



# UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Civil

Estudio de los parámetros materiales de un modelo variacional de fractura dúctil

Trabajo de titulación previo a  
la obtención del título de  
Ingeniero Civil

**Autores:**

Franklin Fabián Lucero Luna

CI: 0104576830

Alex Mauricio Macao Guzhñay

CI:0104546916

**Tutor:**

Ing. Esteban Patricio Samaniego Alvarado, M Sc. Ph. D.

CI: 010205259

**Cuenca, Ecuador**

22/04/2019

# Resumen

En el presente documento se estudian los parámetros que intervienen en el modelo variacional de fractura dúctil de [1], el cual se caracteriza por tener acoplados gradientes de plasticidad y daño en su formulación. Se enfatiza en las propiedades no clásicas del material, las cuales se utilizan para describir los fenómenos que se llevan a cabo más allá del rango elástico.

Las pruebas se realizan sobre una geometría asimétrica y entallada, con aplicación de carga monotónica vertical en uno de sus extremos. Como resultado de este estudio, se tiene una caracterización profunda de la influencia individual y en conjunto de los parámetros de plasticidad y daño, destacando un mecanismo de predicción del tipo de fractura basado en la variable de umbral de daño  $\omega_0$ , el control del ancho de la banda de acumulación de daño mediante la longitud característica de daño  $\eta_d$ . Paralelo al uso de las variables de daño, se tienen descripciones para aumentar o disminuir la plasticidad a través de sus variables plásticas, especialmente con  $\eta_p$ . Además, se incluyen gráficas donde se puede observar los diferentes comportamientos materiales que son posibles de conseguir, que van desde los frágiles hasta los dúctiles, capturando comportamientos cohesivos tipo Dugdale y Barenblatt sin la necesidad de realizar cambios en las ecuaciones constitutivas, lo que representa una ventaja importante frente a otros modelos de la literatura.

**Palabras claves:** Modelo variacional. Parámetros. Fractura. Plasticidad. Daño.

# Abstract

In this work we study the parameters of the variational ductile fracture model of [1], which is characterized for having coupled plasticity and damage gradients in its formulation. Emphasizes is on non-classical material properties, which are used to describe the phenomena taking place beyond the elastic phase. Test are executed on an asymmetric notched geometry, with vertical monotonic loading applied on one of its extremes. As result of this study, we have a deep characterization of the individual and combined effects of the plasticity and damage parameters, standing out a fracture mode predictive mechanism based on the damage threshold  $\omega_0$ , the control of the damage band width using the internal characteristic length variable  $\eta_d$ . Also, we have descriptions to increase or decrease the plasticity through plasticity parameters, especially with  $\eta_p$ . Furthermore, we include graphics of different material behaviors that can be obtained, from brittle to ductile, capturing Dugdale and Barenblatt responses without the necessity of changing the constitutive functions of the model, that represents an important advantage with respect to other models.

**Keywords:** Variational model. Parameters. Fracture. Plasticity. Damage.

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Formulación</b>	<b>15</b>
2.1. Funcional de energía . . . . .	15
2.2. Variables primarias y variables de estado . . . . .	15
2.3. Funciones Constitutivas . . . . .	17
2.4. Enfoque Variacional . . . . .	18
2.4.1. Construcción del funcional de Energía . . . . .	18
2.4.2. Ecuaciones de gobierno y leyes de evolución . . . . .	19
2.5. Suposiciones constitutivas . . . . .	20
2.6. Minimización alternada . . . . .	22
2.7. Implementación y solución numérica . . . . .	23
<b>3. Experimentos</b>	<b>24</b>
3.1. Variables de daño . . . . .	30
3.1.1. Umbral de daño $\omega_0$ . . . . .	30
3.1.2. Longitud característica de daño $\eta_d$ . . . . .	33
3.1.3. Resistencia a la fractura $G_c$ . . . . .	34
3.1.4. Variable interna de daño $l_d$ . . . . .	35
3.2. Variables de plasticidad . . . . .	36
3.2.1. Longitud interna de plasticidad $\eta_p$ . . . . .	36
3.2.2. Módulo de endurecimiento $H$ . . . . .	41
3.3. Experimento del punto de ablandamiento . . . . .	43
<b>4. Conclusiones</b>	<b>44</b>
<b>5. Referencias</b>	<b>46</b>

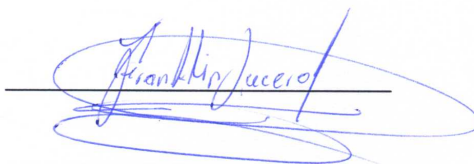
## Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

---

Franklin Fabián Lucero Luna en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Estudio de los parámetros materiales de un modelo variacional de fractura dúctil", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, abril de 2019



Franklin Fabián Lucero Luna

C.I: 0104576830

### Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

---

Alex Mauricio Macao Guzhñay en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "Estudio de los parámetros materiales de un modelo variacional de fractura dúctil", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, abril de 2019



---

Alex Mauricio Macao Guzhñay

C.I: 0104546916

### Cláusula de Propiedad Intelectual

---

Franklin Fabián Lucero Luna, autor del trabajo de titulación “Estudio de los parámetros materiales de un modelo variacional de fractura dúctil”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, abril de 2019



Franklin Fabián Lucero Luna

C.I: 0104576830

### Cláusula de Propiedad Intelectual

---

Alex Mauricio Macao Guzhñay, autor del trabajo de titulación "Estudio de los parámetros materiales de un modelo variacional de fractura dúctil", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, abril de 2019



---

Alex Mauricio Macao Guzhñay

C.I: 0104546916





# Agradecimiento

Al Dr. Esteban Samaniego, Dr. Cristobal Samaniego y al Ing. Patricio Rodríguez, quienes nos han brindado su guía y apoyo incondicional en la elaboración de este documento. A mis profesores, compañeros, amigos, familiares y de manera especial a mi madre.

Franklin Fabián Lucero Luna



# Agradecimiento

Agradezco de manera cordial al PhD. Esteban Samaniego, Dr. Cristobal Samaniego y al Ing. Patricio Rodríguez, por ser nuestros guías en la realización del trabajo de titulación. De igual manera a la Universidad de Cuenca, docentes, compañeros y personas cercanas que de una u otra manera fueron un apoyo en la culminación de mis estudios.

Alex Mauricio Macao Guzhñay

# 1. Introducción

En las últimas décadas, la habilidad de predecir de manera precisa la fractura en materiales dúctiles ha ganado importancia en varios campos industriales, principalmente debido a la constante búsqueda de diseños óptimos y componentes más ligeros. Con los avances en la tecnología y la ampliación del conocimiento de los materiales, las estructuras han sido dotadas con resistencias cada vez más cercanas a su capacidad última, sin perder seguridad en el diseño. Además, gracias a la disponibilidad de herramientas computacionales predictivas, el costo de experimentos se ha reducido sustancialmente, de manera especial en aquellos cuya ejecución es compleja, como es el caso de contenedores de combustible, fuselajes de aviones, edificios de contención nuclear, entre otros [2].

Con el objeto de producir respuestas más realistas en las simulaciones de los materiales dúctiles, se han incluido varios parámetros físicos y matemáticos en la formulación de los modelos, ya sea que estos tengan un enfoque clásico o variacional. Así, la adición de parámetros en la formulación permite mayor cantidad de mecanismos mediante los cuales se puede controlar la naturaleza del material y facilitar el tratamiento numérico del problema. Además, para dar mayor validez a la inclusión de nuevos parámetros, estos deben ser dotados de una interpretación física y no sólo numérica.

En el caso de la fractura y en el contexto de la mecánica de medios continuos, uno de los temas más estudiados es el ablandamiento, el cual se ha usado en modelos de daño para capturar la pérdida de resistencia del material. Con éste, se da lugar a la localización de deformaciones en las zonas donde se origina y posteriormente propaga la grieta [3]. Al incluir el ablandamiento se pierde la elipticidad en las ecuaciones diferenciales de gobierno y se genera una fuerte dependencia del mallado que puede producir comportamientos materiales carentes de sentido físico [4]. Esto representa un problema desafiante en la mecánica computacional [5] y una de las técnicas empleadas para abordar este problema es la descripción de la cinemática de grietas mediante discontinuidades abruptas, caracterizada por la introducción de discontinuidades en el campo de desplazamientos. Ejemplos que utilizan esta estrategia son los modelos de discontinuidad fuerte (SDA) y los modelos basados en el método extendido de elementos finitos (XFEM).

Pese a los buenos resultados obtenidos mediante discontinuidades abruptas, su incapacidad para describir de manera natural la nucleación y la necesidad de una grieta a priori representan una

desventaja importante. Además, se requiere de técnicas de rastreo del camino de la grieta para el tratamiento numérico de la propagación, que se torna complicado cuando la topología es compleja. En la formulación de estos modelos se ha introducido la longitud característica para el control de los efectos de tamaño del material, ya que mediante este parámetro se provee de información adicional a los elementos vecinos, permitiendo una mejor descripción del daño [6]. Por otra parte, se encuentran las descripciones regularizadas que han demostrado ser una alternativa competitiva [7] por su fácil implementación y capacidad de describir de manera natural respuestas complejas del material. En la formulación de estos modelos se hace uso de una variable continua de campo de fase, la cual permite una transición suave entre los estados dañado e intacto del material. En el contexto de la fractura, esta variable es representada por la cantidad escalar de daño.

Los primeros estudios sobre el tratamiento variacional de la fractura pueden atribuirse al trabajo de [8], donde se utiliza un funcional de energía similar al potencial de [9], usado en la segmentación de imágenes, para eludir la necesidad de una grieta a priori en el modelo de fractura frágil de Griffith. Luego, las dificultades numéricas del problema de discontinuidad libre de [8] son tratadas en el trabajo de [10], al considerar un funcional de energía basado en una regularización de campo de fase, donde el término de gradiente de daño es introducido. Se ha demostrado que esta regularización converge al modelo de fractura frágil de Griffith en el sentido de la convergencia  $\Gamma$  [11], y está inspirada por el trabajo de [12]. La formulación regularizada para fractura frágil puede encontrarse en [13] y [14]. Continuando con estos trabajos, [15] y [16] incorporan plasticidad perfecta en la formulación, importante para la descripción de grietas cohesivas. El modelo resultante acopla gradiente de daño a la plasticidad perfecta y se desarrolla con detalle en [17] y [18]. Además, [19] añade nuevas características al trabajo de [15] y [16] al considerar los efectos de endurecimiento y gradiente plástico, resultando en un modelo que acopla gradientes de daño y plasticidad. Sin embargo, esta formulación se limita al caso unidimensional.

Las aproximaciones variacionales de los estudios anteriormente mencionados obedecen a principios energéticos rigurosos, que se han formalizado por [20]. La formulación energética presenta algunas ventajas con respecto a la formulación clásica [21]. La ventaja más notable de la formulación energética es que las leyes de evolución de las variables de estado son obtenidas naturalmente usando cálculo variacional y tres principios físicos: 1) la condición de estabilidad, 2) el balance de energía y 3) la condición de irreversibilidad.

Otras contribuciones importantes a los modelos de fractura mediante campos de fase se encuen-

tran en los trabajos de [7] y [22], con una formulación alternativa basada en principios termodinámicos. Un aporte atractivo de estos trabajos es la definición del comportamiento anisotrópico del material, obtenido al considerar la densidad de la energía neta como una suma compuesta por una parte debida a la tracción y otra debida a la compresión. En este sentido, el daño está permitido a actuar sólo en la componente de tracción, imposibilitando la fractura debido a la compresión, similar a lo realizado en [23]. En [24] se amplía esta formulación al caso dinámico. La extensión de la fractura al caso dúctil es un tema más reciente. [2] combina el endurecimiento por plasticidad local  $J_2$  con gradiente de daño, y toma en cuenta el comportamiento anisotrópico. Asimismo, en [25] y [26], se consideran deformaciones finitas. Finalmente, [27] y [28] combinan gradiente de plasticidad con gradiente de daño en una formulación donde las grandes deformaciones también son consideradas.

La formulación de [1] está basada en los trabajos de [14] y [10], los cuales siguen un esquema riguroso para tratar la fractura frágil mediante el gradiente de daño, con la posibilidad de tener un umbral de daño. Esta opción ha sido implementada en [18], dando lugar a un modelo de fractura dúctil capaz de capturar una variedad de comportamientos macroscópicos del material gracias a la formulación propuesta. Más adelante, en [19] se considera también la variable del gradiente de plasticidad para un caso unidimensional. De esta manera, se introduce la existencia de una longitud característica de plasticidad, basándose en el trabajo de [27].

En [1], se extiende la aproximación unidimensional de [19] al caso multidimensional, tomando en cuenta el comportamiento anisotrópico del daño, con el objetivo de lograr un modelo más realista. La formulación ha sido probada en un caso bidimensional, logrando describir topologías complejas de grietas y capturar comportamientos materiales que van desde el rango frágil hasta el dúctil. Sin embargo, al incorporar las longitudes características relacionadas a los gradientes de daño y plasticidad, se tienen más mecanismos a través de los cuales es posible controlar la evolución fenomenológica del material. En este contexto, para poder alcanzar comportamientos deseados y físicamente factibles, es necesario la comprensión de los efectos de cada uno de los parámetros sobre la respuesta del modelo.

