



UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Ingeniería

Carrera de Ingeniería Civil

Enfoque variacional a la homogenización de una barra heterogénea en fase post-crítica

Trabajo de titulación previo a la obtención
del título de Ingeniero Civil

Autor:

Andrés Mauricio Zumba Ñamagua
C.I.: 0105336770

Director:

Ing. Esteban Patricio Samaniego Alvarado, Phd
C.I.: 0102052594

Cuenca – Ecuador

Octubre 2018



Resumen

En el presente trabajo se busca explorar conceptos referentes a la fractura unidimensional usando como marco conceptual de análisis la homogeneización variacional. El entorno variacional abre la posibilidad de analizar el desarrollo post-crítico de microestructuras de deformación en materiales inelásticos basados en el análisis de la densidad de energía propia del material. Las formulaciones propuestas ofrecen dos perspectivas importantes en la mecánica inelástica sólida. En primer lugar, la definición de la estabilidad material de los materiales disipativos estándar se basa en condiciones de convexidad del potencial de esfuerzo incremental. En segundo lugar, los desarrollos de la microestructura en sólidos inelásticos inestables están asociados con potenciales de esfuerzo incrementales no convexos similares a los problemas de transformación de fase elástica.

La investigación se centra en el análisis de una barra homogénea formada por componentes que exhiben ablandamiento que ocurre solo cuando se alcanza un cierto nivel de esfuerzo. El fenómeno del ablandamiento por deformación ocurre cuando el módulo plástico considerado en la ley constitutiva se vuelve negativo generando la llamada pérdida de elipticidad de las ecuaciones constitutivas. Para analizar este problema se emplea un modelo el cual tiene una perturbación en el elemento central de la barra homogénea, esta perturbación es una reducción en el esfuerzo de fluencia inicial para activar la localización. La solución global se consigue mediante la implementación de elementos finitos con un algoritmo que controla los desplazamientos en cada paso tiempo.

Palabras clave:

Variacional, Plasticidad, Elementos finitos, Termodinámica, Modelización, Disipación, Energía, Ablandamiento, Fractura.



Abstract

In the present work we seek to explore concepts related to the one-dimensional fracture using variational homogenization as a conceptual framework for analysis. The variational approach opens the possibility of analyzing the post-critical development of deformation microstructures in inelastic materials based on the analysis of the energy density of the material itself. The proposed formulations offer two important perspectives on solid inelastic mechanics. First, the definition of the material stability of standard dissipative materials is based on convexity conditions of the incremental stress potential. Secondly, the developments of the microstructure in unstable inelastic solids are associated with non-convex incremental stress potentials similar to the problems of elastic phase transformation.

The research focuses on the analysis of a homogeneous bar formed by components that exhibit softening that occurs only when a certain level of effort is reached. The phenomenon of deformation softening occurs when the plastic module considered in the constitutive law becomes negative generating the so-called loss of ellipticity of the constitutive equations. This problem is translated into a model which has a disturbance in the central element of the homogeneous bar, this disturbance is a reduction in the initial yield stress to activate the localization. The global solution is achieved through the implementation of finite elements with an algorithm that controls the displacements in each step of time.

Keywords:

Variational, Plasticity, Finite elements, Thermodynamics, Modeling, Dissipation, Energy, Softening, Fracture.



Índice general

CAPÍTULO 1: Introducción	13
1.1 Introducción	13
1.2 Motivación	14
1.3 Objetivos	22
1.3.1 Objetivo general	22
1.3.2 Objetivos específicos.....	22
1.4 Metodología	22
CAPÍTULO 2: La Mecánica del Modelamiento Constitutivo	24
2.1 Fundamentos de la Mecánica del Medio Continuo	24
2.1.1 Principios Cinemáticos.....	24
2.1.2 Leyes de Balance.....	26
2.2 Enfoque termodinámico para el modelado constitutivo	29
2.2.1 Conceptos básicos y leyes de la termodinámica.....	29
2.2.2 Primera ley de la termodinámica.....	31
2.2.3 Segunda ley de la termodinámica.....	32
2.2.4 Disipación Termodinámica	33
2.3 Leyes Constitutivas	35
2.3.1 Elasticidad	35
2.3.2 Elasto-Plasticidad	37
2.3.3 Activación y evolución de las variables de estado	38
2.4 Medios estándar generalizados	39
2.4.1 Formulación energética	40
CAPÍTULO 3: Formulación e implementación numérica	42
3.1 Modelo de fricción unidimensional	42
3.1.1 Ecuaciones locales de gobierno.....	43
3.1.2 Respuesta friccional irreversible	43
3.1.3 Condiciones de carga/descarga	45
3.1.4 Deslizamiento friccional (flujo plástico).....	46
3.2 Plasticidad con endurecimiento isotrópico	46
3.2.1 Modelo matemático.....	48
3.2.2 Módulo elastoplástico tangente.....	49



3.3	Algoritmo de integración para la plasticidad	50
3.3.1	Estado elástico de prueba.	51
3.3.2	Forma algorítmica de las condiciones de carga.....	51
3.3.3	Algoritmo de mapeo de retorno.....	53
3.4	Implementación Numérica con Elementos Finitos	55
3.4.1	La forma local del problema inicial del valor límite	56
3.4.2	Formulación débil del problema inicial del valor límite.	57
3.4.3	Discretización espacial	58
3.4.4	Procedimiento de solución iterativa.	60
CAPÍTULO 4: Ablandamiento y efecto de tamaño		65
4.1	Pérdida de objetividad	65
4.1.1	Resultados preliminares del algoritmo de plasticidad unidimensional.	65
4.2	Modelo constitutivo con ablandamiento.....	67
CAPÍTULO 5: Homogenización Variacional		72
5.1	Enfoque variacional y cambios de fase.....	72
5.2	La regla de Cauchy-Born	74
5.3	La fractura vista como cambio de fase.....	75
5.4	Obtención de la objetividad.....	76
5.4.1	Módulo de ablandamiento ajustado a la malla	77
5.4.2	Convexificación del potencial de energía.....	80
CAPÍTULO 6: Experimentación Numérica y Resultados.....		85
6.1	Solución a la dependencia de la malla	85
6.2	Límite de la homogenización	88
6.3	Convexificación de la energía obtenida	91
CAPÍTULO 7: Conclusiones		93
Bibliografía		96
Anexos		101



Índice de figuras

Figura 1.1: Localización de deformación que se produce para cargas de tracción en muestras de acero con bajo contenido de carbono.	15
Figura 1.2: Localización de deformación en forma de una banda de corte plana.	16
Figura 1.3: Localización de la deformación que se produce para cargas de compresión en muestras de arcilla limosa cilíndrica	16
Figura 1.4: Comportamientos en el diagrama uni-axial de esfuerzo-deformación	17
Figura 1.5: Región espinodal de la gráfica esfuerzo-deformación.....	18
Figura 1.6: Diferentes tipos de zona de proceso de fractura (Bazant, 1982).....	19
Figura 1.7: Gráficas esfuerzo-deformación típicas para metales (izquierda) y concreto (derecha)	19
Figura 1.8: Definición del problema unidimensional.....	22
Figura 2.1: Deformación lineal en un cuerpo deformado.....	26
Figura 2.2: Sistema discreto de n partículas.....	27
Figura 2.3: Fuerza del masa y tracción superficial.....	28
Figura 2.4: Energía de deformación incremental dW y energía de deformación W para carga uni-axial.	36
Figura 2.5: Gráfica esfuerzo-deformación esquemática para un material elasto-plástico.....	37
Figura 3.1: Dispositivo de fricción unidimensional que ilustra el modelo de plasticidad planteado.	42
Figura 3.2: Caracterización de la respuesta de fricción para un dispositivo con $\sigma_Y > 0$	44
Figura 3.3: Representación esquemática de la respuesta mecánica de un modelo de fricción elástica unidimensional	47
Figura 3.4: Plasticidad con endurecimiento por deformación.....	47
Figura 3.5: Respuesta de un modelo lineal de endurecimiento isotrópico en un ciclo cerrado... 48	
Figura 3.6: (a) El módulo de tangente y (b) el módulo de plástico.	50
Figura 3.7: Ejemplo de un paso elástico incremental desde un estado plástico.	52
Figura 3.8: El estado de prueba viola la condición de restricción $f \leq 0$	53
Figura 3.9: Algoritmo de mapeo de retorno.	55
Figura 4.1: Barra bajo tensión uniaxial.	66
Figura 4.2: Resultados preliminares para valores de la de tabla 4.1.	66



Figura 4.3: a) Diagrama esfuerzo-deformación con ablandamiento lineal, b) Abanico de posibles trayectorias del diagrama fuerza-desplazamiento. 68

Figura 4.4: a) Múltiples valores de deformación correspondientes a un mismo esfuerzo, b) Distribución constante a trozos de la deformación. 68

Figura 4.5: Efecto del refinamiento de la malla en los resultados numéricos: a) Diagrama de fuerza-desplazamiento b) Distribución de deformaciones. 70

Figura 5.1: Función de densidad de energía con los resultados preliminares de la sección 4.1.1. 73

Figura 5.2: Figura esquemática de una cadena unidimensional de átomos..... 74

Figura 5.3: Diagrama esfuerzo-deformación derivado de una ley de separación-tracción cohesiva. 78

Figura 5.4: Convexidad del potencial de esfuerzo W 82

Figura 5.5: Convexificación de un potencial de esfuerzo no convexo..... 83

Figura 5.6: Pendiente del potencial convexificado W_c 84

Figura 6.1: Diagrama esfuerzo-deformación con módulo plástico ajustado a la malla 86

Figura 6.2: Perfil de deformaciones debido al módulo plástico ajustado a la malla 86

Figura 6.3: Salto de desplazamiento del problema ajustado a la malla..... 87

Figura 6.4: Diagrama fuerza-desplazamiento para el problema ajustado a la malla y la energía resultante 87

Figura 6.5: Convexificación del potencial obtenido 91



Índice de tablas

Tabla 4.1: Valores constitutivos del material	66
Tabla 6.1: Valores usados para experimentación numérica	85
Tabla 6.2: Parámetros de orden evaluados para diferentes valores de desplazamiento	90



Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Andrés Mauricio Zumba Iñamagua en calidad de autor/a y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación titulación **“Enfoque variacional a la homogenización de una barra heterogénea en fase post-crítica”**, de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, Octubre de 2018

Andrés Mauricio Zumba Iñamagua

C.I: 0105336770



Cláusula de Propiedad Intelectual

Andrés Mauricio Zumba Iñamagua, autor del trabajo de titulación “**Enfoque variacional a la homogenización de una barra heterogénea en fase post-crítica**”, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor/a.

Cuenca, Octubre de 2018

A handwritten signature in blue ink, written over a horizontal line. The signature is stylized and appears to read 'Andrés Mauricio Zumba Iñamagua'.

Andrés Mauricio Zumba Iñamagua

C.I: 0105336770



AGRADECIMIENTOS

A mi tutor Ing. Esteban Samaniego por su voluntad y paciencia. Ha sido un gran privilegio poder contar con su guía y conocimientos.

A la Universidad de Cuenca y a sus docentes, a quienes les debo gran parte de mis conocimientos en todos estos años de estudio.

A mi familia, pilar fundamental de este logro.

A todos mis amigos y compañeros, que poco a poco se han ido sumando a lo largo de mi vida, los que me han dado ánimos para poder luchar por este logro.

A todas aquellas personas que de alguna manera estuvieron presentes en esta etapa.

Mauricio Zumba



DEDICATORIA

A mi madre, que a lo largo de mi vida me ha enseñado el valor del esfuerzo y el sacrificio para conseguir las cosas.

A mi hermano Juan Carlos, tú que jamás me permitiste que me diera por vencido, y que siempre me has apoyado en todo lo posible; nunca me faltes.

A mi padre, por demostrarme que el sacrificio y la entrega son recompensados.

A mis hermanas, por esa alegría y confianza que siempre han tenido para mí, gracias por apoyarme y cuidar de mí.

A toda mi familia, todos mis logros no son más que frutos de la semilla que ellos han sembrado en mí.

Mauricio Zumba



Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

A pesar de la evidente necesidad de garantizar la estabilidad de las construcciones humanas, el dimensionamiento estructural se realiza básicamente a partir del conocimiento práctico adquirido a base de experiencia y ensayos en laboratorio, y no de un conocimiento analítico de los procesos físicos envueltos. La determinación de la pérdida de estabilidad de cualquier estructura se presenta como un problema de formidable complejidad en la que es necesario el conocimiento de varias ciencias para llegar a resultados aproximados. El desarrollo de las matemáticas, la termodinámica, la ciencia de los materiales, la computación por ordenador, y las técnicas experimentales son herramientas sin las cuáles hoy parece imposible el planteamiento de cualquier diseño estructural. No obstante, a pesar del enorme desarrollo de estas ciencias en la segunda mitad del siglo XX y de los avances alcanzados, las técnicas de análisis actual a veces son incapaces de determinar la fuerza última que será capaz de sustentar una estructura.

Se entiende por Mecánica de Falla Material (MFM) al modelado de materiales que pueden experimentar procesos inelásticos irreversibles de plasticidad y/o daño, modos de intensa deformación en zonas de reducidas dimensiones y como consecuencia final el desarrollo gradual de fisuras, fracturas o bandas de deslizamiento libres de tensión. Desde el punto de vista de la Mecánica del Continuo la falla está asociada al fenómeno de Localización de Deformaciones inducido por inestabilidades a nivel material (Sánchez, 2006).

Estudiar las inestabilidades materiales permite entender importantes estados críticos de carga y de deformación a los que puede verse sometido un elemento estructural; por lo tanto, dicho estudio desempeña un papel muy importante en el análisis límite de estructuras solicitadas a esfuerzos de tracción o de compresión. Dichas inestabilidades pueden, en algunos casos, ser la causa directa de la propagación rápida de una fisura, dando así origen a un fenómeno de fractura rápida y causando fallas catastróficas. El estudio de los criterios que predicen la aparición del fallo por inestabilidades materiales es muy importante, no solo desde un punto de vista científico e ingenieril, sino también desde un punto de vista económico (Omar & Prado, 2010).



1.2 Motivación

El análisis del comportamiento mecánico de los materiales deformables hasta el completo agotamiento de su capacidad resistente es un tema de reconocida importancia en ciencias, tecnología e ingeniería. Los desarrollos y resultados obtenidos en esta área poseen aplicaciones directas a problemas prácticos reales brindando un conocimiento más preciso de la resistencia límite de las estructuras, hecho que se traduce en diseños más confiables y económicos.

En el contexto de las estructuras civiles, su estudio permite predecir los posibles mecanismos de falla, estimar la carga última asociada a dicho mecanismo, evaluar el grado de seguridad real como así también la reserva de resistencia y/o ductilidad en régimen post-crítico de los sistemas estructurales, factores de suma importancia en la etapa de cálculo y verificación (Sánchez, 2006).

La aparición de la teoría de la elasticidad y la capacidad de determinar el campo de tensiones en las estructuras, en los casos complejos mediante el uso de los métodos numéricos, ha llevado a la determinación del límite de estabilidad de muchas estructuras, pero también ha sido el principal factor de muchos fracasos en la ingeniería. Es una hipótesis de cálculo habitual el considerar como límite de diseño la máxima tensión alcanzada en un punto, este procedimiento requiere la solución de un problema de elasticidad. Es común el diseño de estructuras de tal modo que no dejen de trabajar en su régimen elástico. No obstante la estabilidad de una estructura dañada por sobrecargas, defectos, impactos, estructuras sometidas a sismos, etc., es un tema que requiere ser incluido en los criterios de diseño y su tratamiento mediante la elasticidad no es suficiente.

El comportamiento elástico se caracteriza por la reversibilidad inmediata de la deformación en la liberación del esfuerzo. Aunque es común en esfuerzos pequeños, este comportamiento se vuelve "raro" para materiales sometidos a una gran deformación. De hecho, la deformación elástica está limitada al 1% para los materiales cristalinos y los materiales amorfos en su estado rígido y disminuye al 0.1% y menos para el acero y al 0.001% para los materiales granulares. En la práctica, los únicos materiales que se comportan elásticamente a gran tensión son el caucho, donde la extensibilidad puede alcanzar del 500% al 1000%, y los tejidos blandos biológicos. Sin embargo, el interés en el modelado elástico no se limita a materiales que se comportan realmente elásticamente; también es importante describir la rama de carga del comportamiento constitutivo de los materiales elasto-plásticos (en términos generales, el comportamiento exhibido cuando la descarga nunca está involucrada) (Bigoni, 2012).

La mecánica de los medios continuos es la herramienta de certificación estructural más utilizada. Ésta parte de la hipótesis que las variables del problema pueden ser descritas mediante ecuaciones

continuas. La mayoría de información sobre la resistencia de materiales se obtiene de ensayos uni-axiales, ya sean a compresión o tracción.

Durante la deformación, el material puede permanecer en el rango elástico, pero generalmente está involucrada la inelasticidad. El surgimiento de deformaciones severas implica la posibilidad de la nucleación y el desarrollo de modos de deformación no triviales que incluyen deformaciones localizadas, bandas de corte y fracturas, que surgen de campos casi uniformes. La descripción de las condiciones en que pueden aparecer estos modos, que pueden analizarse a través de la teoría de bifurcación y estabilidad, representa la clave para la comprensión del fallo de los materiales y para el diseño de elementos estructurales que funcionan en condiciones extremas.

La determinación de la estabilidad de un sistema es un tema de gran interés en muchas ramas de conocimiento. En la mecánica estructural la importancia de un buen análisis de estabilidad reside en predecir la capacidad de la estructura de sustentar sobrecargas, acumular daño o ser insensible a ciertas imperfecciones ya sea en las tolerancias de la fabricación o en los materiales utilizados (Maimí, 2006).

La localización de la deformación es un ejemplo de inestabilidad del material, es decir, inestabilidad que puede comenzar a crecer en una pequeña parte, "en un punto", en un cuerpo y crecer hasta que el comportamiento global se vea fuertemente afectado.



Figura 1.1: Localización de deformación que se produce para cargas de tracción en muestras de acero con bajo contenido de carbono.

El término localización se usa comúnmente para referirse a situaciones donde ocurren concentraciones de tensión dentro de una zona crítica como consecuencia de una bifurcación de un comportamiento constitutivo local del material. Dichas zonas críticas, por ejemplo, bandas de corte (shear band), se observan tanto en metales como en geomateriales (Miehe & Schröder, 1994).

La localización de la deformación es un fenómeno extremadamente común y se considera la clave para comprender la falla en los materiales. Generalmente se identifica con la condición de pérdida

de elipticidad de las ecuaciones que rigen el equilibrio incremental. Este hecho plantea problemas cuando las ecuaciones están fuera del rango elíptico, lo que, en términos de un análisis de elementos finitos, implica que los resultados se vuelven dependientes de la malla. Esta peculiaridad de la pérdida de elipticidad ha sido la base de un inmenso esfuerzo de investigación, que, sin embargo, parece aún muy lejos de haberse concluido (Bigoni, 2012).

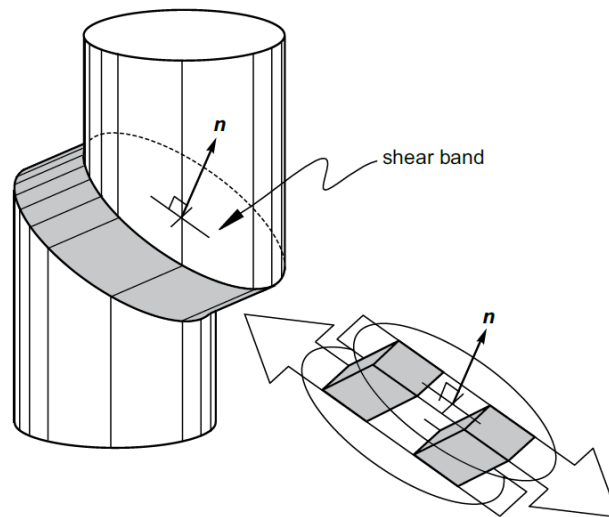


Figura 1.2: Localización de deformación en forma de una banda de corte plana.



Figura 1.3: Localización de la deformación que se produce para cargas de compresión en muestras de arcilla limosa cilíndrica

El presente trabajo se enfoca en analizar inestabilidades en materiales que presentan un comportamiento especialmente interesante después de pasar por el límite elástico: ablandamiento por deformación. Cuando un material es analizado en el límite elástico la curva tensión-deformación tiene características muy bien conocidas, pero no sucede así cuando se estudia el rango inelástico especialmente en materiales cuasi-frágiles. Entonces se hace interesante estudiar

la trayectoria seguida por esta curva desde el punto de bifurcación hasta la rotura (Merán, 2016). Vale mencionar que el primer análisis de estabilidad en la mecánica de los sólidos se debe al trabajo de Euler en 1744.

Los modelos que mantienen la relación constitutiva tangente (K) entre el incremento de deformaciones y tensiones definida positiva se llaman de endurecimiento y los que, a partir de cierto instante, pasa a ser definida negativa, de ablandamiento. El comportamiento del material según el modelo sea de endurecimiento o ablandamiento es completamente distinto. Los modelos con endurecimiento son incapaces de modelar la fractura pues la región del material que entra en régimen no-lineal tiende a ocupar todo el volumen del elemento. Estos modelos son apropiados para el tratamiento de daño (o plasticidad) distribuido. Por otro lado, los modelos con ablandamiento sirven para simular la aparición de grietas a lo largo del material, un modelo definido en el continuo y cuasi-estático con una ley constitutiva con ablandamiento produce la localización de las deformaciones en un plano, conocido como el plano de falla.

