Reflexión didáctica en formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria

Eulalia Calle Palomeque
Erika Parra Mora
Patricia Paucar Jara
Universidad de Cuenca

Resumen

En el presente trabajo se exponen varias tareas que han sido diseñadas para analizar la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, cuando resuelven problemas de combinatoria. De esta manera, se puede evaluar la comprensión que tienen los participantes de este tópico. Por otra parte, también se pretende analizar de qué manera estos futuros profesores pueden explicar las dificultades que han tenido en la resolución de las tareas, mismas que se han diseñado tomando en cuenta las investigaciones sobre didáctica de la combinatoria, buscando que sean una muestra representativa de los problemas que se resuelven por combinatoria. Asimismo, se detalla el análisis ontosemiótico de cada una de las tareas propuestas, lo cual da evidencia de la red de objetos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas de combinatoria. El resultado de este estudio refleja, con relación a la comprensión, que los participantes presentan una comprensión limitada ya que no pueden resolver una muestra representativa de problemas. Con relación al análisis de la actividad matemática, sus comentarios sobre las dificultades que tuvieron muestran unos análisis poco detallados.

Palabras clave: Reflexión didáctica, Enfoque ontosemiótico, configuración epistémica, Teoría combinatoria.

Introducción

Los futuros profesores en Formación Inicial tienen que desarrollar la competencia de reflexión sobre su práctica docente, para lo cual necesitan, entre otras, herramientas para el análisis de la actividad matemática. En Rubio (2012) se concluye que, si los profesores no son competentes en el análisis de prácticas, procesos y objetos matemáticos (actividad matemática), no lo serán en la evaluación de competencias matemáticas de sus alumnos. Dicho resultado, nos señala una de las competencias que deben desarrollar los futuros profesores de matemáticas: la competencia de análisis de la actividad matemática.

Este tipo de análisis es importante en la formación de los profesores, pero también es un tipo de análisis que presenta dificultades para los profesores y futuros profesores. Por ejemplo, en Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) se hace una revisión de la investigación empírica realizada sobre los profesores de matemáticas y se concluye que estas investigaciones muestran que los profesores tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (y su potencial educativo) que proponen a sus alumnos.

Con relación a la exposición de la actividad matemática, en este trabajo, nos propusimos dos objetivos:

1) Realizar el análisis de la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, cuando resuelven problemas de combinatoria.

2) Contrastar la manera como los futuros profesores exponen las dificultades que tienen para resolver los problemas de combinatoria.

Después de esta introducción, donde se presentan los objetivos de la investigación, en la siguiente sección se explican algunos constructos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) que han sido las herramientas teóricas utilizadas en esta investigación. A continuación, se explica la metodología y el análisis de los datos. Se finaliza con las conclusiones obtenidas.

Marco teórico

En el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha desarrollado el modelo llamado Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (modelo CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017; Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Pino-Fan, Font & Breda, 2017). En dicho modelo se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan & Font, 2017): diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Para poder desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, precisa conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones. En este trabajo nos centraremos, sobre todo, en esta última.

La competencia de análisis e intervención didáctica está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan & Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemáitca; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos focalizamos en la primera subcompetencia.

En el área de educación matemática no hay un paradigma que nos diga cómo se debe realizar el análisis de la actividad matemática. En el modelo CCDM se asume que las herramientas teóricas del EOS permiten dicho análisis en términos de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Con estas nociones teóricas, cuando los significados son entendidos de manera pragmática en términos de prácticas, se puede responder en un primer momento a preguntas del tipo: ¿Cuáles son los significados parciales de los objetos matemáticos que se quieren enseñar? ¿Cómo se articulan entre sí? En un segundo momento se pueden analizar los objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas permite comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Por tanto, el profesor de matemáticas debe conocer la idea de configuración de objetos primarios y procesos activada en una práctica matemática y ser capaz de usarla de manera competente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo hemos utilizado fundamentalmente la herramienta *configuración de objetos primarios*. En el EOS se ha introducido una tipología de objetos matemáticos primarios: situaciones/problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, lo que en el EOS se conoce con el nombre de configuraciones. Estas pueden ser de tipo epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e. g., plantear y resolver un problema de combinatoria), vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la configuración de la Figura 1 (Font & Godino, 2006, p. 69).

