, cuya combinación lineal define a todo el conjunto de vectores que forman el espacio. Cabe recalcar que la dimensión de un espacio vectorial se refiere al número de vectores que conforman la base del espacio vectorial. A su vez, se considera como base a un conjunto linealmente independiente de vectores en el espacio vectorial que genera este mismo espacio

vectorial (Lay, 2007) (pag. 170), esto es equivalente a sugerir que una base es un conjunto con el mínimo de vectores generadores posibles que generan el espacio vectorial.

Respecto al espacio físico, hace referencia al espacio geométrico en el que se encuentra cada grado de libertad de la estructura y el movimiento que podría darse en cada uno de ellos.

Para esta interpretación vamos a considerar un sistema de coordenadas con “n” entradas reales, donde el valor de cada entrada de la coordenada, equivale al desplazamiento en el espacio físico de 1 GDL. El vector “x(t)” puede contener cualquier coordenada dentro de este espacio físico. Se muestra un ejemplo con n=3 en la Ilustración 4.1.1 .

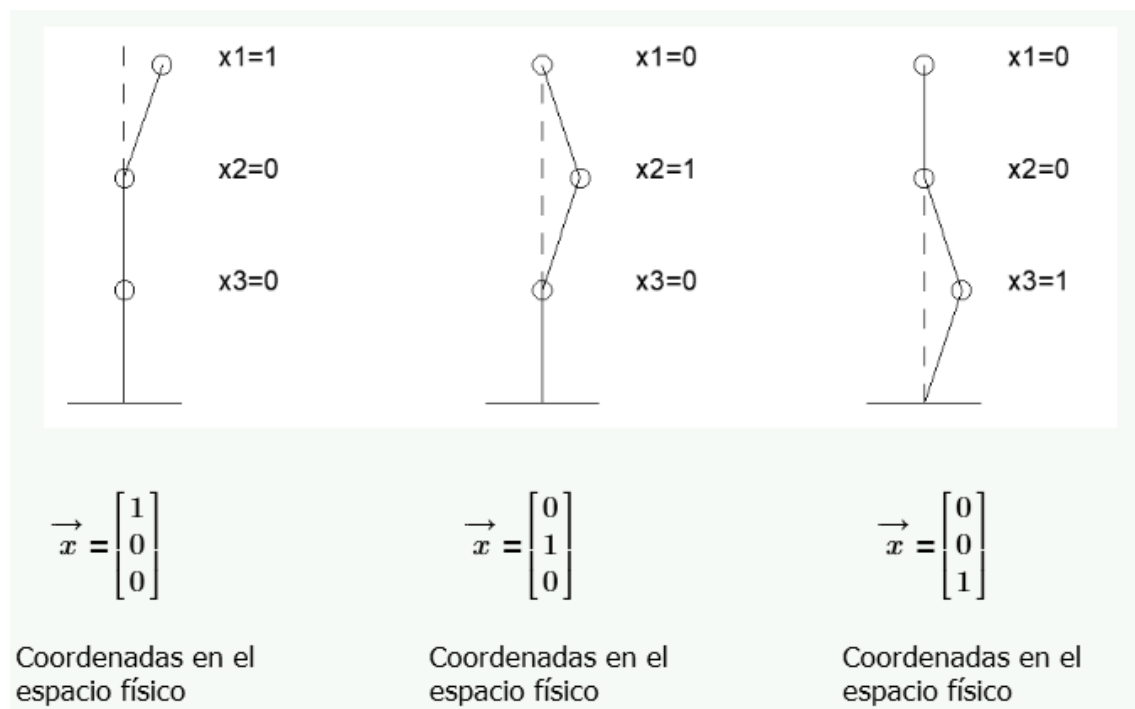


Ilustración 4.1.1: Coordenadas con 3 entradas y su interpretación gráfica.

Fuente: Elaboración Propia

Sabiendo que el vector “x(t)” o sus derivadas puede ser cualquier vector con “n” entradas reales para los sistemas de estructuras que se tratan de representar, podemos definir





$$[M] \cdot \overrightarrow{x''(t)} + [K] \cdot \overrightarrow{x(t)} = \overrightarrow{0}$$

*Ecuación 4.1.1*

$$[M] \cdot [I] \cdot \overrightarrow{x''(t)} + [K] \cdot [I] \cdot \overrightarrow{x(t)} = \overrightarrow{0}$$

*Ecuación 4.1.2*

Podemos ver que las dos ecuaciones anteriores son equivalentes debido a las reglas de algebra lineal, sin embargo, en la segunda se recalca el uso de una base estándar para representar las coordenadas en el espacio físico.

