Reflexión sobre la complejidad de los objetos matemáticos en la formación inicial de profesores

Eulalia Calle
Universidad de Cuenca, Ecuador
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec

Adriana Breda
Universidad de Barcelona, España
adriana.breda@ub.edu

Resumen

Este trabajo, de tipo exploratorio, forma parte de una investigación más amplia en la formación de profesores sobre la importancia de tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos para desarrollar la competencia matemática de los alumnos de secundaria. Tiene como objetivo específico, conocer la percepción de los futuros profesores de Matemáticas sobre la importancia de contemplar la complejidad de los objetos en la práctica docente, con la finalidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación General Básica (EGB) y el Bachillerato General Unificado (BGU).

Para ello, 19 futuros profesores de matemáticas, que cursaban el segundo semestre de la asignatura de Álgebra Superior de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, de la Universidad de Cuenca, fueron organizados en cinco grupos y cuestionados sobre los diferentes significados de algunos objetos matemáticos y, además, se les propuso plantear problemas contextualizados en los que se tenía que aplicar un determinado significado en su resolución.

Para analizar las respuestas de los futuros profesores se utilizó la herramienta Idoneidad Didáctica propuesta en el modelo de competencias y conocimientos del profesor de Matemáticas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticas.

En particular, se utilizaron como pauta de análisis los indicadores del componente Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos - entendida como pluralidad de significados parciales, donde cada uno de estos significados permiten resolver tipos de problemas diferentes - del criterio de idoneidad epistémica (uno de los criterios de idoneidad didáctica que se usa para valorar la calidad matemática del proceso de instrucción). Estos son: a) los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etcétera) como una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar; b) los significados parciales: definiciones, propiedades, procedimientos, etc., son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar; c) para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas?; d) Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico. . .), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Los resultados muestran que en el grupo 1, al trabajar la actividad relacionada con los números complejos, se puede inferir que se tiene en cuenta el componente representatividad del criterio de idoneidad epistémica, a través de sus tres significados parciales: algebraico, geométrico y trigonométrico; además de una muestra representativa de problemas y el uso de diferentes modos de expresión, como verbal, gráfico, simbólico y otros. En el grupo 2, al trabajar la actividad relacionada con el teorema de Tales se puede inferir que se tiene en cuenta el componente representatividad del criterio de idoneidad epistémica, mediante cuatro significados parciales: algebraico, aritmético, geométrico y trigonométrico; además de los otros criterios exigidos. El grupo 3, al trabajar una actividad relacionada con las ecuaciones, usó el componente representatividad del objeto matemático “ecuaciones” de forma muy elemental. El grupo 4, al trabajar la actividad relacionada con las fracciones, también evidencia el cumplimiento del componente representatividad, a través del significado algebraico, geométrico y trigonométrico. El grupo 5, al trabajar la actividad relacionada con las funciones cuadráticas, contempló la representatividad a través de los significados algebraico, geométrico y físico.

Una vez concluidas y socializadas estas propuestas de pluri significación de los objetos matemáticos, los futuros docentes hicieron una evaluación de la actividad realizada donde manifestaron la importancia y necesidad de analizar la complejidad de los objetos matemáticos en la práctica docente, a fin de lograr aprendizajes significativos en los estudiantes de Educación General Básica y el Bachillerato. Por otra parte, argumentan que los diferentes significados se deben ir presentando a los alumnos de forma gradual.

Destaca en las respuestas, además, que los participantes presentaron diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra, como extra matemáticos. Tal es el caso del grupo 5 que consideró los significados dentro de la Física que también corresponde a su formación profesional (Docencia en Matemáticas y Física); lo cual se puede considerar una evidencia de su capacidad para trabajar, no solo en contextos intra matemáticos, sino también en contextos extra matemáticos, es decir, como conexión que se puede dar entre las matemáticas y el mundo real.

Se concluye que los estudiantes en formación docente, son conscientes de que para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas. Si se analiza la reflexión de los participantes en esta propuesta, se considera que estos podrían avanzar en su reflexión y profundizar en la articulación de la complejidad asociada al objeto matemático como un paso previo y necesario para avanzar a una visión unitaria del objeto matemático. Dicha conclusión es coincidente con las que se han obtenido en diferentes procesos de formación de profesores de Matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina, en los cuales se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad indagar el uso del constructo, de criterios de idoneidad didáctica como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica. Estas investigaciones han puesto de manifiesto los siguientes aspectos: a) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente ≪muestra representativa de la complejidad del objeto matemático≫, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros); b) Incorporar el componente ≪muestra representativa de la complejidad del objeto matemático≫para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

Palabras Clave: Formación inicial de docentes, Complejidad de los objetos matemáticos, problemas contextualizados.

Introducción

Una de las líneas de estudio de la Educación Matemática es la formación inicial de docentes, debido al rol relevante que tiene el profesor de Matemáticas en el desarrollo de los procesos de instrucción. Con la finalidad de mejorar la formación de los futuros profesores y, en consecuencia, mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, las carreras de formación docente están haciendo énfasis en aplicar, en los cursos de formación, aportes teóricos y metodológicos relacionados, tanto con los resultados de las investigaciones en el área de Didáctica de las Matemáticas (DM), como con algunas tendencias actuales en la enseñanza de las Matemáticas (Resolución de Problemas, uso de las TIC, aprendizaje de tipo activo, etc.) derivadas de dichos resultados.

Un aspecto primordial para trabajar en la formación inicial de profesores de Matemáticas – tal como señalan diferentes investigaciones (Font, 2007; Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, et al, 2018; Rondero y Font, 2015) – es la reflexión sobre los distintos significados de los objetos matemáticos y sus aplicaciones en la resolución de tareas contextualizadas.

En mayor o menor medida, la problemática de la complejidad asociada al objeto matemático, y la articulación de los componentes en los que estalla esta complejidad, está presente en casi todos los marcos teóricos emergentes en el área de la Educación Matemática. En este artículo se toma como referente teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS, a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2019). Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto en el EOS, donde se propone analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones.

Entender la complejidad en término de una pluralidad de significados es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Es decir, supone disponer de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca. Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el pragmatismo, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir dos términos que resultan difíciles de diferenciar, se hace referencia a los conceptos de sentido y significado. En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, se puede entender el sentido como un significado parcial, esto es como un subconjunto (sentido) del sistema de prácticas en las que el objeto es determinante (significado).

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Este trabajo tiene como objetivo conocer la percepción de los futuros profesores de Matemáticas sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su posible aplicación en la práctica docente, con la finalidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación General Básica y el Bachillerato General Unificado.

La estructura del capítulo es la siguiente: Primero se presenta una breve explicación de algunos constructos del EOS, donde se detalla la herramienta teórica que se usa en esta investigación; seguidamente se expone la metodología cualitativa que se ha seguido; a continuación, se analizan los trabajos de los participantes en esta propuesta y se presenta una discusión sobre los resultados.