La implementación numérica de [1] permite cambiar directamente los valores de las variables: resistencia a la fractura  $G_c$ , longitud interna de daño  $l_d$  y longitud característica de plasticidad  $\eta_p$ . En [29] y [30], se define a la resistencia a la fractura como un parámetro material relacionado a la energía necesaria para ocasionar una grieta en una superficie. Por otra parte, el concepto de longitud

interna fue originalmente introducido por [10] como una construcción matemática necesaria para superar las limitaciones del modelo de Griffith. La dependencia de la respuesta mecánica ante este parámetro es aún un tema de debate [31]. En [32], [33] y [34] se relaciona la longitud interna con efectos de tamaño del espécimen; en [6], [35], [36] y [37], con la microestructura del material; y, en [38] y [39], con el espaciamiento de las bandas de corte.

En el presente trabajo se realiza un estudio de los parámetros materiales implementados en [1] y se explora la variedad de regímenes de fractura que se pueden capturar con el modelo. Para ello, se han realizado varias simulaciones con diferentes combinaciones de parámetros, poniendo especial énfasis en identificar valores para los cuales existe la transición de comportamientos frágiles a dúctiles. Los aportes de este documento se resumen en los siguientes puntos:

- Definición de regiones de transición entre diferentes comportamientos materiales basados en la selección específica de parámetros.
- Análisis de sensibilidad del modelo ante cambios en cada uno de sus parámetros.
- Dotación de sentido físico a los parámetros del modelo.
- Discusión sobre las interpretaciones planteadas, basadas en la formulación matemática del modelo.

## 2. Formulación

La construcción matemática del modelo de [1] se desarrolla en un esquema energético e independiente de la tasa de carga, construida bajo los principios matemáticos de [20]. Además, el modelo adopta la teoría de pequeñas deformaciones.

### 2.1. Funcional de energía

Basándose en el modelo de [15], [1] se utiliza un funcional de energía  $\mathcal{W}$  válido para todo el proceso de carga, el cual se descompone en un término energético  $\mathcal{E}$  y otro disipativo  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}, p, \alpha) = \mathcal{E}(\mathbf{u}, p, \alpha) + \mathcal{D}(p, \alpha), \quad (2.1)$$

Como se observa en (2.1), la formulación se desarrolla en tres campos: desplazamientos  $\mathbf{u}$ , deformación plástica equivalente  $p$  y daño  $\alpha$ . De esta manera, el modelo presenta flexibilidad para realizar cambios en sus ecuaciones constitutivas. Además, la minimización de  $\mathcal{W}$  con respecto a  $\mathbf{u}$ ,  $p$  y  $\alpha$ , conllevan al balance de momento, criterio de fluencia y criterio de daño, respectivamente.

## 2.2. Variables primarias y variables de estado

Considere un dominio bidimensional  $\Omega$  con contornos de Neumann  $\partial\Omega_\sigma$  y de Dirichlet  $\partial\Omega_u$ . Se asume que cada punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  en el tiempo  $t$  está caracterizado por las variables primarias y de estado, descritas en las Tablas 1 y 2.

Variable Primaria		Campo	Tipo
$\mathbf{u}$	Campo de desplazamientos	Vectorial	Observable
$p$	Deformación plástica equivalente	Escalar	Interna
$\alpha$	Variable de daño	Escalar	Interna

Tabla 1: Variables primarias.

Variable de Estado		Campo	Tipo
$\boldsymbol{\epsilon}$	Deformación total	Tensor de segundo orden	Observable
$\boldsymbol{\epsilon}^p$	Deformación plástica	Tensor de segundo orden	Interna
$p$	Deformación plástica equivalente	Escalar	Interna
$\alpha$	Variable de daño	Escalar	Interna
$\nabla p$	Gradiente plástico	Vectorial	Interna
$\nabla \alpha$	Gradiente de daño	Vectorial	Interna

Tabla 2: Variables de estado.

Por la hipótesis de pequeñas deformaciones, se define al tensor de deformaciones como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (2.2)$$

el cual se descompone en sus partes elástica  $\boldsymbol{\epsilon}^e$  y plástica  $\boldsymbol{\epsilon}^p$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p. \quad (2.3)$$

La deformación plástica equivalente  $p$  se define en el contexto de la plasticidad J2 en términos de:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\|. \quad (2.4)$$

La variable de daño  $\alpha \in [0, 1]$  se introduce para la descripción de la topología de la grieta mediante campos de fase:

$$\begin{cases} \alpha = 0, & \text{material intacto,} \\ \alpha = 1, & \text{material completamente dañado.} \end{cases}$$

Además,  $\alpha$  debe satisfacer la condición de irreversibilidad:

$$\dot{\alpha} \geq 0.$$

Los gradientes se introducen en la formulación con sus respectivas longitudes características para regularizar los efectos de plasticidad y daño. El modelo considera plasticidad regularizada en lugar de plasticidad local clásica, por lo que se hace uso del gradiente de plasticidad  $\nabla p$  y la longitud característica de plasticidad  $\eta_p$ . En el caso del daño,  $\nabla \alpha$  permite la formación de una grieta difusa, cuyo ancho es finito y depende de la longitud característica de daño  $\eta_d$ .

### 2.3. Funciones Constitutivas

Al igual que en los trabajos de [2], [7], [22] y [23], la densidad de energía elástica  $\Psi_0^e(\boldsymbol{\epsilon}^e)$  se expresa en términos de sus componentes volumétrica y desviadora, expresando la contribución por tracción como positiva y la de compresión como negativa:

$$\begin{aligned} \Psi_0^{e+}(\boldsymbol{\epsilon}^e) &= \frac{1}{2} K \langle \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) \rangle_+^2 + \mu (\boldsymbol{\epsilon}_{dev}^e : \boldsymbol{\epsilon}_{dev}^e), \\ \Psi_0^{e-}(\boldsymbol{\epsilon}^e) &= \frac{1}{2} K \langle \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) \rangle_-^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde la función rampa  $\langle \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) \rangle_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) \pm |\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e)|)^2$ ,  $K$  es el módulo de compresibilidad,  $\mu$  es el parámetro de Lamé y  $\boldsymbol{\epsilon}_{dev}^e$  denota la parte desviadora del tensor de deformaciones elásticas.



El daño está restringido a actuar en la componente de tracción. Consecuentemente, la degradación del material se puede representar con:

$$\Psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e, \alpha) = f(\alpha)\Psi_0^{e+}(\boldsymbol{\epsilon}^e) + \Psi_0^{e-}(\boldsymbol{\epsilon}^e), \quad (2.6)$$

donde  $f(\alpha)$  es una función decreciente de  $\alpha$ .

Usando la función escalón de Heaviside  $\mathcal{H}$ , el tensor de deformaciones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  se puede descomponer así:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha) &= \frac{\partial \Psi^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} = \boldsymbol{\sigma}_0^+ f(\alpha) + \boldsymbol{\sigma}_0^- \\ &= (K\mathcal{H}(\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e))\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e)\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}_{dev}^e)f(\alpha) + K\mathcal{H}(-\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e))\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e)\mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La disipación debida a la evolución local del daño, que incrementa hasta un valor crítico [14], se define por:

$$\omega(1) = \omega_0 < \infty.$$

El esfuerzo de fluencia plástica  $\sigma_p(\alpha)$ , la longitud característica de plasticidad  $\eta_p$  y el módulo de endurecimiento  $H$  se expresan como función del daño:

$$\sigma_p(\alpha) \text{ con } \sigma_p'(\alpha) \leq 0 \forall \alpha \in [0, 1] \text{ y } \sigma_p(1) = 0.$$

$$\eta_p(\alpha) \in [0, 1] \text{ con } \eta_p'(\alpha) \leq 0 \forall \alpha \in [0, 1].$$

$$H(\alpha) \text{ con } H'(\alpha) \leq 0 \forall \alpha \in [0, 1] \text{ y } H(1) = 0.$$

En la Tabla 3 se resumen las funciones constitutivas consideradas para el modelo.

Funciones constitutivas		Propiedades		
$f(\alpha)$	Degradación de la energía elástica	$f(\alpha) < 0$	$f(1) = 0$	
$\sigma_p(\alpha)$	Degradación del esfuerzo de fluencia plástica	$\sigma_p(\alpha) > 0$	$\sigma_p'(\alpha) < 0$	$\sigma_p(1) = 0$
$\omega(\alpha)$	Disipación local del daño	$\omega(0) = 0$	$\omega'(\alpha) > 0$	$\omega(1) < \infty$
$H(\alpha)$	Degradación del módulo de endurecimiento	$H(\alpha) > 0$	$H'(\alpha) < 0$	$H(1) = 0$
$\eta_p(\alpha)$	Degradación de la longitud interna de plasticidad	$\eta_p(\alpha) \in [0, 1]$	$\eta_p'(\alpha) \leq 0$	$\eta_p(1) = 0$

Tabla 3: Funciones constitutivas.

## 2.4. Enfoque Variacional

### 2.4.1. Construcción del funcional de Energía

La energía global acumulada  $\mathcal{E}$  del funcional (2.1) se define como:

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \Psi d\Omega \quad (2.8)$$

donde la energía libre  $\Psi$  se define como la composición de la densidad de energía elástica  $\Psi^e$  y plástica  $\Psi^p$ :

$$\Psi^p(p, \alpha) = \frac{1}{2} H(\alpha) p^2. \quad (2.9)$$

Utilizando las expresiones (2.5) y (2.9), se puede obtener la energía global acumulada en términos de:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{\Omega} (\Psi^e(\epsilon^e) + \Psi^p(p, \alpha)) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \epsilon^e : \sigma(\epsilon^e, \alpha) + \frac{1}{2} H(\alpha) p^2 \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.10)$$

El término disipativo  $\mathcal{D}$  se construye a partir del potencial de disipación total  $\Phi$ , el cual refleja la naturaleza disipativa de las variables de plasticidad y daño [18]. El potencial de disipación se puede expresar como la suma de su componente por plasticidad  $\Phi_p$  y daño  $\Phi_d$ :

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \Phi_p + \Phi_d, \\
 \Phi_p &= (\sigma_p(\alpha)) \dot{p} + \partial_t \left( \frac{1}{2} \eta_p(\alpha)^2 \nabla p \cdot \nabla p \right), \\
 \Phi_d &= \omega'(\alpha) \dot{\alpha} + p \sigma_p'(\alpha) \dot{\alpha} + \partial_t \left( \frac{1}{2} \eta_d \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Asumiendo una evolución suavizada de (2.11), el trabajo disipado  $\mathcal{D}$  es:

$$\mathcal{D} = \int_{\Omega} \left( \sigma_p(\alpha) p + \frac{1}{2} \eta_p(\alpha)^2 \nabla p \cdot \nabla p \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \omega(\alpha) + \frac{1}{2} \eta_d^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) d\Omega. \tag{2.12}$$

Las fuerzas externas no son consideradas y los desplazamientos son impuestos en  $\partial\Omega_u$  [1]. Así, el funcional de energía total se define con (2.10) y (2.12) como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(\mathbf{u}, p, \alpha) &= \mathcal{E}(\mathbf{u}, p, \alpha) + \mathcal{D}(p, \alpha) = \int_{\Omega} \left( \Psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}^p(p)), \alpha) + \frac{1}{2} H(\alpha) p^2 \right) d\Omega + \\
 &\int_{\Omega} \left( \sigma_p(\alpha) p + \frac{1}{2} \eta_p(\alpha)^2 \nabla p \cdot \nabla p \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \omega(\alpha) + \frac{1}{2} \eta_d^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

#### 2.4.2. Ecuaciones de gobierno y leyes de evolución

De acuerdo a la formulación energética, la evolución de un sistema independiente de la tasa de carga está gobernada por tres principios: la condición de estabilidad, el balance de energía y condiciones de irreversibilidad [40].

**Condición de Irreversibilidad** La irreversibilidad se impone en la variable de daño para evitar una posible regeneración del material:

$$\dot{\alpha} \geq 0, \tag{2.14}$$

así, el valor del daño de un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  en el paso de carga actual  $n$  es mayor o igual al daño correspondiente al paso de carga  $n - 1$ .

**Condición de Estabilidad** Tomando diferenciales del funcional de energía total (2.13), y usando la descomposición del tensor de deformaciones totales (2.3), se encuentran:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \alpha) : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega = 0, \quad (2.15)$$

$$f_p(\mathbf{u}, p, \alpha) = \|\mathbf{s}(\alpha)\| - \sigma_p(\alpha) - H(\alpha)p + \eta_p(\alpha)^2 \nabla \cdot \nabla p \leq 0, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} f_d(\mathbf{u}, p, \alpha) = & -\frac{1}{2} f'(\alpha) \boldsymbol{\sigma}_0^+ : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) - \sigma'_p(\alpha) p - \frac{1}{2} H'(\alpha) p^2 \\ & - \omega'(\alpha) - \eta_p(\alpha) \eta'_p(\alpha) \nabla p \cdot \nabla p + \eta_d^2 \nabla \cdot \nabla \alpha \leq 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

que son la forma débil de la ecuación de equilibrio en ausencia de cargas externas, el criterio de fluencia plástica y el criterio de fluencia debida al daño, respectivamente.  $\|\mathbf{s}(\alpha)\|$  es la parte desviadora del tensor de deformaciones en el marco de la platiidad  $J_2$ .

**Balance de Energía** A medida que las variables de estado evolucionan, su energía debe permanecer constante. Con procedimientos análogos a los realizados en la condición de estabilidad, se obtienen las condiciones de consistencia para los criterios de fluencia plástica y de daño:

$$f_p(\mathbf{u}, p, \alpha) \dot{p} = 0, \quad (2.18)$$

$$f_d(\mathbf{u}, p, \alpha) \dot{\alpha} = 0. \quad (2.19)$$

## 2.5. Suposiciones constitutivas

En esta sección se presenta la forma de las funciones de la Tabla 3. Una comparación entre modelos que emplean diferentes formas de las funciones constitutivas se puede encontrar en [40]. La finalidad de las suposiciones constitutivas es describir la degradación del material a través de una ley de evolución, la cual tiene consecuencias energéticas.