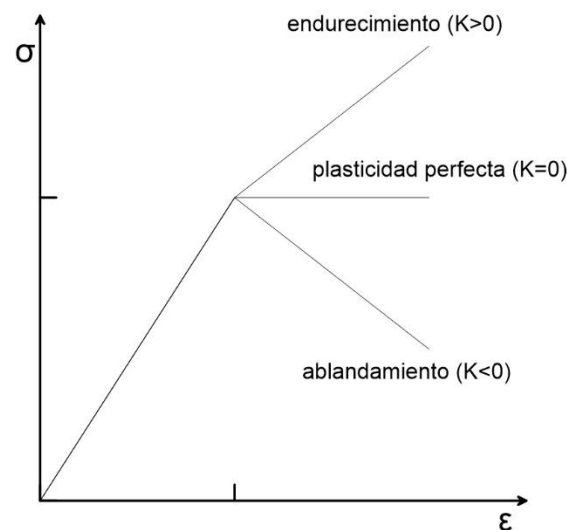


Figura 1.4: Comportamientos en el diagrama uni-axial de esfuerzo-deformación

Ciertamente la modelización del comportamiento de un material con ablandamiento es más crítica que el de los materiales con endurecimiento por la inestabilidad y la fuerte sensibilidad a las perturbaciones que exhibe la respuesta. No obstante, cualquier material debe tener una región de ablandamiento pues si se aplica una deformación creciente en un punto del material con un modelo con endurecimiento las tensiones que este sustentará crecerán indefinidamente y también la densidad de energía disipada. Un modelo con ablandamiento restringe la densidad de energía que cada punto del material puede disipar (Maimí, 2006).

El marco del equilibrio unidimensional de las barras proporciona un enfoque atractivo para estudiar algunos de los fenómenos más sutiles de la mecánica no lineal de sólidos (Ericksen,

1975). Cuando una estructura flexible tiene una dimensión notablemente más grande que las otras dos, a menudo puede tratarse como una viga, una estructura unidimensional. Muchas estructuras de ingeniería pueden ser idealizadas como vigas, dando lugar a ecuaciones mucho más simples de las que se obtendrían si se usara una elasticidad tridimensional completa para modelar la estructura (Hodges, Atilgan, Cesnik, & Fulton, 1992).

En un documento pionero, Ericksen (Ericksen, 1975) ha demostrado que cuando se prescriben desplazamientos en los extremos de una barra (denominada carga en un dispositivo duro) se caracteriza por una curva de esfuerzo/deformación no monótona con una región espinodal (Fig. 1.5), se hacen posibles varias configuraciones, que muestran saltos de tensión a través de interfaces que separan zonas de deformación uniforme.

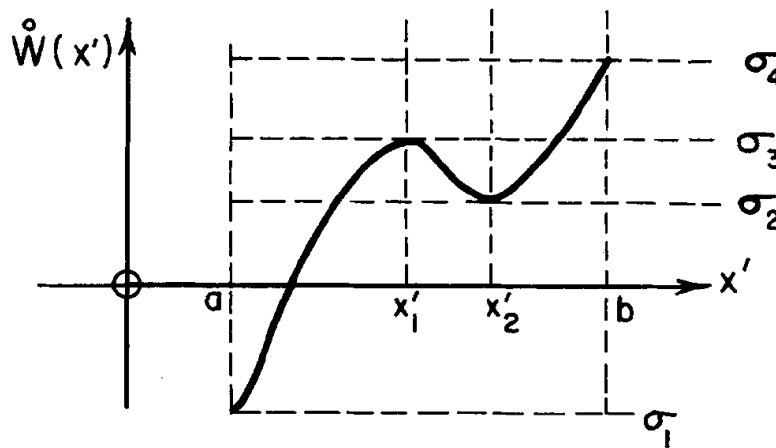


Figura 1.5: Región espinodal de la gráfica esfuerzo-deformación.

En particular, dado que los ensayos mecánicos sobre elementos materiales generalmente consisten en imponer desplazamientos (fuerzas resultantes) en ciertas superficies externas de un volumen finito de material y medir las fuerzas (desplazamientos) resultantes en las mismas superficies, el esfuerzo y la deformación no pueden controlarse directamente, las inestabilidades que se producen en una prueba mecánica siempre deben referirse a un problema de valor límite específico (Bigoni, 2012).

Las deformaciones homogéneas continuas en los materiales "dúctil/plástico" y "cuasi-frágil" están limitadas por la aparición de diferentes modos de falla que tienen lugar a diferentes escalas. En particular, los experimentos muestran que la falla no es un evento simple; más bien la falla es un fenómeno progresivo influenciado por varios mecanismos concurrentes; lo que requiere que exista la suficiente diferencia de escala entre el tamaño de las discontinuidades del material y el tamaño de la estructura a calcular. Tras esta simplificación es posible tratar el problema mediante ecuaciones diferenciales (Maimí, 2006).

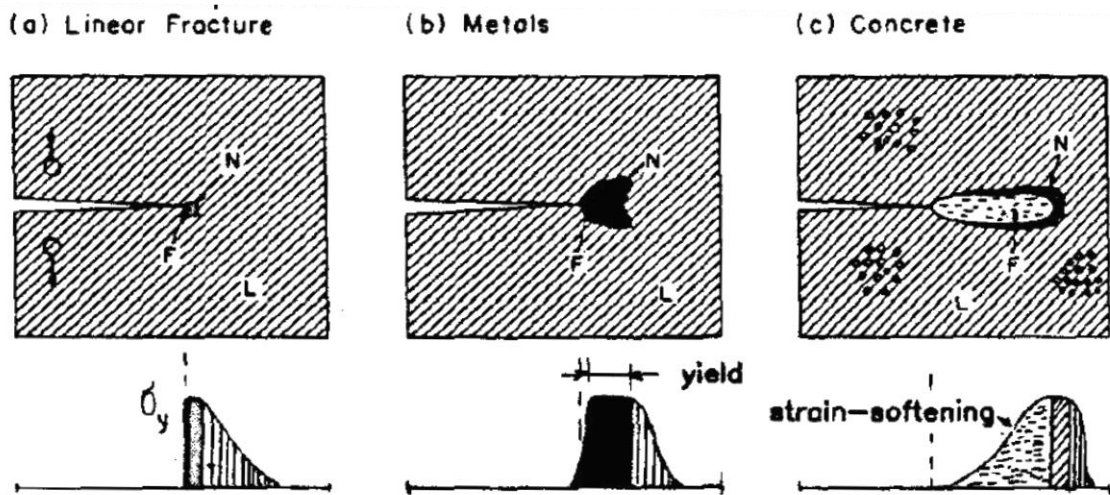


Figura 1.6: Diferentes tipos de zona de proceso de fractura (Bazant, 1982).

La zona del proceso de fractura, que representa esa parte de la zona no lineal en la que el material experimenta microgrietas progresivas manifestadas por ablandamiento (una disminución de la tensión al aumentar la deformación), sigue siendo pequeña en fractura dúctil de metales, pero en concreto a menudo es muy grande (en comparación con la sección transversal de la estructura), debido al gran tamaño del agregado (Fig. 1.6). Por esta razón, las teorías de fracturas no lineales desarrolladas para metales no pueden ser transplantadas indiscriminadamente al concreto. Además, dado que la deformación plástica del hormigón en tensión es despreciable y el ablandamiento por deformación en una prueba de tracción no está precedida por una meseta (plateau) horizontal, el límite de la zona de proceso de fractura puede considerarse casi idéntico al límite de la zona no lineal, mientras que en los metales estos límites están muy separados (Fig. 1.7) (Bazant & Oh, 1983).

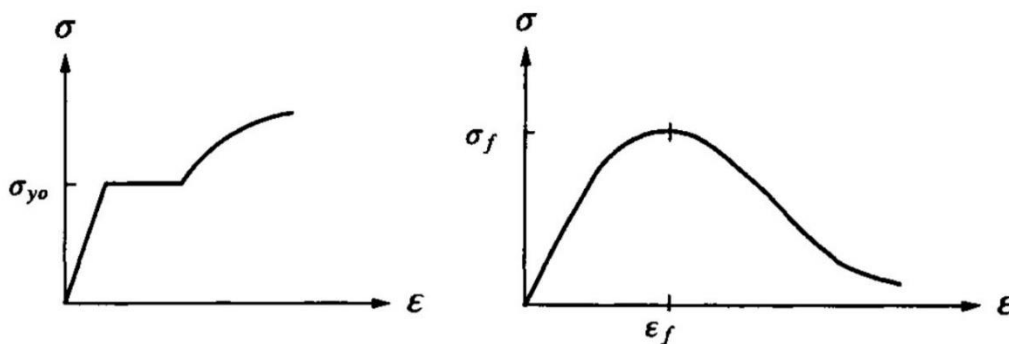


Figura 1.7: Gráficas esfuerzo-deformación típicas para metales (izquierda) y concreto (derecha)

Una grieta cohesiva, o dúctil, se produce cuando el campo de desplazamiento sufre una discontinuidad, mientras que todavía se asocia a un esfuerzo de tracción que no desaparece. El



uso de un enfoque variacional da como resultado una formulación débil y sin derivadas, proporciona medios efectivos para tratar los conceptos de bifurcación y estabilidad, es intrínsecamente discreto e indica una forma natural y racional de definir algoritmos numéricos eficientes (Alessi, 2013).

En el pasado, la simulación de una discontinuidad en una malla de elementos finitos era uno de los principales problemas relacionados con el enfoque de grietas discreto. Hoy en día, las técnicas computacionalmente efectivas están disponibles, por ejemplo, mallado adaptativo (Askes & Sluys, 2000); (Pandolfi & Ortiz, 2002); el enfoque fuerte de discontinuidad (SDA) (J. Simo, Oliver, & Armero, 1993); (Oliver, Huespe, & Samaniego, 2003) el método de elemento finito extendido (Moës & Belytschko, 2002); (Wells & Sluys, 2001), que, junto con la adopción de modelos de grietas cohesivas, han mejorado en gran medida la precisión y la eficiencia de la simulación (Comi, Mariani, Negri, & Perego, 2006).

El desarrollo posterior del cálculo de las variaciones ha sido emocionante y ha conducido, en particular, a una comprensión buena, aunque no exhaustiva, de los problemas unidimensionales. Por el contrario, para los problemas multidimensionales muchas preguntas básicas siguen sin resolverse. Muchas de estas preguntas se han visto iluminadas por una interacción fecunda en los últimos 20 años con problemas derivados de la mecánica sólida y la ciencia de los materiales (Bigoni, 2012).

Los enfoques variacionales, en los que la forma del incremento de grietas se elige para minimizar la energía funcional, han atraído considerable atención en los últimos tiempos en vista de su sólida base mecánica. Los resultados obtenidos en trabajos como (Bourdin, Francfort, & Marigo, 2000), (Angelillo, Babilio, & Fortunato, 2003), (Dal Maso & Toader, 2002), han sido presentados para materiales perfectamente frágiles, que emplean un potencial dado por la suma de energías elásticas y de fractura.

El enfoque variacional se basa simplemente en tres conceptos: la condición de irreversibilidad, una condición de estabilidad global, local o diferencial y el balance de energía. El modelo resultante posee una gran flexibilidad en las posibles respuestas acopladas, dependiendo de los parámetros constitutivos.

La variabilidad de las propiedades del material no se considera en la escala estructural, para el cálculo se utiliza un material homogeneizado con las propiedades uniformes a lo largo del volumen. Cuando se analiza una estructura con una distribución de deformaciones no uniforme la posición de la grieta viene definida por la región con las deformaciones más grandes. Este análisis considera los aspectos determinísticos de la fractura, energía y resistencia. Si se considera



una probeta con un campo uniforme de tensiones el tratamiento homogeneizado resulta en una solución no realista, todos los puntos del material dañan en el mismo instante. No obstante el material romperá por un solo plano de fallo. Para garantizar la formación de una grieta se requiere la inclusión de algún defecto que promueva su crecimiento en un plano (Maimí, 2006).

La mecánica de los medios continuos parte de la hipótesis que el material es homogéneo y continuo en una determinada escala, luego las ecuaciones que describen el medio y sus propiedades termomecánicas pueden ser representadas mediante funciones continuas. Evidentemente el material no es continuo, ya desde su escala atómica hasta aquellos materiales compuestos de diferentes agregados, pasando por la distribución de defectos iniciales o generados a lo largo de su vida. Se define el elemento representativo de volumen como aquel donde los fenómenos a estudiar pueden ser promediados a lo largo del volumen. Se pueden definir distintas escalas, estas no son absolutas sino relativas al fenómeno a estudiar:

Microescala: Donde se estudian los mecanismos que provocan la elasticidad, la disminución de rigidez o la plasticidad. La elasticidad se encuentra relacionada con los movimientos de los átomos. La plasticidad en los metales se estudia analizando el movimiento relativo de las distintas dislocaciones entre los cristales del material. El despegue entre los distintos cristales o la rotura de ligaduras atómicas es la fuente del daño.

Mesoescala: Donde se pueden definir las ecuaciones constitutivas continuas para el análisis mecánico. Aquí se define el elemento representativo de volumen. La mesoescala es donde los fenómenos de la micro escala pueden ser promediados y ser tratados como continuos. Estos serán válidos mientras los procesos micromecánicos puedan ser considerados como estadísticamente homogéneos dentro el elemento representativo de volumen. A partir de este momento el tratamiento de la evolución de las variables internas debería realizarse a partir de otras consideraciones.

Macroescala: Es la escala de las estructuras a analizar.

La literatura contiene una cantidad considerable de enfoques posibles que se caracterizan todos por la introducción de una cierta escala de longitud interna. Los ejemplos son modelos dependientes de la tasa, modelos no locales, modelos micropolares, modelos de gradiente y enfoques de energía de fractura. (Miehe & Schröder, 1994)

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Desarrollar la formulación teórica, implementación computacional y análisis de un modelo numérico de un elemento unidimensional (barra heterogénea) que ha entrado en su fase post-crítica, en la cual se presentarán inestabilidades materiales en el elemento debido a la presencia de ablandamiento.

1.3.2 Objetivos específicos

- Formular un modelo constitutivo para la determinación del comportamiento mecánico de un material heterogéneo que sufre ablandamiento para el caso de una barra en cuyos extremos se imponen desplazamientos.
- Encontrar una formulación homogeneizada para el análisis del elemento a dos escalas.
- Desarrollo de un programa de ordenador utilizando la herramienta de cálculo MATLAB que realice el cálculo del estado de la barra para diferentes niveles de carga con el modelo numérico implementado.
- Analizar el régimen post-bifurcación en el elemento debido al fenómeno de ablandamiento por deformación, mediante la implementación de un modelo discretizado.
- Realizar el cálculo de varios ejemplos y validar el modelo propuesto mediante resultados existentes en la literatura.
- Analizar los mecanismos que producen los modos de fallo que dominan el comportamiento de materiales heterogéneos.

1.4 Metodología

Se plantea el problema de describir la evolución una barra de longitud L , sujeta a un proceso de carga cuasiestático en el que se controlan desplazamientos. El esquema de la barra y las condiciones de contorno a las que es sometida se pueden observar en la Figura 1.8.

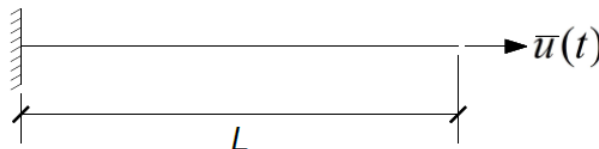


Figura 1.8: Definición del problema unidimensional



Para el presente trabajo, se pretende desarrollar formulaciones multi-escala, variacionalmente consistentes, utilizando para tal fin el concepto de Elemento de Volumen Representativo (RVE por las siglas en inglés: Representative Volume Element) juntamente con técnicas específicas de homogeneización computacional (Miehe, Schröder, & Becker, 2002), para el caso de una barra sometida a desplazamientos impuestos en sus extremos. De esta manera, se pretende estudiar fenómenos muy complejos mediante un ejemplo sencillo, transparentando así los mecanismos fundamentales que subyacen a dichos fenómenos, en el espíritu de lo realizado en (Truskinovsky, 1996) y (Ulloa, Rodríguez, & Samaniego, 2016)

La metodología general utilizada para el desarrollo de este trabajo se detalla a continuación:

- Resumir el estado del arte en la mecánica del fallo de materiales y en la teoría de homogeneización, según el enfoque de varios investigadores.
- Formular los modelos teóricos a analizar, cumpliendo con las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio internas.
- Obtener los correspondientes modelos numéricos a partir de los modelos teóricos.
- Implementar los modelos numéricos obtenidos mediante un código de MATLAB.
- Realizar experimentación numérica.
- Analizar los modelos formulados a la luz de los resultados obtenidos mediante experimentación numérica y de conceptos teóricos de la mecánica de sólidos.



Capítulo 2

La Mecánica del Modelamiento Constitutivo

2.1 Fundamentos de la Mecánica del Medio Continuo

En las teorías de la Mecánica del Medio Continuo, un cuerpo es un conjunto de elementos que están en correspondencia uno a uno con los puntos de una región de tres espacios euclidianos en cada instante de tiempo. Esta región se llama la configuración del cuerpo. Asociados con el cuerpo hay ciertas entidades físicas, como la masa y la energía, que se distribuyen suavemente por todo el cuerpo. Los cambios discontinuos en estas entidades están permitidos en puntos, líneas o superficies aisladas. Tales discontinuidades se pueden interpretar como una superficie de fractura, una onda de choque, una lámina de vórtice, etc., dividen el material en partes que pueden tratarse como un continuo (Dill, 2007).

El material puede tratarse satisfactoriamente como un continuo cuando la distancia entre las partículas físicas reales es muy pequeña en comparación con las dimensiones características del problema. Por lo tanto, la teoría del continuo se puede aplicar a los gases, líquidos y sólidos en la mayoría de los casos. Las teorías clásicas como la aerodinámica, la mecánica de fluidos, la elasticidad, la visco-elasticidad y la plasticidad son ramas especiales de la mecánica del medio continuo. Por otro lado, la teoría cinética de los gases no es una teoría del continuo.

En forma de esquema, la solución de un problema de mecánica sólida en cada instante de tiempo debe satisfacer:

- Ecuaciones cinemáticas o de movimiento.
- Las leyes de conservación de la física
- Leyes constitutivas materiales o relaciones esfuerzo-deformación.

2.1.1 Principios Cinemáticos

Se elige una región particular R como configuración de referencia y cada partícula se identifica por el vector de posición X , correspondiente a la configuración de referencia. Los componentes de X en el marco de referencia elegido se llaman coordenadas del material. La configuración de referencia a menudo se elige como la configuración del cuerpo en el momento $t = 0$, pero podría ser la configuración en cualquier momento.



Un mapeo χ de una configuración a otra se llama deformación del cuerpo. El rango V del mapeo se llama configuración deformada. El punto x ocupado por la partícula en la configuración deformada se denomina posición de la partícula en la configuración deformada:

$$x = \chi(X) \quad (2.1)$$

En diferentes momentos, el cuerpo puede ocupar diferentes configuraciones de modo que una partícula material ocupa una serie de puntos en el espacio. Una secuencia suave de configuraciones en el tiempo describe un movimiento del cuerpo. El mapeo χ_t desde la configuración de referencia a la configuración deformada V_t se llama movimiento con respecto a esa configuración de referencia:

$$x = \chi_t(X) = \chi(X, t) \quad (2.2)$$

Para X fijo, el movimiento describe una curva en el espacio que se llama la ruta de la partícula. Se supone que esta curva es suave. La velocidad de la partícula a lo largo de este camino es

$$v = \dot{x} = \frac{d}{dt} \chi(X, t) = \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t} = v_R(X, t) \quad (2.3)$$

La tasa de cambio de velocidad a lo largo del camino es la aceleración:

$$a = \dot{v} = \frac{d}{dt} v(X, t) = \left. \frac{\partial v_R(X, t)}{\partial t} \right|_X \quad (2.4)$$

También se puede identificar una partícula por su posición x en el tiempo t . Esto se llama descripción espacial. La descripción material del movimiento comúnmente se llama Lagrangiano y la descripción espacial se llama comúnmente Euleriano. En la formulación espacial, todas las entidades son funciones de (x, t) en lugar de (X, t) . Desde este punto de vista, las partículas fluyen más allá de un punto fijo en el espacio.

Deformación – Desplazamiento

Cuando se cambia la posición relativa de dos puntos en un cuerpo continuo, se dice que el cuerpo está deformado. Si la distancia entre cada par de puntos en el cuerpo permanece constante durante los movimientos del cuerpo, entonces el cuerpo se somete a un movimiento corporal rígido. Los desplazamientos de un movimiento corporal rígido consisten en traslaciones y rotaciones, por lo que las traslaciones y rotaciones se denominan desplazamientos corporales rígidos. El análisis de la deformación se refiere al estudio de las deformaciones de un cuerpo continuo, que es un problema geométrico y no está relacionado con las propiedades del material corporal. La

especificación de la deformación en un punto es, por lo tanto, la misma para los cuerpos elásticos o plásticamente deformables.