Marco Teórico

En el marco teórico se explica, de manera breve, el modelo CCDM del EOS, donde se profundiza en el componente *muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar* del criterio de idoneidad epistémica.

El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica

El modelo de Competencias y Conocimientos del profesor de Matemáticas (modelo CCDM) está basado en constructos del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019) y articula diversas categorías de conocimientos y competencias de los profesores de Matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las Matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). Este modelo teórico hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Giacomone, Godino y Beltrán, 2018); por lo tanto, responde a qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas para desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

- *Idoneidad epistémica:* se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.

- *Idoneidad ecológica:* grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

- *Idoneidad cognitiva:* grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- *Idoneidad afectiva:* grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.

- *Idoneidad interaccional:* grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar *a priori*), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

- *Idoneidad mediacional:* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Se hace referencia al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

El componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Giacomone, Godino y Beltrán-Pelliecer, 2018). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere aplicar el objeto matemático a la resolución de diferentes problemas (competencia matemática) es necesario enseñar una muestra representativa de significados parciales (Font, Breda y Seckel, 2017). La siguiente tabla (Font, Breda y Seckel, 2017), explica en detalle, los indicadores del componente *Representatividad* del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 1: El componente de Representatividad y sus indicadores

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad	▪ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar ▪ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. ▪ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? ▪ Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: Font, Breda y Seckel (2017)

Investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos

Se han realizado diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos: números naturales (Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche, 2009), media aritmética (Rondero y Font, 2015), límite (Contreras, García y Font, 2012), optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017), proporcionalidad (Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone, 2017; Burgos et al, en prensa), Teorema de Tales (Font, Breda y Seckel, 2017), derivada y antiderivada, así como la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda, 2018; Pino-Fan, Godino y Font, 2018), inecuación (Monje, Seckel y Breda, 2018).

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite. En Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel).

La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permitan identificar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. En Pino-Fan, Godino y Font y (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

En Gordillo y Pino-Fan (2016) la complejidad de la antiderivada se define mediante cuatro configuraciones de objetos primarios relacionadas con cuatro problemas fundamentales: a) el problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; b) el problema de la relación fluxiones - fluentes; c) el problema sobre la relación de los diferenciales y las sumatorias; y d) el problema de la identificación de funciones elementales. La caracterización de dicha complejidad permite tener elementos para diseñar cuestionarios que permitan identificar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la antiderivada. En Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018) y en Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de los estudiantes universitarios sobre la antiderivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la antiderivada caracterizados en Gordillo y Pino (2016).

Monje, Seckel y Breda (2018), por medio de un análisis comparativo entre la complejidad del objeto matemático inecuación con el currículo nacional y los textos escolares otorgados por el Ministerio de Educación de Chile, concluyeron que el tratamiento que se le otorga al objeto matemático en estudio (inecuaciones) no considera todos los componentes necesarios para la enseñanza de la inecuación a partir de su complejidad, en particular, se observó que tanto el currículo como los textos escolares dejan fuera, en específico, las inecuaciones cuadráticas y las inecuaciones con valor absoluto.

En estas investigaciones se llegó a la conclusión de que los profesores debían tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos que enseñaban para conseguir una enseñanza más eficaz, lo cual llevó a los autores de este artículo a interesarse por la manera de incorporar la problemática de la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores.

Objetivo

Conocer la percepción que tienen los futuros profesores de matemáticas sobre la la importancia de contemplar la complejidad de los objetos matemáticos en la práctica docente.

Metodología

En ese apartado, se presenta el contexto del estudio (institución implicada, participantes de la investigación, etc.) y la metodología cualitativa usada para analizar las respuestas de los participantes.

Contexto del estudio

Participaron del estudio 19 futuros profesores de Matemáticas que se encuentran cursando el segundo semestre de la asignatura de Álgebra Superior de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física, de la Universidad de Cuenca.

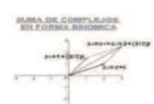
Fases del Estudio de la Investigación

En la primera fase, los alumnos en conjunto con la profesora acordaron una serie de objetos matemáticos, de los cuales profundizarían en su complejidad. En la segunda fase, con los objetos asignados y los grupos organizados, se les proporcionó bibliografía relacionada con el objeto sobre el cual tenían que reflexionar. En una tercera fase, el grupo se tenía que plantear preguntas como cuáles son los significados parciales del objeto matemático trabajado por los estudiantes y qué representaciones se podían dar a los significados parciales de esos objetos matemáticos. En una cuarta fase se pidió, además, que propusiesen problemas para cada significado. En la quinta fase cada grupo presentó sus reflexiones al gran grupo. En una sexta fase, todo el grupo resolvió las tareas que se habían propuesto en cada pequeño grupo. Al finalizar, los estudiantes discutieron sobre los resultados obtenidos, analizando su aplicación y generalización, a través de las conclusiones y recomendaciones para tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos en los procesos de instrucción .

Resultados

Los estudiantes participantes en este estudio se organizaron en cinco grupos, de cuatro o cinco estudiantes, donde socializaron sus propuestas a través de debate de ideas y presentando como resultado, la información que se detalla a continuación:

Tabla 1: Trabajo realizado por los estudiantes participantes de la propuesta. Grupo nº. 1

<table>
<tr><th>Objeto Matemático Abordado</th><th>Grupo nº. 1: Números complejos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ANÁLISIS DE LA REPRESENTATIVIDAD Y LA ACTIVIDAD PRESENTADA</td><td>Los significados parciales, son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar, además, está contemplada en el currículo:
<table>
<tr><td>Significado 1: Algebraico.</td><td>La unidad de los números imaginarioses $\sqrt{-1}$ y se representa por la letra i, formado por un número real y uno imaginario.</td></tr>
<tr><td>Significado 2: Geométrico</td><td>Se realiza utilizando un sistema de ejes rectangulares o cartesianos en el eje «x» se representa los números reales y las cantidades imaginarias en el eje «y». Al plano formado por los ejes real e imaginario se denomina diagrama de Argand.</td></tr>
<tr><td>Significado 3: Trigonométrico</td><td>Cuando se tiene un número complejo en forma polar (por lo tanto, está definido con solo dar $\lfloor Z \rfloor$y α) se puede pasar fácilmente a la forma trigonométrica o también llamada módulo argumental; es decir, el número complejo está dado por su módulo y su ángulo.</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, se contempla una muestra representativa de problemas:
<table>
<tr><td>Significado 1: Algebraico</td><td>El cociente de dos números complejos es imaginario puro; su suma es real y vale 5. El módulo del dividendo es doble que el del divisor. Hallar el divisor.</td></tr>
<tr><td>Significado 2: Geométrico</td><td>Dados los números complejos, expresar en el diagrama de Argand:
$Z_1 = 3 + 3i$
$Z_2 = 1 - 2i$
$Z_3 = -2 - 2i$
$Z_4 = -3 + i$</td></tr>
<tr><td>Significado 3: Trigonométrico</td><td>Transformar el siguiente número complejo a su forma polar: $Z = 1 - i$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Además del uso de diferentes modos de expresión, tratamientos y conversiones entre los mismos:
<table>
<tr><td>Significado 1: Algebraico</td><td>En el número complejo $a + bi$, a se llama la parte real y bi la parte imaginaria.
Cuando $a = 0$, el número complejo se llama imaginario puro. Si $b = 0$, el número complejo se reduce al número real a.</td></tr>
<tr><td>Significado 2: Geométrico</td><td>Mediante la suma vectorial podemos obtener la representación de forma geométrica
</td></tr>
<tr><td>Significado 3: Trigonométrico</td><td>Para representar un número complejo de esta manera, es necesario conocer el «radio vector», conocido con el nombre de «módulo» y el ángulo que formaésta con la parte positiva del eje «x».</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Fuente: Las Autoras.