La disipación local de daño  $\omega(\alpha)$ , se define con la forma para modelos con fase elástica de [14]:

$$\omega(\alpha) = \omega_0 \alpha, \quad (2.20)$$

donde la disipación crítica de daño  $\omega_0$  se relaciona con la resistencia a la fractura  $G_c$  y la longitud interna de daño del material  $l_d$ :

$$\omega_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{G_c}{l_d}. \quad (2.21)$$

La longitud característica de daño  $\eta_d$  se define como:

$$\eta_d = l_d \sqrt{\omega_0} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{8} G_c l_d}. \quad (2.22)$$

La degradación de energía elástica se define con una función dependiente de la variable de daño, la cual ha sido utilizada en una variedad de trabajos presentes en la literatura [40]:

$$f(\alpha) = (1 - \alpha)^2. \quad (2.23)$$

Al igual que en los trabajos de [15], [16], [17], [18], [19] y [27], el esfuerzo de fluencia plástica inicial  $\sigma_{p0}$  varía como función del daño, lo que permite el acople entre plasticidad y daño:

$$\sigma_p(\alpha) = \sigma_{p0}(1 - \alpha)^2. \quad (2.24)$$

El módulo de endurecimiento inicial  $H_0$  adopta una ley de degradación dependiente del daño, similar a [19] y [27]:

$$H_0(1 - \alpha)^2. \quad (2.25)$$

Finalmente, la longitud característica de plasticidad inicial  $\eta_{p0}$  decrece con el daño:

$$\eta_p(\alpha) = \eta_{p0}(1 - \alpha), \quad (2.26)$$

la cual es una forma de degradación análoga a la descrita en [27] para el gradiente de plasticidad.

## 2.6. Minimización alternada

A pesar de que la energía global (2.13) no es convexa, sí lo es con respecto a  $\mathbf{u}$ ,  $p$  y  $\alpha$  de manera individual [15]. Partiendo de estos principios, se puede emplear un algoritmo de minimización alternada [1].

La minimización de la energía global (2.13) con respecto a cada uno de sus campos se presenta en los siguientes puntos.

- Minimización con respecto al campo de desplazamientos:

$$\left. \frac{d}{dh} \mathcal{W}(\mathbf{u} + h\tilde{\mathbf{u}}, p, \alpha) \right|_{h=0} = \int_{\Omega} ((1 - \alpha)^2 \boldsymbol{\sigma}_0^+ + \boldsymbol{\sigma}_0^-) : \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega = 0. \quad (2.27)$$

- Minimización con respecto al estrés plástico equivalente:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dh} \mathcal{W}(\mathbf{u}, p + h\tilde{p}, \alpha) \right|_{h=0} &= \int_{\Omega} [((1 - \alpha)^2 \boldsymbol{\sigma}_0^+ + \boldsymbol{\sigma}_0^-) : \hat{\mathbf{n}}\tilde{p} \\ &+ (1 - \alpha)^2 ((-\sigma_{p_0} - H_0 p) \tilde{p} - \eta_{p_0}^2 \nabla p \cdot \nabla \tilde{p})] d\Omega. \end{aligned} \quad (2.28)$$

El esquema general utilizado en la minimización alternada se basa en la existencia de una energía total, la cual es representativa de la evolución del material. Sin embargo, el tratamiento numérico de (2.28) requiere un esquema incremental del tiempo. Por lo cual, se considera la evolución del estado del sólido en el pseudotiempo discreto  $[t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, T]$  para un proceso llevado a cabo en el tiempo  $[0, T]$ . Al asumir que se conocen todas las variables en el tiempo  $t_n$ , y que el paso de tiempo actual es  $t_{n+1}$ , la variación del tensor de tensión plástica se puede expresar como:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{p} \hat{\mathbf{n}} d\tau. \quad (2.29)$$

Si  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  es lo suficientemente pequeño, se puede considerar  $\hat{\mathbf{n}}$  constante en ese intervalo, permitiendo que:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \Delta p \hat{\mathbf{n}}_{t_{n+1}}, \quad (2.30)$$

donde  $\Delta p = p_{t_{n+1}} - p_{t_n}$  es el incremental de la tensión plástica equivalente. Usando (2.28) y (2.30), y empleando el algoritmo de mapeo radial en plasticidad local J2, se puede demostrar que:

$$\int_{\Omega} (1 - \alpha)^2 [(\|\mathbf{s}_0^{tr}\| - \Delta p \|\mathbf{C}_0 : \hat{\mathbf{n}}\| - \sigma_{p_0} - H_0 p) \tilde{p} - \eta_{p_0}^2 \nabla p \cdot \nabla \tilde{p}] d\Omega = 0. \quad (2.31)$$

Además, debido a las características desviadoras del tensor unitario  $\hat{\mathbf{n}}$ , se tiene que:

$$\mathbf{C}_0 : \hat{\mathbf{n}} = 2\mu \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.32)$$

Reemplazando (2.32) en (2.31), definiendo  $\Delta p = p - p_{t_n}$  (el subíndice  $t_{n+1}$  del pseudo tiempo actual es omitido) y debido a que  $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$ :

$$\int_{\Omega} (1 - \alpha)^2 [(\|\mathbf{s}_0^{tr}\| - 2\mu p + 2\mu p_{t_n} - \sigma_{p_0} - H_0 p) \tilde{p} - \eta_{p_0}^2 \nabla p \cdot \nabla \tilde{p}] d\Omega = 0. \quad (2.33)$$

- Minimización con respecto al campo de daño:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \mathcal{W}(\mathbf{u}, p, \alpha + h\tilde{\alpha}) \Big|_{h=0} &= \int_{\Omega} [(1 - \alpha) ((\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) : \boldsymbol{\sigma}_0^+ + H_0 p^2 + 2\sigma_{p_0} p \\ &+ \eta_{p_0} \nabla p \cdot \nabla p) \tilde{\alpha} - \omega_o \tilde{\alpha} - \eta_d^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \tilde{\alpha}] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

## 2.7. Implementación y solución numérica

Los detalles de la solución numérica se encuentran en [1]. El procedimiento implementado se puede resumir de la siguiente manera: (2.27), (2.33) y (2.34) se llevan a su forma discreta mediante la proyección sobre elementos finitos. Lo que sigue es la solución a la formulación alternativa. En primer lugar, la ecuación de equilibrio estático establece el estado elástico en todo el dominio. Luego, el estado plástico se calcula usando los desplazamientos actualizados. Finalmente, el campo de daño es obtenido usando las nuevas tensiones debidas al desplazamiento y plasticidad. Este proceso se repite de manera iterativa para aproximar los tres campos primarios en un pseudo tiempo dado. Las versiones discretas son resueltas para el siguiente pseudo tiempo, dando paso a un esquema incremental en el tiempo. Una característica importante de la implementación, es la capacidad de manejar por separado la longitud característica de plasticidad inicial y la longitud característica de daño. De esta manera se puede manipular el ancho de las bandas de localización de tensiones, lo que se puede relacionar con el grado de ductilidad en el proceso de fractura. En este aspecto, la formulación presentada sigue los fundamentos de [28] en el hecho de que las regiones de daño se propagan dentro de las zonas plastificadas, en contraste a las formulaciones que emplean plasticidad local, como las presentadas en [2] y [18].

## 3. Experimentos

En esta sección se investiga, a través de una variedad de ejemplos, la capacidad de [1] para capturar distintos comportamientos materiales. Los procesos de fractura se analizan a través de la curva fuerza - desplazamiento y la evolución de sus campos de daño, plasticidad y deformaciones. Los experimentos se llevan a cabo en una configuración bidimensional, asimétrica y entallada, con una malla compuesta por 3222 elementos bidimensionales tipo cuadrilátero. Se aplica carga uniaxial en el borde superior, mientras que el borde inferior se encuentra empotrado, como se muestra en la Figura 1.

Para una mejor comprensión de los efectos de los parámetros sobre la respuesta del modelo se ha dividido el estudio en experimentos de daño y de plasticidad. Primero, se varían los parámetros de daño que intervienen de manera directa en la formulación:  $\omega_0$  y  $\eta_d$ . Estos últimos son la combinación de los parámetros  $G_c$  y  $l_d$ , los cuales también se estudian de manera individual. Después, se experimenta con los parámetros de plasticidad  $\eta_p$  y  $H$ . Luego de presentar los resultados de cada uno de los parámetros se encuentra una breve descripción de los efectos producidos sobre la curva fuerza - desplazamiento en la evolución de los campos de daño, plasticidad y deformada. Además, los resultados obtenidos han sido verificados para diferentes combinaciones de parámetros, por lo que se garantiza de que el efecto es el mismo sin importar el tipo de material que se esté estudiando.

En las Figuras 2 - 5 se resumen los comportamientos materiales que se obtuvieron con los cambios en los parámetros estudiados, lo que muestra la capacidad del modelo de capturar fracturas frágiles y diferentes formas de evolución de las dúctiles sin la necesidad de modificar sus ecuaciones constitutivas. En estas figuras, también es de notar que la topología de las grietas obedece al patrón dibujado por las zonas plastificadas, como se explica en [19]. En la Figura 2, se obtiene el caso de fractura frágil, por lo cual la aparición de la grieta es repentina y sin la formación de zonas plastificadas. La Figura 3 muestra un comportamiento frágil elasto - plástico, donde la falla es repentina y ocurre inmediatamente después de alcanzarse el límite de fluencia del material. La zona de plastificación de este ejemplo se caracteriza por tener una banda a  $45^\circ$  aproximadamente y dos bandas cuasi horizontales. Esta distribución dispersa de la plasticidad es lo que provoca el patrón de la grieta observado. Por último, en las Figuras 4 y 5 se ven comportamientos dúctiles tipo Dugdale y Barenblatt, respectivamente. Estos últimos se explican con detalle en la sección de Variables de Daño.

Como se puede observar en las Figuras 2 - 5, la forma en la que se concentra la deformación plástica establece un camino preferencial para la grieta. Debido a esto, en las secciones donde se estudian tanto las variables de plasticidad como las variables de daño, se muestra solamente la respuesta cualitativa de daño.



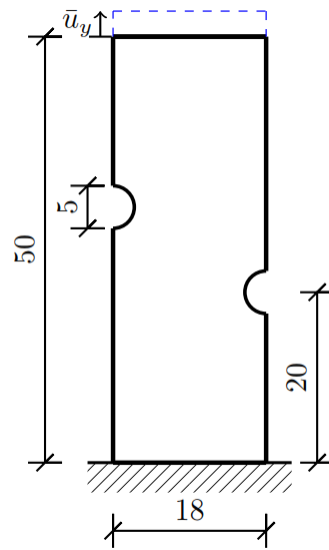


Figura 1: Geometría del espécimen asimétrico; las dimensiones en milímetros. La parte inferior de la placa se encuentra empotrada; la carga monotónica de tracción es aplicada desde el extremo superior en la dirección de  $u_y$ .

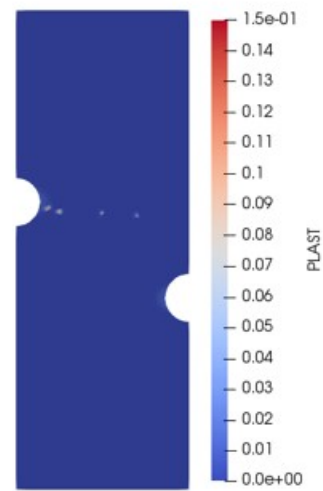
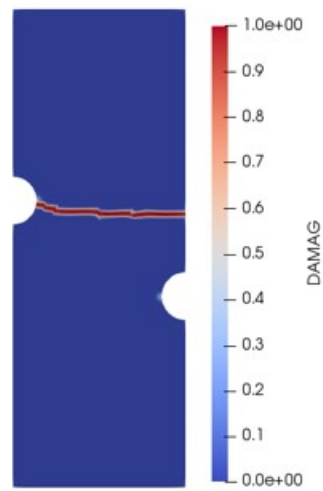
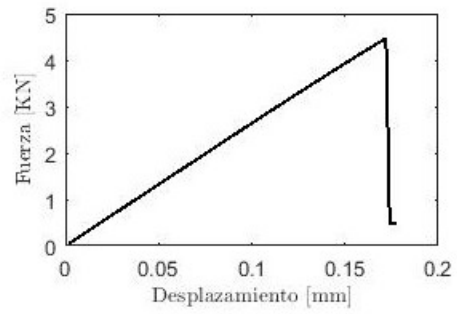


Figura 2: Comportamiento material frágil.