Reacomodando la ecuación Ecuación 4.1.1, obtenemos:

$$\overrightarrow{x''(t)} = -[M]^{-1} \cdot [K] \cdot \overrightarrow{x(t)}$$

*Ecuación 4.1.3*

Donde, ‘M’ representa la matriz de masa (conocida) del sistema (NO necesariamente diagonal, pero si simétrica para sistemas de nuestro interés), ‘K’ la matriz de rigidez (conocida) del sistema (NO necesariamente diagonal, pero si simétrica para sistemas de nuestro interés), ‘x(t)’ el vector de movimiento en función del tiempo y ‘x''(t)’ la aceleración en función del tiempo.

Podemos notar que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales homogénea de segundo orden, siendo incógnitas la función ‘x(t)’ y su doble derivada.

Debido a que la matriz ‘M’ y la matriz ‘K’ no necesariamente son diagonales, ya sea por ‘M’, por ‘K’ o por las dos al mismo tiempo, se produce un acoplamiento del sistema de ecuaciones,





es decir se produce una dependencia entre alguna variable “ $x_i''(t)$ ” con alguna variable “ $x_j(t)$ ”, mas no se produce una relación univoca entre “ $x_i''(t)$ ” y “ $x_i''(t)$ ”.

Considerando como un hecho irreversible que el producto de “ $M^{-1} \cdot K$ ” no necesariamente es diagonal, podemos concluir que el acople del sistema de ecuaciones se produce por la base del sistema de coordenadas escogido.

En el libro “Algebra Lineal y sus Aplicaciones (David C. Lay)” se describe un método para el desacoplamiento de un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales, este método sugiere un cambio base al sistema de coordenadas. Se busca una base del sistema de coordenadas que provoque una relación univoca entre “ $x_i''(t)$ ” y “ $x_i''(t)$ ”.

Dado que tanto “ $M^{-1}$ ” como “ $K$ ” son matrices con valores constantes, podemos representar a su producto como una única matriz constante “ $A$ ”.

$$\overrightarrow{x''(t)} = -[A] \cdot \overrightarrow{x(t)} \qquad A = [M]^{-1} \cdot [K]$$

*Ecuación 4.1.4*

Dado que nuestro objetivo es desacoplar el sistema de ecuaciones, nuestro propósito debería ser diagonalizar la matriz “ $A$ ” de tal forma que esta produzca un desacople entre “ $x''(t)$ ” y “ $x(t)$ ”. Se usará la misma estrategia descrita en la sección “Desacoplamiento de un sistema dinámico” de “Algebra lineal y sus Aplicaciones (David C. Lay)” pagina 358.

Consideremos que  $A$  es diagonalizable, y por tanto se puede representar de la siguiente forma.



$$[A] = [P] \cdot [D] \cdot [P]^{-1}$$

*Ecuación 4.1.5*

Donde, por conceptos ya vistos cuando se trató la diagonalización de matrices, “P” contiene un conjunto de “n” vectores que resultan ser los eigenvectores de “A”, mientras que “D” es una matriz diagonal con entradas iguales a los eigenvalores de “A”. Desde un punto de vista dinámico, los eigenvalores corresponden a las frecuencias naturales de la estructura como se analizó en los capítulos anteriores, mientras que los eigenvectores corresponden a los modos de vibración.

Realizamos un cambio de variable de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{q}(t) = [P]^{-1} \cdot \overrightarrow{x}(t) \qquad \overrightarrow{x}(t) = [P] \cdot \overrightarrow{q}(t)$$

*Ecuación 4.1.6*

Considerando a “x(t)” como un conjunto de coordenadas relativos a la base estándar, vemos que este cambio de variable corresponde a un cambio de base y por tanto cambio de coordenadas relativas, siendo la matriz de cambio de coordenadas la matriz “P” que de hecho, contiene a los eigenvectores de “A” que a su vez son los modos naturales de la estructura, además, las coordenadas relativas (o coordenadas modales, como se llamara más adelante) corresponden al vector “q(t)”. Se trata con más detenimiento el cambio de base en la sección “Implicación del Cambio de Base”.