Si se analiza la actividad realizada por el grupo nº. 1, se puede evidenciar que cumplen con la *representatividad* del criterio de idoneidad epistémico, a través de sus tres significados parciales: algebraico, geométrico y trigonométrico; además de una muestra representativa de problemas y el uso de diferentes modos de expresión, como verbal, gráfico, simbólico y otros.

Luego de la socialización de este trabajo, los expositores aplicaron la siguiente tarea, en la cual se obtuvo como resultado que, de los 15 estudiantes asistentes, 12 respondieron correctamente a las preguntas planteadas en la tarea y solamente tres estudiantes cometen errores mínimos, como exponen los evaluadores del grupo 1: “Identifican de manera correcta el significado algebraico, pero tuvieron un pequeño error al no distinguir las propiedades de los números complejos”.

Universidad de Cuenca

Pedagogía de las Ciencias Experimentales

Números complejos

Nombre: .... Fecha: 01/07/2019

1. **Calcular** $E = \frac{x+y}{x-y}$,

   Si se cumple que $(1+i)^2 + (1+i)^4 + (1+i)^6 + (1+i)^8 = x + yi$

2. ¿Cuál es el significado de número complejo que has utilizado?

Figura 1: Prueba aplicada por el grupo nº. 1. **Fuente:** Las Autoras.

La actividad realizada por el siguiente grupo, se detalla a continuación:

Tabla 2: Trabajo realizado por los estudiantes participantes de la propuesta. Grupo nº. 2

<table>
<tr><td>Objeto Matemático Abordado</td><td>Grupo nº. 2: Teorema de Thales</td></tr>
<tr><td>ANÁLISIS DE LA REPRESENTATIVIDAD Y LA ACTIVIDAD PRESENTADA</td><td>Los significados parciales, son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar, además, está contemplada en el currículo:
<table>
<tr><td>Significado 1:</td><td>Significado Geométrico
Rectas Paralelas. Triángulos Semejantes. https://www.academia.edu/7659282/Calvache_G_-Geometria_Plana_Y_Del_Espacio_PDF</td></tr>
<tr><td>Significado 2:</td><td>Significado Algebraico
Proporcionalidad – Razón. https://es.calameo.com/read/003671470afdd13dea2c2</td></tr>
<tr><td>Significado 3:</td><td>Significado Trigonométrico.
Funciones Trigonométricas. https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/trigonometria/c1p1.html</td></tr>
<tr><td>Significado 4:</td><td>Significado Aritmético
Regla de Tres. https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/regla-de-3-simple/</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Objeto Matemático Abordado</th><th>Grupo nº. 2: Teorema de Thales</th></tr>
<tr><td></td><td>
Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, se contempla una muestra representativa de problemas:
<table>
<tr><td>Significado 1:</td><td>En un triángulo ABC se traza una recta paralela al lado BC desde un punto B de manera que AB 0,25 AB. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 y 8 centímetros. Si se unen sus puntos medios, ¿resulta un triángulo semejante a él?

</td></tr>
<tr><td>Significado 2:</td><td>Nueve personas realizan un trabajo en 16 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 8 personas?
Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos dijeron que 5 centímetros del mapa representaban 600 metros de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 8 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este parque?</td></tr>
<tr><td>Significado 3:</td><td>Un electricista subido en un poste, observa a su ayudante que está en el piso a 25 metros del pie del poste, con un ángulo de depresión de 40º. Calcular la altura del poste.

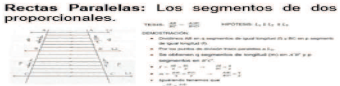
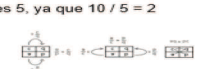
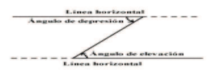
Desde un punto en el suelo, un estudiante de la clase de álgebra observa la parte más alta del edificio de la facultad de filosofía con un ángulo de elevación de 53° cuando se encuentra separado 12 metros de su base. ¿cuál es la altura del edificio de la facultad?
</td></tr>
<tr><td>Significado 4:</td><td>Sergio sale en una foto con su amigo Enrique. En la foto Sergio mide 4,5 cm y Enrique 4,25cm. Si en la realidad Enrique mide 1,7 metros. ¿Cuánto mide Sergio ?
Mide sobre el mapa la distancia entre las ciudades: Cuenca-Guayaquil y Quito-Portoviejo, averigua cuáles son las verdaderas distancias entre estas ciudades. Escala: 1:50
Distancia Cuenca-Guayaquil: 4cm. Distancia Quito-Portoviejo: 7cm</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
Además del uso de diferentes modos de expresión, tratamientos y conversiones entre los mismos:
<table>
<tr><td>Significado 1:</td><td>SIGNIFICADO GEOMÉTRICO
Rectas Paralelas: Los segmentos de dos transversales interceptados entre paralelas, son proporcionales.

Triángulos Semejantes:
• Los ángulos correspondientes deben de ser congruentes.
• Los lados correspondientes deben ser proporcionales.
Si los ángulos correspondientes son congruentes: $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$
Y los lados correspondientes son proporcionales: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; Entonces decimos que la correspondencia es una semejanza, y se escribe: $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$
La razón de dos lados correspondientes cualesquiera es la relación de semejanza.
Cabe recalcar que esta correspondencia no es una congruencia ya que para serlo la razón de semejanza debería ser igual a la unidad.</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>Significado 2:</td><td>SIGNIFICADO ALGEBRAICO
Proporcionalidad:
La proporcionalidad es una relación o razón constante entre diferentes magnitudes que se pueden medir. Si uno aumenta o disminuye el otro también aumenta o disminuye proporcionalmente, es decir cuando dos cantidades varían directamente entre sí.
Razón entre dos números: Siempre que hablemos de Razón entre dos números nos estaremos refiriendo al cociente (el resultado de dividirlos) entre ellos. Entonces:
Razón entre dos números a y b es el cociente entre ellos: a / b
Por ejemplo, la razón entre 10 y 2 es 5, ya que 10 / 5 = 2
$a \longrightarrow b$, $c \longrightarrow x$ $\Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$
</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