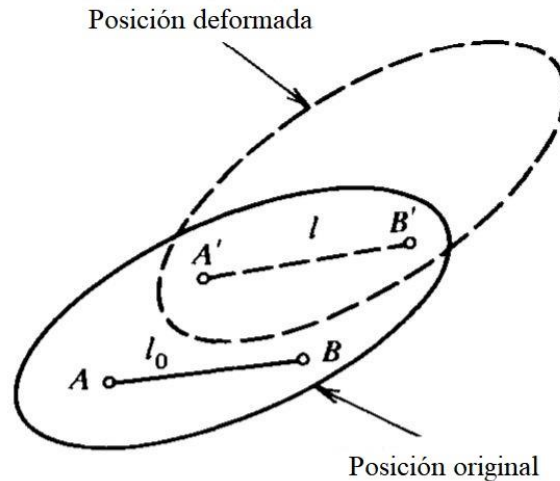


Figura 2.1: Deformación lineal en un cuerpo deformado

Si A y B son dos puntos dentro de un cuerpo, l_0 se define como una distancia de separación cuando el cuerpo esté libre de cualquier fuerza aplicada, como se muestra en la Figura 2.1. Si el cuerpo es sometido a la acción de alguna fuerza, AB ocupará una nueva posición deformada $A'B'$. La distancia AA' a través de la cual se ha movido el punto A se llama desplazamiento de A . Si $A'B'$ es paralelo e igual a AB , el desplazamiento ha sido del tipo de traslación, pero si $A'B'$ no es paralelo a AB , entonces los movimientos son a la vez rotación y traslación. Si la distancia l no es igual a l_0 , entonces ha habido un desplazamiento relativo de B con respecto a A y el cuerpo ha sufrido una deformación. Si l_0 se toma lo suficientemente pequeño, entonces, esta deformación se puede considerar homogénea a lo largo de AB y el desplazamiento relativo $(l - l_0)$ se puede considerar como proporcional a l_0 . La relación del cambio de longitud a la longitud original se define entonces como la deformación directa o lineal. Así

$$\text{deformación lineal } AB = \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

2.1.2 Leyes de Balance

Las leyes de conservación de la física son la conservación de la masa, balance del momento lineal, balance del momento angular y balance energía (o primer principio de la termodinámica). Estas leyes son aplicables a un cuerpo de cualquier material. A estas leyes de conservación-balance es necesario añadir una restricción (que no puede ser entendida rigurosamente como un postulado de conservación-balance) introducida por el segundo principio de la termodinámica.

Ley de conservación de la masa

La masa de un cuerpo se conserva cuando solo se considera el comportamiento termo-mecánico, se considera un sistema cerrado en el que no hay intercambio de masa con el exterior y no puede variar con el tiempo al experimentar una perturbación. Si se conoce la densidad en la configuración de referencia, esta relación determina la densidad en cada configuración deformada.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (2.5)$$

Las leyes de equilibrio de la mecánica a menudo se postulan de esta forma, especialmente para los procesos de transporte. Este enfoque de "volumen de control" es una alternativa para seguir una porción fija de material. Para una extensión de esta formulación ver (Dill, 2007).

Ley de balance del momento

Supóngase un sistema discreto formado por n partículas tal que la partícula i tiene una masa m_i , una aceleración a_i y está sometida a una fuerza f_i (Figura 2.2).

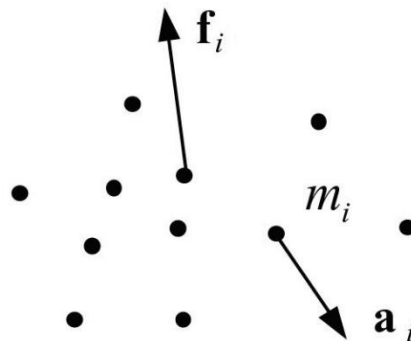


Figura 2.2: Sistema discreto de n partículas

La segunda ley de Newton establece que la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la misma por su aceleración. Utilizando la definición de aceleración como derivada material de la velocidad y teniendo en cuenta el principio de conservación de la masa (la variación de la masa de la partícula es igual a cero) se tiene:

$$f_i = m_i a_i = m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt} (m_i v_i) \quad (2.6)$$

Definiendo la cantidad de movimiento de la partícula como el producto de su masa por su velocidad ($m_i v_i$), la ecuación (2.6) expresa que la fuerza que actúa sobre la partícula es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la misma.

Aplicando, ahora la segunda ley de Newton al sistema discreto formado por n partículas tendremos:

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n m_i a_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i v_i \quad (2.7)$$

En donde la expresión (2.7) representa la ecuación de balance en un sistema de partículas; considerando que un cuerpo está formado por partículas distribuidas constantemente, si la ecuación (2.7) es llevada al límite, resultaría

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i v_i \equiv \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV \quad (2.8)$$

Estos conceptos, correspondientes a la mecánica clásica, pueden ahora extenderse a la Mecánica de Medios Continuos, definiendo la cantidad de movimiento de un volumen material V .

El principio de balance de la cantidad de movimiento postula que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un volumen material del medio continuo es igual a la variación por unidad de tiempo de su cantidad de movimiento:

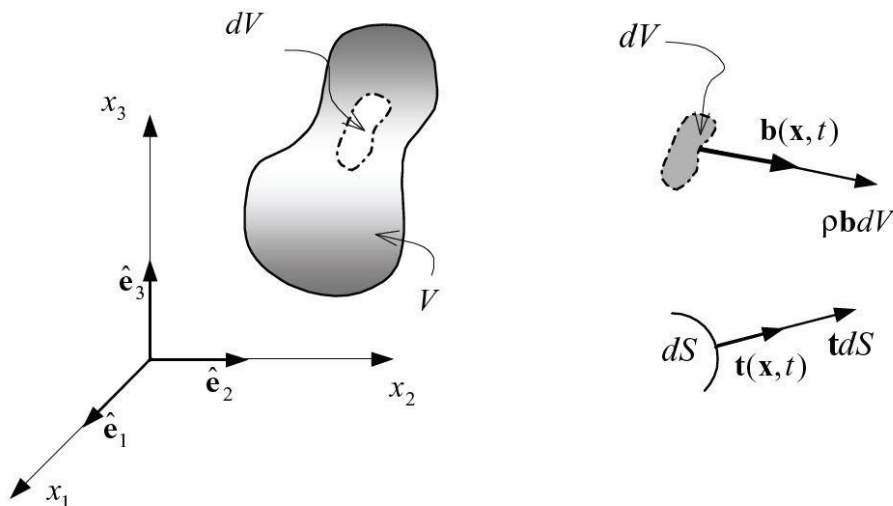


Figura 2.3: Fuerza del masa y tracción superficial

Donde la resultante de todas las fuerzas que actúan en el medio continuo es

$$\int_V \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (2.9)$$

Estas incluyen fuerzas de masa $\mathbf{b}(x, t)$ y fuerzas de superficie $\mathbf{t}(x, t)$. Aplicando la ecuación del balance de la cantidad de movimiento con la resultante (2.8) se obtiene la forma integral del balance de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v dV = \int_V \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (2.10)$$

Luego de utilizar el teorema de la divergencia de Gauss e introducir el tensor de esfuerzos de Cauchy σ , utilizando la relación $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \sigma$ en la última expresión, se obtiene de forma local:

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = \rho \frac{dv}{dt} \quad (2.11)$$

Debido al planteamiento axial del modelo unidimensional que se desarrolla en este trabajo, el significado del balance de momento angular es algo trivial. Esta ecuación de balance resulta en:

$$\sigma = \sigma^T \quad (2.12)$$

Para poder explicar las leyes que rigen la conservación de la energía, es necesario adentrarse en algunos conceptos termodinámicos, los cuales se explican en la siguiente sección.

2.2 Enfoque termodinámico para el modelado constitutivo

La termodinámica proporciona restricciones importantes sobre la forma de las relaciones constitutivas, pero no más que restricciones. Revela simetrías debido a la interacción de diferentes variables, y muestra qué acoplamientos cruzados entre diferentes variables esperar y cómo tratarlos. Las restricciones de la termodinámica son particularmente importantes y útiles en el tratamiento de condiciones de "cambio", como las condiciones de carga y descarga en la plasticidad. Sin embargo; se debe tener en cuenta que una ley constitutiva no se puede derivar de la termodinámica; solo su forma general admisible puede hacerlo (Jirásek & Bazant, 2002).

2.2.1 Conceptos básicos y leyes de la termodinámica

El enfoque termodinámico para la descripción de un continuo parte de la suposición de que el estado actual del material puede caracterizarse de forma única por el conjunto adecuado de variables de estado seleccionadas. Las variables de estado siempre se pueden seleccionar de forma que sean independientes, es decir, ninguna de ellas se puede expresar como una función única de las otras. La cantidad que depende únicamente de las variables de estado se denomina función de estado. Toda la termodinámica descansa en dos leyes básicas: la primera y la segunda ley.



Por simplicidad, se considera que la distribución de las variables de estado en el espacio y su evolución en el tiempo es suficientemente regulares. Se considera también sistemas cerrados, en los que no haya intercambio de masa.

La Primera ley de una forma u otra expresa el principio de la conservación de la energía. La Segunda ley es una desigualdad que puede verse como una restricción en la dirección en la que pueden proceder varios procesos irreversibles, o como una condición de límite de estabilidad. Estas leyes, particularmente la segunda, se pueden expresar de muchas formas diferentes, desde postulados físicos intuitivos (como "el calor no puede fluir espontáneamente de un cuerpo más frío a un cuerpo más caliente") hasta postulados matemáticos muy abstractos.

Las leyes fundamentales de la termodinámica introducen las nociones de energía interna y entropía, usando los conceptos de energía cinética, potencia externa, suministro de calor y temperatura absoluta. Se considera un cuerpo sólido que ocupa un dominio V , que está delimitado por una superficie S . El suministro de calor al cuerpo es proporcionado por el flujo de calor q en el límite (tasa de calor por unidad de área) y por una fuente de calor distribuida de intensidad r (por unidad de masa) que viene, por ejemplo, de la absorción de radiación o de la resistencia óhmica a la corriente eléctrica. La potencia térmica recibida (tasa de suministro de calor al cuerpo) se expresa como

$$\mathcal{P}_{cal} = \int_V \rho r dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.13)$$

donde ρ es la densidad y \mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie y orientado hacia el exterior de V . El signo negativo delante de la segunda integral significa que, si el flujo de calor \mathbf{q} está orientado en la dirección de la normal hacia afuera \mathbf{n} , el calor está fluyendo.

La potencia externa

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.14)$$

es suministrada por las tracciones \mathbf{t} que actúan en el límite, y por las fuerzas másicas \mathbf{b} debido a un campo de fuerza externo que actúa directamente sobre las partículas de material que componen el cuerpo (por ejemplo, un campo de gravedad). Las tracciones de superficie se toman por unidad de área de superficie y las fuerzas del cuerpo por unidad de volumen. El vector de velocidad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ es la derivada (material) del vector de desplazamiento \mathbf{u} .

La energía cinética está dada por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \|v\|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho v \cdot v dV \quad (2.15)$$

y su tasa de cambio es

$$\dot{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{v} \cdot v dV \quad (2.16)$$

Donde $\dot{v} = \ddot{u}$ es la aceleración

2.2.2 Primera ley de la termodinámica

Existe una función de estado \mathcal{U} , llamada energía interna, de modo que es una suma en la que la energía cinética cambia a una velocidad igual a la suma de la potencia externa y la tasa de suministro de calor.

Esta ley representa el principio de la conservación de la energía, escrita matemáticamente como

$$\dot{\mathcal{U}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{cal} \quad (2.17)$$

La suma de las energías internas y cinéticas es la energía total del cuerpo, y la ecuación del balance de energía (2.16) integrada en un intervalo de tiempo finito establece que el cambio de la energía total es igual a la suma del trabajo y el calor suministrado al cuerpo de su entorno.

En la ecuación (2.16), la Primera Ley está escrita en forma global, referida como un volumen finito. Se obtiene una forma local tomando el límite para un volumen infinitamente pequeño. Para ello, es necesario convertir todas las integrales de superficie en integrales de volumen. Escribiendo las tracciones como proyecciones de esfuerzo $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, y aplicando el teorema de Gauss-Green (integración por partes en múltiples dimensiones), podemos expresar la potencia de las tracciones superficiales como

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_S t_i v_i dS = \int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial(v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} dV \\ &= \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV + \int_V v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) dV \end{aligned} \quad (2.18)$$

Donde ∇ es un operador diferencial.

Como $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor simétrico, es posible reemplazar el tensor $\partial v / \partial x$ por su parte simétrica $(\partial v / \partial x)_{sym} = (\partial \dot{u} / \partial x)_{sym} = \boldsymbol{\varepsilon}$, sin afectar el valor del producto $\sigma_{ij} \partial v_i / \partial x_j = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Sustituyendo (2.17) en (2.13) y haciendo uso de las ecuaciones de momento (2.10) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{ext} &= \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_V \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \, dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV \\ &= \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}} \, dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = \dot{\mathcal{K}} + \mathcal{P}_{int}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Donde

$$\mathcal{P}_{int} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV \quad (2.20)$$

es la potencia interna (o potencia de esfuerzo). La integral de superficie en la expresión de potencia térmica (2.12) también se convierte fácilmente en una integral de volumen mediante una aplicación directa del teorema de Gauss-Green.

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} \, dV \quad (2.21)$$

En consecuencia, la ecuación del balance de energía (2.16) se puede simplificar a

$$\dot{\mathcal{U}} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{cal} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV + \int_V (\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}) \, dV \quad (2.22)$$

Al presentar la energía interna específica u (tomada por unidad de masa), se puede expresar la energía interna del cuerpo finito como $\mathcal{U} = \int_V \rho u \, dV$ y reescribir (2.21) como

$$\int_V (\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho r + \nabla \cdot \mathbf{q}) \, dV = 0 \quad (2.23)$$

Esta ecuación debe mantenerse para cualquier volumen parcial V dentro del cuerpo material. Por lo tanto, si el integrando es continuo, debe desaparecer de manera idéntica. Este argumento conduce a la forma local de la Primera Ley,

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.24)$$

2.2.3 Segunda ley de la termodinámica

Existe una función de estado \mathcal{S} , llamada entropía, de modo que su tasa de cambio nunca es menor que la tasa de suministro de calor dividida por la temperatura absoluta.

La Segunda Ley se establece en su forma global como

$$\dot{\mathcal{S}} \geq \int_V \frac{\rho r}{T} \, dV - \int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dS \quad (2.25)$$

donde T es la temperatura absoluta. La letra cursiva \mathcal{S} , que denota la entropía del cuerpo, no debe confundirse con la S , que denota la superficie. Aplicando el teorema de Gauss-Green nuevamente, se obtiene

$$\int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) dV = \int_V \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \right) dV \quad (2.26)$$

Introduciendo la entropía específica s (tomada por unidad de masa) y usando (2.25), se puede reescribir (2.24) como

$$\int_V \rho \dot{s} dV \geq \int_V \left(\frac{\rho r}{T} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \right) dV \quad (2.27)$$

Es necesario que esto se mantenga para cualquier volumen parcial V de la estructura (y asumiendo de nuevo que los integrandos son continuos), obtenemos la forma local de la Segunda Ley,

$$\rho \dot{s} \geq \frac{\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}}{T} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \quad (2.28)$$

El término izquierdo de (2.27) es la tasa de entropía, el lado derecho se llama *tasa de suministro de entropía externa*, y la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho se llama *tasa de producción de entropía interna* (todos considerados aquí por unidad de volumen). Físicamente, la entropía es una medida de la complejidad y el desorden del estado interno.

2.2.4 Disipación Termodinámica

Es conveniente introducir la densidad de la tasa de disipación de energía (denominada comúnmente *disipación*), \mathcal{D} , definida como la tasa de producción de entropía interna por unidad de volumen multiplicada por la temperatura absoluta. Como la temperatura absoluta es siempre positiva, la Segunda Ley es equivalente a la condición de disipación no negativa,

$$\mathcal{D} \equiv T \rho \dot{s} - \rho r + \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.29)$$

Con base en la ecuación del balance de energía local (2.23), se puede reemplazar $\nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r$ por $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{u}$ y obtener de (2.28) la desigualdad Clausius-Duhem

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{u} - T\dot{s}) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.30)$$

El nombre "desigualdad Clausius-Duhem" se utiliza con frecuencia en la literatura para otras formas de desigualdad que se originan en la Segunda Ley, por ejemplo, para (2.24), (2.26), (2.27) y (2.28).

Se pueden definir dos tipos de disipación

$$\mathcal{D}_{mecánica} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{u} - T\dot{s}) \geq 0 \quad (2.31)$$

$$\mathcal{D}_{térmica} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.32)$$

Hasta el momento, no se ha especificado la naturaleza de las variables de estado. Algunos de ellos, por ejemplo, la temperatura o el desplazamiento pueden observarse a nivel macroscópico y controlarse desde el exterior; usualmente se denominan variables observables. Las variables de estado restantes, como la deformación o daño plástico, caracterizan los cambios internos del material y se denominan variables internas. A veces se pueden medir, pero no se pueden controlar desde el exterior. En la mecánica de sólidos, las variables de estado local observables generalmente incluyen el tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$, y la temperatura absoluta T (Jirásek & Bazant, 2002).

Alternativamente, la temperatura puede ser reemplazada por la entropía específica s . La elección de variables internas depende del tipo de comportamiento constitutivo que se describa, y en esta etapa se denominarán colectivamente mediante el símbolo $\boldsymbol{\alpha}$.

Suponiendo que $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, T)$ son las variables de estado. Resulta útil transformar la densidad de energía interna u en una nueva función de estado

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}) = u(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}) - Ts \quad (2.33)$$

llamada densidad de energía libre de Helmholtz. Dado que, de ahora en adelante, se trabaja exclusivamente en el nivel de un volumen de material infinitesimal, se omite la palabra “densidad” y se denomina simplemente “energía libre” o “energía interna”.

La energía libre es la porción de la energía interna disponible a temperatura constante. Su variación está dada por

$$\dot{\psi} = \dot{u} - \dot{T}s - T\dot{s} \quad (2.34)$$

Sustituyendo la variación temporal (2.33) en la expresión de la disipación mecánica (2.30)

$$\mathcal{D}_{mecánica} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) \geq 0 \quad (2.35)$$

Reescribiendo la variación de energía libre en función de sus argumentos

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} : \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.36)$$

La disipación mecánica resulta

$$D_{mecánica} = \left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} \geq 0 \quad (2.37)$$

Siendo la deformación y temperatura absoluta las variables libres y pudiendo variar libremente para evitar la disipación negativa debe cumplirse:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \quad s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.38)$$

2.3 Leyes Constitutivas

En términos generales, las leyes constitutivas establecen un puente entre la deformación y el esfuerzo, por lo que deben tener en cuenta el comportamiento del material específico en cuestión. Este comportamiento puede ser totalmente reversible y descrito por elasticidad (por ejemplo, en el caso del caucho) o puede ser parcialmente irreversible y descrito por elasto-plasticidad (por ejemplo, en el caso del acero dulce), o puede depender del tiempo y describirse por leyes viscosas (por ejemplo, en el caso de un fluido newtoniano) (Bigoni, 2012).

2.3.1 Elasticidad

La elasticidad investiga el comportamiento del material específico que es reversible, es decir, si un material es elástico, luego de la eliminación de la carga, el material recuperará su estado original. El material elástico es un material ideal y es una buena aproximación para la mayoría de los materiales en el rango de deformaciones pequeñas. Hay varios enfoques para formular la ecuación constitutiva para un material elástico.

Un material se denomina hiper-elástico si existe una función de potencial elástico, ampliamente conocida como función de densidad de energía de deformación W , que es una función escalar de uno de los tensores de deformación. La hiper-elasticidad utiliza el principio de conservación de la energía, dejando de lado el efecto térmico. Se establece que el material elástico es capaz de almacenar energía de deformación con la siguiente expresión:

$$dW = \sigma d\varepsilon \quad \therefore W = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon^*) d\varepsilon^* \quad (2.39)$$

Donde ε^* es la variable de integración y ε es la deformación actual. La ecuación constitutiva para la teoría infinitesimal de la elasticidad a temperatura ambiente puede obtenerse tomando la función de energía de deformación $W(\varepsilon)$.

$$W = W(\varepsilon) \quad (2.40)$$

De esta expresión se define

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (2.41)$$

Se reemplaza (2.40) en (2.38a) y se obtiene

$$\left(\sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon = 0 \quad (2.42)$$

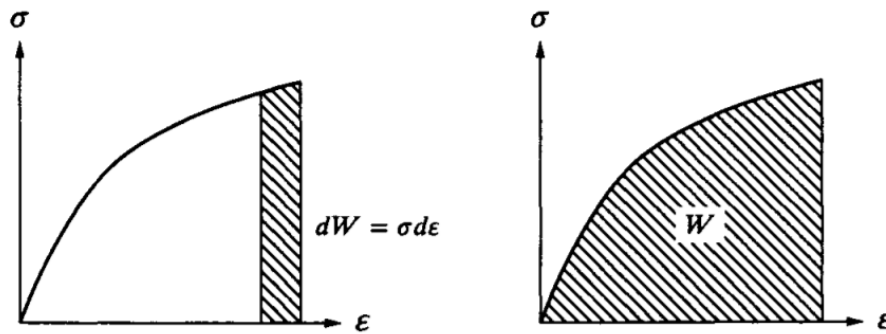


Figura 2.4: Energía de deformación incremental dW y energía de deformación W para carga uni-axial.