Ahora consideramos la Ecuación 4.1.4 y Ecuación 4.1.6, obteniendo.



$$\frac{d^2}{dt^2} ([P] \cdot \overrightarrow{q}(t)) = -[A] \cdot ([P] \cdot \overrightarrow{q}(t))$$

*Ecuación 4.1.7*

Considerando que la matriz “P” está compuesta por constantes, aplicando la derivación y considerando la Ecuación 4.1.5 obtenemos:

$$[P] \cdot \overrightarrow{q}''(t) = -[P] \cdot [D] \cdot [P]^{-1} \cdot ([P] \cdot \overrightarrow{q}(t))$$

*Ecuación 4.1.8*

Realizando simplificaciones en la ecuación anterior, obtenemos:

$$[P] \cdot \overrightarrow{q}''(t) = -[P] \cdot [D] \cdot \overrightarrow{q}(t)$$

*Ecuación 4.1.9*

Pre multiplicamos a ambos lados por “P<sup>-1</sup>” y obtenemos:

$$\overrightarrow{q}''(t) = -[D] \cdot \overrightarrow{q}(t)$$

*Ecuación 4.1.10*

Dado que “D” es una matriz diagonal, hemos logrado desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales mediante el cambio de bases y coordenadas relativas, además de usar conceptos de diagonalización de matrices.

Para conocer el valor de la matriz “D” debemos recurrir a una propiedad clave, la ortogonalidad de los eigenvectores respecto a la matriz de masa y rigidez. En esta sección nos limitamos a usar esta propiedad, sin embargo, más adelante se la demostrara.



Considerando  $r \neq s$  y siendo “ $v$ ” los eigenvectores de “ $M^{-1} \cdot K$ ”, además, siendo “ $w$ ” los eigenvalores de “ $M^{-1} \cdot K$ ” y siendo  $w_r \neq w_s$ , entonces:

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{v^{(r)}}\right)^T \cdot [M] \cdot \overrightarrow{v^{(s)}} &= 0 \\ \left(\overrightarrow{v^{(r)}}\right)^T \cdot [K] \cdot \overrightarrow{v^{(s)}} &= 0 \end{aligned}$$

*Ecuación 4.1.11*

Debido a esta propiedad, se puede demostrar (Chopra, 2012) (pag. 409) que los siguientes productos de matrices son diagonales:

$$\begin{aligned} [P]^T \cdot [M] \cdot [P] &= M_{mod} \\ [P]^T \cdot [K] \cdot [P] &= K_{mod} \end{aligned}$$

*Ecuación 4.1.12*

Los productos de estas expresiones los llamaremos  $M_{mod}$  (Masa Modal) y  $K_{mod}$  (Rigidez Modal).

Considerando nuevamente la Ecuación 4.1.5 y la Ecuación 4.1.12, podemos realizar la siguiente deducción.



$$\begin{aligned}[P]^{-1} \cdot [A] \cdot [P] &= [D] \\ [P]^{-1} \cdot [M]^{-1} \cdot [K] \cdot [P] &= [D] \\ [M]^{-1} \cdot [K] \cdot [P] &= [P] \cdot [D] \\ [K] \cdot [P] &= [M] \cdot [P] \cdot [D] \\ [P]^T \cdot [K] \cdot [P] &= [P]^T \cdot [M] \cdot [P] \cdot [D] \\ [P]^T \cdot [K] \cdot [P] &= [P]^T \cdot [M] \cdot [P] \cdot [D] \\ [Kmod] &= [Mmod] \cdot [D] \\ [Mmod]^{-1} \cdot [Kmod] &= [D]\end{aligned}$$

*Deducción 4.1.1*

Por tanto, podríamos reescribir la ecuación resultante de la Deducción 4.1.1 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{q''(t)} &= -[Mmod]^{-1} \cdot [Kmod] \cdot \overrightarrow{q(t)} \\ [Mmod] \cdot \overrightarrow{q''(t)} &= -[Kmod] \cdot \overrightarrow{q(t)} \\ [Mmod] \cdot \overrightarrow{q''(t)} + [Kmod] \cdot \overrightarrow{q(t)} &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

*Ecuación 4.1.13*

Con las ecuaciones presentadas, podemos notar que si “Mmod” resulta ser una matriz unitaria, entonces “D” es equivalente a “Kmod”. Como se verá a continuación, la matriz “Mmod” o de Masa Modal, puede ser unitaria mediante la normalización de los modos, o incluso puede modificarse de otras formas a conveniencia de su interpretación.



#### 4.1.2 Implicación del Cambio de Base

Como ya se mencionó anteriormente, partimos del uso de una base estándar y coordenadas relativas a esta base para poder representar las coordenadas en el espacio físico como se ve en la Ilustración 4.1.1 e Ilustración 4.1.2. Se observó también que, debido al uso de la base estándar, las coordenadas relativas a la base estándar coinciden con las coordenadas del espacio físico, sin embargo, el uso de esta base implica que se produzca un acople de las ecuaciones del sistema, por tanto, se procedió a realizar un cambio de base.