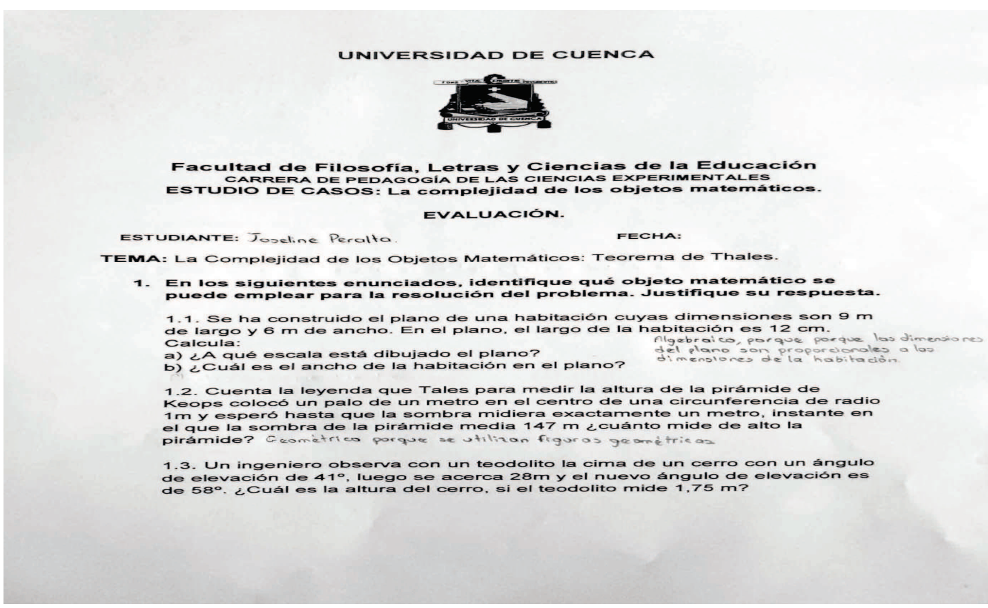
Tabla 2: Trabajo realizado por los estudiantes participantes de la propuesta. Grupo nº. 2… *continuación*

	Significado 3:	**SIGNIFICADO TRIGONOMÉTRICO** **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS** Las razones trigonométricas permiten relacionar las magnitudes de ángulos y lados de un triángulo. Es importante definirlas en un triángulo rectángulo para poder utilizar el Teorema de Pitágoras para obtener magnitudes de lados desconocidos y partir a encontrar los ángulos restantes diferentes de 90°.  $\sin(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ **Ángulo de elevación:** es el ángulo comprendido entre el plano horizontal y la línea de visión hacia el objeto. **Ángulo de depresión:** Denota al ángulo desde la horizontal hacia abajo a un objeto. 
	Significado 4:	**SIGNIFICADO ARITMÉTICO** **Regla de tres:** es un mecanismo que permite la resolución de problemas vinculados a la semejanza entre valores, de los cuales se conocen tres y el cuarto es una incógnita. Gracias a la regla, se puede descubrir el valor de este cuarto término. En la regla de tres simple se establece una relación de semejanza entre dos valores conocidos A y B, y conociendo un tercer valor C, se calcula un cuarto valor D. $A \longrightarrow B$ $\quad$ $C \longrightarrow D$ $\qquad D = \frac{C \cdot B}{A}$ Dicha relación de semejanza existente entre A y B debe ser necesariamente directa. Es decir, será directa cuando, dentro de esa proporcionalidad, a un mayor valor de A le corresponda también un mayor valor de B (o a un menor valor de A le corresponde un menor valor de B).

Fuente: Las Autoras.

De manera similar al caso anterior, se puede apreciar que el grupo nº. 2, cumple con el componente representatividad del criterio de idoneidad epistémico, donde se manifiesta en cuatro significados parciales: algebraico, aritmético, geométrico y trigonométrico.

Al aplicar la evaluación, se obtiene como resultado que, de los 14 estudiantes asistentes, siete demuestran una buena aplicación y relación de significados con los problemas planteados, mientras que los demás, al tener un error, en palabras del grupo: "reconocen y aplican la relación de los significados con los problemas planteados".



UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación
CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES
ESTUDIO DE CASOS: La complejidad de los objetos matemáticos.

EVALUACIÓN.

ESTUDIANTE: Joseline Peralta. FECHA:

TEMA: La Complejidad de los Objetos Matemáticos: Teorema de Thales.

1. **En los siguientes enunciados, identifique qué objeto matemático se puede emplear para la resolución del problema. Justifique su respuesta.**

1.1. Se ha construido el plano de una habitación cuyas dimensiones son 9 m de largo y 6 m de ancho. En el plano, el largo de la habitación es 12 cm.
Calcula:
a) ¿A qué escala está dibujado el plano?
b) ¿Cuál es el ancho de la habitación en el plano?

Algebraico, porque porque las dimensiones del plano son proporcionales a las dimensiones de la habitación.

1.2. Cuenta la leyenda que Tales para medir la altura de la pirámide de Keops colocó un palo de un metro en el centro de una circunferencia de radio 1m y esperó hasta que la sombra midiera exactamente un metro, instante en el que la sombra de la pirámide media 147 m ¿cuánto mide de alto la pirámide? Geométrico porque se utilizan figuras geométricas

1.3. Un ingeniero observa con un teodolito la cima de un cerro con un ángulo de elevación de 41°, luego se acerca 28m y el nuevo ángulo de elevación es de 58°. ¿Cuál es la altura del cerro, si el teodolito mide 1,75 m?

Figura 2: Prueba aplicada por el grupo nº. 2. **Fuente:** Las Autoras.

El detalle de la actividad del siguiente grupo es:

Tabla 3: Trabajo realizado por los estudiantes participantes de la propuesta. Grupo n^o. 3

<table>
<tr><th>Objeto Matemático Abordado</th><th>Grupo n^o. 3: Ecuaciones</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ANÁLISIS DE LA REPRESENTATIVIDAD Y LA ACTIVIDAD PRESENTADA</td><td>Los significados parciales, son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar, además, está contemplada en el currículo:
<table>
<tr><td>Significado 1: ALGEBRÁICO</td><td>Es un enunciado de la forma E=F donde E y F son expresiones algebraicas en x. el conjunto de reemplazo de una variable en una ecuación es el conjunto de números para los cuales las expresiones algebraicas están definidas en la ecuación. A menos que se establezca de otra manera, consideramos que el conjunto de reemplazo es un conjunto de números reales. Una variable en una ecuación se denomina algunas veces indeterminada.</td></tr>
<tr><td>Significado 2: GEOMÉTRICO</td><td>La ecuación de la recta que pasa por el punto P(x1, y1) y tiene la pendiente m.</td></tr>
<tr><td>Significado 3: TRIGONOMÉTRICO</td><td>Son igualdades que solo se satisfacen para determinadas series de ángulos. El grado de la ecuación y el tipo de función determinaran que ángulos satisfacen la ecuación original.</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, se contempla una muestra representativa de problemas:
<table>
<tr><td>Significado 1:</td><td>Encuentre el conjunto solución de la ecuación:
$4[3x-(5x-1)]=3-4x$</td></tr>
<tr><td>Significado 2:</td><td>Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, -4) y tiene una pendiente de (-1/3).</td></tr>
<tr><td>Significado 3:</td><td>Resuelve la siguiente ecuación y da los resultados en grados.
$Sen\ x=1$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>Además del uso de diferentes modos de expresión, tratamientos y conversiones entre los mismos:
<table>
<tr><td>Significado 1:</td><td>$E=F$</td></tr>
<tr><td>Significado 2:</td><td>$y-y_1=m(x-x_1)$</td></tr>
<tr><td>Significado 3:</td><td>$Tan^2x+Csc^2x-3=0$</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Fuente: Las Autoras.