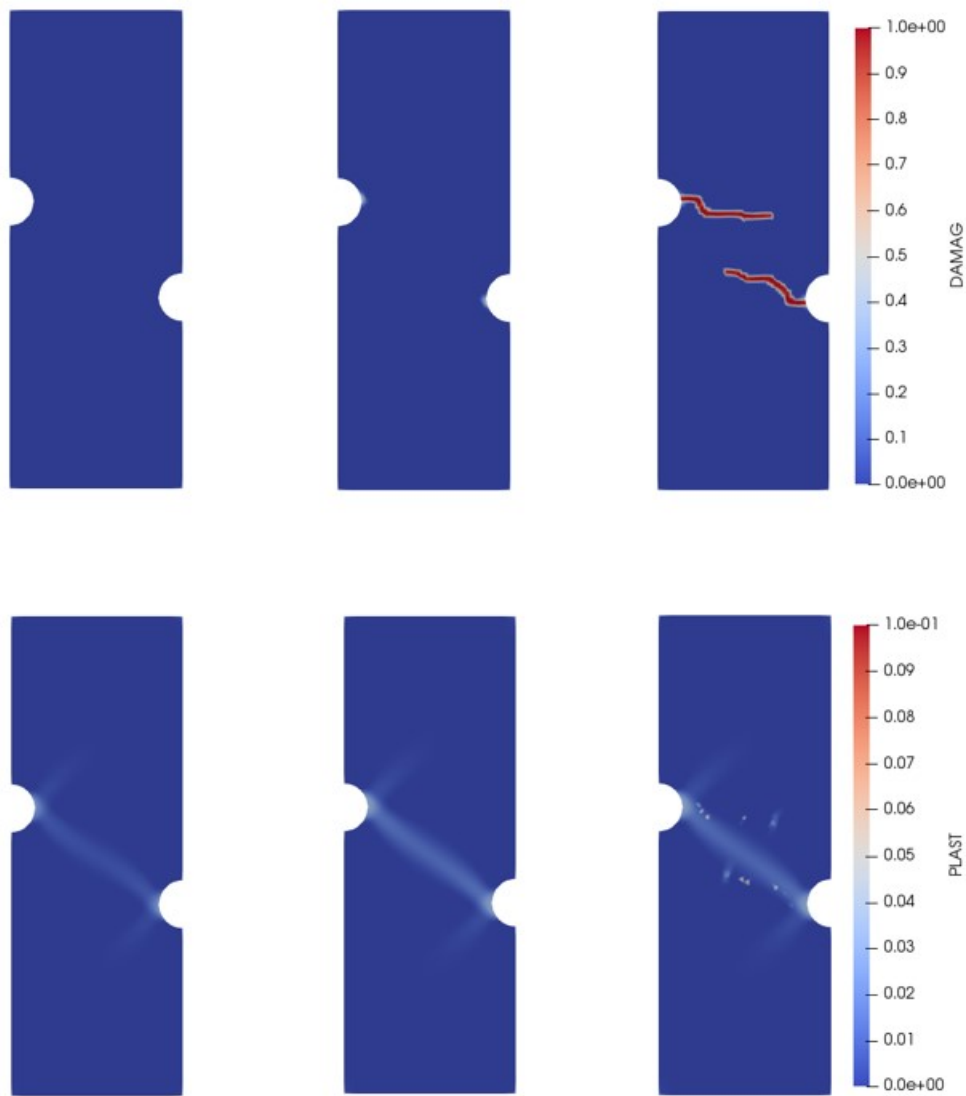
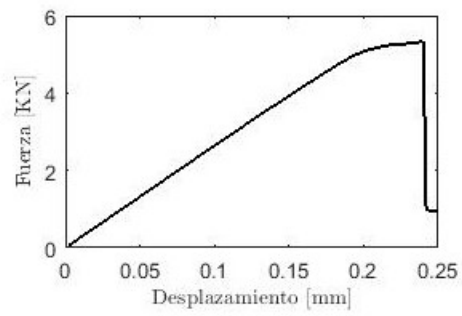


Figura 3: Comportamiento material frágil elasto - plástico.

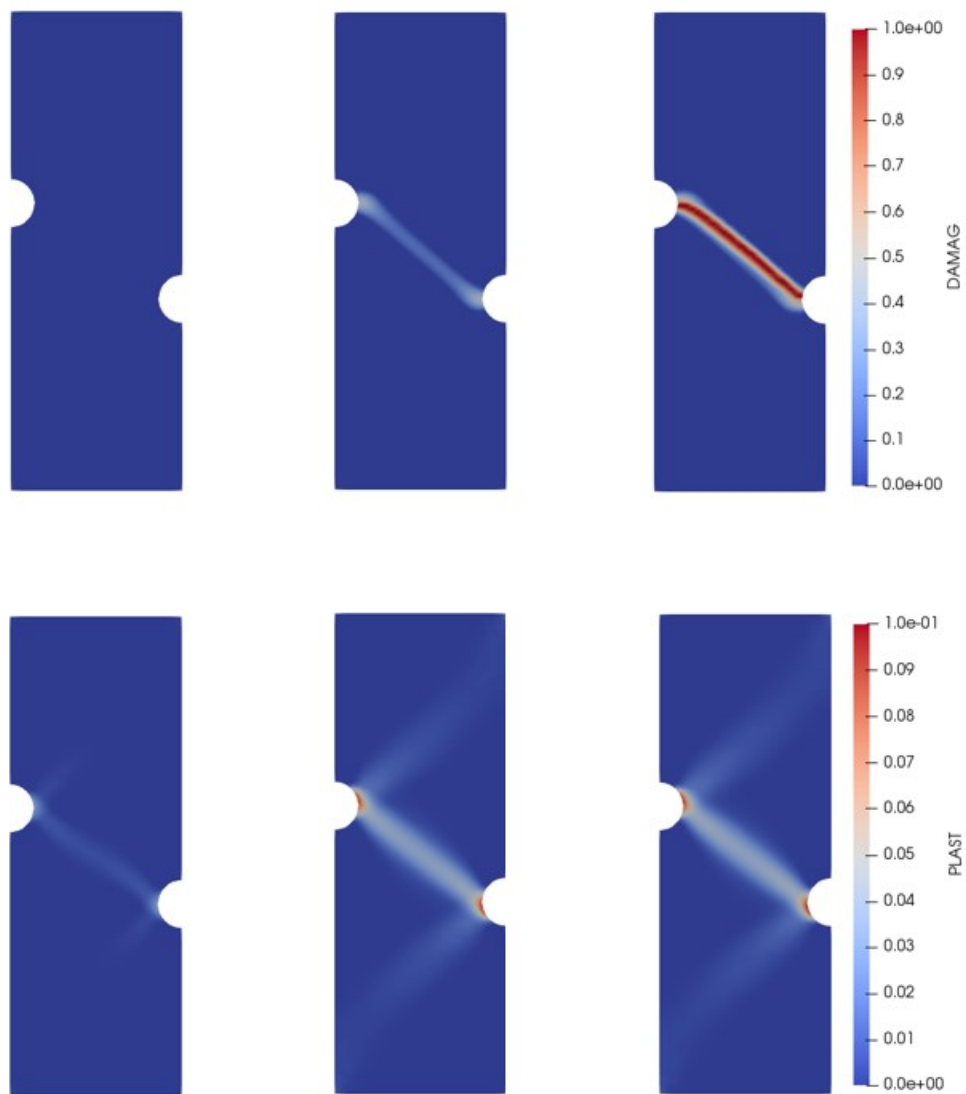
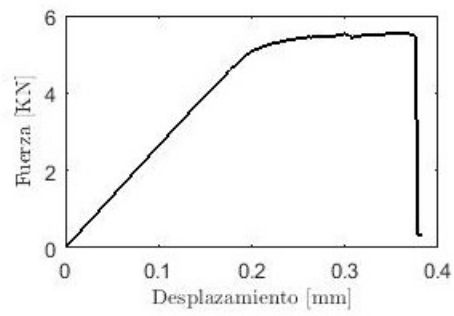


Figura 4: Comportamiento material dúctil tipo Dugdale.

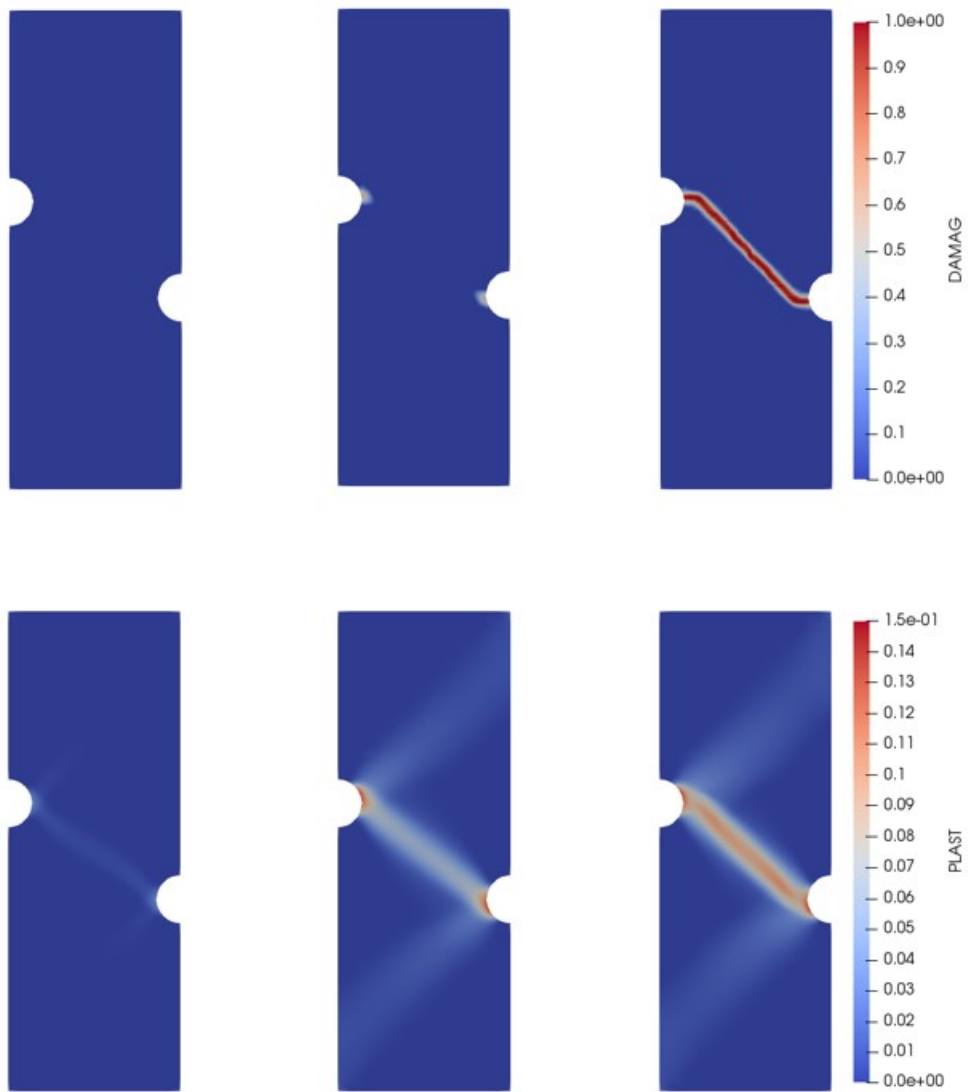
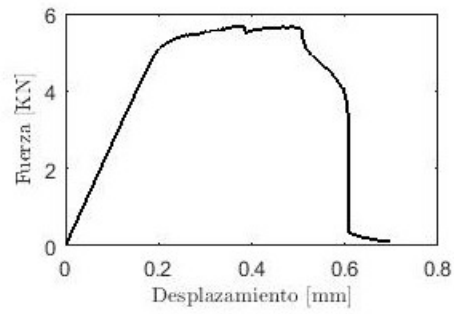


Figura 5: Comportamiento material dúctil tipo Barenblatt.

### 3.1. Variables de daño

Según (2.13), los parámetros relacionados al daño son el umbral y la longitud característica de daño. Ambos, son a su vez dependientes de  $G_c$  y  $l_d$ , como se puede apreciar en las ecuaciones (2.21) y (2.22). Para tener una visión general de las capacidades del modelo, se realizan simulaciones utilizando los parámetros presentados en la Tabla 4.

#### 3.1.1. Umbral de daño $\omega_0$

A partir del material de la Tabla 4, se varió  $l_d$  en el rango de 0.001 mm hasta 2 mm. Lo interesante de este experimento es que al comparar el parámetro  $\omega_0$  con la energía disipada en el proceso de fractura, es posible identificar zonas de transición entre diferentes comportamientos materiales, como se observa en la Figura 6. En primer lugar, y para valores bajos de  $\omega_0$ , existe una región en la cual las curvas fuerza - desplazamiento se asemejan por el hecho de tener deformaciones plásticas, pero el ablandamiento en cada caso es diferente (Véase A y B en la Figura 6). En A, se observa una elevada tasa de descarga de la curva fuerza - desplazamiento y la aparición repentina de la grieta, con evolución E-P-D; mientras que en B, el ablandamiento es más paulatino, al igual que la formación de la grieta, sugiriendo una evolución E-P-PD (E: elástica, P: plástica, D: daño, PD: acoplados). Además, la manera en que se acumula el daño también varía, teniendo diferentes anchos de banda de daño para cada caso. De acuerdo con el análisis unidimensional presentado en [18], A y B corresponderían a fracturas cohesivas del tipo Dugdale y Barenblatt, respectivamente. En [18] se realizan cambios en las ecuaciones constitutivas del modelo para alcanzar esta transición, contrario al modelo de [1], donde se pueden obtener estos comportamientos macroscópicos con cambios en los parámetros, pero no en las ecuaciones constitutivas. Por otra parte, para valores de  $\omega_0$  alrededor de 1000 [MPa mm], existe una transición entre fracturas dúctiles y comportamientos que no exhiben daño, pero cuya curva fuerza - desplazamiento revela ablandamiento (Véase C y D en la Figura 6). Esto se debe a que las grandes deformaciones que existen en estos casos generan fenómenos geométricos que afectan a la curva fuerza - desplazamiento. Como se mencionó en la Formulación, el modelo está desarrollado con la hipótesis de pequeñas deformaciones, por lo que esta región se interpreta como el límite de aplicabilidad del modelo.