La nueva base está compuesta por los eigenvectores de la matriz “A” que de hecho corresponde a los modos naturales de la estructura. El uso de esta nueva base implica nuevas coordenadas relativas que se les llamó “q(t)”. Se reescribe la Ecuación 4.1.13 considerando la Ecuación 4.1.12, obtenemos:

$$[P]^T \cdot [M] \cdot [P] \cdot \overline{q''(t)} + [P]^T \cdot [K] \cdot [P] \cdot \overline{q(t)} = \vec{0}$$

*Ecuación 4.1.14*

Podemos notar que, expresado de esa forma, “q(t)” y sus derivadas vienen a ser las coordenadas relativas respecto a la base contenida en la matriz “P” que llegan a ser los eigenvectores o modos naturales de la estructura.

Volviendo a la Ecuación 4.1.10, podemos ver que en las coordenadas relativas “q(t)” se produce el desacoplamiento del sistema, es decir, existe una relación univoca entre cualquier “q<sub>i</sub>(t)” y “q''<sub>i</sub>(t)”, sin embargo, esta relación univoca implica una relación no univoca en las coordenadas del espacio físico de los GDL, a continuación, se analiza con un ejemplo didáctico.

Se usará el mismo ejemplo de la sección “Cambio de Base y Coordenadas Relativas”, sin embargo, se lo enfocará a una estructura simple.

Consideramos al vector “u” como coordenadas relativas respecto una base, que representan el desplazamiento horizontal de cada GDL de una estructura. Partimos por analizar la base estándar, siendo “e1, e2 y e3” los vectores que conforman esta base.

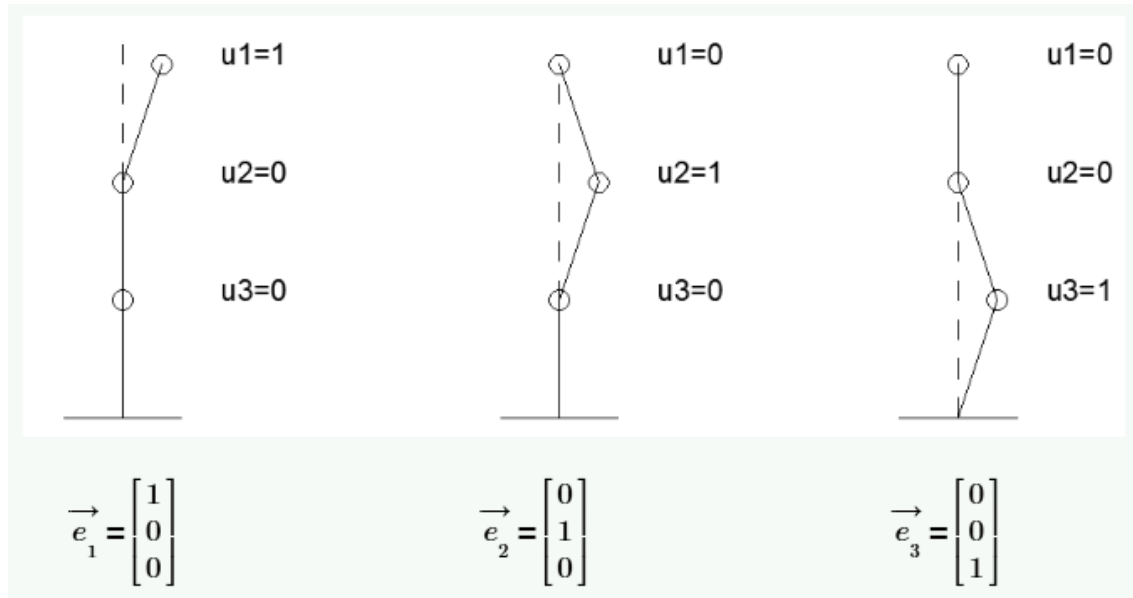


Ilustración 4.1.3: Representación gráfica de una base para coordenadas.

Fuente: Elaboración Propia

Podemos observar que cada vector de la base estándar, implica únicamente el movimiento de 1 entrada o de 1 GDL de la estructura en el espacio físico.

La combinación lineal de los vectores de esta base hace posible representar cualquier punto en el espacio  $R^3$ , por ejemplo, se procede a repetir el proceso de la sección Cambio de Base y Coordenadas Relativas y representar unas coordenadas cualesquiera, sin embargo, se agregará una interpretación gráfica (Ilustración 4.1.4).