El grupo número n^o. 3, trabaja la representatividad del objeto matemático "ecuaciones" de forma muy elemental y analiza la evaluación de seis de sus compañeros, donde cuatro de estos responden de manera correcta la evaluación y tan solo dos no pudieron relacionar los significados con los problemas propuestos.

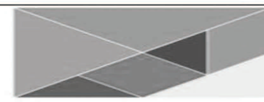
Se puede deducir que, a pesar de presentar un trabajo bastante simple, se visibiliza la comprensión de los expositores sobre la complejidad del objeto matemático "ecuaciones".

Significado 1:	$E=F$
Significado 2:	$y-y_1=m(x-x_1)$
Significado 3:	$Tan^2x+Csc^2x-3=0$

Figura 3: Prueba aplicada por el grupo n^o. 3. **Fuente:** Las Autoras.

El siguiente grupo expone su trabajo, de acuerdo al siguiente detalle:

Tabla 4: Trabajo realizado por los estudiantes participantes de la propuesta. Grupo nº. 4

<table>
<tr><th>Objeto Matemático Abordado</th><th>Grupo nº. 4: Fracciones</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ANÁLISIS DE LA REPRESENTATIVIDAD Y LA ACTIVIDAD PRESENTADA</td><td>Los significados parciales, son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar, además, está contemplada en el currículo:
<table>
<tr><td>Significado 1: ALGÉBRICO</td><td></td></tr>
<tr><td>Significado 2: ARITMÉTICO</td><td></td></tr>
<tr><td>Significado 3: GEOMÉTRICO</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, se contempla una muestra representativa de problemas:
<table>
<tr><td>Significado 1:</td><td>Un campo de fútbol tiene medidas desconocidas. Con todo, un operario de mantenimiento nos cuenta que la relación entre lo ancho y lo largo menos veinte metros es igual a un medio. Asimismo, la suma de lo largo y lo ancho es de 170 metros. ¿Cuáles son las medidas del campo de fútbol?</td></tr>
<tr><td>Significado 2:</td><td>Ester se ha gastado 1/3 del dinero que le dieron de paga sus abuelos en comprar un libro de aventuras. También se ha gastado 1/9 de la paga en comprar una bolsa. ¿Qué fracción de su paga se ha gastado Ester?</td></tr>
<tr><td>Significado 3:</td><td>En una fiesta de cumpleaños hay 4 globos amarillos, 2 globos naranja, 1 azul y 5 rojos. ¿Qué fracción representa cada color?. Si se pinchan 5, nos quedan 7 globos, ¿qué fracción del total queda sin explotar?</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Además del uso de diferentes modos de expresión, tratamientos y conversiones entre los mismos:
<table>
<tr><td>Significado 1:</td><td>Es aquella expresión que tiene por lo menos una letra en el numerador o denominador.</td></tr>
<tr><td>Significado 2:</td><td>Es el cociente de dos números en donde el denominador debe ser diferente de cero, y el numerador debe ser entero.</td></tr>
<tr><td>Significado 3:</td><td>Se considera como un todo que se divide en partes iguales indicando esencialmente la relación existente entre el todo y un número designado de partes.</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Fuente: Las Autoras.

El grupo nº. 4, evidencia el cumplimiento del componente representatividad, a través del significado algebraico, geométrico y trigonométrico. Por otra parte, en la evaluación aplicada a 15 estudiantes, 11 de ellos “Aplican de manera correcta los significado algebraico, geométrico o trigonométrico, según corresponda”; mientras que los demás no justifican sus respuestas dadas.

4. EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA:

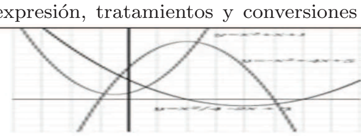
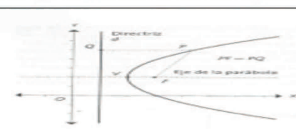
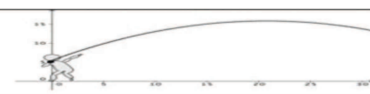
En la siguiente tabla se exponen los resultados obtenidos sobre la evaluación aplicada a nuestros compañeros de aula, cuya finalidad es demostrar si se logra la comprensión de los significados del objeto matemático Fracciones.

Problema 1: Efectuar: $$E = \frac{a-b}{(b+c-a)(b-c-a)} + \frac{b-c}{(c+a-b)(c-a-b)} + \frac{c-a}{(a+b-c)(a-b-c)}$$	Problema 2: Determine a qué significado pertenece. Justifique su respuesta.

Figura 4: Prueba aplicada por el grupo nº. 4. **Fuente:** Las Autoras.