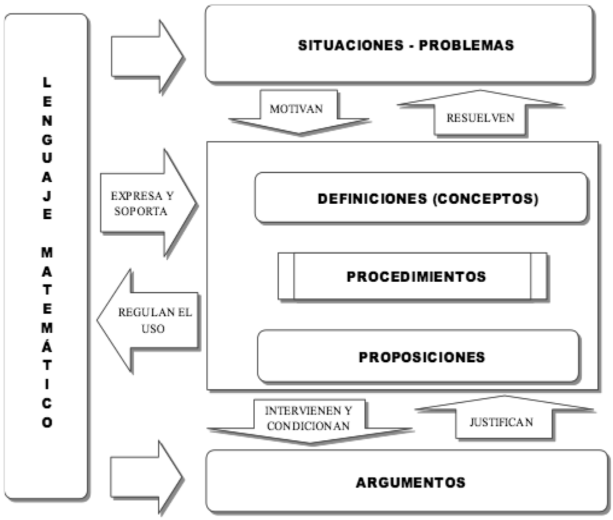


Figura 1

Metodología

Para la recolección de los datos, se implementó un dispositivo que consistió en que dos futuras profesoras, tutorizadas por la primera autora de este documento, en su Trabajo de Titulación (Parra & Paucar, 2018) confeccionaran una muestra de problemas que fuese representativa del tipo de problemas que se pueden resolver con las nociones y procedimientos de la combinatoria.

Se confeccionaron tres problemas de combinatoria; dos de ellos muy elementales, es decir, cuya solución se puede encontrar mediante la aplicación de una única operación, y de un problema compuesto en el que se necesita más de una operación. Los problemas propuestos están contextualizados a la realidad universitaria y en general a la del país.

Los contenidos necesarios para la resolución de los tres problemas fueron: permutación, permutación con repetición, variación y combinación. Esta selección se hizo con la finalidad de que se contemplasen los modelos básicos de los problemas combinatorios: selección, colocación y partición. Se trataba de tener una muestra representativa de los diferentes tipos de problemas que se resuelven con estas técnicas de contar (no se contempla, el caso de la descomposición de un número natural en sumandos) (Batanero, Godino y Pelayo-Navarro, 1994). A continuación, siguen los enunciados de los tres problemas:

Problema 1: En una reunión de viejos amigos de la Universidad de Cuenca, se encuentran Viviana, Diego, Richard, Leonel, Ximena y Catalina. Se proponen ir al cine a disfrutar de una película. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en forma lineal si se desea que queden alternados (un hombre una mujer o una mujer un hombre)?

Problema 2: Por el feriado de la Fundación de Cuenca, Ana con sus siete compañeros deciden viajar a la parte costera del Ecuador llevando para ello dos autos. Si deciden ir cuatro en cada auto, ¿de cuántas formas pueden viajar si solo tres de los compañeros tienen licencia de conducir?

Problema 3: Un grupo de seis amigos, Lucía, Rodrigo, Nicolás, Humberto, Ximena y Miguel, tienen que realizar tres trabajos diferentes: Pedagogía, Mecánica y Estadística. Para realizarlo deciden dividirse en tres grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?

Tabla 1

Modelos y técnicas combinatorias de los problemas

Problema	Modelo Combinatorio	Técnica de conteo
1	**Colocación**	Permutación simple
2	**Partición**	Variación y Permutación simple
3	**Partición**	Permutación con repetición

Es importante mencionar que, en el Problema 1, se plantearon preguntas directrices para identificar los conceptos de orden y repetición, además de los principios de multiplicidad y adición, mientras que en los dos siguientes solamente se presentaron los enunciados y se dio libertad para resolverlos.

La población escogida fueron los estudiantes de segundo ciclo de la Carrera Rediseñada: Pedagogía de Ciencias Experimentales que cursan la asignatura de Matemática Estructurada perteneciente al período marzo-julio 2018. El total de estudiantes que la cursan es de 75 registrados en lista, de los cuales se ha tomado la evaluación a 67 de ellos, por ser estudiantes regulares. De los 67 estudiantes se formaron un total de quince grupos de entre 4 y 5 integrantes. La tarea fue aplicada durante una clase de 60 minutos. Se les pidió que resolvieran los problemas, y explicasen con detalle el procedimiento empleado; se permitió utilizar un formulario con las fórmulas de la combinatoria.

Análisis de los datos

A continuación, se muestra la frecuencia y porcentaje de soluciones correctas de cada una de las tareas, la configuración epistémica de la tarea y principales dificultades en la resolución.

Tabla 2

Frecuencias y porcentajes en cuanto a soluciones correctas e incorrectas.

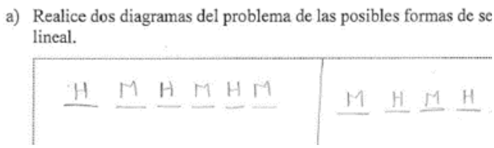
Problema	Técnica de conteo	Correcta	Incorrecta
1	Permutación simple	7 (46.7%)	8 (53.3%)
2	Variación y permutación simple	3 (20.0%)	12 (80.0%)
3	Permutación con repetición	6 (40.0%)	9 (60.0%)

Se observa que los estudiantes obtuvieron una mayor cantidad de aciertos en el problema 1; seguramente debido a que, por una parte, contaron con orientaciones metodológicas y, por otra, son un tipo de enunciados característicos de los problemas que se resuelven por permutación o bien por combinación. El problema 2, al ser necesario el uso conjunto de dos técnicas de conteo para ser resuelto, presentó más dificultad, probablemente debido a que los estudiantes no están familiarizados con ejercicios de este tipo. El problema 3, al necesitar el conocimiento de las nociones de orden y repetición, también les resultó difícil de resolver.