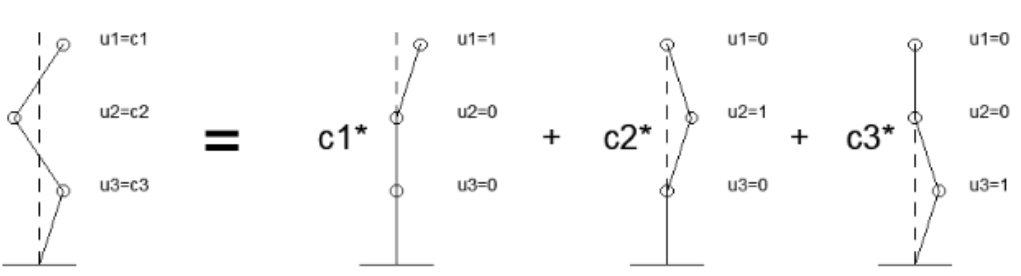
$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = c1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$$


Ilustración 4.1.4: Representación de coordenadas respecto a una base.

Fuente: Elaboración Propia

Representándolo mediante la matriz que contiene la base, obtenemos lo siguiente.

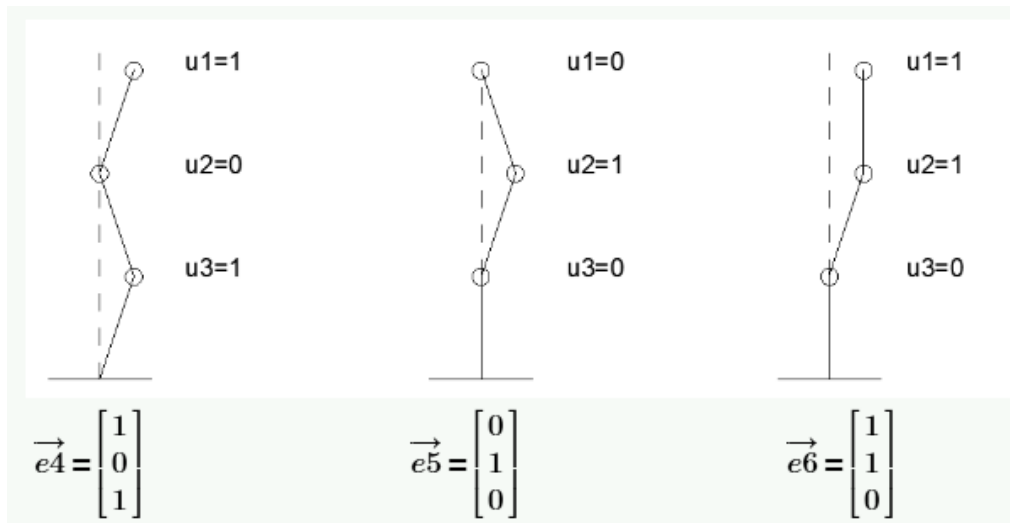
$$\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = I \cdot \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$$

Ecuación 4.1.15

La base estándar, resulta ser la matriz identidad. Las coordenadas relativas respecto a la base estándar, representan de manera directa las coordenadas de la estructura en el espacio físico.

Ahora, consideremos una base distinta a la estándar que bien podría suponerse que está formado por los modos naturales de la estructura.





*Ilustración 4.1.5: Base distinta a la estándar.*

*Fuente: Elaboración Propia*

Podemos observar que, a diferencia de la base estándar, cada vector de la nueva base no implica necesariamente el movimiento de 1 sola entrada o 1 solo GDL de la estructura en el espacio físico.

Se encuentra las coordenadas relativas respecto a la nueva base para representar las mismas coordenadas en el espacio físico ya representadas anteriormente “(c1, c2, c3)”.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 \\ 0 \\ c_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_6 \\ c_6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 + c_6 \\ c_5 + c_6 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

*Ilustración 4.1.6: Representación de coordenadas respecto a una base.*

*Fuente: Elaboración Propia*



Representándolo mediante la matriz que contiene la base, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{bmatrix} c4 \\ c5 \\ c6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c3 \\ c2 - c1 + c3 \\ c1 - c3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c4 \\ c5 \\ c6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c3 \\ c2 - c1 + c3 \\ c1 - c3 \end{bmatrix}$$

*Ecuación 4.1.16*

Podemos observar que, debido al cambio de base, representar un punto en coordenadas relativas respecto a la nueva base, resulta más complejo que al usar la base estándar.

Las coordenadas relativas respecto a la base no estándar, no representan de manera directa las coordenadas de la estructura en el espacio físico.

A pesar de que podría parecer contraproducente usar una base que complique el sistema de coordenadas, se demostró ya que esta puede ayudarnos a desacoplar un sistema de ecuaciones.

Al usar la base estándar, la modificación de 1 entrada en las coordenadas relativas a la base estándar, implica la modificación o desplazamiento de 1 GDL de la estructura en el espacio físico, sin embargo, al usar una base distinta a la estándar, la modificación de 1 entrada en las coordenadas relativas a la nueva base, no implica necesariamente la modificación de 1 SOLO GDL, sino posiblemente de varios. Se muestra a continuación un ejemplo.