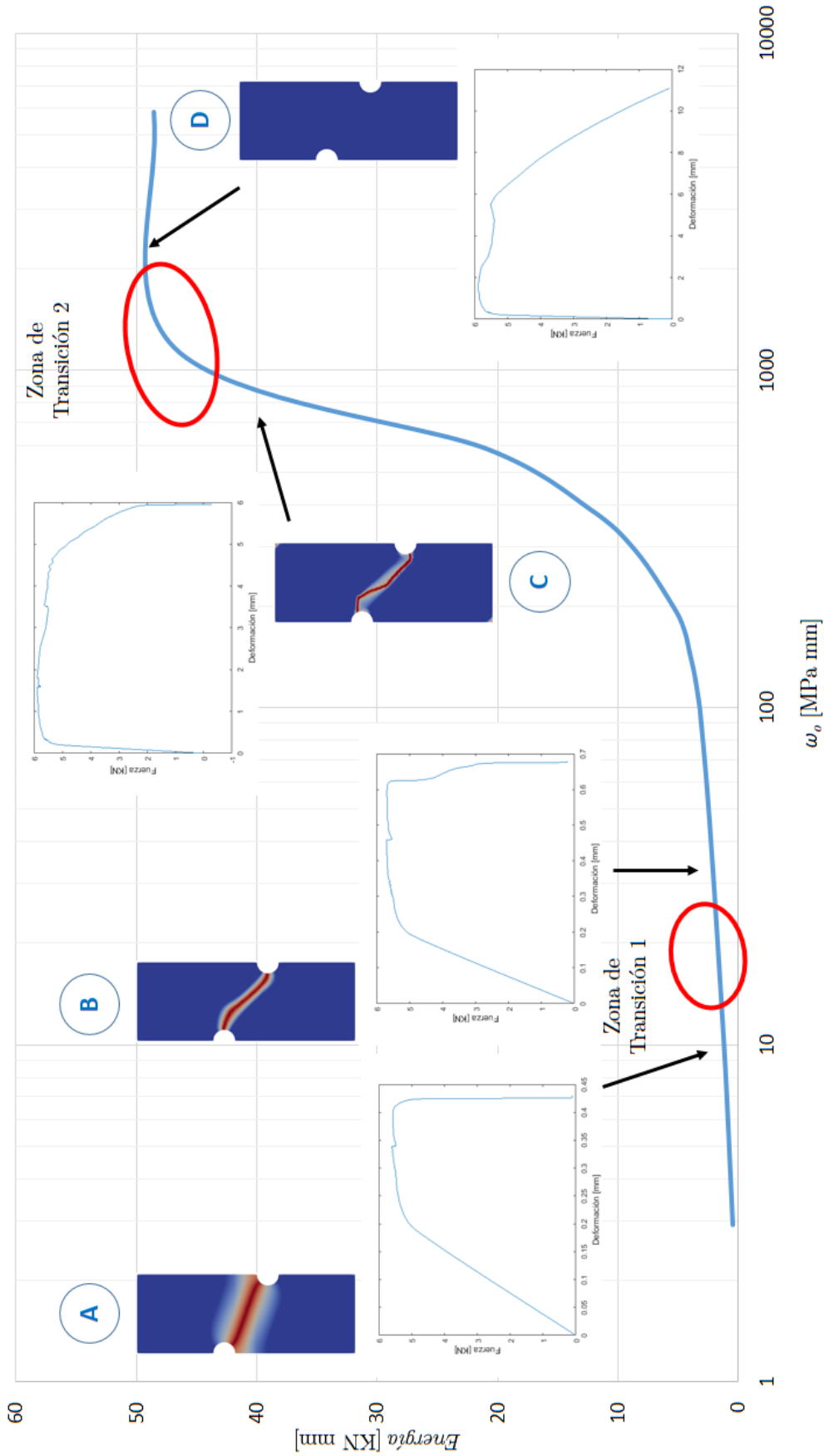


Figura 6: Curva de  $\omega_0$  contra *Energía*, obtenida a partir de los parámetros de la Tabla 4 y variando  $l_d$ . A, B, C y D corresponden a los comportamientos materiales de Dugdale, Barenblatt, dúctil con daño y dúctil sin daño, con su respectiva curva fuerza - desplazamiento y grieta al final del proceso de carga. En círculos rojos, las zonas de transición.

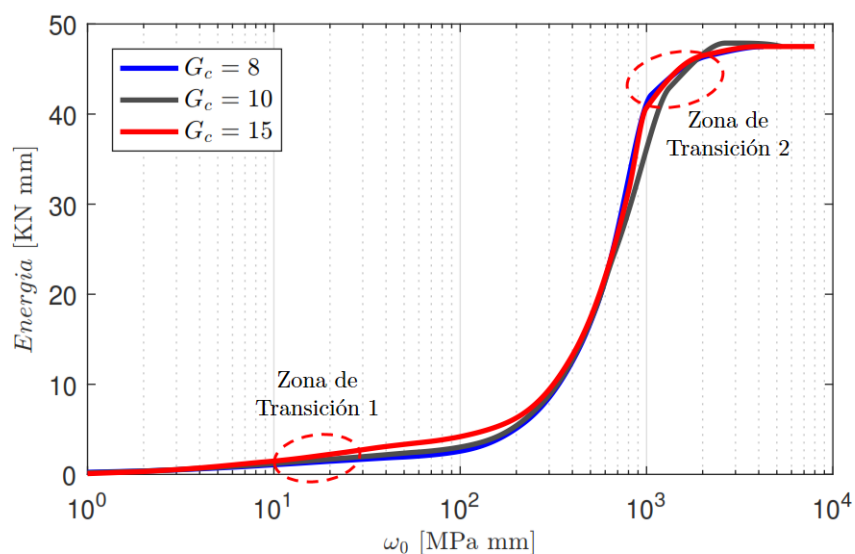


Figura 7: Curvas de  $\omega_0$  contra  $Energía$  para diferentes valores de  $G_c$ . Las unidades de  $G_c$  en  $MPamm^2$ .

El experimento mencionado anteriormente se replicó para distintos valores de  $G_c$ , como se presentan en la Figura 7. En ella es posible notar el parecido en la forma de las curvas. Las regiones de transición están ubicadas alrededor de valores similares de  $\omega_0$ , lo que sugiere que se puede cambiar de un comportamiento material a otro mediante el uso de esta variable.

Un aspecto importante que revela la Figura 7 es que cuando  $\omega_0$  tiende al infinito, la curva presenta un valor finito de energía. Esto puede deberse a que los altos valores de  $\omega_0$  evitan la activación de daño, permitiendo solamente la evolución de la plasticidad en el material.

Parámetro	Unidad	Material 1
$K$	[MPa]	72624
$\nu$	[-]	0.33109
$H_0$	[MPa]	250
$\sigma_{p0}$	[MPa]	345
$\eta_{p0}$	$[(MPa \text{ mm})^{0,5} \text{ mm}]$	4
$G_c$	$[MPa \text{ mm}^2]$	10.00

Tabla 4: Parámetros utilizados en el experimento de la Figura 10.



### 3.1.2. Longitud característica de daño $\eta_d$

Cuando se calcula  $\eta_d$  y se lo compara con la energía disipada, se obtienen las curvas presentadas en la Figura 8. Contrario a lo sucedido en la Figura 6, en la Figura 8 no se marcan de manera clara las zonas de transición con respecto a  $\eta_d$ , puesto que una pequeña variación de este parámetro puede cambiar el comportamiento material deseado si no se presta atención al valor de  $G_c$  con el que se trabaja. Sin embargo, las zonas de transición aparecen para valores de disipación de energía similares, como también se observa en las Figuras 6 y 7.

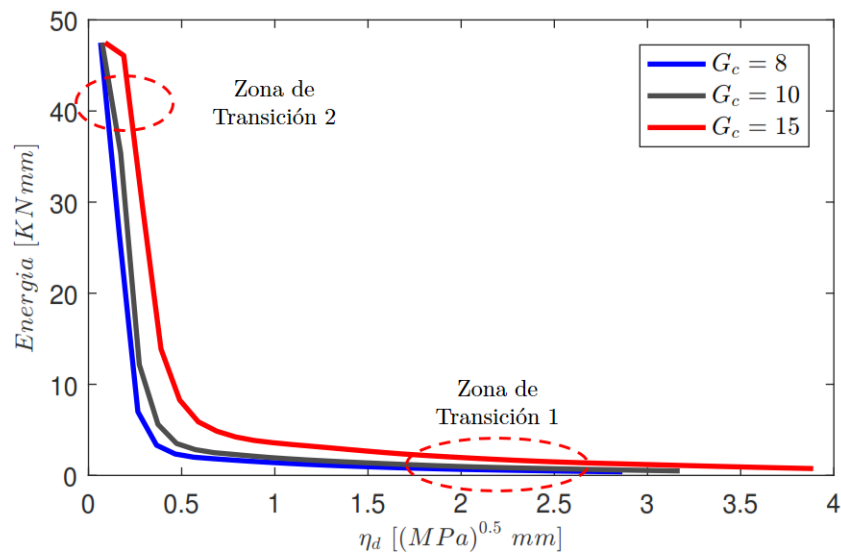


Figura 8: Curvas de  $\eta_d$  contra  $Energia$  para diferentes valores de  $G_c$ . Las unidades de  $G_c$  en  $\text{MPamm}^2$ .

Dado que es más sencillo determinar la variable  $\omega_0$  que estimar la energía que se disipará en el proceso de fractura, se sugiere que el mejor indicador para predecir el comportamiento material y tipo de fractura que resultará del modelo, es el umbral de daño.

Por otra parte, como se puede observar en los ejemplos de la Figura 9, cuando el valor de la longitud característica de daño crece, también lo hace el ancho de la banda en la que el daño se concentra. Este resultado concuerda las interpretaciones de [38] y [39] sobre la longitud interna del material como un indicador del ancho de banda en la que se acumula el daño, ya que  $l_d$  se puede expresar en términos de  $\eta_d$  según (2.22).

A continuación, se estudia por separado el efecto de  $G_c$  y  $l_d$  en la respuesta del modelo.

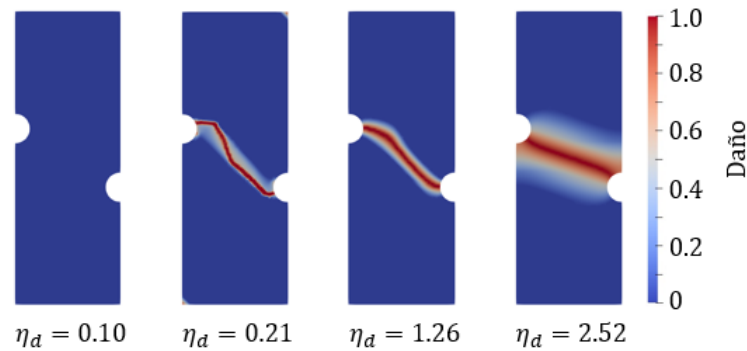


Figura 9: Efecto de  $\eta_d$  en el campo de daño. Las unidades están en  $(\text{MPamm})^{0,5}\text{mm}$ .

### 3.1.3. Resistencia a la fractura $G_c$

Para el estudio de la resistencia a la fractura se utilizan los parámetros presentados en la Tabla 4, donde la influencia de  $G_c$  se estudia para diferentes valores de  $l_d$ , como puede apreciarse en la Figura 10. En esta es posible apreciar que la energía disipada crece de forma casi lineal con la resistencia a la fractura, para cualquier valor de  $l_d$ . Este es un resultado esperado, ya que en (2.21) se muestra la relación directa entre  $G_c$  y  $\omega_0$ , parámetro que, de acuerdo con la formulación y resultados de los experimentos anteriores, es proporcional a la energía disipada.

En la Figura 10 se aprecia que para valores bajos de  $G_c$  la energía disipada es similar, y los tipos de comportamientos materiales presentan una tendencia frágil. En [29] se dice que valores bajos de  $G_c$  corresponden a materiales cerámicos, revelando la capacidad del modelo de representar este tipo de materiales y no solamente metales.

La forma en la que la resistencia a la fractura es precisamente en determinar el umbral de daño. Cuando este crece, es necesaria una mayor disipación de energía para que el daño sea activado. Así, si el material tiene una evolución E-P-D o E-P-PD, el incremento de  $G_c$  implica el mayor desarrollo de la plasticidad hasta que empiece el ablandamiento; mientras que una disminución de este parámetro puede conllevar incluso a un cambio de régimen en el material, donde el umbral de daño se alcance sin la necesidad del desarrollo de la plasticidad, teniendo una evolución frágil E-D. Estos efectos pueden ser apreciados en la Figura 11.

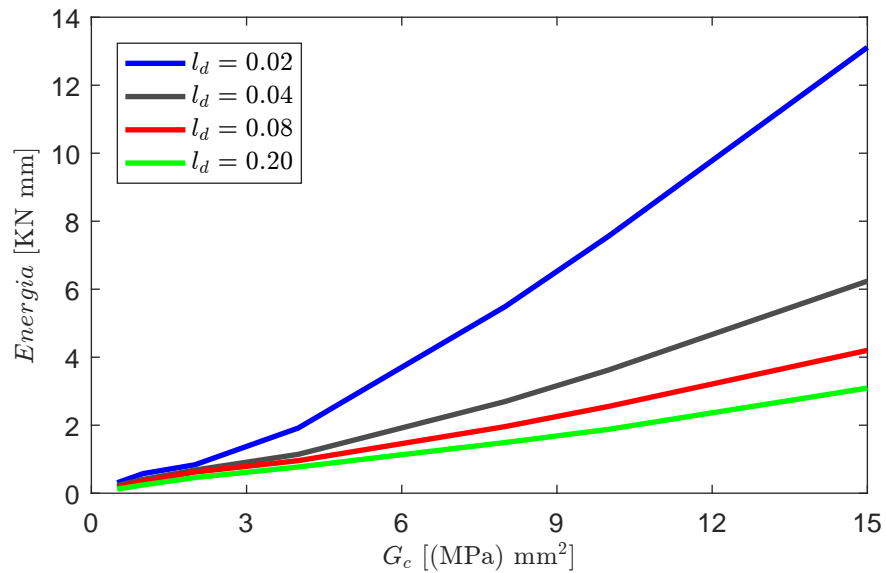


Figura 10: Influencia de  $G_c$  en la disipación de energía. Las unidades de  $l_d$  en mm.