Donde

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = C : \varepsilon \quad (2.43)$$

Esta es la ecuación constitutiva más general de un material elástico sometido a deformación finita si se hace uso de la función de densidad de energía de deformación, conocida como la ley generalizada de Hooke. Se puede demostrar que la densidad de energía de deformación es igual a la energía libre de Helmholtz para el proceso isotérmico. Para el caso unidimensional se simplificar la ecuación (2.42) como

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.44)$$

Donde E es conocido como el módulo de Young. Durante mucho tiempo, la mecánica de los sólidos deformables se ha basado en la ley de elasticidad lineal de Hooke para describir el comportamiento del material debido a su simplicidad. Es bien sabido que la mayoría de los materiales de ingeniería civil tales como metales, hormigón, madera, tierra y roca no son linealmente elásticos para todo el rango de carga de interés práctico. De hecho, el comportamiento real de estos materiales es muy complicado y muestran una gran variedad de comportamientos cuando se los somete a diferentes condiciones. Las idealizaciones drásticas son, por lo tanto, esenciales para desarrollar modelos matemáticos simples para aplicaciones prácticas (Chen & Saleeb, 2013).

2.3.2 Elasto-Plasticidad

Se usará la Figura 2.5 para ilustrar las propiedades y terminologías de la deformación plástica. Cuando el esfuerzo aumenta de O a A, la deformación también tiene un aumento proporcional. El proceso de aumentar el esfuerzo se conoce como carga. La fluencia inicial del material ocurre en A y el esfuerzo en este punto se conoce como el límite elástico y se denota por σ_y . El esfuerzo de fluencia generalmente se considera igual al límite elástico, pero el límite elástico y el límite proporcional son indistinguibles experimentalmente para los metales. En caso de que la tensión se reduzca de A a O, se tiene un proceso de descarga. OA es la región elástica y la ley de Hooke se aplica en esta región. Todas las deformaciones dentro de la región elástica se recuperan al momento de la descarga y son deformaciones elásticas. Después del punto A se produce la deformación irrecuperable. Esta deformación es permanente y se conoce como deformación plástica, que puede ser dependiente o independiente del tiempo. La curva OABE es la curva esfuerzo-deformación para carga monótona. La deformación en B es ε , que se puede dividir en una parte elásticas (ε^e) y una parte plástica (ε^p), donde

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.45)$$

En la Figura 2.5, las secciones BC y EF representan descarga y son rectas con pendientes similares a la de la sección OA. En general, para una buena aproximación, se supone que estas pendientes son iguales. Sin embargo, los datos experimentales muestran que la pendiente de descarga depende del nivel de tensión en el que comienza la descarga (Wu, 2005).

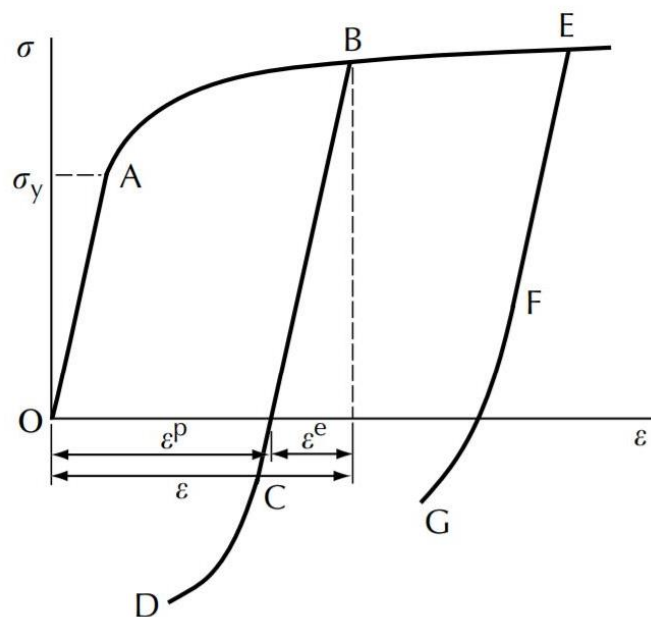


Figura 2.5: Gráfica esfuerzo-deformación esquemática para un material elasto-plástico

La descripción de la curva esfuerzo-deformación presentada anteriormente se basa en observaciones y datos experimentales. Es un enorme desafío formular un modelo matemático realista para describir el comportamiento material observado. Si se quieren modelar fenómenos que produzcan un cambio irreversible en el material deben definirse un conjunto de variables internas que hagan referencia a la historia pasada del material y que definan su estado actual. Para garantizar la admisibilidad física de la evolución de estas variables internas los modelos deben definirse dentro el marco de la termodinámica de los procesos irreversibles (Maimí, 2006).

2.3.3 Activación y evolución de las variables de estado

Los modelos constitutivos con variables internas acostumbran a seguir el esquema clásico desarrollado con la teoría de la plasticidad. Consideran una región donde el material es lineal elástico, a partir de un cierto umbral los procesos inelásticos empiezan. Se define una función escalar que depende de las variables libres (ε) y de las variables internas (α) del modelo así como de un conjunto de constantes. Para cualquier valor de las variables libres debe garantizarse:

$$f(\varepsilon, \alpha) \leq 0 \quad (2.46)$$

La función umbral $f(\varepsilon, \alpha)$ define el dominio elástico, una superficie en el espacio de deformaciones que delimita el comportamiento elástico del material. Si la función umbral $f(\varepsilon, \alpha) < 0$ el comportamiento del material es elástico, si $f(\varepsilon, \alpha) = 0$ el material se encuentra en régimen de carga neutra, régimen de descarga o en régimen inelástico según la variación de las variables libres del sistema. La función de fluencia es análoga al potencial de disipación.

Estas condiciones de carga/descarga se expresan mediante las condiciones de *Kuhn-Tucker*:

$$f(\varepsilon, \alpha) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma f(\varepsilon, \alpha) = 0 \quad (2.47)$$

siendo γ el multiplicador inelástico, un parámetro escalar que indica la velocidad de la evolución de las variables internas.

En el caso que las variables internas evolucionen debe cumplirse la condición de consistencia es decir la evolución de las variables internas debe garantizar, en todo momento;

$$\dot{f}(\varepsilon, \alpha) = 0 \quad (2.48)$$

De acuerdo con la teoría del flujo, las ecuaciones constitutivas de plasticidad consisten en

- un criterio de fluencia,
- una regla de flujo,
- una regla de endurecimiento por deformación y,
- las condiciones de carga-descarga.



El criterio de fluencia determina el estado de tensión cuando se produce la fluencia; la regla de flujo describe el incremento de la deformación plástica cuando se produce la fluencia; la regla de endurecimiento describe cómo se endurece el material a medida que aumenta la tensión plástica; y las condiciones de carga y descarga especifican el siguiente movimiento en el programa de carga. Un desarrollo exhaustivo sobre los criterios de fluencia y reglas de flujo se puede encontrar en (Ottosen & Ristinmaa, 2005), (Wu, 2005) y (Dill, 2007).

2.4 Medios estándar generalizados

Como se mencionó anteriormente, una vez que se introducen variables de estado internas, se deben formular leyes de estado y leyes de evolución. Los medios estándar generalizados ofrecen un enfoque racional y fructífero, conocidos también como "enfoque potencial" y se basan en la siguiente definición:

“Un modelo de comportamiento material es un medio estándar generalizado si está definido por dos potenciales, el potencial energético y el potencial de disipación. La energía es una función de las variables de estado y el potencial de disipación es una función convexa del flujo y puede eventualmente depender del estado actual.”

Debido a esto, se pueden diferenciar dos elementos clave: el potencial energético y el potencial de disipación. En teoría de plasticidad, es común utilizar como potencial energético el potencial de Helmholtz, definido como se muestra en la ecuación (2.33), ya que éste depende de la deformación

$$\psi = \psi(\varepsilon, \alpha) \quad (2.49)$$

El potencial de disipación es una función convexa con respecto al flujo $\dot{\alpha}$ de las variables internas, y depende del estado actual α . Se define el potencial de disipación como

$$\Phi = \Phi(\alpha, \dot{\alpha}) \quad (2.50)$$

Una vez que se adopta un modelo generalizado estándar, la evolución de las variables internas se puede obtener a partir de una ecuación diferencial conocida como la ecuación de Biot (Alessi, 2013)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \quad (2.51)$$

Se puede lograr una formulación equivalente a (2.47) para obtener la evolución de las variables de estado, la superficie de fluencia y las condiciones de Kuhn-Tucker. Se define una función de

fluencia f , la cual depende de la variable X y del estado actual α . Luego, se define una región elástica

$$\mathbb{E}_X = \{X \in \mathbb{R} | f(\alpha, X) < 0\}, \quad \partial\mathbb{E}_X = \{X \in \mathbb{R} | f(\alpha, X) = 0\} \quad (2.52)$$

Se define la regla de flujo de manera que si $f(\alpha, X) < 0$, la evolución se encuentra en la región elástica, por lo que $\dot{\alpha} = 0$. Caso contrario, la función de fluencia se encuentra en la superficie y se tiene

$$\dot{\alpha} = \gamma \frac{\partial}{\partial X} f(\alpha, X), \quad \gamma \geq 0 \quad (2.53)$$

A (2.53) se le conoce como la regla de flujo asociada. Como se puede observar, la función de fluencia es análoga al potencial de disipación (2.50). De esta forma, se pueden obtener condiciones que determinen la evolución de las variables de estado de la siguiente forma:

$$f \leq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma f = 0 \quad (2.54)$$

Las condiciones (2.54) son las mismas que (2.47).

2.4.1 Formulación energética

El objetivo en la formulación energética es plantear un funcional que, sujeto a las restricciones impuestas por las condiciones de estabilidad y balance de energía, describa la evolución de un sistema mecánico a través de un principio variacional. El planteamiento variacional del problema en la formulación energética admite soluciones más flexibles en comparación con la formulación clásica puesto que, en las leyes de evolución para las variables de estado, no hay derivadas con respecto al tiempo (Rodríguez, Ulloa, & Samaniego, 2015). Una formalización matemática de la formulación energética sobre sistemas independientes de la tasa se debe esencialmente al trabajo presentado en (Mielke, 2006).

La energía potencial es la suma de la energía elástica almacenada en el material \mathcal{E} y el trabajo de las cargas que actúan sobre el sistema $-\mathcal{L}$. La energía potencial se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, \alpha) &= \int_0^L \psi(\alpha) dx = \int_0^L \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon_p)^2 dx \\ \mathcal{L}(t, u) &= \int_0^L b \cdot u dx + (f_s \cdot u) \Big|_0^L \\ \mathcal{P} &= \mathcal{E} - \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde b y f_s son las fuerzas de masa y las fuerzas aplicadas en la superficie del sistema respectivamente.

La distancia de disipación entre los estados α_0 y α_1 se define en función del potencial de disipación Φ como

$$d(\alpha_0, \alpha_1) = \inf \left\{ \int_0^1 \Phi(\beta(s), \dot{\beta}(s)) ds : \beta \in C^1, \beta(0) = \alpha_0, \beta(1) = \alpha_1 \right\} \quad (2.56)$$

Luego de integrar (2.56) sobre el dominio $[0; L]$, la distancia de disipación entre los estados α_0 y α_1 es

$$D(\alpha_0, \alpha_1) = \int_0^L d(\alpha_0, \alpha_1) dx \quad (2.57)$$

El potencial Φ se puede definir como la variación con respecto al tiempo de la energía disipada en un proceso de plasticidad homogéneo. Para el presente trabajo, se utilizará un potencial de disipación definido como

$$\Phi = \sigma_Y |\dot{\epsilon}_p| \quad (2.58)$$

Por lo tanto, la energía total disipada se expresa como

$$\mathcal{D} = \int_0^L \int_0^t \sigma_Y |\dot{\epsilon}_p| d\tau dx \quad (2.59)$$

De esta manera, se busca la solución al problema de minimización del funcional resultante

$$\mathcal{W} = \mathcal{P} + \mathcal{D} \quad (2.60)$$

Al considerar cargas monótonas, como es el caso del presente trabajo, la energía total disipada \mathcal{D} es diferenciable y existe, pero no necesariamente este concepto aplica para todos los casos. En los materiales disipativos también se involucra la descarga, por lo tanto la integral (2.59) no siempre se puede resolver de manera unívoca ya que la solución depende del proceso de carga.

Definidos los potenciales de energía, se formulan los principios en los que se basa la formulación energética: la condición de estabilidad y el balance de energía. La formulación posterior es muy extensa y se limitará a mencionar que toda la demostración de la formulación energética se puede hallar en el trabajo realizado en (Rodríguez et al., 2015) y (Ulloa et al., 2016), en el cual se desarrolla las variaciones de los funcionales involucrados que demuestran que la formulación energética es equivalente a la formulación clásica desarrollada en el presente trabajo. De esta manera se concluye que los conceptos variacionales se usarán como herramientas de análisis más que como herramientas de cómputo.

Capítulo 3

Formulación e implementación numérica

Los modelos unidimensionales ofrecen el enfoque más simple para el análisis numérico y la implementación de los modelos clásicos de elasticidad y plasticidad que gobiernan el comportamiento de los materiales disipativos. Al haber asumido que la formulación energética y la formulación clásica son equivalentes, se desarrolla únicamente la implementación numérica de la formulación clásica y se limita a realizar un post-proceso de los resultados para obtener las energías correspondientes. Una vez descrito el problema de forma local, se presenta la introducción del modelo investigado en este trabajo al espacio de elementos finitos y la implementación computacional. El desarrollo de esta formulación e implementación sigue rigurosamente el trabajo presentado en (J. C. Simo & Hughes, 2006), un enfoque similar se puede encontrar en (Runesson, 2006).

3.1 Modelo de fricción unidimensional

Se examina la respuesta mecánica del dispositivo de fricción unidimensional ilustrado en la Figura 3.1. Se supone que el dispositivo posee inicialmente longitud unitaria (y área unitaria) y consiste en un resorte, con elasticidad constante E , y un elemento de fricción tipo Coulomb, con constante $\sigma_Y > 0$, dispuesto como se muestra en la Figura 3.1. Se denomina σ al esfuerzo aplicado (fuerza) y ε la deformación total (cambio de longitud) en el dispositivo.

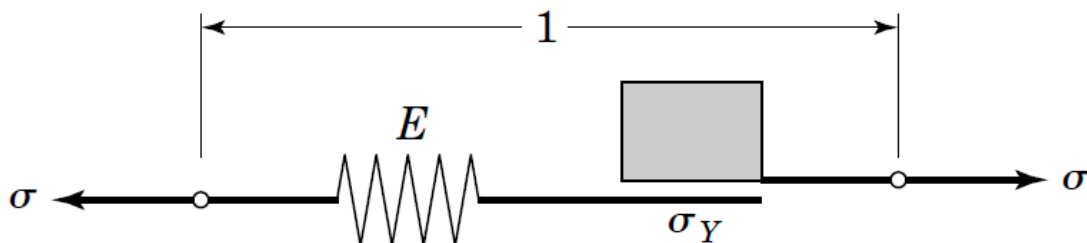


Figura 3.1: Dispositivo de fricción unidimensional que ilustra el modelo de plasticidad planteado.

3.1.1 Ecuaciones locales de gobierno

La deformación total ε se divide en una parte ε^e del resorte con constante E , denominada parte elástica, y una deformación ε^p en el dispositivo de fricción denominada parte plástica, siguiendo el mismo planteamiento de la ecuación (2.44) en la sección 2.3.2.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.1)$$

Por consideraciones obvias de equilibrio, asumiendo que el resorte tiene un comportamiento lineal, se usa la ecuación (2.43), el esfuerzo en el resorte con E constante es σ , se tiene la relación elástica

$$\sigma = E\varepsilon^e \equiv E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3.2)$$

3.1.2 Respuesta friccional irreversible

Suponiendo que ε , ε^p y σ son funciones del tiempo en un intervalo $[0, T] \subset \mathbb{R}$. En particular, se tiene que

$$\varepsilon^p: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^p \quad (3.3)$$

El cambio en la configuración del dispositivo de fricción solo es posible si $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$. Para caracterizar este cambio, se aísla el dispositivo de fricción como se muestra en la Figura 3.2. Se hacen las siguientes suposiciones físicas:

- [1] El esfuerzo σ en el dispositivo de fricción no puede ser mayor en valor absoluto que $\sigma_Y > 0$. Esto significa que los esfuerzos admisibles están restringidos en el intervalo cerrado $[-\sigma_Y, \sigma_Y] \subset \mathbb{R}$. Esta suposición se define con la notación:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{R} \mid f(\tau) = |\tau| - \sigma_Y \leq 0\} \quad (3.4)$$

La cual representa el conjunto de esfuerzos admisibles. Por las razones que se explican a continuación, σ_Y se define como el *esfuerzo de fluencia* del dispositivo de fricción. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$f(\tau) = |\tau| - \sigma_Y \leq 0 \quad (3.5)$$

se conoce como la *función de fluencia*. Se debe tener en cuenta que \mathbb{E}_σ es un intervalo cerrado y, por lo tanto, es un conjunto convexo cerrado.

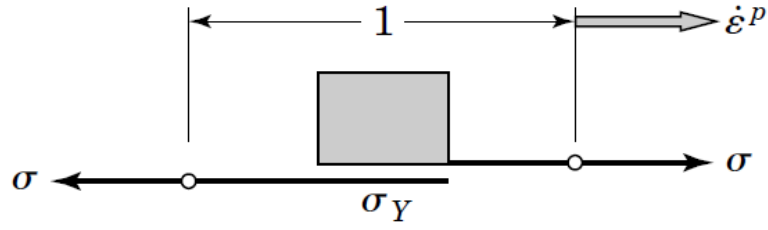


Figura 3.2: Caracterización de la respuesta de fricción para un dispositivo con $\sigma_Y > 0$.

[2] Si el valor absoluto σ del esfuerzo aplicado es menor que el esfuerzo de fluencia σ_Y , no se produce ningún cambio en ϵ^p , es decir $\dot{\epsilon}^p = 0$. Esta condición implica

$$\dot{\epsilon}^p = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y < 0 \quad (3.6)$$

y la respuesta instantánea del dispositivo es elástica.

[3] Según la suposición [1], el esfuerzo σ establece que $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y > 0$ es inadmisibles; $\dot{\epsilon}^p = 0$ para $f(\sigma) < 0$ según la suposición [2], un cambio en ϵ^p solo puede tener lugar si $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0$. Si se cumple esta última condición, el dispositivo de fricción experimenta deslizamiento en la dirección del esfuerzo aplicado σ , con tasa de deslizamiento constante. Siendo $\gamma \geq 0$ el valor absoluto de la tasa de deslizamiento, la suposición física precedente toma la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \gamma \geq 0 & \text{si} & \quad \sigma = \sigma_Y > 0 \\ \dot{\epsilon}^p &= -\gamma \leq 0 & \text{si} & \quad \sigma = -\sigma_Y < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Si $\gamma \geq 0$ es realmente positivo, es decir, $\gamma > 0$ o cero depende de condiciones adicionales que implican la tasa de deformación aplicada $\dot{\epsilon}$, que se denominan *condiciones de carga/descarga*. Puede notarse que (3.7) puede ser replanteada en la siguiente ecuación

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad \text{si} \quad f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0 \quad (3.8)$$

donde $\gamma \geq 0$, se conoce como la *regla de flujo*. Aquí, $\text{sign}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función signo definida como

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \sigma > 0 \\ -1 & \text{si} \quad \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

El límite $\partial \mathbb{E}_\sigma$ del conjunto convexo \mathbb{E}_σ , definido por

$$\partial \mathbb{E}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{R} \mid f(\tau) = |\tau| - \sigma_Y = 0\} \quad (3.10)$$

se llama *superficie de fluencia*. En el presente modelo unidimensional, $\partial \mathbb{E}_\sigma = \{-\sigma_Y, \sigma_Y\}$ se reduce a dos puntos.

3.1.3 Condiciones de carga/descarga

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, se demuestra que la evaluación de $\varepsilon^p: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ puede describirse por completo, para cualquier estado de esfuerzo admisible $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma$, con la ecuación evolutiva única

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (3.11)$$

siempre que γ y σ estén restringidos por ciertas *restricciones unilaterales*:

Primero, σ debe ser admisible, es decir, $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma$ por la suposición [1], y γ debe ser no negativo por la suposición [3]. En consecuencia,

$$\gamma \geq 0 \quad \text{y} \quad f(\sigma) \leq 0 \quad (3.12)$$

Segundo, por la suposición [2], $\gamma = 0$ si $f(\sigma) < 0$. Por otro lado, por la suposición [3] $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$, y, por lo tanto, $\gamma > 0$ solo si $f(\sigma) = 0$. Estas observaciones implican las condiciones

$$\left. \begin{array}{l} f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma > 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0 \end{array} \right\}$$

Se requiere además que

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (3.13)$$

Las condiciones (3.12 y 3.13) expresan los requisitos físicos: que el esfuerzo debe ser admisible y que la tasa de deformación del flujo de plástico distinto a cero $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$, solo puede tener lugar en la superficie de fluencia $\partial\mathbb{E}_\sigma$. Estas condiciones (3.12 y 3.13) se conocen con el nombre de condiciones de Kuhn-Tucker.