El análisis de la actividad matemática necesaria para resolver cada tarea se realizó mediante la técnica de análisis (Malaspina y Font, 2010) que describe las prácticas realizadas para la resolución del problema y las configuraciones cognitivas involucradas en ellas y permite compararlas con las prácticas y configuraciones epistémicas de referencia correspondientes.

La configuración epistémica de referencia del *Problema 1*, elaborada por las autoras, es la siguiente:

Problema	Problema 1: En una reunión de viejos amigos de la Universidad de Cuenca, se encuentran Viviana, Diego, Richard, Leonel, Ximena y Catalina. Se proponen ir al cine a disfrutar de una película. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en forma lineal si se desea que queden alternados (un hombre una mujer o una mujer un hombre)? a) Realice dos diagramas del problema de las posibles formas de sentarse en forma lineal b) ¿Qué principio se encuentra presente en este tipo de problema (multiplicativo, adición o ambos)? El problema 1 es un ejemplo de los llamados problemas de colocación de permutación simple
Conceptos/ Definiciones	- Permutación simple - Orden
Proposiciones	-Principio de multiplicación -Principio de adición -La fórmula que permite obtener el número de permutaciones simples: $P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$
Procedimientos	-Realizar diagramas -Uso de la fórmula de permutación simple -Suma de las permutaciones simples obtenidas cuando se sientan alternando primero con un hombre (P_1) y cuando se sientan alternando primero con una mujer (P_2).

Representaciones	 a) Realice dos diagramas del problema de las posibles formas de se lineal. H M H M H M / M H M H $P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$ Suma de permutaciones: $P_1 + P_2$
Argumento	- Hay solo dos posibles diagramas si queremos que se sienten alternados, uno empieza con un hombre y el otro con una mujer. - Este problema tiene implícito el principio de adición. Este problema corresponde al modelo combinatorio de colocación, debido a que son personas distinguibles en asientos distinguibles con un enunciado de permutación simple porque hay tantas sillas como personas. Dado que hay tres mujeres y tres hombres el resultado es $P_1 = 3! * 3! + P_2 = 3! * 3!$, es decir 36 + 36 = 72 maneras diferentes de sentarse alternados (un hombre una mujer o una mujer un hombre).

Evaluando los resultados obtenidos en la resolución de este problema, podemos concluir que, todos los grupos, excepto uno, realizan los dos diagramas solicitados en el orden correcto. 7 de los 15 grupos, identifican el principio de adición. 12 de los 15 grupos reconocen el principio multiplicativo, 11 de los grupos reconocen que se trata de un problema de permutación simple y solo 8 grupos realizan el cálculo correcto de las permutaciones.

Cuando se les preguntó cuál es la mayor dificultad que han tenido en la resolución de este problema, algunos estudiantes manifestaron lo siguiente (se destacan las respuestas más interesantes):

"No sabíamos cómo hacer que se alternen hombre, mujer" (orden).

"Diferenciar el caso de combinatoria (permutación, variación o combinación)" (conceptualización).

"Identificar si solo se aplica el principio de producto o de sumatoria o ambos" (Principios de la combinatoria).

La configuración epistémica de referencia del *Problema 2*, elaborada por las autoras, es la siguiente:

Problema	Problema 2: Por el feriado de la Fundación de Cuenca, Ana con sus siete compañeros deciden viajar a la parte costera del Ecuador llevando para ello dos autos. Si deciden ir cuatro en cada auto, ¿de cuántas formas pueden viajar si solo tres de los compañeros tienen licencia de conducir? El problema 2 es un ejemplo de los llamados problemas de Partición, de Variación y Permutación simples.
Conceptos/ Definiciones	-Variación simple -Permutación simple -Orden
Proposiciones	-Principio de multiplicación -La fórmula que permite obtener el número de variaciones simples: $P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ -La fórmula que permite obtener el número de permutaciones simples: $P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$
Procedimientos	- Descomposición en subproblemas: los conductores y los pasajeros - Uso de la fórmula de variación simple - Uso de la fórmula de permutación simple - Aplicación del principio multiplicativo de la combinatoria.