Coordenadas Relativas a una base distinta a la estándar	Equivalencia en Coordenadas relativas a la base estándar	
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	Implicó el cambio de desplazamiento de 2 GDL en el espacio físico.
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	Implicó el cambio de desplazamiento de 1 GDL en el espacio físico.
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	Implicó el cambio de desplazamiento de 2 GDL en el espacio físico.

*Ilustración 4.1.7: Equivalencia de coordenadas.*

*Fuente: Elaboración Propia*

A pesar de que se suele decir que hemos logrado dividir un sistema de múltiples GDL en múltiples sistemas de 1 GDL, mediante las explicaciones anteriores, esta idea podría expresarse de otra forma.

Se logra convertir un sistema de múltiples GDL, en múltiples sistemas de múltiples GDL pero con una ligadura o proporción entre los GDL que los hace depender de 1 único parámetro. La proporción en cada sistema de múltiples GDL con ligadura, viene definido por cada modo natural de la estructura.

#### **4.2 Comparación de Resultados Entre Análisis Detallado en MATHCAD y Simulación en SAP2000.**

Luego de realizar un análisis modal espectral a una estructura modelo se tuvo los resultados mostrados en la Tabla 3.2.1, Tabla 3.2.2 por el método detallado en Mathcad Prime y los resultados mostrados en la Tabla 3.3.1,



Tabla 3.3.2 por la simulación realizada en SAP2000. A simple vista, estos resultados son semejantes, sin embargo, para una mejor comparación se realizaron ocho ensayos en total los cuales cada uno realiza un análisis modal espectral a estructuras semejantes a la estructura modelo, pero con ciertos cambios mostrados en la Tabla 4.2.1 aplicando el mismo espectro.

Tabla 4.2.1: Resumen de estructura y propiedades.  
Fuente: Elaboración Propia

Ensayos	Estructura	Geometría	Secciones	Dirección de Espectro
1	Pórtico a momento de 1 piso	4 Columnas (300cm) y 4 vigas (600cm)	Columna (40X30)cm Viga (40X30)cm	Eje X y Y
2	Pórtico a momento de 1 piso	4 Columnas (300cm) y 4 vigas (600cm)	Columna (40X30)cm Viga (40X30)cm	Eje X
3	Pórtico a momento de 1 piso	4 Columnas (300cm) y 4 vigas (600cm)	Columna (40X30)cm Viga (40X30)cm	Eje Y
4	Pórtico a momento de 1 piso	4 Columnas (300cm) y 4 vigas (600cm)	Columna (30X30)cm Viga (40X30)cm	Eje X y Y
5	Pórtico a momento de 1 piso	4 Columnas (300cm) y 4 vigas (600cm)	Columna (30X30)cm Viga (40X30)cm	Eje X
6	Pórtico a momento de 1 piso	4 Columnas (300cm) y 4 vigas (600cm)	Columna (30X30)cm Viga (40X30)cm	Eje Y
7	Pórtico a momento de 2 pisos	8 Columnas (300cm) y 8 vigas (600cm)	Columna (30X30)cm Viga (40X30)cm	Eje X y Y
8	Pórtico a momento de 2 pisos	8 Columnas (300cm) y 8 vigas (600cm)	Columna (40X30)cm Viga (40X30)cm	Eje X y Y

Los resultados que se recopilaron para realizar una comparación entre el método detallado en Mathcad Prime y la simulación realizada en SAP2000, fueron el periodo natural de vibración, la rigidez modal y el desplazamiento máximo que realiza el modo con el método SRSS.

Se seleccionaron estos resultados ya que en el caso de poseer periodos naturales de vibración iguales en ambos casos se demostraría que los procesos 3.2.1 “Ensamblaje de matriz de rigidez de la estructura”, 3.2.2 “Aplicación de Restricciones y Condensación Estática” y 3.2.3.2 “Matriz de Masa de Estructura “ $M$ ” fueron realizados satisfactoriamente, puesto que los periodos naturales de vibración dependen de la matriz de rigidez condensada de la estructura y de la matriz de masa. Por otro lado, en el caso de poseer rigideces modales iguales en ambos



casos se demostraría que el proceso 3.2.3.4 “Forma Modal de Estructura”, el cual obtiene los vectores modales y su normalización fue realizado convenientemente y finalmente, en el caso de poseer desplazamientos máximos iguales se demostraría que los procesos 3.2.4 “Obtención de Espectro” y 3.2.5 “Análisis Modal Espectral” de igual manera fueron realizados correctamente.