La última condición que se describirá a continuación permite determinar el valor real de $\gamma \geq 0$ en cualquier momento dado $t \in [0, T]$ y se conoce como *condición de consistencia*. Sea $\{\varepsilon(t), \varepsilon^p(t)\}$ en el tiempo $t \in [0, T]$, de modo que $\sigma(t)$ también se conozca en el tiempo t por las relaciones elásticas (1.2.2). Se prescribe la tasa de deformación total $\dot{\varepsilon}^p(t)$ en el tiempo t . Además, se considera el caso donde

$$\sigma(t) \in \partial\mathbb{E}_\sigma \Leftrightarrow \hat{f}(t) = f[\sigma(t)] = 0$$

en el momento t . Se muestra fácilmente que $\hat{f}(t) \leq 0$; ya que $\hat{f}(t)$ debe ser positivo implicaría que $\hat{f}(t + \Delta t) > 0$ para algunos $\Delta t > 0$, esto viola la condición de admisibilidad $f \leq 0$. Se especifica además que $\gamma > 0$ solo si $\hat{f}(t) = 0$, y $\gamma = 0$ si $\hat{f} < 0$, para simplificar la notación, se establece

$$\left. \begin{aligned} \dot{f} < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma > 0 &\Rightarrow \dot{f} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Por lo tanto, se tiene la condición adicional

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (3.14)$$

La condición (3.14) se denomina alternativamente *condición de persistencia (o consistencia)* y corresponde al requisito físico de que, para que ε^p sea distinto de cero (es decir $\gamma > 0$), el punto de esfuerzo $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma$ debe "persistir" en $\partial\mathbb{E}_\sigma$ para que $\dot{f}[\sigma(t)] = 0$.

3.1.4 Deslizamiento friccional (flujo plástico).

Para el modelo en cuestión, la expresión para $\gamma > 0$ cuando se cumple la condición de consistencia (3.14) toma una forma particularmente simple. Por la regla de la cadena y las condiciones (3.2) y (3.11),

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \text{sign}(\sigma) \quad (3.15)$$

Sin embargo,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} |\sigma| = \text{sign}(\sigma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) debe interpretarse en un sentido general ya que $|\sigma|$ no es diferenciable en $\sigma = 0$. En consecuencia, al observar que $[\text{sign}(\sigma)]^2 = 1$, (3.15) y (3.16) implican

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) \quad (3.17)$$

La sustitución de (3.17) en (3.11) produce el resultado

$$\varepsilon^p = \dot{\varepsilon} \quad \text{para} \quad f(\sigma) = 0, \quad \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (3.18)$$

que postula que el deslizamiento "plástico" en el dispositivo de fricción es igual a la tasa de deformación aplicada. La respuesta del dispositivo que se muestra en la Figura 3.1 se ilustra en la Figura 3.3. La teoría que se ha presentado hasta ahora se llama *plasticidad perfecta*.

3.2 Plasticidad con endurecimiento isotrópico

Se examina una mejora del modelo discutido en la Sección 3.1 que ilustra un efecto observado experimentalmente en muchos metales, llamado endurecimiento por deformación. Para el modelo de la Sección 3.1, el deslizamiento (es decir, $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$) tiene lugar en un valor constante del esfuerzo aplicado σ de modo que $|\sigma| = \sigma_\gamma$, lo que lleva a la respuesta esfuerzo-deformación en la Figura

3.3. Un modelo de endurecimiento por deformación, conduce a una curva de esfuerzo-deformación del tipo idealizado en la Figura 3.4.

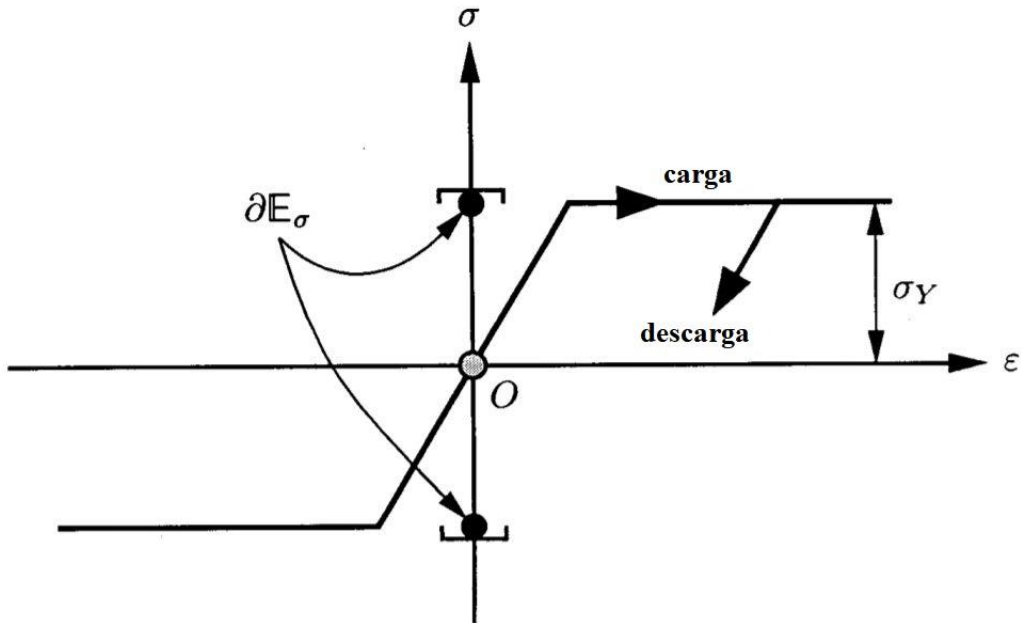


Figura 3.3: Representación esquemática de la respuesta mecánica de un modelo de fricción elástica unidimensional

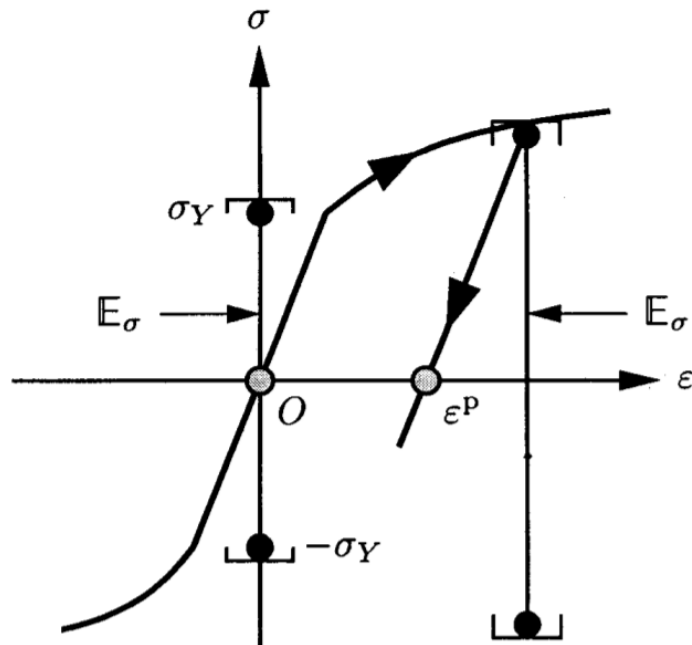


Figura 3.4: Plasticidad con endurecimiento por deformación

La diferencia esencial entre los dos modelos radica en el hecho de que para una plasticidad perfecta el cierre del rango elástico E_σ permanece sin cambios, mientras que para el modelo de

endurecimiento por deformación, E_σ se expande con la cantidad de deslizamiento en el sistema (es decir, la cantidad de flujo plástico). Un modelo matemático que captura este efecto se considera a continuación.

3.2.1 Modelo matemático.

Las suposiciones básicas sobre la respuesta elástica de un modelo de endurecimiento por deformación permanecen sin cambios. Se mantiene la descomposición aditiva de la ecuación (3.1) y la relación elástica esfuerzo-deformación de la ecuación (3.2)

Para ilustrar la estructura matemática de la plasticidad con endurecimiento por deformación, se considera la situación más simple ilustrada en la Figura 3.5. En este modelo, se supone que la expansión (endurecimiento) experimentada por E_σ obedece a dos condiciones

- El endurecimiento es isotrópico en el sentido de que en cualquier estado de carga, el centro de E_σ permanece en el origen.
- El endurecimiento es lineal en la cantidad de flujo plástico (es decir, lineal en $|\dot{\epsilon}^p|$) e independiente de $\text{sign}(\dot{\epsilon}^p)$.

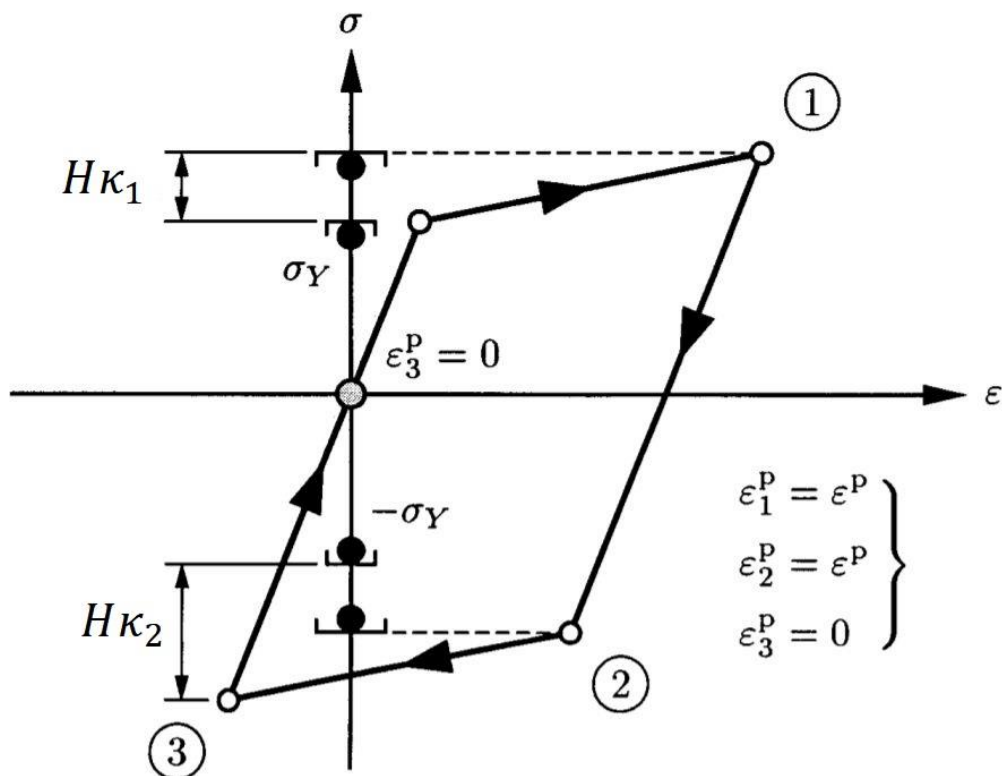


Figura 3.5: Respuesta de un modelo lineal de endurecimiento isotrópico en un ciclo cerrado

La primera condición conduce a un criterio de fluencia de la forma

$$f(\sigma, \kappa) = |\sigma| - [\sigma_Y + H\kappa] \leq 0, \quad \kappa \geq 0 \quad (3.19)$$

donde $\sigma_Y > 0$ y $H \geq 0$ son constantes; H a menudo se llama el *módulo plástico*. La variable $\kappa: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa de la cantidad de flujo plástico (deslizamiento), llamada *variable interna de endurecimiento*. Si $H < 0$, se establece una respuesta de ablandamiento por deformación.

Se considera la ecuación evolutiva más simple para κ , es decir,

$$\dot{\kappa} = |\dot{\varepsilon}^p| \quad (3.20)$$

El mecanismo irreversible que gobierna la evolución del deslizamiento en el sistema (flujo plástico) expresada en la ecuación (3.11), que se define mediante la regla de flujo, permanece sin cambios. La naturaleza irreversible del flujo plástico se vuelve a capturar mediante las condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \kappa) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \kappa) \leq 0 \quad (3.21)$$

donde $\gamma \geq 0$ está determinado por la condición de consistencia de la ecuación (3.14)

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \kappa) = 0 \quad (3.22)$$

La interpretación de las condiciones (3.21) y (3.22) es idéntica a la que se discute en detalle en la Sección 3.1.3.

3.2.2 Módulo elastoplástico tangente.

La condición de consistencia (3.22) permite resolver explícitamente para γ y relacionar las tasas de esfuerzo con las tasas de deformación de la siguiente manera. Usando las ecuaciones (3.11), (3.19) y (3.20), junto con la relación elástica esfuerzo-deformación,

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \text{sign}(\sigma)E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) - H\dot{\kappa} \\ &= \text{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon} - \gamma[E + H] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Se observa una vez más que la relación $\dot{f} > 0$ no puede mantenerse. De (3.21) y (3.22) se deduce que γ puede ser distinto de cero si

$$f = \dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\text{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon}}{E + H} \quad (3.24)$$

Entonces la tasa de relación de elasticidad (3.2) junto con (3.24) resulta

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E \dot{\epsilon} & \text{si } \gamma = 0 \\ \frac{EH}{E + H} \dot{\epsilon} & \text{si } \gamma > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

La cantidad $\frac{EH}{E + H}$ se denomina *módulo tangente elastoplástico* la cual se ilustra en la Figura 3.6a. La interpretación del módulo plástico se muestra en la figura 3.6b.

El concepto de endurecimiento se puede generalizar para los siguientes casos (Runesson, 2006):

- Para $H = 0$, se recobra el modelo de plasticidad perfecta.
- Para un valor de $H < 0$, se obtiene un comportamiento de plasticidad con ablandamiento.
- Un $H \approx \infty$ implicaría que el módulo elasto-plástico tienda a E , resultando en un comportamiento elástico.
- Un $H = E$ implicaría que el módulo elasto-plástico tienda a un valor finito en valor absoluto, resultando en un comportamiento infinitamente frágil.

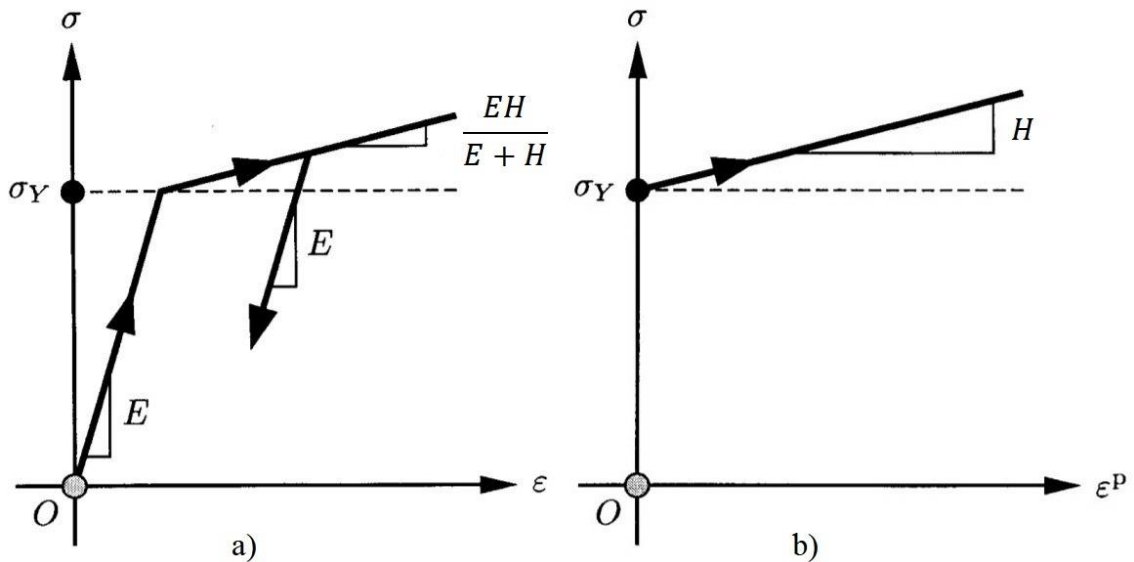


Figura 3.6: (a) El módulo de tangente y (b) el módulo de plástico.

3.3 Algoritmo de integración para la plasticidad

Se desarrolla un algoritmo para obtener la evolución local de plasticidad con endurecimiento isotrópico, siguiendo el procedimiento desarrollado en (J. C. Simo & Hughes, 2006), el cual se basa en el método de Euler, el cual permite la obtención de un algoritmo de mapeo estándar basado en la imposición de desplazamientos.

Se considera un cuerpo unidimensional ocupando un intervalo $\bar{B} = [0, L]$, sea $x \in \bar{B} = [0, L]$ es un punto de interés dado en el cuerpo que obedece al modelo constitutivo de plasticidad perfecta o con endurecimiento por deformación, según sea el caso.

Se supone que el estado local del cuerpo en el punto $x \in \bar{B}$ y su tiempo actual t_n , están completamente definidos. Esto significa que

$$\{\varepsilon_n(x), \varepsilon_n^p(x), \kappa_n(x)\} \quad (3.26)$$

son conocidos y, por lo tanto, el estado de esfuerzo

$$\sigma_n(x) = E (\varepsilon_n(x) - \varepsilon_n^p(x)) \quad (3.27)$$

también es conocido.

Se considera un "incremento" en la deformación total $\Delta\varepsilon(x)$, que conlleva a un estado donde el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. El problema básicamente es la actualización de las variables básicas (3.26) al tiempo t_{n+1} de una manera consistente con el modelo constitutivo de plasticidad con endurecimiento.

3.3.1 Estado elástico de prueba.

Se considera un estado auxiliar, que como se muestra a continuación no necesita corresponderse con un estado real, y se obtiene congelando el flujo plástico. En otras palabras, se considera un paso puramente elástico (prueba) definido por las fórmulas

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{trial} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \equiv \sigma_n + E \Delta\varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1}^{p\,trial} &= \varepsilon_n^p \\ \kappa_{n+1}^{trial} &= \kappa_n \\ f_{n+1}^{trial} &= |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_Y + H\kappa_n] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Se observa que el estado de prueba se determina únicamente en términos de las condiciones iniciales $\{\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \kappa_n\}$ y la deformación incremental impuesta $\Delta\varepsilon_n$. Una vez más, se observa que este estado puede no corresponder, y en general no corresponderá, a ningún estado real, físicamente admisible a menos que el proceso incremental sea elástico en el sentido que se describe a continuación.

3.3.2 Forma algorítmica de las condiciones de carga

Una vez que el estado de prueba se calcula por (3.28), primero se considera el caso para el cual $f_{n+1}^{trial} \leq 0$. Se deduce que el estado de prueba es admisible en el sentido de que

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{trial} \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p \\ \kappa_{n+1} &= \kappa_n \end{aligned} \quad (3.29)$$

satisface:

- la relación esfuerzo-deformación,
- la regla de flujo y la ley de endurecimiento con $\Delta\gamma = 0$, y
- las condiciones Kuhn-Tucker, siendo que las condiciones

$$f_{n+1} \equiv f_{n+1}^{trial} \leq 0, \quad y, \quad \Delta\gamma = 0 \quad (3.30)$$

Por lo tanto, el estado de prueba es la solución al problema. Una ilustración de esta situación se muestra en la Figura 3.7. A continuación, se considera el caso para el cual $f_{n+1}^{trial} > 0$. Claramente, el estado de prueba no puede ser una solución al problema incremental ya que $(\sigma_{n+1}^{trial}, \kappa_n)$ viola la condición de restricción $f(\sigma, \kappa) \leq 0$. Por lo tanto, se requiere que $\Delta\gamma > 0$ para que $\varepsilon_{n+1}^p \neq \varepsilon_n^p$ para obtener $\sigma_{n+1} \neq \sigma_{n+1}^{trial}$. Por las condiciones de Kuhn-Tucker

$$\Delta\gamma > 0, \quad \Delta\gamma f_{n+1} = 0 \Rightarrow f_{n+1} = 0 \quad (3.31)$$

el proceso es progresivamente plástico. La Figura 3.8 muestra una ilustración de este caso.

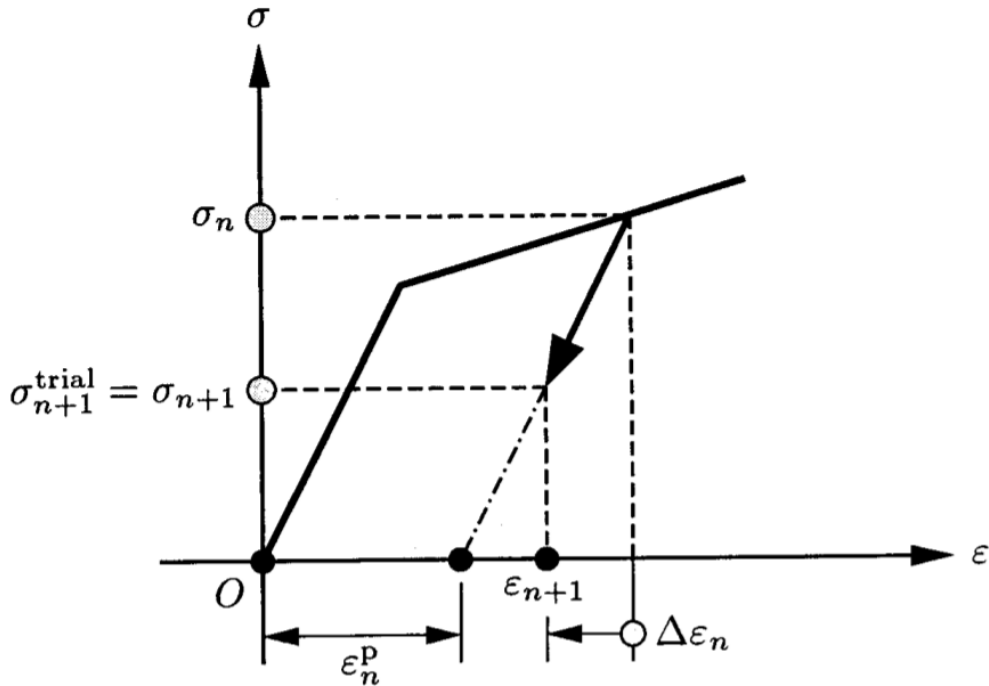


Figura 3.7: Ejemplo de un paso elástico incremental desde un estado plástico.