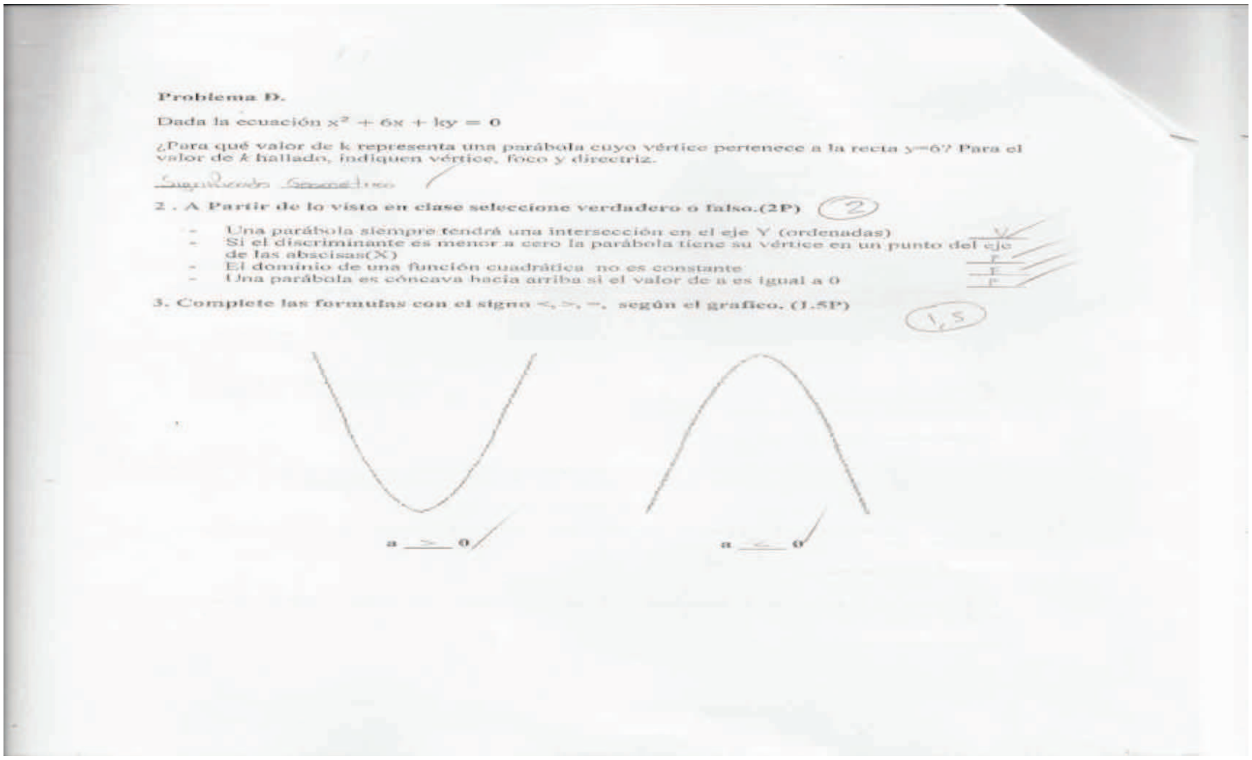
El siguiente grupo, socializa su propuesta, de la siguiente manera:

Tabla 5: Trabajo realizado por los estudiantes participantes de la propuesta. Grupo nº. 5

Objeto Matemático Abordado	Grupo nº. 5: Funciones Cuadráticas	
ANÁLISIS DE LA REPRESENTATIVIDAD Y LA ACTIVIDAD PRESENTADA	Los significados parciales, son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar, además, está contemplada en el currículo:	
	Significado 1: ALGEBRAICO	**Son funciones polinómicas de segundo grado de la forma** $f(x) = ax^2 + bx + c$
	Significado 2: GEOMETRICO	**Una parábola es una sección cónica la cual puede estar representada de la siguiente manera.** $f(x) = a(x-h)^2 + k$
	Significado 3: FISICO	**En la trayectoria seguida por objetos lanzados hacia arriba y con cierto ángulo, la parábola representa el camino de la pelota (o roca, o flecha, o lo que se haya lanzado).** $\Delta h = Vo + \frac{1}{2}gt^2$
	Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, se contempla una muestra representativa de problemas:	
	Significado 1: ALGEBRAICO	Sea la función $\boldsymbol{g}$ de ecuación $g(x) = x^2 + bx + c$. Conociendo que $\boldsymbol{g}(-1) = -6$ y $\boldsymbol{g}(2) = -12$, escribe la ecuación de la función $\boldsymbol{g}$ y grafíquela.
	Significado 2: GEOMÉTRICO	Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$
	Significado 3: FÍSICO	Una manguera de bomberos lanza el agua en un ángulo de 48 ¿Con qué velocidad debe salir el agua para que el chorro alcance una ventana situada a 18m del suelo si el bombero se encuentra a 20m de la base del edificio?
	Además del uso de diferentes modos de expresión, tratamientos y conversiones entre los mismos:	
	Significado 1: ALGEBRAICO	
	Significado 2: GEOMETRICO	
	Significado 3: FÍSICO	

Fuente: Las Autoras.

Si se analiza la actividad realizada por el grupo nº. 5, se puede apreciar que se tiene en cuenta la representatividad a través de los significados algebraico, geométrico y físico; y en la evaluación aplicada a 14 compañeros, ocho tienen un "desempeño excelente", cuatro un "desempeño normal" y solamente dos, un "desempeño bajo" (según lo indicado por los expositores).



Problema D.

Dada la ecuación $x^2 + 6x + ky = 0$

¿Para qué valor de k representa una parábola cuyo vértice pertenece a la recta y=6? Para el valor de *k* hallado, indiquen vértice, foco y directriz.

Significado Geométrico

2 . A Partir de lo visto en clase seleccione verdadero o falso.(2P) 2

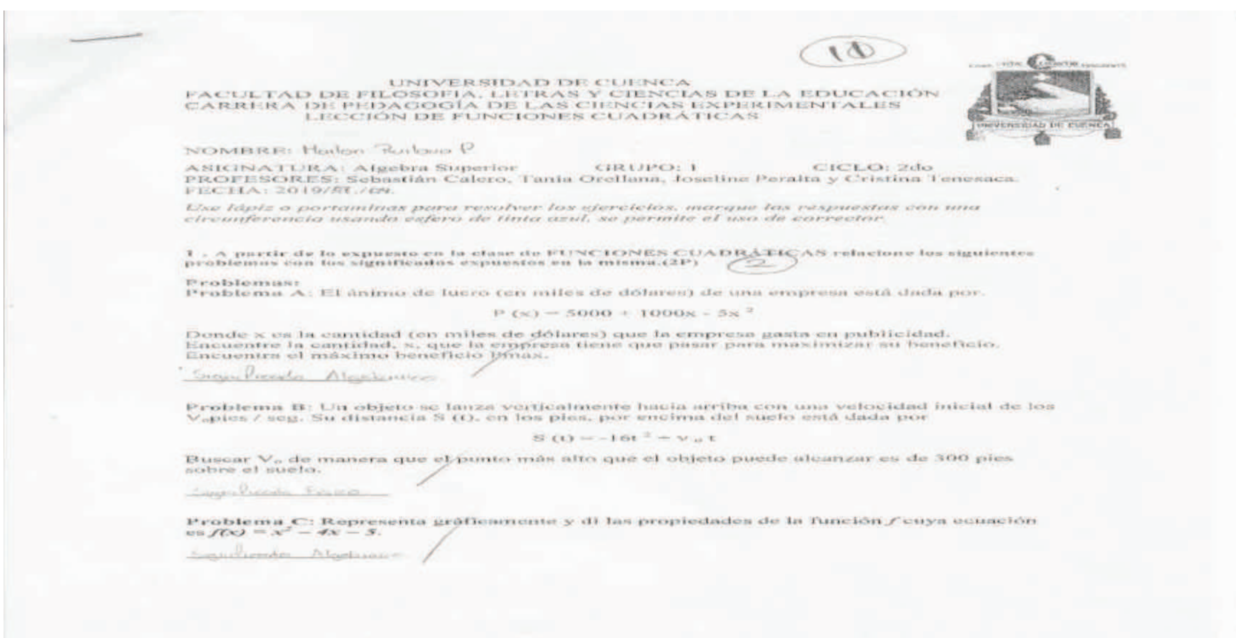
- Una parábola siempre tendrá una intersección en el eje Y (ordenadas) V
- Si el discriminante es menor a cero la parábola tiene su vértice en un punto del eje de las abscisas(X) F
- El dominio de una función cuadrática no es constante F
- Una parábola es cóncava hacia arriba si el valor de a es igual a 0 F

3. Complete las formulas con el signo <, >, =, según el grafico. (1.5P) 1,5

a > 0

a < 0

Figura 5: Prueba aplicada por el grupo nº. 5. **Fuente:** Las Autoras.