A continuación, se muestra los resultados previamente mencionados de los ocho ensayos realizados en la Tabla 4.2.2.

Tabla 4.2.2: Comparación de resultados  
Fuente: Elaboración Propia

Ensayos	Modos	MATHCAD PRIME			SAP2000			Error desplazamientos máximos (%)
		Periodo natural de vibración (s)	Rigidez Modal (Kgf/cm)	Desplazamiento máximo con SRSS (cm)	Periodo natural de vibración (s)	Rigidez Modal (Kgf/cm)	Desplazamiento máximo con SRSS (cm)	
1	1	0.107195469	3435.6339	0.02217	0.107195469	3435.6339	0.02217	0%
	2	0.091782533	4686.4032	0.033182	0.091782533	4686.4032	0.033182	0%
	3	0.087620002	5142.2504	0	0.087620002	5142.2504	0	0%
2	1	0.107195469	3435.6339	0.02217	0.107195469	3435.6339	0.02217	0%
	2	0.091782533	4686.4032	0	0.091782533	4686.4032	0	0%
	3	0.087620002	5142.2504	0	0.087620002	5142.2504	0	0%
3	1	0.107195469	3435.6339	0	0.107195469	3435.6339	0	0%
	2	0.091782533	4686.4032	0.033182	0.091782533	4686.4032	0.033182	0%
	3	0.087620002	5142.2504	0	0.087620002	5142.2504	0	0%
4	1	0.119350826	2771.4638	0.041134	0.119350826	2771.4638	0.041134	0%
	2	0.119350826	2771.4638	0.041134	0.119350826	2771.4638	0.041134	0%
	3	0.11496521	2986.9425	0	0.11496521	2986.9425	0	0%
5	1	0.119350826	2771.4638	0.037164	0.119350826	2771.4638	0.037164	0%
	2	0.119350826	2771.4638	0.017632	0.119350826	2771.4638	0.017632	0%
	3	0.11496521	2986.9425	0	0.11496521	2986.9425	0	0%
6	1	0.119350826	2771.4638	0.017632	0.119350826	2771.4638	0.017632	0%
	2	0.119350826	2771.4638	0.037164	0.119350826	2771.4638	0.037164	0%
	3	0.11496521	2986.9425	0	0.11496521	2986.9425	0	0%
7	1	0.222589989	796.7985	0.086254	0.222589989	796.7985	0.086254	0%
	2	0.222589989	796.7985	0.086254	0.222589989	796.7985	0.086254	0%
	3	0.210100373	894.3471	0	0.210100373	894.3471	0	0%
	4	0.070404009	7964.6182	0.171683	0.070404009	7964.6182	0.171683	0%
	5	0.070404009	7964.6182	0.171683	0.070404009	7964.6182	0.171683	0%
	6	0.068373925	8444.5929	0	0.068373925	8444.5929	0	0%
8	1	0.204723222	941.9449	0.048493	0.204723222	941.9449	0.048493	0%
	2	0.1762418	1270.9893	0.070552	0.1762418	1270.9893	0.070552	0%
	3	0.175864697	1276.4459	0	0.175864697	1276.4459	0	0%
	4	0.062300782	10171.2127	0.108183	0.062300782	10171.2127	0.108183	0%
	5	0.052817249	14151.6859	0.14554	0.052817249	14151.6859	0.14554	0%
	6	0.049035744	16418.527	0	0.049035744	16418.527	0	0%

Los ensayos 1, 2, 3 y 4, 5, 6 poseen los mismos periodos naturales y rigideces modales respectivamente, pues pertenecen a una misma estructura, además se observa que todos los resultados recopilados del análisis espectral detallado en Mathcad Prime y de la simulación en SAP2000 son exactamente iguales, sin diferencias. Esto indica que todo el procedimiento fue realizado y ejecutado de manera exitosa.



Es relevante mencionar que los periodos naturales del modo 1 y 2 de los ensayos 4, 5 y 6 son iguales debido a las secciones cuadradas de las columnas. Por cualquier dirección que se vea a la estructura, esta sigue siendo el mismo pórtico y eso explica por qué sus rigideces laterales también son iguales.

En la práctica es imposible obtener periodos naturales de vibración exactamente iguales para el modo 1 y 2 debido a agentes que no se pueden controlar en la construcción, sin embargo, para el caso teórico en el que estos si sean iguales al intentar resolver la ecuación matricial  $[K - \lambda * M] * \phi = 0$ , la matriz  $[K - \lambda * M]$  disminuye de rango porque algunas de sus filas son equivalentes convirtiéndolo en un sistema con infinitas soluciones para  $\phi$ . Es por ello, que los modos y factores de participación modal no se seleccionaron para realizar la comparación pues al tener infinitas soluciones no se llegará a un mismo resultado.