Para resumir los resultados, la conclusión de que un proceso incremental para una deformación incremental dada es elástico o plástico se basa únicamente en el estado de prueba según el criterio

$$f_{n+1}^{trial} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \text{paso elástico,} & \Delta\gamma = 0 \\ > 0 \Rightarrow \text{paso plástico,} & \Delta\gamma > 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

3.3.3 Algoritmo de mapeo de retorno.

Se examina el problema algorítmico para un proceso incrementalmente plástico caracterizado por las condiciones

$$f_{n+1}^{trial} > 0 \Leftrightarrow f(\sigma_{n+1}, \kappa_{n+1}) = 0, \quad y \quad \Delta\gamma > 0 \quad (3.33)$$

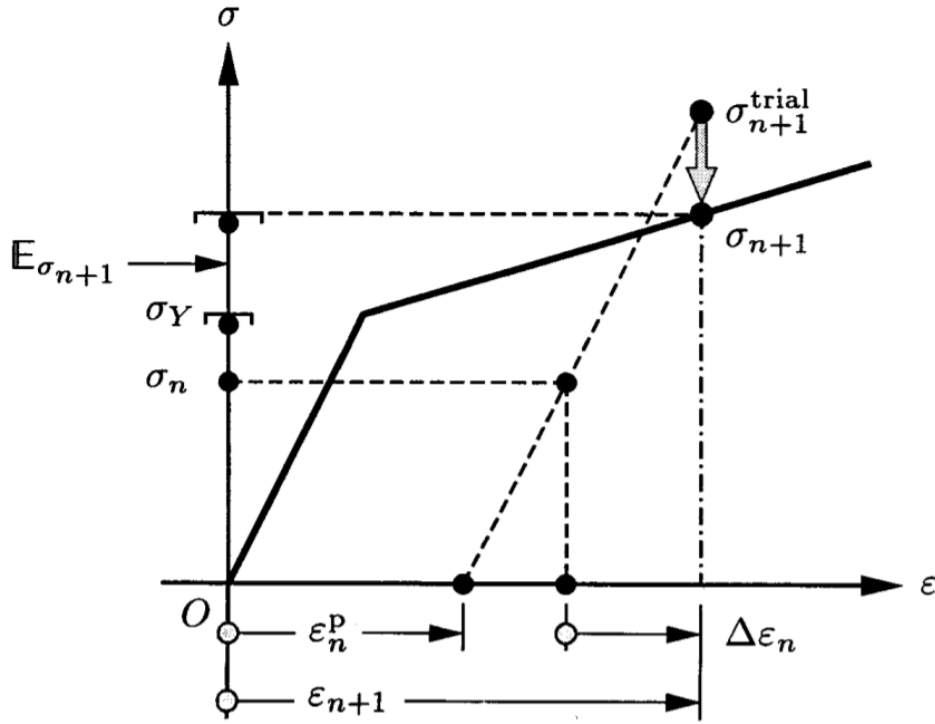


Figura 3.8: El estado de prueba viola la condición de restricción $f \leq 0$.

El objetivo es determinar la solución de $\{\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1}, \Delta\gamma\}$, para lograr esto, primero se expresa el esfuerzo final σ_{n+1} en términos de σ_{n+1}^{trial} y $\Delta\gamma$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^p) = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^p) - E(\epsilon_{n+1}^p - \epsilon_n^p) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para obtener las variables de estado luego de un paso de tiempo, se plantea el problema de forma incremental. Se define el multiplicador plástico para el tiempo t_{n+1}

$$\gamma_{n+1} = \frac{\epsilon_{n+1}^p - \epsilon_n^p}{\Delta t} \text{sign}(\sigma_{n+1}) = \frac{\kappa_{n+1} - \kappa_n}{\Delta t} \quad (3.35)$$

Luego, se define un multiplicador de Lagrange $\Delta\gamma = \gamma_{n+1}\Delta t \geq 0$. Reemplazando esto en la expresión anterior, se obtiene la actualización de las variables internas:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (3.36)$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\gamma$$

$$f_{n+1} \equiv |\sigma_{n+1}| - [\sigma_Y + H \kappa_{n+1}] = 0$$

Ahora el problema (3.36) se resuelve explícitamente en términos del estado elástico de prueba mediante el siguiente procedimiento. Para (3.36a),

$$|\sigma_{n+1}| \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{trial}| \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) - E \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (3.37)$$

Simplificando la ecuación (3.37), se obtiene

$$[|\sigma_{n+1}| + E \Delta\gamma] \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{trial}| \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \quad (3.38)$$

Dado que $\Delta\gamma > 0$ y $E > 0$, se observa que el término entre corchetes en (3.38) es necesariamente positivo. Por lo tanto, se necesita que

$$\operatorname{sign}(\sigma_{n+1}) = \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \quad (3.39)$$

junto con la condición

$$|\sigma_{n+1}| + E \Delta\gamma = |\sigma_{n+1}^{trial}| \quad (3.40)$$

Finalmente, el parámetro de consistencia algorítmica $\Delta\gamma > 0$ se determina a partir de la condición de consistencia discreta (3.36d) de la siguiente manera. A la vista de (3.40), el criterio de fluencia f_{n+1} se escribe como

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta\gamma - [\sigma_Y + H \kappa_n] - H(\kappa_{n+1} - \kappa_n) \\ &= f_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma(E + H) \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde se ha usado (3.28) y (3.36c) en la obtención (3.41). Por lo tanto

$$f_{n+1} = 0 \implies \Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + H} > 0 \quad (3.42)$$

Sustituyendo (3.39) y (3.42) en (3.36c) produce el resultado

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\gamma$$

El algoritmo (3.42) - (3.43) ilustrado en la Figura 1.12 se deriva al escribir (3.43) en una forma ligeramente diferente. De (3.43a) y (3.42) se obtiene la expresión alternativa

$$\sigma_{n+1} = (|\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta\gamma) \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) = \left[1 - \frac{E \Delta\gamma}{|\sigma_{n+1}^{trial}|} \right] \sigma_{n+1}^{trial} \quad (3.44)$$

Ya que $f_{n+1} = 0$, en vista de (3.44), se puede concluir que el estado de esfuerzo final es la proyección del esfuerzo de prueba en la superficie de fluencia. Debido a esta interpretación, el algoritmo resumido a continuación se denomina *algoritmo de mapeo de retorno*.

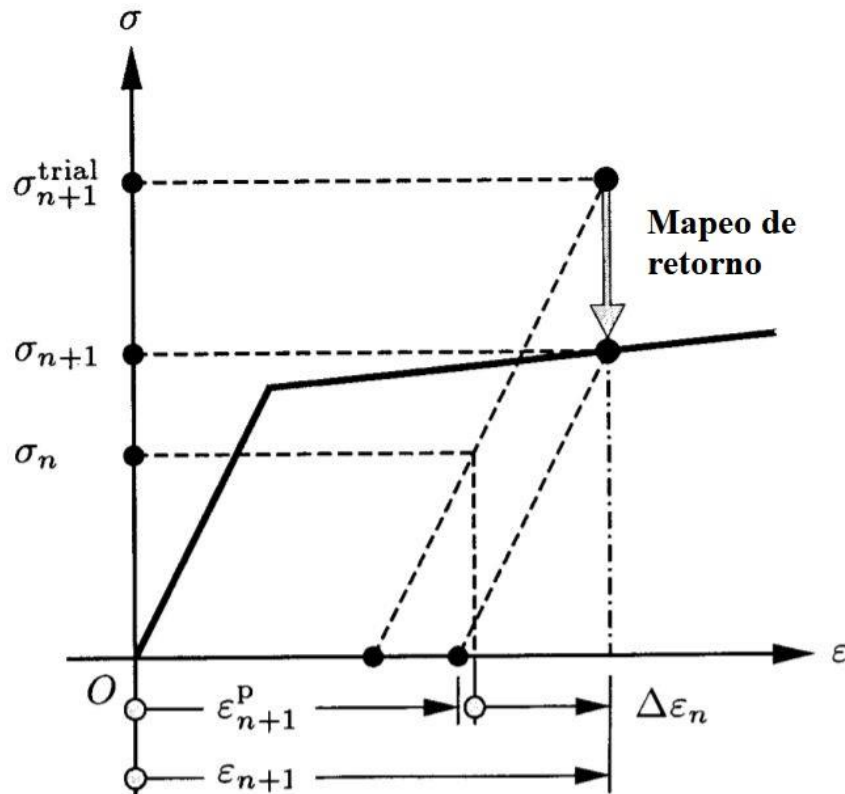


Figura 3.9: Algoritmo de mapeo de retorno.

El Algoritmo de mapeo para el modelo 1-D con endurecimiento isotrópico desarrollado en esta sección se presenta a modo de pseudo-código al final de este capítulo.

3.4 Implementación Numérica con Elementos Finitos

Para demostrar la capacidad del algoritmo integrativo desarrollado en la sección anterior, se presenta un esquema típico de solución numérica para el problema inicial del valor límite elastoplástico dentro del contexto del método de elementos finitos. El punto de partida en esta sección es describir la estructura básica del problema del límite de frontera inicial en el marco de un problema unidimensional. Primero, se resume la forma fuerte o local y la forma débil o

variacional de la ecuación de momento. Estos son principios básicos de la mecánica que se mantienen con independencia de la forma específica adoptada para el modelo constitutivo.

3.4.1 La forma local del problema inicial del valor límite

Se considera que un cuerpo unidimensional ocupa un intervalo $\bar{B} = [0, L]$, con partículas marcadas por su posición $x \in \bar{B}$. Se restringe la atención a un intervalo de tiempo $[0, T]$. Entonces el campo de desplazamiento, es un mapeo

$$u : \bar{B} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.45)$$

Se denomina $u(x, t)$ al desplazamiento en $x \in \bar{B}$ y en el tiempo $t \in [0, T]$. Se tiene que

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (3.46)$$

son los campos de deformación y velocidad en $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T]$ y se denota por $\sigma(x, t)$ al campo de esfuerzos. Se supone ahora que todos los campos involucrados son tan sencillos como sea necesario.

El límite de \bar{B} , que se denota como ∂B , consiste en sus dos puntos finales. Se establece que

$$B =]0, L[, \quad \partial B = \{0, L\}, \quad \bar{B} = \partial B \cup B \quad (3.47)$$

Se considera las condiciones de contorno de la forma

$$u|_{\partial_u B} = \bar{u} \text{ (prescrito)}, \quad \sigma|_{\partial_\sigma B} = \bar{\sigma} \text{ (prescrito)} \quad (3.48)$$

donde $\overline{\partial_u B \cup \partial_\sigma B} = \bar{\partial B}$ y $\partial_u B \cap \partial_\sigma B = \emptyset$. Un ejemplo de las condiciones (3.47) y (3.48) son $\partial_u B = \{0\}$, $\partial_\sigma B = \{L\}$

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma(L, t) = 0 \quad (3.49)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Finalmente, uno prescribe la carga en B por fuerzas másicas definidas por la función $b : B \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ecuación de momento local.

El equilibrio de momento localizado sobre cualquier punto en el cuerpo unidimensional produce la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma + \rho b = \rho \frac{dv}{dt}, \quad \text{en } B \times]0, T[\quad (3.50)$$

donde $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}$ es la densidad de la barra. Esta ecuación, junto con las condiciones de contorno (3.48) define un problema de valor límite inicial siempre que el esfuerzo $\sigma(x, t)$, sea una función conocida del campo de desplazamiento (a través de las deformaciones). Dos casos son de interés:

- La situación más simple es proporcionada por un cuerpo elástico lineal para el cual el campo de tensión está definido por la ecuación

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) \quad (3.51)$$

En virtud de (3.46) y (3.51), el equilibrio de la ecuación de momento (3.50) se reduce a un sistema lineal hiperbólico simétrico unidimensional de leyes de conservación.

- Por otro lado, se considera que $\sigma(x, t)$ se define localmente en cada $(x, t) \in \bar{B} \times [0, T]$ mediante un modelo constitutivo inelástico, a menudo no lineal. El ejemplo a tener en cuenta es el modelo elastoplástico de endurecimiento isotrópico que se resume en la sección 3.2. Se debe tener en cuenta que la ecuación (3.51) se reemplaza por la tasa incremental, altamente no lineal, en forma de la ecuación (3.25), es decir,

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} \frac{EH}{E+H} \dot{\varepsilon} & \text{si } f = 0, \dot{f} = 0 \text{ en } (x, t) \in \bar{B} \times [0, T] \\ E \dot{\varepsilon} & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (3.52)$$

Se observa que esta ecuación define solo la tasa de esfuerzo (en términos de la tasa de deformación). El problema no es lineal y no es trivial por dos razones: (i) la integración de (3.52) requiere una cuidadosa consideración de las condiciones de carga/descarga para decidir qué módulo tangente se aplica y (ii) el esfuerzo (y las variables internas) están sujetas a una restricción adicional definida por el criterio de fluencia. El objetivo final es investigar en detalle la solución numérica del problema de valor límite inicial no lineal resultante.

3.4.2 Formulación débil del problema inicial del valor límite.

La forma local del problema inicial del valor límite discutida anteriormente no es adecuada para una solución numérica mediante métodos de elementos finitos. Para este último propósito, resulta más conveniente considerar su forma débil (principio de potencia virtual). Todas las ideas planteadas en esta sección puede encontrarse en el trabajo de (Hughes, 1987).

Se denota como \mathbb{S}_t el espacio de solución del desplazamiento en el tiempo $t \in [0, T]$ definido como

$$\mathbb{S}_t = \{u(\cdot, t) : B \rightarrow \mathbb{R} \mid u(\cdot, t)|_{\partial_u B} = \bar{u}(\cdot, t)\} \quad (3.53)$$

(Para la plasticidad con endurecimiento se asume $\mathbb{S}_t \subset \mathbb{H}^1(B)$ para t fijo, donde $\mathbb{H}^1(B)$ denota el espacio Sobolev de funciones que poseen derivadas integrables cuadráticas. Se observa que

$\mathbb{H}^1(B)$ contiene, en particular, funciones continuas. De forma similar, asociado con \mathbb{S}_t se define el espacio lineal de funciones de prueba admisibles o variaciones cinemáticamente admisibles, es decir, desplazamientos (virtuales) que satisfacen la forma homogénea de la condición de frontera esencial (3.48), como

$$\mathbb{V} = \{\eta : B \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta|_{\partial_u B} = 0\} \quad (3.54)$$

Nuevamente se asume que $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}^1(B)$. Definidas estas notaciones, la forma débil de las ecuaciones de equilibrio se postula como:

$$\int_B \rho \frac{dv}{dt} \eta \, dx + G(\sigma, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{V}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.55)$$

$$G(\sigma, \eta) = \int_B \sigma \eta' \, dx - \int_B \rho b \eta \, dx - \bar{\sigma} \eta|_{\partial_\sigma B}, \quad \eta' = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Se supone que $\sigma(x, t)$ satisface las ecuaciones constitutivas locales de la sección 3.2, y por lo tanto es una función de $u(x, t)$ a través de la deformación $[\varepsilon(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x]$ y las variables internas $\{\varepsilon^p(x, t), \kappa(x, t)\}$. Una justificación de (3.55) se puede encontrar en (J. C. Simo & Hughes, 2006). Al tratarse de un problema cuasiestático, el término que contiene la derivada de la velocidad se elimina. Por otro lado, el problema se resuelve con la imposición de condiciones tipo Dirichlet, y considerando que no se imponen fuerzas de cuerpo, el problema se reduce a:

$$\int_B \sigma \eta' \, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{V} \quad (3.56)$$

3.4.3 Discretización espacial

Conceptualmente, dentro del contexto del método más simple de elementos finitos, se procede de la siguiente manera (Hughes, 1987):

El dominio $B = [0, L]$ se discretiza en una secuencia de elementos no superpuestos

$$B_e = [x_e, x_{e+1}], \quad B = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} B_e \quad (3.57)$$

donde $x_1 = 0$ y $x_{n_{el}+1} = L$. Se define como $h_e = x_{e+1} - x_e$ al "tamaño de malla" que, por simplicidad, se supone uniforme. Entonces la aproximación de dimensión finita más simple a \mathbb{V} , denotada por $\mathbb{V}^h \subset \mathbb{V}$, se construye de la siguiente manera. La restricción w_e^h a un elemento típico B_e de una función de prueba $w^h \in \mathbb{V}^h$ se interpola localmente de forma lineal como

$$w_e^h = \sum_{a=1}^2 N_e^a(x) w_e^a \quad (3.58)$$

donde $N_e^a : B_e \rightarrow \mathbb{R}$, $a = 1,2$ son las funciones de forma lineal dadas por

$$N_e^1 = \frac{x_{e+1} - x}{h_e}, \quad N_e^2 = \frac{x - x_e}{h_e}, \quad x \in B_e \quad (3.59)$$

y $\mathbf{w}_e = [w_e^1, w_e^2]^T$ es el vector que contiene los valores nodales de las funciones de prueba de los elementos locales. Entonces, se obtiene una función global, a trozos, continua, $w^h \in \mathbb{V}^h$ a partir de la interpolación del elemento anterior, haciendo coincidir el valor de \mathbf{w}_e en los nodos:

$$w_e = w_e^1 = w_{e-1}^2, \quad w_{e+1} = w_e^2 = w_{e+1}^1 \quad (3.60)$$

El cálculo de $G(\sigma^h, w^h)$, planteado en la ecuación (3.55) con $w^h \in \mathbb{V}^h$ (y u^h también en \mathbb{V}^h ya que, por suposición $\bar{u} \equiv 0$), se realiza de elemento por elemento, estableciendo

$$G(\sigma^h, w^h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} G_e(\sigma^h, w^h) \quad (3.61)$$

Para un elemento típico B_e , primero se calcula

$$\frac{\partial}{\partial x} w_e^h = \left[\frac{\partial}{\partial x} N_e^1 \quad \frac{\partial}{\partial x} N_e^2 \right] \mathbf{w}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{w}_e \quad (3.62)$$

Usando (3.59) se puede obtener

$$\mathbf{B}_e = \left[\frac{\partial}{\partial x} N_e^1 \quad \frac{\partial}{\partial x} N_e^2 \right] = \left[-\frac{1}{h_e} \quad \frac{1}{h_e} \right] \quad (3.63)$$

Con esto, se puede definir el vector de fuerzas internas de manera elemental:

$$f_e^{int}(\sigma^h) = \int_{B_e} \mathbf{B}_e^T \sigma^h(x, t) dx \quad (3.64)$$

Los vectores de fuerza global se calculan a partir de contribuciones de elementos (3.64), usando la interpretación de (3.61) se obtiene

$$\mathbf{w}^T F^{int}(\sigma^h) = \mathbf{w}^T \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} f_e^{int}(\sigma^h) \quad (3.65)$$

donde \mathbf{A} es el operador de ensamblaje estándar, de elementos finitos. Si bien \mathbf{w} es arbitrario, debe cumplir con ciertas condiciones de contorno. Por otro lado, se tiene que el estado en el contorno es conocido; pues se han impuesto condiciones tipo Dirichlet en los extremos y se considera que

no existe fuerzas externas en el modelo planteado. Esto implica que el sistema que se debe resolver es el siguiente:

$$\mathbf{w}^T [F^{int}] = 0 \quad (3.66)$$

Expresando en forma matricial se tiene

$$[w_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad w_{n-1}] \begin{bmatrix} F_2^{int} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{n-1}^{int} \end{bmatrix}$$

donde los vectores anteriores corresponden a las versiones reducidas de \mathbf{w} y F^{int} . Ya que los elementos w_i del vector reducido no están sujetos a ninguna restricción, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$R = F_{reducido}^{int} = 0 \quad (3.67)$$

donde R se define como el residuo del sistema de ecuaciones.

El papel de la cuadratura numérica.

El vector de fuerza interna del elemento dado por (3.64) se evalúa mediante cuadratura de Gauss de acuerdo con la fórmula

$$f_e^{int}(\sigma^h) = \sum_{\ell=1}^{n_{int}} \mathbf{B}_e^T \sigma^h(x, t) \Big|_{x=x_e^\ell} w^\ell h_e \quad (3.68)$$

donde $x_e^\ell \in B_e$ denota un punto de cuadratura, w^ℓ es el peso correspondiente, y n_{int} es el número de puntos de cuadratura para el elemento B_e . La conclusión importante que debe extraerse de la expresión (3.66), también válida en una formulación general de elementos finitos, es que el esfuerzo dentro de un elemento B_e se requiere solo en puntos discretos; típicamente el punto de cuadratura x_e^ℓ del elemento.