10

UNIVERSIDAD DE CUENCA
FACULTAD DE FILOSOFIA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES
LECCIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

NOMBRE: [illegible]

ASIGNATURA: Algebra Superior GRUPO: 1 CICLO: 2do
PROFESORES: Sebastián Calero, Tania Orellana, Joseline Peralta y Cristina Tenesaca.
FECHA: 2019/[illegible]

Use lápiz o portaminas para resolver los ejercicios, marque las respuestas con una circunferencia usando esfero de tinta azul, se permite el uso de corrector.

1 . A partir de lo expuesto en la clase de FUNCIONES CUADRÁTICAS relacione los siguientes problemas con los significados expuestos en la misma.(2P) 2

Problemas:

Problema A: El ánimo de lucro (en miles de dólares) de una empresa está dada por.

$$P(x) = 5000 + 1000x - 5x^2$$

Donde x es la cantidad (en miles de dólares) que la empresa gasta en publicidad. Encuentre la cantidad, x, que la empresa tiene que pasar para maximizar su beneficio. Encuentra el máximo beneficio Pmax.

Significado Algebraico

Problema B: Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de los V_0 pies / seg. Su distancia S (t), en los pies, por encima del suelo está dada por

$$S(t) = -16t^2 - v_0 t$$

Buscar V_0 de manera que el punto más alto que el objeto puede alcanzar es de 300 pies sobre el suelo.

Significado Físico

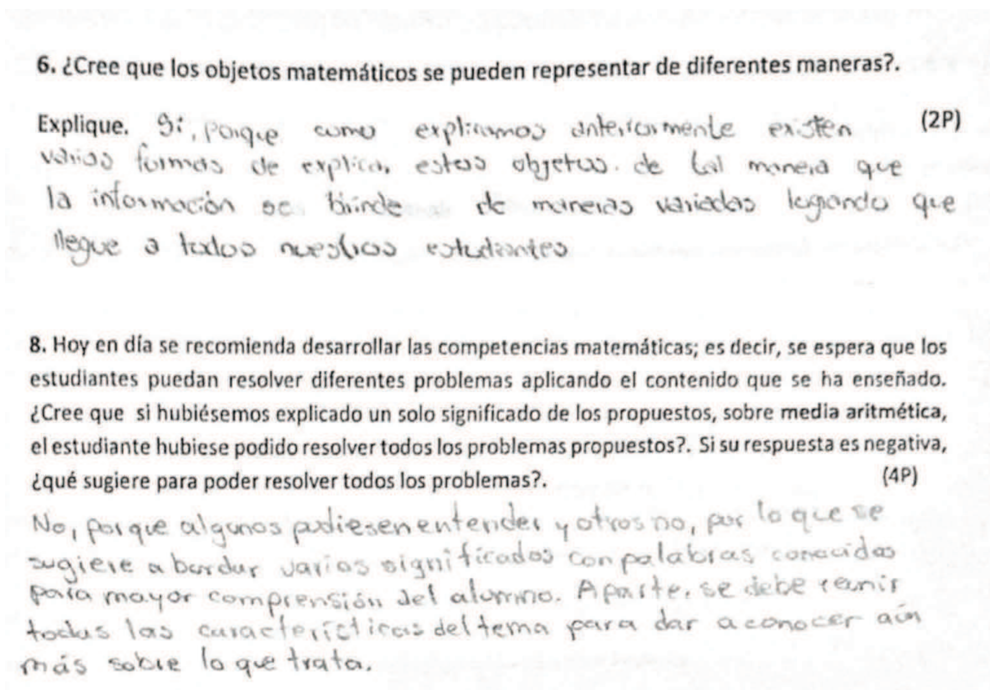
Problema C: Representa gráficamente y di las propiedades de la función *f* cuya ecuación es $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

Significado Algebraico

Figura 5: Prueba aplicada por el grupo nº. 5.... *continuación* Fuente: las autoras.

Discusión de Resultados

De los 19 estudiantes que iniciaron esta actividad, la mayoría estuvo de acuerdo en que a los objetos matemáticos se les puede abordar desde sus diferentes significados, como se observa en la figura 6:



6. ¿Cree que los objetos matemáticos se pueden representar de diferentes maneras?.

Explique. Si, Porque como explicamos anteriormente existen varias formas de explicar estos objetos. de tal manera que la información se brinde de maneras variadas logrando que llegue a todos nuestros estudiantes (2P)

8. Hoy en día se recomienda desarrollar las competencias matemáticas; es decir, se espera que los estudiantes puedan resolver diferentes problemas aplicando el contenido que se ha enseñado. ¿Cree que si hubiésemos explicado un solo significado de los propuestos, sobre media aritmética, el estudiante hubiese podido resolver todos los problemas propuestos?. Si su respuesta es negativa, ¿qué sugiere para poder resolver todos los problemas?. (4P)

No, porque algunos pudiesen entender y otros no, por lo que se sugiere abordar varios significados con palabras conocidas para mayor comprensión del alumno. Aparte, se debe reunir todas las características del tema para dar a conocer aún más sobre lo que trata.

Figura 6: Respuestas de un estudiante. Fuente: las autoras.

Una vez concluidas y socializadas estas propuestas de pluri significación de los objetos matemáticos y sus evaluaciones correspondientes, se presenta, a través de las *conclusiones y recomendaciones* de cada uno de los grupos, la percepción de estos futuros docentes:

Tabla 7: Conclusiones y recomendaciones emitidas por los estudiantes participantes de la propuesta

GRUPOS DE TRABAJO	Conclusiones y Recomendaciones
Grupo nº. 1	Los resultados de este trabajo han sido fructíferos puesto que un solo tema se puede desglosar en otras más pequeños, pero no menos importantes, es decir, el tema se relaciona con más ramas de la matemática lo cual puede ser beneficioso para relacionarlo y que los estudiantes integren los significados. Es una propuesta muy buena ya que los estudiantes conocen más que un solo significado y trabajar a su modo, de modo que se puede llegar a un mismo resultado sin haber aplicado el mismo proceso, recomendaría seguir trabajando con este tipo de propuestas ya que los resultados son buenos.