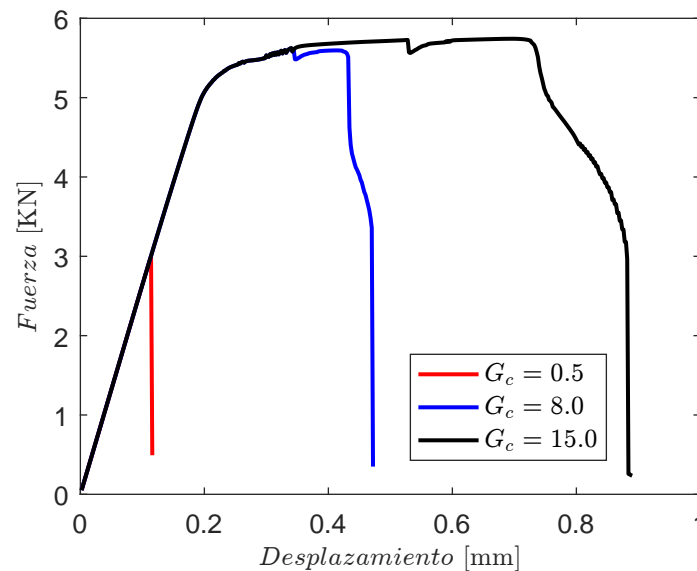


Figura 11: Influencia de  $G_c$  en la curva fuerza - desplazamiento. Las unidades de  $G_c$  en MPa·mm<sup>2</sup>.

### 3.1.4. Variable interna de daño $l_d$

Al comparar la energía disipada contra la longitud interna de daño, como se ve en la Figura 12, se pueden determinar tres regiones: en primer lugar, y para valores de la longitud interna de daño cercanos a 0, la energía tiende al infinito. En esta región se presentan respuestas con alta plasticidad, y en algunos casos, no se generan grietas, siendo la plasticidad el único medio

de disipación energética. La segunda región corresponde a valores de longitud interna de daño próximos a 0.1 mm, donde la curva cambia rápidamente su pendiente y las respuestas del modelo corresponden a fracturas dúctiles. Finalmente, en la tercera zona se distingue que la energía tiende a 0 cuando la longitud interna de daño tiende al infinito, y que corresponde a las fracturas frágiles. Sin embargo, dado que el umbral de daño  $\omega_0$  es función de  $l_d$ , las zonas de transición son las mismas que las mostradas en las Figuras 6 y 7. Además, al igual que en el caso del estudio de  $G_c$ , el resultado de la variación de  $l_d$  es el esperado, pues al ser inversamente proporcionales, la energía disipada en el proceso de fractura incrementa conforme  $l_d$  se disminuye.

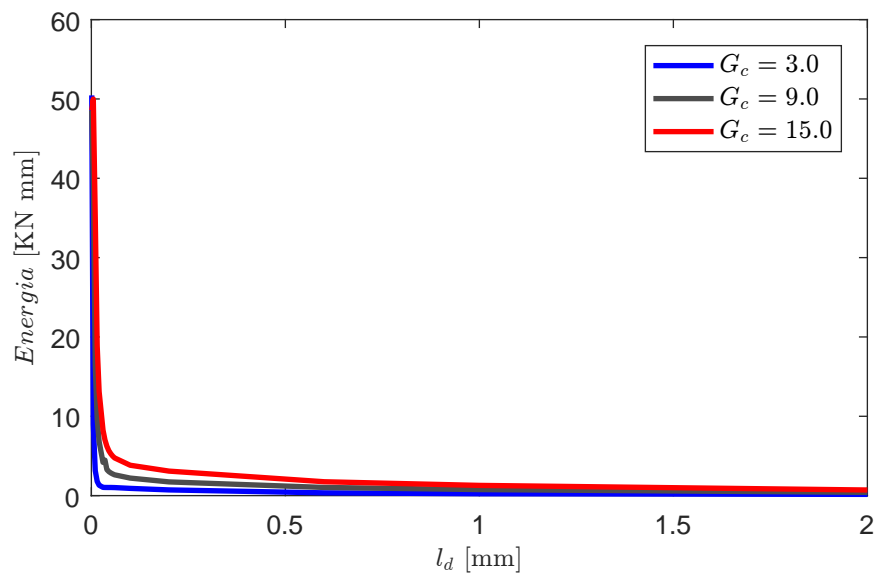


Figura 12: Efecto de  $l_d$  en la disipación de energía. Las unidades de  $G_c$  en  $\text{MPa}\cdot\text{mm}^2$ .

## 3.2. Variables de plasticidad

Según la ecuación (2.13) los parámetros que intervienen en el carácter disipativo del modelo son la longitud característica de plasticidad y el módulo de endurecimiento. Con el objeto de tener una visión general de las capacidades del modelo, se realizan simulaciones utilizando los parámetros mostrados en la Tabla 4.

### 3.2.1. Longitud interna de plasticidad $\eta_p$

De acuerdo a los parámetros materiales mostrados en la Tabla 4, se variara el parámetro  $\eta_p$  en un rango de 2  $(\text{MPa}\cdot\text{mm})^{0,5}\text{mm}$  hasta 2000  $(\text{MPa}\cdot\text{mm})^{0,5}\text{mm}$ . Al realizar esta experimentación

se tienen curvas de fuerza - desplazamiento con un comportamiento similar al momento de disipar la energía de fractura, pero su respuesta cualitativa es diferente tal como se muestra en la figura 13, por lo que se puede decir que la longitud característica de plasticidad afecta las propiedades mecánicas del material.

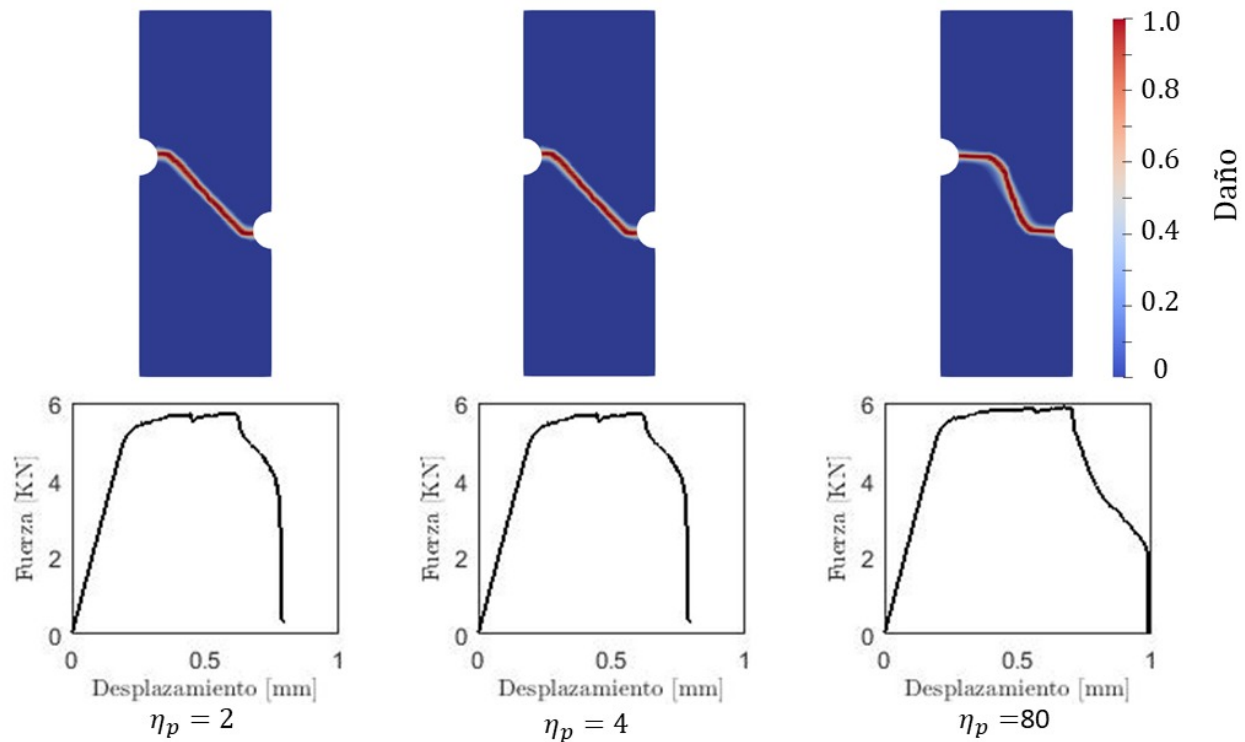


Figura 13: Respuesta cualitativa de variar  $\eta_p$

Aunque, conforme se va aumentando los valores de la longitud característica de plasticidad se observa que la meseta de plasticidad y el punto de fluencia aumentan en las curvas de fuerza - desplazamiento tal como se muestra en la figura 14 corroborando lo mencionado anteriormente.

Por otra parte, la longitud característica de plasticidad queda cuestionada al tener en cuenta la sensibilidad del modelo. Ya que la sensibilidad se encuentra directamente relacionada con el ancho de la banda de corte. Para controlar el ancho de la banda de corte se tiene en consideración los resultados obtenidos en los parámetros de daño, en donde se menciona que el ancho de la banda de corte es directamente proporcional a la longitud interna  $l_d$ . Por lo cual en la figura 15 se muestra el efecto que se tiene al considerar una longitud interna mayor.

Mientras que si los cambios de la longitud característica de plasticidad son relativamente bajos

como los mostrados en los literales a y b de la figura 13, los resultados son semejantes tanto en las curvas de fuerza - desplazamiento como en la respuesta cualitativa ya que la evolución de la grieta es similar.

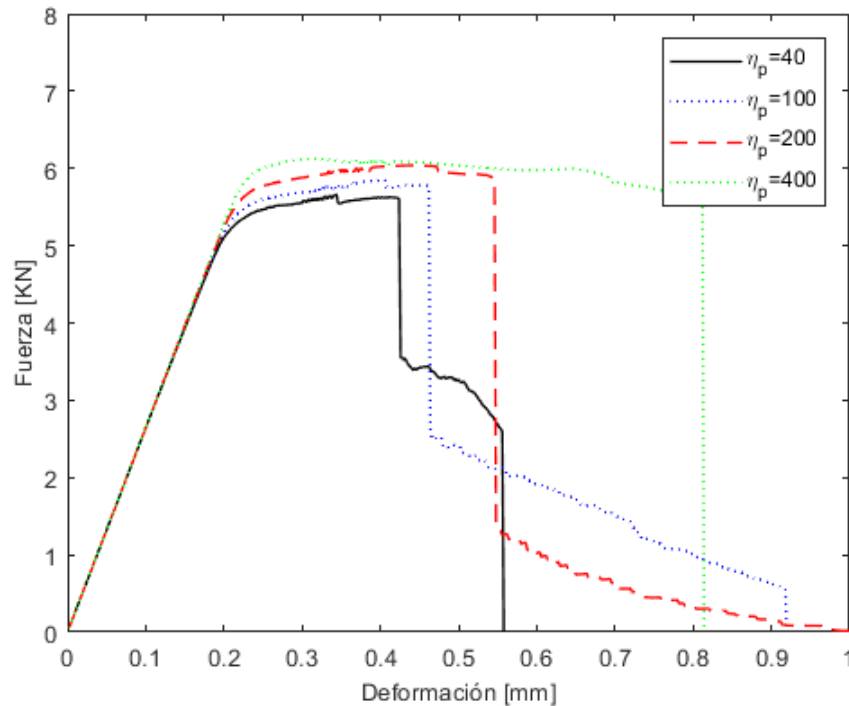


Figura 14: Curvas de fuerza - desplazamiento al variar  $\eta_p$  en grandes rangos

Además, en la figura 14 se puede observar que ha medida que la longitud característica de plasticidad va creciendo, la curva de fuerza - desplazamiento disipa menos energía desde el punto en el que termina la fluencia hasta el momento en el cual se logra la deformación última del material. Este efecto se puede observar al comparar las curvas de  $\eta_p = 40$  ( $MPa \cdot mm$ )<sup>0,5</sup>mm y  $\eta_p = 400$  ( $MPa \cdot mm$ )<sup>0,5</sup>mm, en donde se observa que para un valor bajo de la longitud característica de plasticidad existe una mayor deformación del material, lo cual se interpreta como la formación de una fractura dúctil. En cambio, si el valor de  $\eta_p$  es alto el material cambiara sus propiedades mecánicas, haciendo que en la curva de fuerza - desplazamiento exista una menor diferencia entre el punto en donde termina la fluencia y el punto en donde se da la deformación última. Como se muestra en la figura 14, la diferencia entre estos puntos es inversamente proporcional al valor de la longitud característica de plasticidad.