3.4.4 Procedimiento de solución iterativa.

Se define como $(\bullet)_{n+1}^{(k)}$ el valor de una variable (\bullet) en la k -ésima iteración durante el paso de carga en $[t_n, t_{n+1}]$. En consecuencia,

- i. Sea $\Delta d_{n+1}^{(k)}$ el desplazamiento nodal incremental en la k -ésima iteración, por lo tanto

$$d_{n+1}^{(k)} = d_n + \Delta d_{n+1}^{(k)} \quad (3.69)$$

es el desplazamiento nodal total. Como $u^h \in \mathbb{V}^h$, el campo de desplazamiento sobre un elemento típico B_e está dado por una expresión que tiene la misma forma que (3.58), y el campo de deformación se calcula mediante una expresión análoga a la de (3.62):

$$\varepsilon_{n+1}^{(k)} \Big|_{B_e} = \mathbf{B}_e d_e \Big|_{n+1}^{(k)} \quad (3.70)$$

- ii. Dado el campo de deformación (3.69), en cada punto de cuadratura $x_e^\ell \in B_e$, se calcula el esfuerzo $\sigma_{n+1}^{(k)}$ por medio del algoritmo de mapeo de retorno de la sección 3.3.3;
- iii. Se evalúa el vector de fuerza interno $f_e^{int}(\sigma_{n+1}^{(k)})$ mediante la ecuación (3.68) y se ensambla la contribución de todos los elementos mediante (3.65);
- iv. Se comprueba la convergencia: si (3.67) se cumple para $\sigma = \sigma_{n+1}^{(k)}$ entonces $(\bullet)_{n+1}^{(k)}$ es la solución; de lo contrario, se continúa con el algoritmo y:
- v. Se determina $\Delta d_{n+1}^{(k)} \in \mathbb{R}$, asignando $k \leftarrow k + 1$, y se repite el proceso desde el paso i.

El único paso en el procedimiento de solución descrito anteriormente que queda por abordar es determinar $\Delta d_{n+1}^{(k)}$ (paso v). Se considera la determinación de $\Delta d_{n+1}^{(k)}$ mediante la linealización de $f_e^{int}(\sigma_{n+1}^{(k)})$ sobre el estado actual, definido por $d_{n+1}^{(k)}$.

Primero, dado que el operador de ensamblaje \mathbf{A} es lineal, por la regla de cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{int}(\sigma_{n+1}^{(k)})}{\partial d_{n+1}^{(k)}} \Delta d_{n+1}^{(k+1)} &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{\partial f_e^{int}(\sigma_{n+1}^{(k)})}{\partial d_e \Big|_{n+1}^{(k)}} \Delta d_e \Big|_{n+1}^{(k+1)} \\ &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{B_e} \mathbf{B}_e^T \left[\frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}} \right] \frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}}{\partial d_e \Big|_{n+1}^{(k)}} \Delta d_e \Big|_{n+1}^{(k+1)} dx \\ &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{B_e} \mathbf{B}_e^T \left[\frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}} \right] \mathbf{B}_e dx \right] \Delta d_e \Big|_{n+1}^{(k+1)} \end{aligned} \quad (3.71)$$

A continuación, se introduce una matriz $k_e \Big|_{n+1}^{(k)} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, llamada *matriz de rigidez tangente del elemento*, y se define como

$$k_e \Big|_{n+1}^{(k)} = \int_{B_e} \mathbf{B}_e^T \left[\frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \varepsilon_{n+1}^{(k)}} \right] \mathbf{B}_e dx \quad (3.72)$$

Al realizar una operación de montaje similar a (3.65) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{int}(\sigma_{n+1}^{(k)})}{\partial d_{n+1}^{(k)}} \Delta d_{n+1}^{(k+1)} &= K_{n+1}^{(k)} \Delta d_{n+1}^{(k+1)} \\ K_{n+1}^{(k)} &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} k_e \Big|_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde $K_{n+1}^{(k)}$ se define como la *matriz de rigidez global* en el momento t_{n+1} y la iteración (k). Con la expresión (3.73) a mano, se estima $\Delta d_{n+1}^{(k+1)}$ aproximando de forma lineal el nuevo estado de fuerzas internas mediante:

$$F_{n+1}^{int(k)} + K_{n+1}^{(k)} \Delta d_{n+1}^{(k+1)} = R_{n+1}^{(k)} + K_{n+1}^{(k)} \Delta d_{n+1}^{(k+1)} = 0 \quad (3.74)$$

de donde, finalmente, se despeja los desplazamientos incrementales:

$$\Delta d_{n+1}^{(k+1)} = - \left[K_{n+1}^{(k)} \right]^{-1} \left[R_{n+1}^{(k)} \right] \quad (3.75)$$

De esta manera, el algoritmo regresa al paso **i** y termina hasta que haya una convergencia en el método Newton-Rhaphson.

Adicionalmente, una vez exista la convergencia, se calcula la energía interna del sistema que involucra la fuerza (F^{int}) y el desplazamiento ($d_n = u$), utilizando para ello de manera análoga las ecuaciones de la sección 2.3.1, en particular la ecuación (2.38)

$$\Delta W = F_{n+1}^{int(k)} \Delta d_{n+1}^{(k+1)} \quad \therefore W = \int_0^u F^{int}(u^*) du^* \quad (3.76)$$

El algoritmo resultante de esta formulación, se presenta al final de este capítulo.



Algoritmo de mapeo para el modelo 1-D con endurecimiento isotrópico

Entrada: $\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \kappa_n, \Delta\varepsilon_n$

Salida: $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1}, \sigma_{n+1}$

1: Calcular la deformación actualizada

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$$

2: Calcular los estados de prueba

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \equiv \sigma_n + E \Delta\varepsilon_n$$

$$f_{n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_Y + H\kappa_n]$$

3: IF $f_{n+1}^{trial} \leq 0$; **THEN** Paso elástico:

$$(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{trial}$$

4: ELSE Paso plástico:

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E + H}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\gamma$$

5: END IF



Algoritmo de solución iterativa para el problema de plasticidad unidimensional

Entrada: pasos de carga (desplazamientos), parámetros constitutivos y número de elementos

Salida: valores globales de variables internas, desplazamientos y energía potencial total

1: Inicializar la variable condicional

$$bucle = 1$$

2: **WHILE** *bucle* == 1

3: Inicializar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas internas

$$K_n = 0, \quad F_n^{int} = 0$$

4: **FOR** *i* = 1 **TO** *n_{el}*

5: Obtener $\{\sigma, \varepsilon, \varepsilon^p\}$ mediante el Algoritmo de mapeo de retorno y el módulo tangente correspondiente

6: Actualizar K_n, F_n^{int}, R_n

7: **END FOR**

8: **IF** $\|R_n\| > tol$; **THEN**

9: Obtener los desplazamientos incrementales para la siguiente iteración

$$\Delta d_n = \Delta d_n - [K_n]^{-1}[R_n]$$

10: **ELSE** Actualizar variables

11: $f = -F_1^{int}$

12: $\Delta W = f * \Delta d_n$

13: Energía potencial acumulada: $W = W + \Delta W$

14: Variable condicional: *bucle* = 0,

15: **END IF**

16: **END WHILE**



Capítulo 4

Ablandamiento y efecto de tamaño

En los capítulos anteriores, se ha desarrollado un modelo de plasticidad clásica; el endurecimiento se ha considerado como un comportamiento natural del material, y el fenómeno de ablandamiento no ha recibido mucha atención. Sin embargo, muchos materiales usados en la ingeniería civil, como metales y materiales naturales exhiben bajo ciertos escenarios de carga un comportamiento de ablandamiento por deformación. Los ejemplos típicos son concreto y roca bajo tensión o compresión no confinada, o suelos fuertemente consolidados bajo cizallamiento.

Todos los análisis considerados hasta este punto se refieren a situaciones de sistemas perfectos cargados en perfectas condiciones. En éste capítulo se investigan los méritos y los límites del enfoque anterior y se establece una metodología que captura aspectos que permanecen sin detectar dentro del marco previamente dado. Estos aspectos pueden ilustrarse con referencia a los criterios de inestabilidad local de la pérdida de elipticidad.

4.1 Pérdida de objetividad

Se introduce un enfoque perturbativo a las inestabilidades materiales, en el que un agente perturbador se superpone a un medio finito estresado y deformado homogéneamente. El agente perturbador en este caso es una disminución en la resistencia de la parte central de la barra (reducción en el módulo de Young) para desencadenar la localización. Se muestra que la técnica es "suficientemente rica" para revelar fenómenos que permanecen sin ser detectados con enfoques más convencionales.

4.1.1 Resultados preliminares del algoritmo de plasticidad unidimensional.

En primer lugar, se llevan a cabo simulaciones unidimensionales para demostrar la capacidad del modelo de elasto-plasticidad presentado en el capítulo anterior para hacer frente al comportamiento de ablandamiento. Para estas simulaciones, se usa el experimento de tracción que se representa esquemáticamente en la Figura 4.1. El elemento central posee una reducción del 4% de límite de elasticidad inicial σ_y para desencadenar el inicio de la localización desde dentro de esta región.

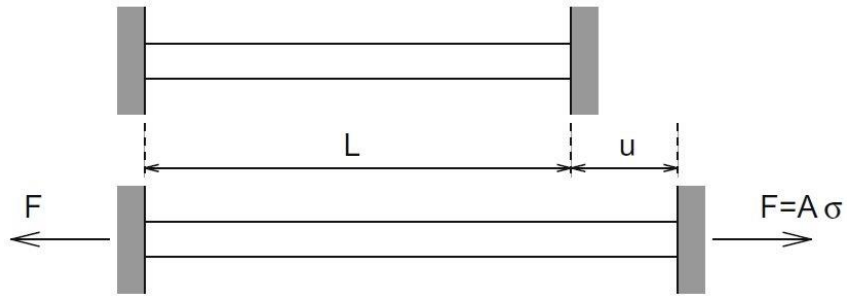


Figura 4.1: Barra bajo tensión uniaxial.

Se presenta a continuación una tabla resumen con las variables introducidas en el algoritmo de solución iterativa para el problema de plasticidad unidimensional:

E	σ_y	H	n_{el}	$long$
Módulo de elasticidad	Esfuerzo de fluencia	Módulo de endurecimiento	Número de elementos	Longitud de la barra
1	1	-0.03	5	1

Tabla 4.1: Valores constitutivos del material

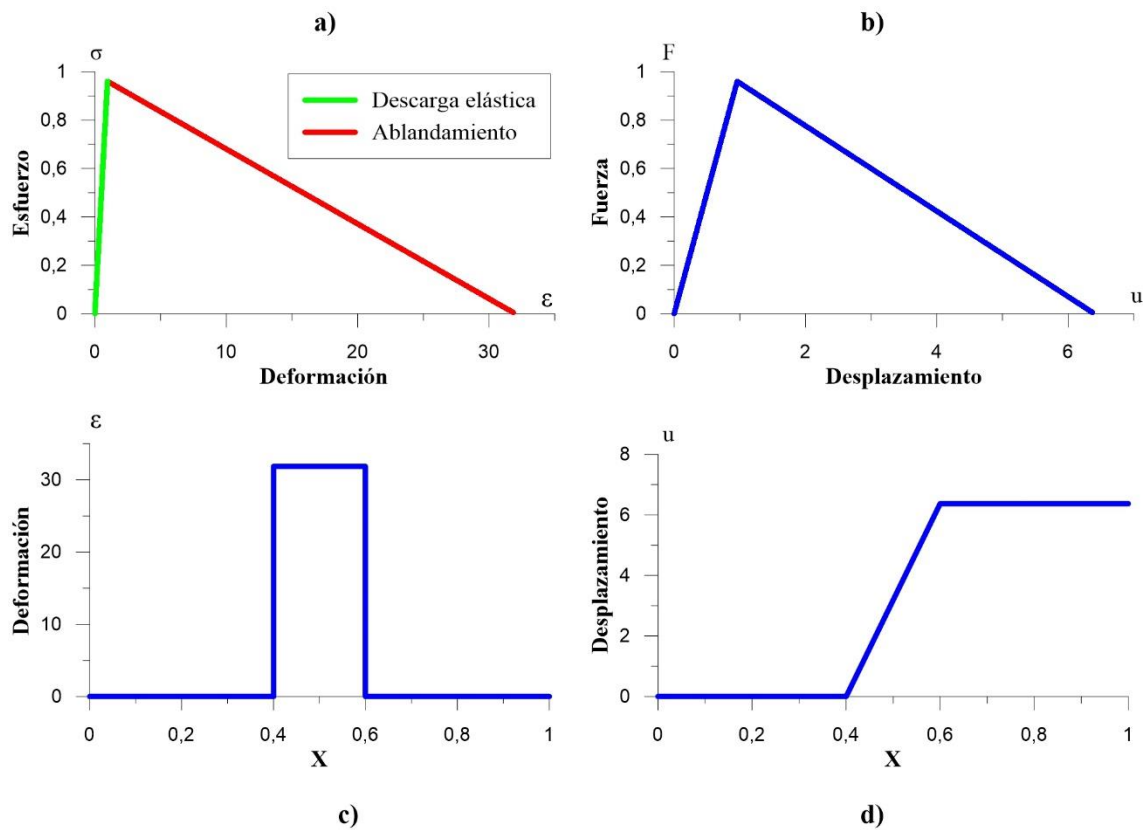


Figura 4.2: Resultados preliminares para valores de la de tabla 4.1.

Evidentemente, el carácter del comportamiento de ablandamiento global está muy influenciado por la ley constitutiva adoptada. El módulo de endurecimiento H influye principalmente en la pendiente al comienzo de la deformación plástica. Como se puede observar en la Figura 4.2a, el elemento que tiene una perturbación desarrolla deformaciones plásticas, este elemento entra en régimen de ablandamiento mientras los demás elementos de la barra se descargan elásticamente. La Figura 4.2c, demuestra la localización de deformaciones que sufre la barra, esta localización se genera en el elemento central que previamente tuvo una disminución del límite elástico σ_Y ; en la figura 4.2d se aprecia un salto en desplazamiento ubicado en el elemento central, esto debido a la localización de deformación.

Debido a que se introduce un módulo de endurecimiento negativo ($H < 0$), la solución no necesariamente es la correcta, el algoritmo converge a una respuesta espuria y que es sensible al tamaño de la malla. Esto se debe a que el algoritmo utilizado en el modelo (Newton-Raphson) calcula la distribución de los desplazamientos para equilibrar las fuerzas internas en la barra, por lo que al sobrepasar el límite de elasticidad, el problema está mal definido y existe un número infinito de soluciones admisibles (Lasry & Belytschko, 1988). Una explicación más exhaustiva se desarrolla a continuación.

4.2 Modelo constitutivo con ablandamiento

Se considera una barra recta de una sección transversal constante A y de longitud total L , sometida a tensión uniaxial; como en la Figura 4.1. Se supone que el material es elastoplástico con ablandamiento isotrópico. La condición de fluencia, análoga a la ecuación 3.5, puede escribirse en la forma

$$f(\sigma, \kappa) \equiv |\sigma| - h(\kappa) = 0 \quad (4.1)$$

donde κ es la deformación plástica acumulativa (definida por la ecuación 3.20, $\dot{\kappa} = |\dot{\epsilon}_p|$), y $h(\kappa)$ es la función que describe la evolución del esfuerzo actual. Bajo carga de tracción monótona, κ es igual a la deformación plástica actual, ϵ_p . Para el caso más simple de ablandamiento lineal, el diagrama de esfuerzo-deformación se muestra en la Figura 4.3a.

La fluencia comienza en la deformación $\epsilon_0 = \sigma_0/E$, donde σ_0 es el esfuerzo de fluencia inicial y E es el módulo de elasticidad de Young. El esfuerzo disminuye gradualmente hasta que desaparece en $\epsilon = \epsilon_f$. Para deformaciones aún más grandes, el esfuerzo permanece igual a cero, lo que significa que el material ha perdido completamente la cohesión y no puede soportar ninguna tensión.

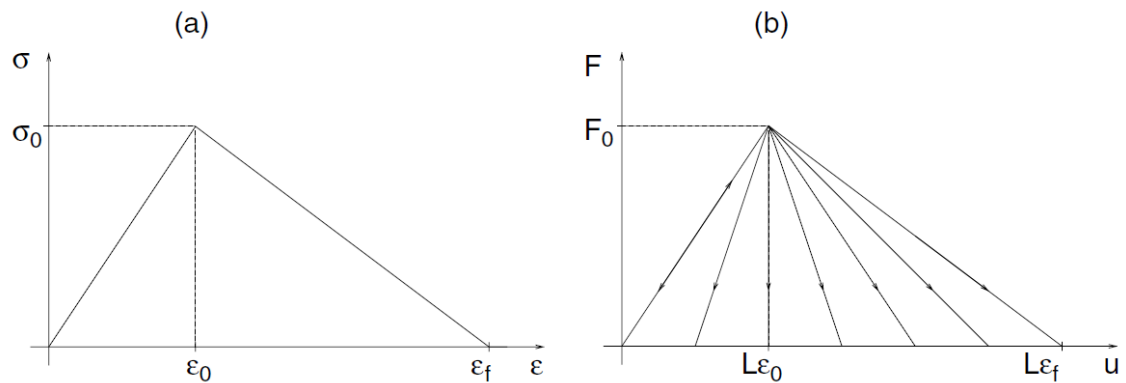


Figura 4.3: a) Diagrama esfuerzo-deformación con ablandamiento lineal, b) Abanico de posibles trayectorias del diagrama fuerza-desplazamiento.

Entonces, la ley de ablandamiento se escribe como

$$h(\kappa) = \langle \sigma_0 + H\kappa \rangle \quad (4.2)$$

dónde $\langle \dots \rangle$ es el operador de la parte positiva, y $H = -\sigma_0/\epsilon_f$ es el módulo plástico (negativo).

Si la barra se carga en tensión mediante un desplazamiento u aplicado en uno de los soportes, la respuesta permanece linealmente elástica hasta $u = u_0 \equiv L\epsilon_0$. En este estado, la fuerza F transmitida por la barra (reacción en el soporte) alcanza su valor máximo $F_0 = A\sigma_0$. Después de eso, la resistencia de la barra se degrada. En cada sección transversal, el esfuerzo puede disminuir ya sea al aumentar la deformación (mediante ablandamiento) o al disminuir la tensión (mediante descarga elástica). La ecuación de equilibrio implica que la distribución de esfuerzos debe permanecer uniforme a lo largo de la barra. Sin embargo, cualquier esfuerzo $\bar{\sigma}$ entre cero y σ_0 puede ser generado por infinitas trayectorias de deformación que están limitadas por dos casos extremos: descarga elástica desde el pico hasta deformación ϵ_u , y ablandamiento sostenido hasta la deformación ϵ_s ; como se puede observar en la Figura 4.4a.

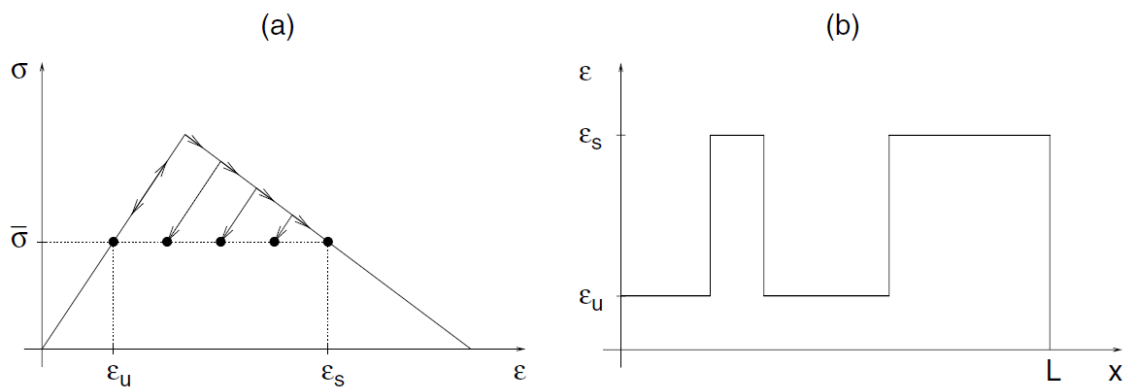


Figura 4.4: a) Múltiples valores de deformación correspondientes a un mismo esfuerzo, b) Distribución constante a trozos de la deformación.