Representaciones	- $P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ - $P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$ - $P_n^r * P_n^n$
Argumento	- Al tener dos autos y tres conductores, se plantea una variación simple de los tres conductores, tomados de dos en dos (dos autos). - Al ubicar dos conductores (uno en cada auto), me quedan seis pasajeros para ubicarlos en los autos, lo que me da una permutación simple de estos. - Debido a que son sucesos simultáneos, se aplica el principio multiplicativo. - Si bien, es un problema que se divide en partes, no se considera el orden en los que deben ubicarse, conductores y pasajeros, dentro del auto. Este problema corresponde al modelo combinatorio de partición de elementos diferentes (los compañeros) en dos subconjuntos distinguibles (los autos): $P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$ $P_6^6 = 6! = 720$ Principio multiplicativo: 720 * 6 = 4320 formas diferentes de viajar

Evaluando los resultados obtenidos en la resolución de este problema, podemos concluir que, 10 de los 15 grupos, identifican el contexto del problema, pero solo 7 de ellos descomponen en subproblemas. 14 de los grupos, no tiene problemas en enumerar los eventos, pero tan solo 5 grupos reconocen la técnica de variación simple y 6 la técnica de permutación simple. 12 de los 15 grupos identifica el principio de multiplicidad y solo tres grupos, realizan los cálculos de manera correcta.

Cuando se les preguntó cuál es la mayor dificultad que han tenido en la resolución de este problema, algunos estudiantes manifestaron lo siguiente (se destacan las respuestas más interesantes):

“Identificar el tipo de concepto matemático, porque puede confundirse con permutación o variación” (conceptualización)

“Analizar qué sucede con el conductor que queda fuera y ya no ocupa el cargo de chofer” (orden).

“Establecer los puestos de cada pasajero y cada conductor” (orden).

La configuración epistémica de referencia del *Problema 3*, elaborada por las autoras, es la siguiente:

Problema	Problema 3: Un grupo de seis amigos, Lucía, Rodrigo, Nicolás, Humberto, Ximena y Miguel, tienen que realizar tres trabajos diferentes: Pedagogía, Mecánica y Estadística. Para realizarlo deciden dividirse en tres grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? El problema 3 es un ejemplo de los llamados problemas de Partición, de Permutación con repetición.

Conceptos/ Definiciones	- Permutación con repetición - Orden - Repetición
Proposiciones	- La fórmula que permite obtener el número de Permutación con repetición: $P_R^n = \frac{n!}{R!R!R!}$
Procedimientos	- Reconocer características de orden y repetición - Uso de la fórmula de permutación con repetición
Representaciones	- $P_R^n = \frac{n!}{R!R!R!}$
Argumento	- Para organizar tres grupos de dos compañeros cada uno, es necesario reconocer las características de orden y repetición de las asignaturas, es decir la distribución de las asignaturas entre los compañeros. - Este problema corresponde al modelo combinatorio de partición, de permutación con repetición; es decir, de un conjunto de elementos diferentes (los amigos) en tres subconjuntos distintos (los trabajos a realizar): $P_6^2 = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$ formas diferentes de dividirse para realizar el trabajo

Evaluando los resultados obtenidos en la resolución de este problema, podemos concluir que solo 4 de los 15 grupos, identifican los elementos involucrados en el problema y solo 6 reconocen las características de los estudiantes y las asignaturas, además de realizar los cálculos de manera correcta.

Cuando se les preguntó cuál es la mayor dificultad que han tenido en la resolución de este problema, algunos estudiantes manifestaron lo siguiente (se destacan las respuestas más interesantes):

"Identificar qué técnica de conteo utilizar, ya que nos confundíamos con las condiciones del problema que nos dieron" (conceptualización).

"Comprender el ejercicio, porque el uso de datos y el trabajo fue compleja" (conceptualización).

Conclusiones

En esta investigación, presentamos el diseño de algunas tareas que nos permiten evaluar y caracterizar la actividad matemática realizada por estudiantes de los primeros cursos universitarios al resolver problemas de combinatoria y también cómo analizan ellos mismos sus dificultades para conseguir resolver los problemas.

La información obtenida nos permite también evaluar la comprensión que tienen los participantes sobre la combinatoria y su competencia para analizar la actividad matemática implicada en la resolución de problemas de combinatoria. Con relación a la comprensión, podemos concluir que es limitada ya que no pueden resolver una muestra representativa de problemas. Con relación al análisis de la actividad matemática, sus comentarios sobre las dificultades que tuvieron muestran unos análisis poco detallados.

Referencias bibliográficas:

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa,* 8 (1), 67-98.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31 (57), 90-113.

Parra & Paucar, 2018. Elaboración de un manual que contenga estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje de combinatoria en la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, con la utilización de material didáctico. Universidad de Cuenca. Cuenca.

Pino-Fan, L., Font, V., & Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapur: PME.

Rubio, N. (2012). “Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos”. (Doctoral dissertation). Recuperado de http://www.tdx.cat/handle/10803/294031

Stahnke, R; Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers’ perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics.*