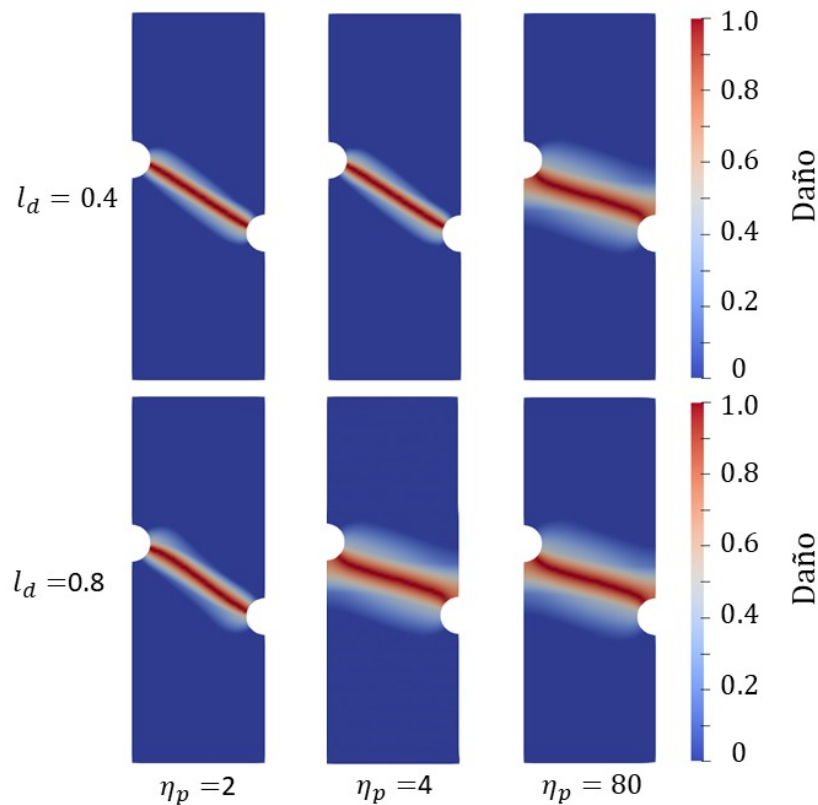
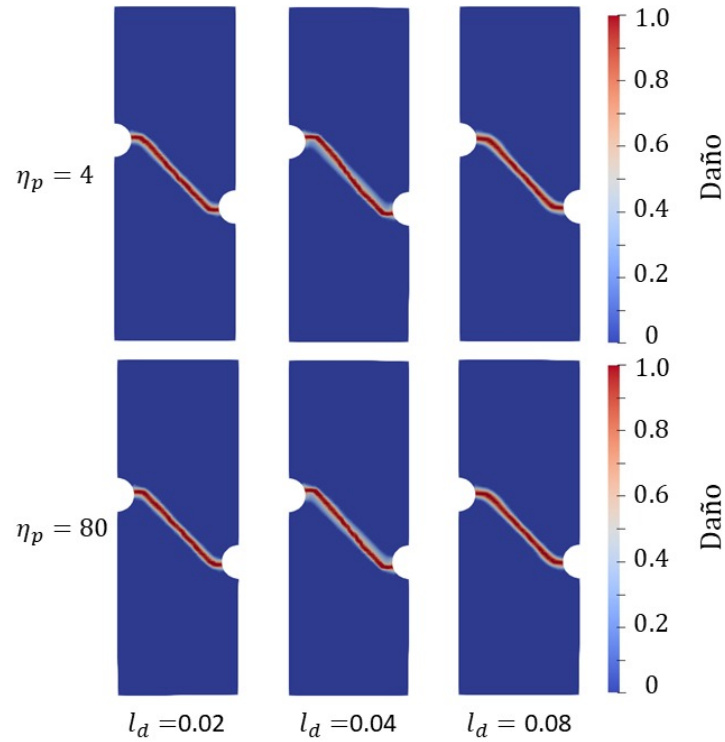
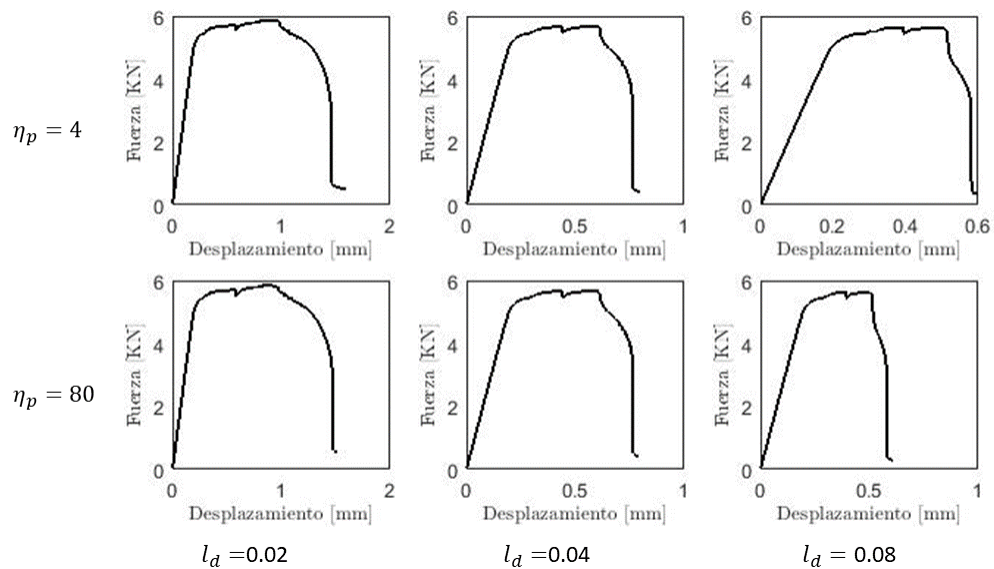


Figura 15: Efecto de  $\eta_p$  según varía la longitud interna

Además, para ver si el modelo aumenta su sensibilidad al variar la longitud característica de plasticidad se ha establecido un nuevo módulo de endurecimiento de  $H = 1000$  MPa y se ha variado el valor de la longitud característica de plasticidad. Obteniendo como resultado lo mostrado en las figuras 16 y 17, ahí se puede observar que ni la respuesta cualitativa ni las curvas de fuerza - desplazamiento no han cambiado pese a que los cambios en la longitud característica de plasticidad han variado en un rango de  $4 (MPa \cdot mm)^{0,5} mm$  a  $80 (MPa \cdot mm)^{0,5} mm$ .

Figura 16: Respuesta cualitativa al tener un modulo de endurecimiento  $H = 1000$  MPaFigura 17: Curvas de fuerza - desplazamiento para un modulo de endurecimiento  $H = 1000$



### 3.2.2. Módulo de endurecimiento $H$

Parámetro	Unidad	
$K$	[MPa]	72624
$\nu$	[-]	0.33109
$l_d$	[mm]	0.008
$\sigma_{p0}$	[MPa]	345
$\eta_{p0}$	[(MPa mm) <sup>0,5</sup> mm]	4
$G_c$	[MPa mm <sup>2</sup> ]	2.00

Tabla 5: Parámetros usados en el ejemplo base para el endurecimiento.

Según los parámetros mostrados en la tabla 5, se variara el parámetro  $H$  en un rango desde 0 MPa hasta 2000 MPa. Lo que se puede destacar en estas experimentaciones es que el modelo no muestra sensibilidad ha este parámetro ya que se debe realizar cambios muy bruscos para que se pueda ver un efecto tanto en la respuesta cualitativa como en las curvas de fuerza - desplazamiento. Dicho efecto se puede observar en la figura 18 para un valor de  $H = 2000$  Mpa, en donde la evolución de la grieta es distinta a la evolución de la grieta que muestran los otros casos con un módulo menor a 1000 MPa, debido a que el material se vuelve más frágil conforme se va aumentando el módulo de endurecimiento. Este efecto se puede observar con los diferentes valores del módulo de endurecimiento ya que al tener un valor de  $H = 1000$  la respuesta culitativa ya tiene una mínima diferencia respecto a los valores de  $H$  que son menores, ya que la evolución de la grieta empieza a mostrar que el experimento tiene un comportamiento cuasi - dúctil. Aunque en las curvas de fuerza - desplazamiento se puede observar que estas tienen una manera similar de disipar la energía hasta un valor de  $H = 1000$  MPa, mientras que para un  $H = 2000$  MPa ya se ve un comportamiento diferente en la curva de fuerza - desplazamiento, además de esto se observa que las propiedades mecánicas que adquiere este material no permite desarrollar una meseta plástica, sino que falla de manera súbita, lo cual causa que en la respuesta cualitativa se tenga un falla frágil.

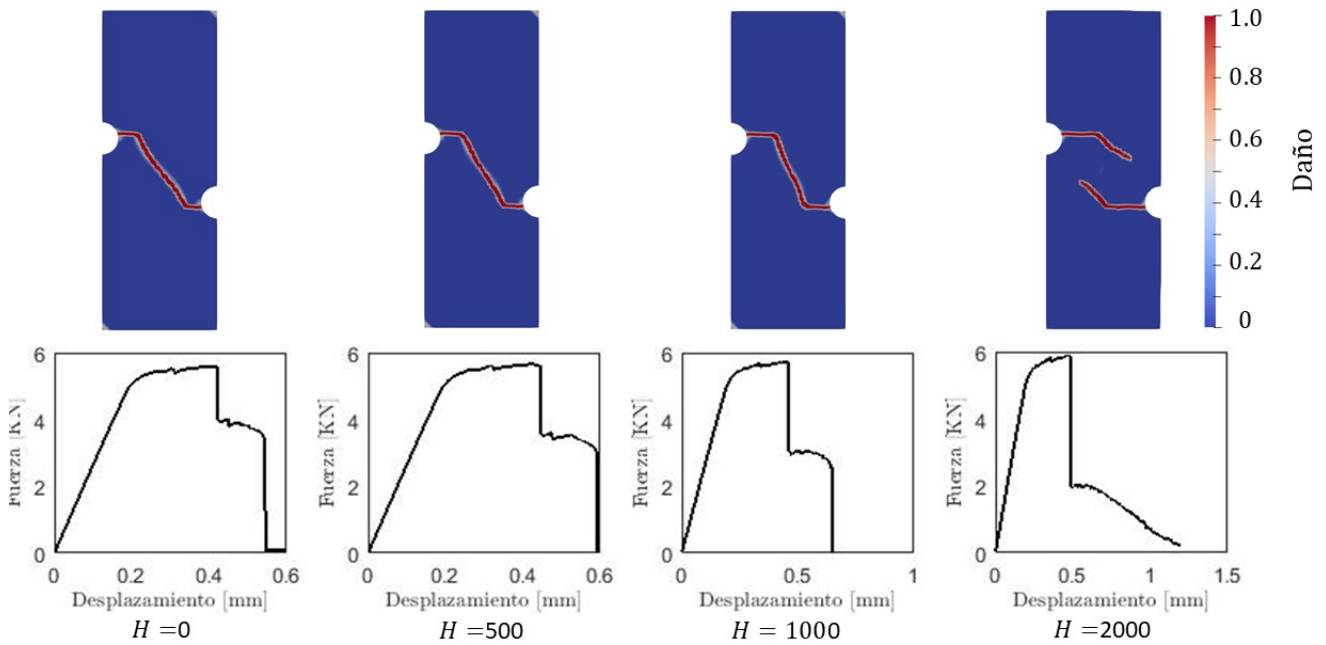


Figura 18: Respuesta cualitativa al variar el módulo de endurecimiento

En la figura 19 se puede observar claramente que al variar levemente el módulo de endurecimiento los cambios ya sean en las curvas de fuerza - desplazamiento o en la respuesta cualitativa no son notorios, debido a que el modelo tiene una menor sensibilidad a las variables de plasticidad.

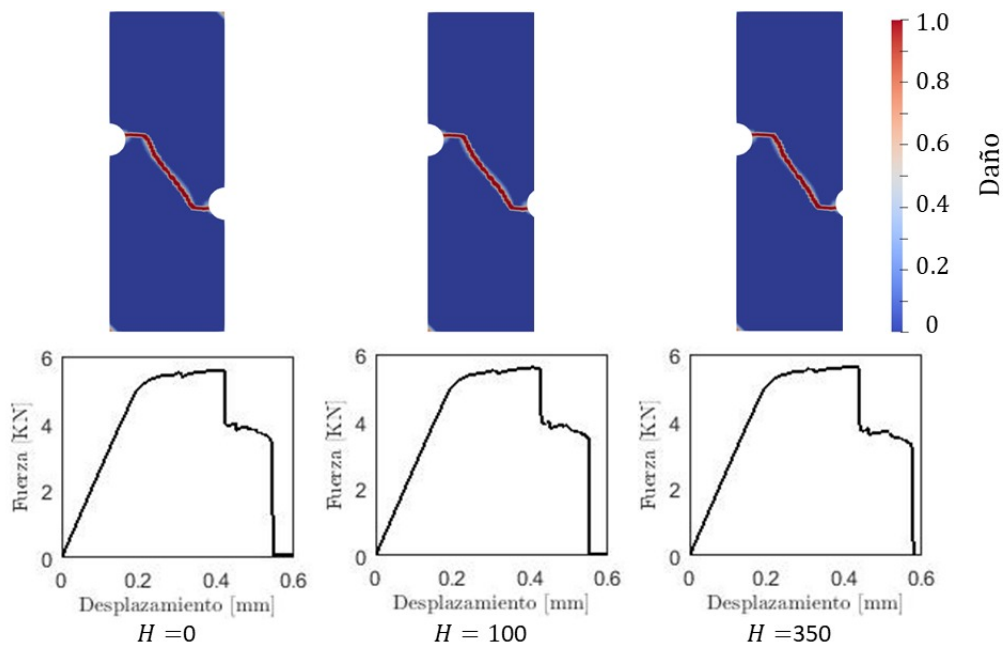


Figura 19: Respuesta al variar levemente el módulo de endurecimiento

### 3.3. Experimento del punto de ablandamiento

En este experimento se consideraron tres mecanismo para alcanzar un determinado punto de ablandamiento, sin alterar las propiedades clásicas del material. La finalidad de este experimento es demostrar la flexibilidad del modelo de alcanzar diferentes comportamientos materiales y la capacidad de controlar su evolución mediante los distintos parámetros estudiados en las secciones anteriores. Los parámetros empleados se muestran en la Tabla 6 y los resultados se presentan en la Figura 20.