Los software estructurales poseen un algoritmo iterativo que encuentra una de las infinitas soluciones del sistema, sin embargo, como se ha mencionado previamente lo importante de esta respuesta son sus términos relativos, es decir, la dirección de los vectores solución y no su magnitud absoluta.

## 5 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

### 5.1 Conclusiones

El método matricial de la rigidez es mundialmente conocido y utilizado por todos los software estructurales para el diseño y desarrollo de análisis estáticos y dinámicos de estructuras. Al realizar el paso a paso de este método en tres dimensiones y compararlo con el software estructural SAP2000, se llegó a la conclusión de que las funciones elaboradas en Mathcad Prime para su futura utilización en cualquier estructura tridimensional fueron acertadas dando un gran paso para futuros trabajos que conlleven la utilización del método matricial de la rigidez en pórticos tridimensionales a momento.



Plantear y modelar una estructura en tres dimensiones resulta agobiante sin la utilización de programas estructurales, sin embargo, tiene un gran valor teórico para sus futuras aplicaciones en la práctica para que el usuario conozca lo que cualquier software estructural realiza internamente junto con sus limitaciones.

El análisis modal espectral es comúnmente utilizado y por ello se vio la necesidad de explicar su funcionamiento y el porqué de sus relaciones matriciales conjuntamente aplicándolo a ocho modelos tridimensionales. Se presentaron las bases teóricas y prácticas necesarias para comprender completamente el análisis modal espectral utilizando el álgebra lineal conjuntamente con la dinámica de estructuras y análisis matricial brindando la información necesaria para enfrentarse a cualquier duda o problema proveniente sobre dicho análisis. Se concluye que el análisis modal espectral es uno de los análisis más utilizados, pero menos comprendidos teóricamente y por ello la necesidad de este trabajo.

## 5.2 Comentarios

En el desarrollo de este trabajo se pudo notar varios aspectos que, aunque no se relacionan directamente con los objetivos planteados, los consideramos dignos de recalcar. El primero se relaciona a la metodología que se usa para la obtención de las eigensoluciones, pues a pesar de parecer un problema sencillo, cuando obtenemos periodos de vibración cercanos, el método que se use para encontrar las eigensoluciones influirá ampliamente en los valores de soluciones que obtengamos.

Como segundo punto, se observó algunas de las implicaciones físicas de las propiedades matemáticas envueltas en la resolución de la ecuación de movimiento, específicamente, la ortogonalidad entre los modos y la matriz de rigidez y masa. A pesar de que se habló superficialmente de este punto en una de las secciones, se puede proponer como un posible tema de investigación las implicaciones físicas de esta propiedad.



Como tercer punto, se pudo constatar la importancia de la programación y procesamiento computacional al resolver problemas de esta magnitud, pues el primer paso para poder realizar el análisis detallado en Mathcad Prime, fue crear funciones que faciliten la creación y el manejo de las matrices implicadas en el problema.

Finalmente, se recalca la complementariedad que existe entre el mundo práctico y las ciencias puras tales como las matemáticas y álgebra lineal. Resultó interesante observar como algo que fue descubierto y es practicado netamente en papel (álgebra lineal) resulta ser la base para un diseño o evaluación sísmica de edificaciones reales.





## 6 REFERENCIAS

- 318-ACI-Committee. (2019). *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19)*. Farmington Hills: American Concrete Institute.
- Aguiar, R. (2012). *Dinámica de Estructuras con CEINCI-LAB*. Quito: Centro de Investigaciones Científicas CEINCI.
- Chopra, A. K. (2012). *DYNAMICS OF STRUCTURES*. Boston: Pearson.
- IGPN. (2016). *Sismos*. Quito, Ecuador: IGPN.
- Kassimali, A. (2010). *Matrix Analysis of Structures*. Stamford: Cengage Learning.
- Lay, D. C. (2007). *ÁLGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES*. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Livesley, R. K. (1964). *Matrix Methods of Structural Analysis*. Cambridge: Pergamon Press.
- MIDUVI. (2015). *Norma Ecuatoriana de la Construcción, Cargas Sísmicas, Diseño Sismo Resistente*. Quito: Cámara de la Industria de la Construcción.
- Pixabay. (8 de 1 de 2022). *Pixabay*. Obtenido de <https://pixabay.com/es/>
- Sennett, R. E. (1994). *Matrix Analysis of Structures*. California: Waveland Press Inc.
- Wilson, E. L. (2002). *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*. Berkeley: Computers and Structures Inc.