Tabla 7: Conclusiones y recomendaciones emitidas por los estudiantes participantes de la propuesta... *continuación*

GRUPOS DE TRABAJO	Conclusiones y Recomendaciones
Grupo n^o. 2	Al observar y analizar los resultados del trabajo, se concluye que la aplicación de esta metodología dentro del aula de clase, ha resultado exitosa, ya que la mayoría de nuestros compañeros obtuvieron "correcto" en la mayoría de los problemas planteados. Se puede afirmar que, para lograr un aprendizaje significativo con logros de aprendizaje exitosos, es necesario dar a conocer varios significados de los objetos matemáticos, ya que cada estudiante tiene un estilo de aprendizaje y asimilación propia. Al concluir la evaluación a nuestros compañeros está claro que cada uno adoptó el mejor significado de acuerdo al contexto del problema, para facilitar la resolución de las mismas. En nuestra opinión, creemos que el uso de material didáctico para la explicación de los diferentes significados, sería una buena forma de lograr en los estudiantes un aprendizaje significativo. Desde nuestro punto de vista, creemos que aplicar ejercicios que ejemplifiquen cada uno de los significados de los objetos matemáticos, ayudarían a lograr resultados exitosos. Antes de finalizar, deseamos sugerir una última recomendación en base a los resultados y las conclusiones a que se llegó luego de la evaluación e investigación, por lo que podemos decir que, si los docentes aplicaran esta metodología en el aula de clase, llegarán a un aprendizaje significativo en los estudiantes, ya que cada uno escogería el significado que mejor se adapte a su comprensión o al contexto del problema, llegando a obtener excelentes resultados.
Grupo n^o. 3	Como conclusión, si podemos aplicar esta propuesta ya que el tema es uno de los más básicos dentro del álgebra y además es la base para los próximos años. De igual manera los estudiantes pueden desarrollar sus capacidades. Además, es una propuesta didáctica en la cual los estudiantes pueden interactuar con el docente y de igual manera con sus compañeros, logrando mantener un ambiente satisfactorio. Además, podemos utilizar materiales didácticos y aplicar metodologías de aprendizaje tales como el constructivista y el tecnológico al utilizar aplicaciones como GeoGebra. Aunque muchas de las veces va ha haber condiciones en las que los estudiantes aunque sepan los significados matemáticos requeridos tienden a confundir ciertas cosas como el caso de la identidades trigonométricas o factorización.
Grupo n^o. 4	Las fracciones forman y son indispensables para nuestro vivir ya sea en un trabajo laboral e instituciones educativas, para poder aplicar es necesario haber comprendido el concepto. Es importante aclarar los significados de los objetos matemáticos para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. La utilización de material didáctico es esencial para facilitar la comprensión en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además ayuda a que los docentes y futuros docentes que experimenten este modo de trabajo puedan reforzar los contenidos que ya poseen sobre fracciones y construir significativamente estrategias metodológicas que le serán de utilidad para conceptualizar la noción de fracción. En conclusión, al aplicar la prueba los resultados que obtuvimos fueron muy satisfactorios, ya que la gran mayoría sabe reconocer e interpretar los significados matemáticos, por lo que se puede decir que sí existió un aprendizaje significativo. Los estudiantes deben conocer las propiedades que se deben aplicar al resolver operaciones con fracciones. Dar a conocer los significados de los diferentes objetos matemáticos, es una estrategia que en realidad puede significar mucho en la práctica docente y facilitar el aprendizaje de los alumnos.
Grupo n^o. 5	Debido a la constante evolución de la tecnología, hoy en día existen diferentes fuentes en las cuales podemos encontrar mucha información referente al tema que necesitemos ya sea a través de páginas web o bibliotecas virtuales, las cuales son herramientas que resultan de mucha utilidad tanto para los estudiantes como para los docentes para así mantenerse en constante innovación de conocimientos. Existen diferentes maneras de enseñar un determinado tema, ya sea en el área de la matemática o la física. Los objetos matemáticos cuentan con varios significados, los cuales son de mucha ayuda para los docentes ya que pueden elegir el significado que mejor se acople a las necesidades de los estudiantes y al tema que necesite explicar dependiendo de la materia que esté impartiendo,
	para que así logre explicar de manera correcta y pueda llegar a sus estudiantes para que estos aprendan de una manera significativa y no tengan complicaciones en cursos superiores. Para corroborar que los estudiantes estén aprendiendo el docente debe aplicar ciertas evaluaciones periódicas sobre los temas que se hayan explicado con anterioridad a las cuales asigna una calificación y esta refleja el nivel de conocimiento que tiene el alumno sobre la materia. No se debe abusar de la tecnología porque esta puede resultar como una gran distracción, por tal motivo existen alumnos que la utilizan de manera excesiva, los cuales muchas de las veces no la utilizan para fines académicos. Tanto docentes como estudiantes se deben cerciorar de que las fuentes de las cuales obtienen información sean confiables, ya que existen varias fuentes en las cuales la información es falsa.

Fuente: Las Autoras.

Por lo tanto, se infiere que después de este proceso de instrucción, los participantes tuvieron la percepción de que es importante tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos a enseñar en la práctica docente, a fin de lograr aprendizajes significativos en los estudiantes de Educación General Básica y el Bachillerato. También manifiestan que los diferentes significados se deben ir presentando de forma gradual.

Se destaca en las respuestas, que los participantes presentaron diferentes significados de los objetos matemáticos, tanto intra, como extra matemáticos, tal es el caso del grupo nº. 5 que consideró los significados dentro de la Física que también corresponde a su formación profesional (Docencia en Matemáticas y Física); lo cual se puede considerar una evidencia de su capacidad para trabajar, no solo en contextos intra matemáticos, sino también en contextos extra matemáticos, es decir, como conexión que se puede dar entre las matemáticas y el mundo real (Font, et al, 2017).

Conclusiones e Implicaciones

En diferentes procesos de formación de profesores de Matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina, se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad indagar el uso del constructo criterios de idoneidad didáctica como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica, con el objetivo de desarrollar en los profesores la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción. Estas investigaciones han puesto de manifiesto los siguientes aspectos: 1) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente ≪muestra representativa de la complejidad del objeto matemático≫, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros) (Breda, en prensa; Breda y Lima, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017). 2) Incorporar el componente ≪muestra representativa de la complejidad del objeto matemático≫para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

En la línea de las investigaciones acabadas de comentar, como resultado de la experiencia realizada, los estudiantes en formación docente, son conscientes de que para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es necesario tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos, entendida como las diferentes formas de comprender los significados y su aplicación en la resolución de problemas. Además, si se analiza por los participantes en esta propuesta, da la idea de que estos podrían avanzar en su reflexión y profundizar en la articulación de la complejidad asociada al objeto matemático como un paso previo y necesario para avanzar a una visión unitaria del objeto matemático (Rondero y Font, 2015).

Agradecimientos

Este trabajo recibió apoyo de los proyectos de investigación en formación de profesorado:

PGC2018-098603-B-100 (MINECO/FEDER, UE), REDICE18-2000 (ICE- UB).