Parámetro	Unidad	Material 1	Material 2	Material 3
$K$	[MPa]	72624	72624	72624
$\nu$	[-]	0.33109	0.33109	0.33109
$\sigma_{p0}$	[MPa]	345	345	345
$H_0$	[MPa]	250	250	250
$l_d$	[mm]	<b>0.017</b>	0.028	0.028
$\eta_{p0}$	[(MPa mm) <sup>0,5</sup> mm]	4	<b>131</b>	4
$G_c$	[MPa mm <sup>2</sup> ]	9.31	9.31	<b>13.4</b>

Tabla 6: Parámetros usados en el ejemplo del punto de ablandamiento.

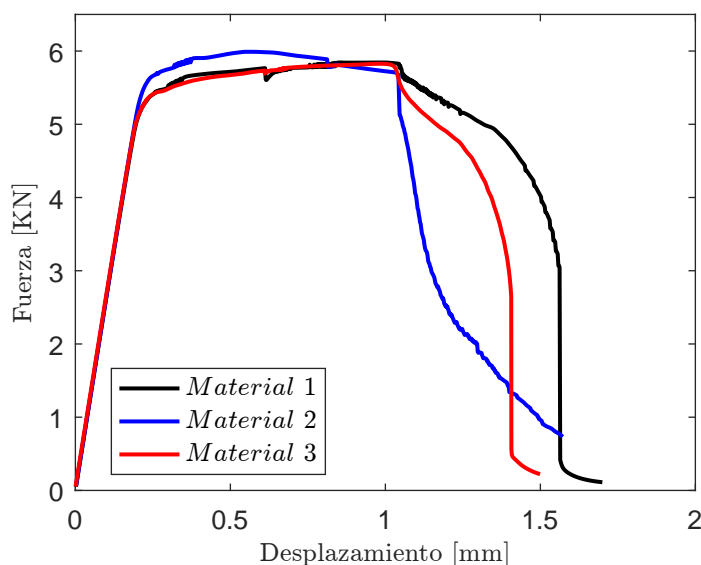


Figura 20: Experimento del punto de ablandamiento.

## 4. Conclusiones

A través de la variación de los parámetros del modelo, se encontró un rango de comportamientos materiales que van desde el frágil hasta el dúctil. Dentro de este rango destacan las fracturas cohesivas tipo Dugdale y Barenblatt. Todos estos comportamientos se pueden capturar sin la necesidad de realizar cambios en las funciones constitutivas del modelo, lo que representa una ventaja de [1] respecto a otros modelos presentes en la literatura.

Los cambios en las propiedades del material están principalmente regidos por el umbral de daño  $\omega_0$ . Este umbral define cuándo empieza a actuar el daño dentro del modelo. Como se aprecia en la Figura 6, mientras más bajo es el umbral de daño, menor es la energía disipada en el proceso de fractura. De esta manera, las fracturas frágiles son casos en los cuáles la contribución elástica, o una fracción de ésta, disipan suficiente energía hasta que se alcance  $\omega_0$ . Como consecuencia, la aparición y el desarrollo de la plasticidad están condicionados por la magnitud de  $\omega_0$ . Teniendo de esta manera que para valores altos de  $\omega_0$  es probable que aparezca la plasticidad.

El ancho de la grieta difusa en el espécimen puede controlarse con la longitud característica de daño  $\eta_d$ . Ésta se relaciona directamente con  $l_d$  mediante (2.22). Por ello, la longitud interna de daño del material puede interpretarse físicamente como el ancho de la banda de corte del espécimen. Esta conclusión concuerda con las interpretaciones de [38] y [39] sobre la longitud interna del material.

El modelo es más sensible a los cambios en la longitud interna de daño  $\eta_d$  que a las variaciones de la longitud interna de plasticidad  $\eta_p$ . Al analizar el efecto de cada parámetro, se encontró que la variación leve de  $\eta_d$  produce cambios evidentes en la respuesta cualitativa y cuantitativa del modelo. Mientras que con  $\eta_p$ , para llegar a notar cambios en la respuesta, se necesita de una mayor variación del parámetro.

Al variar la resistencia de fractura  $G_c$ , se puede controlar la meseta de plasticidad. Este efecto se puede observar en las gráficas de fuerza - desplazamiento, Figura 11. Por ello, se puede decir que con la resistencia a la fractura se puede controlar el punto en donde comienza el ablandamiento.

Las Figuras 8 y 12 muestran que el comportamiento material cambia de acuerdo al ancho de la grieta. Este resultado sugiere que la longitud interna de daño  $l_d$  puede ser una propiedad intrínseca de los materiales. Sin embargo, se deben realizar futuras simulaciones y experimentos para confirmarlo.

La segunda zona de transición de las Figuras 6 y 7 se interpreta como el límite de aplicabilidad del



modelo. Al sobrepasar esta zona de transición, el espécimen no presenta daño y las deformaciones plásticas son excesivas. Este tipo de respuestas son el resultado de fenómenos geométricos que no son capturados por la hipótesis de pequeñas deformaciones. De esta manera, se sugiere extender la formulación al caso de grandes deformaciones para corroborar los resultados obtenidos con los valores más altos de  $\omega_0$ .

## 5. Referencias

- [1] P Rodriguez, J Ulloa, C Samaniego y E Samaniego. “A Variational Approach to the Phase Field Modeling of Brittle and Ductile Fracture”. En: *International Journal of Mechanical Sciences* (2018).
- [2] Marreddy Ambati, Tymofiy Gerasimov y Laura De Lorenzis. “Phase-field modeling of ductile fracture”. En: *Computational Mechanics* 55.5 (2015), págs. 1017-1040.
- [3] Jacques Besson. “Continuum models of ductile fracture: a review”. En: *International Journal of Damage Mechanics* 19.1 (2010), págs. 3-52.
- [4] René De Borst y Hans-Bernd Mühlhaus. “Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects”. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35.3 (1992), págs. 521-539.
- [5] J Oliver, Alfredo Edmundo Huespe, E Samaniego y EWV Chaves. “Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete”. En: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28.7-8 (2004), págs. 609-632.
- [6] Xu Zhang, Katerina E Aifantis y Alfonso HW Ngan. “Interpreting the stress–strain response of Al micropillars through gradient plasticity”. En: *Materials Science and Engineering: A* 591 (2014), págs. 38-45.
- [7] Christian Miehe, Fabian Welschinger y Martina Hofacker. “Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations”. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83.10 (2010), págs. 1273-1311.
- [8] Gilles A Francfort y J-J Marigo. “Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46.8 (1998), págs. 1319-1342.
- [9] David Mumford y Jayant Shah. “Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems”. En: *Communications on pure and applied mathematics* 42.5 (1989), págs. 577-685.
- [10] Blaise Bourdin, Gilles A Francfort y Jean-Jacques Marigo. “Numerical experiments in revisited brittle fracture”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48.4 (2000), págs. 797-826.

- 
- [11] Gianni Dal Maso y Rodica Toader. “A Model for the Quasi-Static Growth of Brittle Fractures: Existence and Approximation Results”. En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 162.2 (2002), págs. 101-135.
- [12] Luigi Ambrosio y Vincenzo Maria Tortorelli. “Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence”. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43.8 (1990), págs. 999-1036.
- [13] Blaise Bourdin, Gilles A Francfort y Jean-Jacques Marigo. “The variational approach to fracture”. En: *Journal of elasticity* 91.1-3 (2008), págs. 5-148.
- [14] Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini y Kim Pham. “An overview of the modelling of fracture by gradient damage models”. En: *Meccanica* 51.12 (2016), págs. 3107-3128.
- [15] Roberto Alessi. “Variational approach to fracture mechanics with plasticity”. Tesis doct. Ecole Polytechnique X, 2013.
- [16] Roberto Alessi, Jean-Jacques Marigo y Stefano Vidoli. “Gradient damage models coupled with plasticity and nucleation of cohesive cracks”. En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 214.2 (2014), págs. 575-615.
- [17] Roberto Alessi, Jean-Jacques Marigo y Stefano Vidoli. “Gradient damage models coupled with plasticity: variational formulation and main properties”. En: *Mechanics of Materials* 80 (2015), págs. 351-367.
- [18] Roberto Alessi, Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini y Stefano Vidoli. “Coupling damage and plasticity for a phase-field regularisation of brittle, cohesive and ductile fracture: one-dimensional examples”. En: *International Journal of Mechanical Sciences* 149 (2018), págs. 559-576.
- [19] Jacinto Ulloa, Patricio Rodríguez y Esteban Samaniego. “On the modeling of dissipative mechanisms in a ductile softening bar”. En: *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 11.4 (2016), págs. 463-490.
- [20] Alexander Mielke. “A mathematical framework for generalized standard materials in the rate-independent case”. En: *Multifield Problems in Solid and Fluid Mechanics*. Springer, 2006, págs. 399-428.

- [21] Roberto Alessi. “Energetic formulation for rate-independent processes: remarks on discontinuous evolutions with a simple example”. En: *Acta Mechanica* 227.10 (2016), págs. 2805-2829.
- [22] Christian Miehe, Martina Hofacker y Fabian Welschinger. “A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.45-48 (2010), págs. 2765-2778.
- [23] Hanen Amor, Jean-Jacques Marigo y Corrado Maurini. “Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: Numerical experiments”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.8 (2009), págs. 1209-1229.
- [24] Michael J Borden, Clemens V Verhoosel, Michael A Scott, Thomas JR Hughes y Chad M Landis. “A phase-field description of dynamic brittle fracture”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 217 (2012), págs. 77-95.
- [25] Michael J Borden, Thomas JR Hughes, Chad M Landis, Amin Anvari e Isaac J Lee. “A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 312 (2016), págs. 130-166.
- [26] Marreddy Ambati, Roland Kruse y Laura De Lorenzis. “A phase-field model for ductile fracture at finite strains and its experimental verification”. En: *Computational Mechanics* 57.1 (2016), págs. 149-167.
- [27] C Miehe, S Teichtmeister y F Aldakheel. “Phase-field modelling of ductile fracture: a variational gradient-extended plasticity-damage theory and its micromorphic regularization”. En: *Phil. Trans. R. Soc. A* 374.2066 (2016), pág. 20150170.
- [28] Christian Miehe, Fadi Aldakheel y Stephan Teichtmeister. “Phase-field modeling of ductile fracture at finite strains: A robust variational-based numerical implementation of a gradient-extended theory by micromorphic regularization”. En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 111.9 (2017), págs. 816-863.
- [29] MF Ashby y AL Greer. “Metallic glasses as structural materials”. En: *Scripta Materialia* 54.3 (2006), págs. 321-326.



- [30] Toshihiko Nishida, Yoshikazu Hanaki y Giuseppe Pezzotti. “Effect of notch-root radius on the fracture toughness of a fine-grained alumina”. En: *Journal of the American Ceramic Society* 77.2 (1994), págs. 606-608.
- [31] Juan Michael Sargado, Eirik Keilegavlen, Inga Berre y Jan Martin Nordbotten. “High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 111 (2018), págs. 458-489.
- [32] Elias C Aifantis. “Update on a class of gradient theories”. En: *Mechanics of materials* 35.3-6 (2003), págs. 259-280.
- [33] NA Fleck y JW Hutchinson. “A reformulation of strain gradient plasticity”. En: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49.10 (2001), págs. 2245-2271.
- [34] MA Meyers. “MA Meyers, A. Mishra, and DJ Benson, Prog. Mater. Sci. 51, 427 (2006).” En: *Prog. Mater. Sci.* 51 (2006), pág. 427.
- [35] X Zhang y KE Aifantis. “Interpreting strain bursts and size effects in micropillars using gradient plasticity”. En: *Materials Science and Engineering: A* 528.15 (2011), págs. 5036-5043.
- [36] Avraam A Konstantinidis, Katerina E Aifantis y Jeff Th M De Hosson. “Capturing the stochastic mechanical behavior of micro and nanopillars”. En: *Materials Science and Engineering: A* 597 (2014), págs. 89-94.
- [37] AA Konstantinidis, X Zhang y EC Aifantis. “On the combined gradient-stochastic plasticity model: Application to Mo-micropillar compression”. En: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1646. 1. AIP. 2015, págs. 3-9.
- [38] Elias C Aifantis. “The physics of plastic deformation”. En: *International Journal of Plasticity* 3.3 (1987), págs. 211-247.
- [39] HM Zbib. “On the localization and post-localization behavior of plastic deformation. I. On the initiation of shear bands”. En: *Res. Mech.* 23 (1988), págs. 261-277.
- [40] R Alessi, M Ambati, T Gerasimov, S Vidoli y L De Lorenzis. “Comparison of phase-field models of fracture coupled with plasticity”. En: *Advances in Computational Plasticity*. Springer, 2018, págs. 1-21.