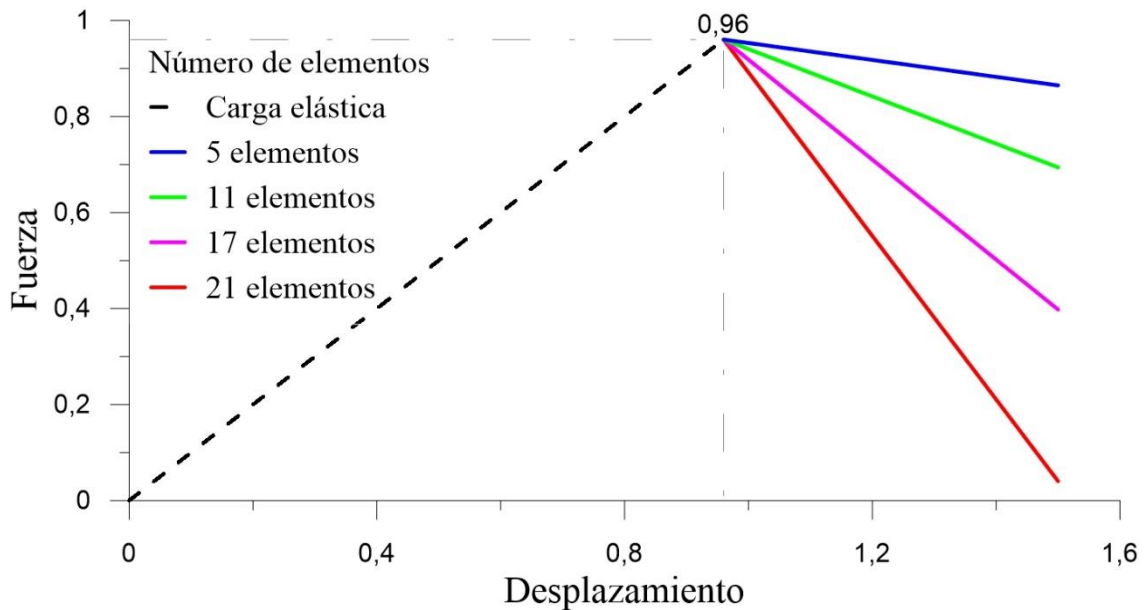
Esto significa que la distribución de la deformación no necesita ser uniforme. Por ejemplo, cualquier distribución de deformación constante a trozos que salte entre los dos valores extremos de deformación ε_u y ε_s representa una solución válida; como se muestra en la Figura 4.4b. Se denota por L_s la longitud acumulada de las regiones de ablandamiento y por $L_u = L - L_s$ la longitud acumulada de las regiones de descarga. Cuando el esfuerzo desaparece, la deformación en la región de ablandamiento es $\varepsilon_s = \varepsilon_f$ y la deformación en la región de descarga es $\varepsilon_u = 0$; por lo tanto, el alargamiento total de la barra es $u_f = L_s \varepsilon_s + L_u \varepsilon_u = L_s \varepsilon_f$. La longitud L_s es indeterminada, puede tener cualquier valor entre cero y L . Esto significa que el problema tiene infinitas soluciones, y las trayectorias posteriores correspondientes al pico del diagrama de fuerza-desplazamiento llenan el abanico que se muestra en la Figura 4.3b.

Este abanico está limitado en un lado por la solución con un ablandamiento uniforme ($u_f = L\varepsilon_f$) y en el otro lado por la solución con descarga uniforme ($u_f = 0$). El último límite representa el caso cuando la barra se descarga justo antes de que ocurra cualquier daño. Cualquier otra solución representa un posible proceso en el que una parte de la barra pierde completamente su resistencia residual y la barra falla. No está claro de inmediato cuál de estas soluciones es la "correcta", es decir, cuál de ellas refleja el proceso de falla real.

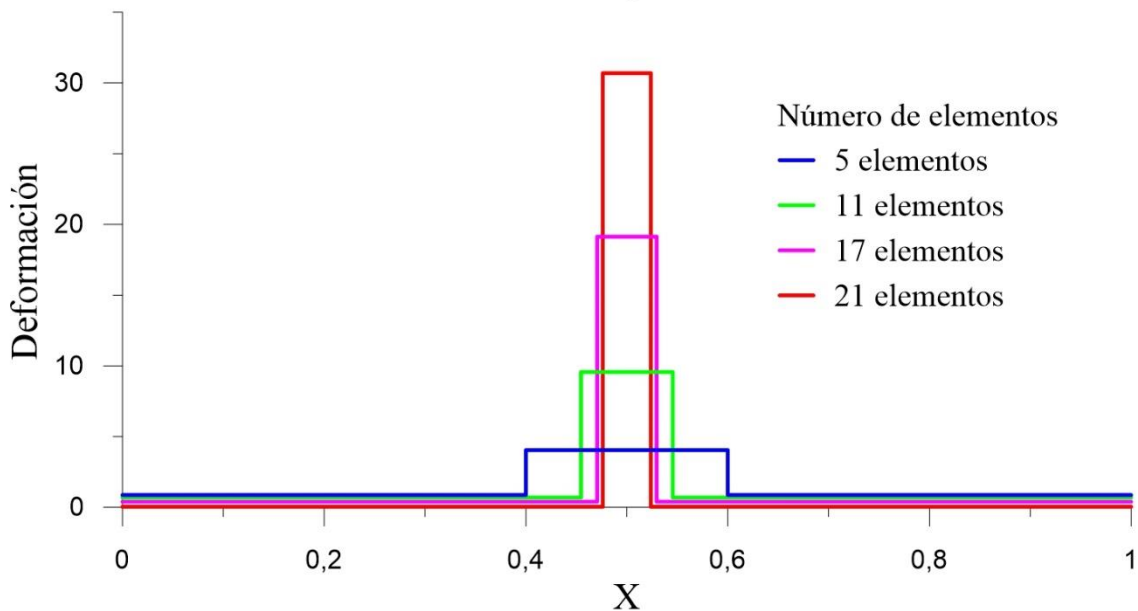
El problema puede tener una solución real si se tienen en cuenta las imperfecciones. Las propiedades reales del material y las dimensiones de la sección transversal no pueden ser perfectamente uniformes. Se considera que la resistencia en una región pequeña es ligeramente menor que en la porción restante de la barra. Cuando el esfuerzo aplicado alcanza la resistencia reducida, comienza el ablandamiento y el esfuerzo disminuye. En consecuencia, el material fuera de la región más débil debe descargarse elásticamente, porque su resistencia no se ha agotado. Esto lleva a la conclusión de que el tamaño de la región de ablandamiento viene dictado por el tamaño de la región con una resistencia reducida. Dicha región puede ser arbitrariamente pequeña, por lo que la trayectoria de ablandamiento correspondiente está arbitrariamente cerca de la trayectoria elástica del diagrama de fuerza-desplazamiento. Por lo tanto, la formulación del continuo estándar con ablandamiento por deformación conduce a una solución que tiene varias características patológicas (Bazant, 1976):

1. La región de ablandamiento es infinitamente pequeña.
2. El diagrama fuerza-desplazamiento siempre muestra snapback, independientemente del tamaño de la estructura y de la ductilidad del material.
3. La cantidad total de energía disipada durante el proceso de falla es cero.

Desde el punto de vista matemático, estas características molestas están relacionadas con la llamada *pérdida de elipticidad* de la ecuación diferencial gobernante. En el presente contexto unidimensional, la pérdida de elipticidad ocurre cuando el módulo tangente deja de ser positivo. El problema de valor de contorno se vuelve mal planteado, es decir, no tiene una solución única con dependencia continua de los datos dados (un cambio infinitesimal en los datos puede causar un cambio finito en la solución).



a)



b)

Figura 4.5: Efecto del refinamiento de la malla en los resultados numéricos: a) Diagrama de fuerza-desplazamiento b) Distribución de deformaciones.



Desde el punto de vista numérico, el mal planteamiento se manifiesta por la sensibilidad patológica de los resultados al tamaño de los elementos finitos. Por ejemplo, considerando una barra discretizada por n_{el} elementos de dos nodos con una interpolación de desplazamiento lineal y , en consecuencia, con una interpolación de deformación constante. Se supone que la sección más débil se encuentra en el centro de la barra. Si el algoritmo numérico captura apropiadamente la solución más localizada, la región de ablandamiento se extiende sobre un elemento, y se tiene $L_s = L/n_{el}$. Por lo tanto, la trayectoria posterior al pico depende en gran medida del número de elementos, y se acerca a la trayectoria elástica inicial a medida que el número de elementos tiende a infinito; como puede verse en la Figura 4.5a. Las distribuciones de deformación considerando $u = 1.5$ para varios refinamientos de malla se trazan en la Figura 4.5b, usando además los parámetros constitutivos de la tabla 4.1, bajo el supuesto de que la imperfección está ubicada en el centro de la barra. En el límite para una malla infinitamente fina, tienden a $2u_0\delta(x - L/2)$, donde $\delta(x - L/2)$ se define como la distribución de Dirac centrada en $x = L/2$. La solución límite representa un salto de desplazamiento en el centro, con cero tensión en todos los demás (Jirásek & Bazant, 2002).

Considerando que la localización de deformaciones es producida por la “heterogeneidad” del material, en el siguiente capítulo se presenta un enfoque a la homogenización que toma en cuenta la distribución de deformaciones y su relación con la conocida regla de Cauchy-Born.



Capítulo 5

Homogenización Variacional

En general, los materiales que intervienen en el diseño y análisis estructural, como en muchas otras aplicaciones importantes de la ingeniería, tienen una naturaleza intrínsecamente heterogénea. Desde un punto de vista microestructural, se pueden reconocer distintos tipos de heterogeneidades. Casos típicos son los materiales compuestos con una matriz homogénea y con inclusiones de partículas, huecos/poros, fibras de refuerzo, etc (Toro, 2013). Para el análisis macroscópico de dichas heterogeneidades, suele utilizarse la teoría de homogeneización. Esta teoría establece las relaciones matemáticas entre los micro-campos y los macro-campos, utilizando un método de perturbación de múltiples escalas. Las propiedades efectivas emergen naturalmente como consecuencia de estas relaciones, sin depender de mediciones fenomenológicas específicas (Hori & Nemat-Nasser, 1999). El uso de métodos de homogeneización para materiales que se comportan en forma estable, desde el punto de vista constitutivo, está ampliamente estudiado y difundido en la actualidad, con resultados ciertamente satisfactorios.

5.1 Enfoque variacional y cambios de fase

Desde un punto de vista diferente, el tratamiento de las inestabilidades materiales y los fenómenos de localización pueden ser descritos mediante conceptos fundamentales basados en principios de minimización de energía. La base del análisis variacional es una formulación incremental basada en la respuesta constitutiva local para medios estándar generalizados. La existencia de esta formulación variacional induce la definición de la estabilidad del material de sólidos inelásticos en función de las propiedades de convexidad en analogía a los tratamientos en elasticidad. Además, los fenómenos de localización se entienden como el desarrollo de la microestructura asociada con un potencial de esfuerzo incremental no convexo en analogía a los problemas de descomposición de fase en la elasticidad (Lambrecht, Miehe, & Dettmar, 2003).

El fenómeno del cambio de fase es intrincado, ya que la definición general de fase es especialmente difícil de alcanzar. Casi todos los materiales, cuando se someten a una fuerza suficientemente grande, cambiarán su fase. Si el cambio se produce solo por deformación, que es la situación que se contempla en esta tesis, grandes cambios de forma o volumen generalmente

acompañan a la transformación. Para una mejor comprensión acerca de los cambios de fase se puede citar el trabajo de (James, 1979).

En el trabajo realizado por Ericksen (Ericksen, 1975), se consideró un problema clásico de equilibrio para una barra en un dispositivo duro (hard device), lo que reduce la minimización de la energía funcional

$$E = \int_0^L W(\varepsilon) dx \quad (5.1)$$

con condiciones iniciales

$$u(0) = 0, \quad u(L) = d, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.2)$$

donde u es el desplazamiento y d es el desplazamiento impuesto. Si $W(\varepsilon)$ es convexo, se sabe que el problema tiene una solución clásica única que, sin embargo, no puede explicar fenómenos como las transiciones de fase en sólidos. Para discutir las inestabilidades materiales, Ericksen asumió que la densidad de energía no es convexa, con esto mostró que las soluciones del problema de minimización basadas de (5.1) exhiben una falta dramática de singularidad. Según Ericksen, para la barra en un dispositivo duro (hard device), las funciones constantes por partes que proporcionan el mínimo global de energía pueden tener un número arbitrario N de discontinuidades en la deformación (límites de fase) (Truskinovsky & Zanzotto, 1996). Estas interfaces son por lo tanto importantes para explicar observaciones experimentales de histéresis, que surge cuando los puntos materiales quedan atrapados en estados metaestables (Gao & Ogden, 2008).

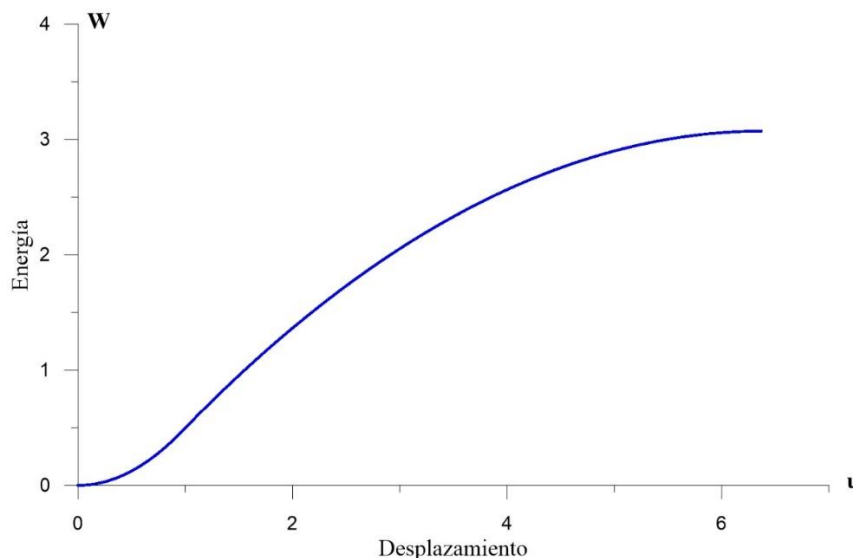


Figura 5.1: Función de densidad de energía con los resultados preliminares de la sección 4.1.1.

Para la barra unidimensional considerada, se presenta la energía que resulta luego de aplicar el algoritmo de solución iterativa de la sección 3.4.4 junto con los valores de la tabla 4.1.

Como puede observarse claramente en la Figura 5.1, la curva presenta una convexidad inicial en la zona de carga elástica, pasado el límite elástico la curva se vuelve no convexa hasta llegar a su deformación final. Considerando que en la Figura 4.2c se aprecia la solución al problema de minimización basado en la ecuación (5.1), se puede afirmar que existe una mezcla medible de dos estados en la barra, un estado elástico y otro plástico, en donde se denota como ε^+ a la deformación que sufre el elemento que incursiona en el régimen plástico y como ε^- a la deformación que sufren los demás elementos.

De esta manera, se puede asumir que la barra puede ser no homogénea, según lo reflejado por la dependencia explícita de W sobre ε . Cualquiera de los elementos con tamaño y forma idénticos en diferentes puntos tienen elasticidades diferentes, o los elementos con elasticidades idénticas tienen tamaños o formas diferentes, o está presente alguna combinación de éstas.

5.2 La regla de Cauchy-Born

Es bien sabido que la deformación mecánica macroscópica es una consecuencia de la interacción y organización de una colección de partículas, por ejemplo, átomos de redes cristalinas, en la microestructura. Por lo tanto, el objetivo principal de muchas investigaciones ha sido estudiar el comportamiento complejo a escala nanométrica necesario para comprender cómo y por qué los materiales fallan. Para investigar esto, se necesita un modelo con información atómica para capturar características de escala fina sin una demanda computacional exhaustiva (Steinmann, Elizondo, & Sunyk, 2007). La conocida regla de Cauchy-Born es una técnica de homogeneización que proporciona una formulación elegante para unir información desde la escala atómica hasta la microescala. Esta regla asume que cuando se somete a un desplazamiento prescrito de su límite, todos los átomos de un volumen de cristal único seguirán este desplazamiento.

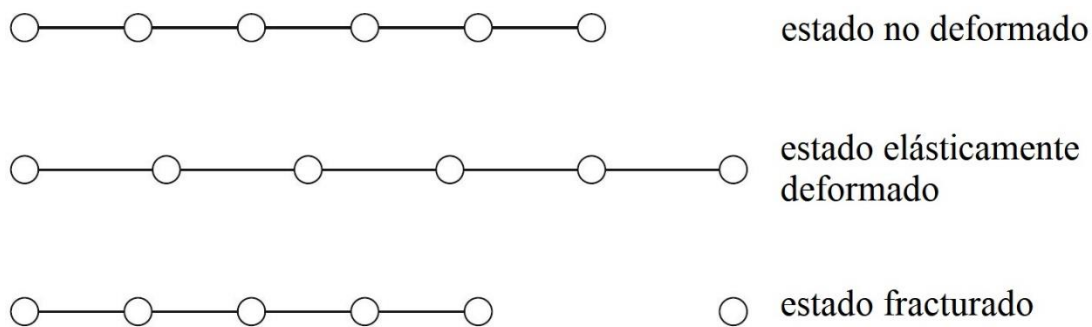


Figura 5.2: Figura esquemática de una cadena unidimensional de átomos.



La regla de Cauchy-Born es ampliamente utilizada como un vínculo entre las deformaciones atómicas y continuas. Describe con precisión el comportamiento del cristal, siempre y cuando la deformación sea homogénea. Sin embargo, esta suposición falla cuando la deformación se vuelve no homogénea debido a las inestabilidades, como por ejemplo deslizamientos, transiciones de fase u otros fenómenos inelásticos (Ericksen, 1984). De hecho, lo que a menudo se conoce como la regla Cauchy-Born se llama método de deformaciones homogéneas en otras obras (Arroyo & Belytschko, 2002).

En la visión del continuo, una deformación homogénea actúa como una transformación lineal, con determinante positivo, en los elementos de la línea material. De forma simplista, los elementos de la línea material son posiciones relativas de átomos, por lo que se aplica la misma transformación lineal a los vectores de red, correlacionando así el movimiento atómico con el movimiento bruto (Ericksen, 1977). La geometría de la red tiene una profunda influencia sobre las propiedades físicas del cristal, tales como el inicio de la deformación plástica, la estructura del núcleo y los sistemas de deslizamiento de las dislocaciones, y la naturaleza de las grietas. Para algunos tipos de cristales, se cree que la regla de Cauchy-Born se aplica a una gama justa de fenómenos considerados elásticos, aunque las pruebas experimentales de esto son bastante limitadas (Ericksen, 2008).

Friesecke y Theil (Friesecke & Theil, 2002) examinaron un modelo especial de red y resorte. Al extender el trabajo sobre la convexidad de funcionales continuos a modelos discretos, lograron probar que en ciertos regímenes de parámetros, la regla de Cauchy-Born da la energía del minimizador global en el límite termodinámico. También identificaron regímenes de parámetros para los que esta declaración falla y lo interpretaron como el fracaso de la regla de Cauchy-Born (Weinan & Pingbing, 2007).

5.3 La fractura vista como cambio de fase

Se ha considerado en la sección 5.1 que si la densidad de energía elástica del material no es convexa (no cuasiconvexa), la solución al problema de minimización de energía no es uniforme y la transición de fase puede verse como una inestabilidad material. Según el trabajo realizado en (Truskinovsky, 1996), puede mostrarse cómo la fractura se ajusta naturalmente al mismo marco. En el trabajo mencionado se expone un modelo que sigue esencialmente el tratamiento de Ericksen (Ericksen, 1975), usando una función no convexa para la densidad de energía. El análisis utiliza un caso especial de un potencial de "doble pozo" cuando un pozo está degenerado y tiende al infinito. Se sugiere que la solución al problema de minimización visto en la expresión (5.1) corresponde a segmentos descargados de la barra que están separados por grietas distribuidas arbitrariamente, esto sugiere la formación de grietas planas (huecos o cavidades). La sugerencia

de que las discontinuidades de desplazamiento aparecerían en el límite descrito anteriormente trae a la mente la idea de fractura ya que cuando esta ocurre, los elementos deberían destensarse.

La característica importante del trabajo de Truskinovsky (Truskinovsky, 1996), es que describe la diferencia de los estados "agrietados" de los triviales. Para llegar a esta conclusión se ha explorado un punto de vista diferente y se reexaminó el fenómeno desde la perspectiva de una red cristalina. Para ello se recurre a un sistema unidimensional discreto de 4 átomos que interactúan, considerando solo la interacción entre los vecinos más cercanos. Los átomos están obligados a estar en la línea recta, r_i denota la longitud del i -ésimo resorte deformado, y $v(r)$ es el potencial interatómico, para esta demostración se usó el potencial de Lennard-Jones. De manera análoga a la condición inicial (ecuación 5.2b), se impone la restricción para un dispositivo duro (hard device)

$$\sum_{i=1}^3 r_i = R \quad (5.3)$$

donde $R > 0$, y se intenta caracterizar las configuraciones mínimas de energía con el potencial dado. El problema en cuestión, similar al problema de minimización de la sección 5.1 tiene esencialmente un grado de libertad y es elemental. Claramente, si los átomos están uniformemente espaciados (Regla de Cauchy-Born) $r_i = R/3$ para $i = 1,2,3$, pero esto puede no corresponder a la energía mínima. Para describir la situación, es conveniente introducir $\phi_i = r_i - R/3$, que se denomina como *parámetro de orden* ϕ y mide el desvío de la regla de Cauchy-Born. Existen esencialmente dos posibilidades diferentes: $\phi = 0$ (solución trivial) y $\phi \neq 0$ (solución "fracturada"), se demuestra que si $R \rightarrow \infty$ entonces un resorte como mínimo se rompe.

Usando una perspectiva similar, se puede asumir que el modelo de N átomos se asemeja a un problema de elementos finitos con una barra unidimensional discretizada por N elementos. Los resultados de los experimentos numéricos que verifican o no el cumplimiento de la regla de Cauchy-Born se muestran esquemáticamente en el capítulo 6.

5.4 Obtención de la objetividad

Hasta ahora el modelo usado no es el adecuado porque se ha demostrado que existe una localización de deformación en una zona con medida cero. Por lo tanto, si se va a utilizar una formulación continua basada en curvas de esfuerzo-deformación con ablandamiento, es necesario complementarla con algunas condiciones que evitan que la deformación se localice en una región de medida cero. Técnicamente, el ablandamiento físico de los materiales se resuelve en un contexto continuo mediante el uso de teorías no locales y de gradiente, es decir, las llamadas



estrategias de solución "regularizadas". Dichas teorías son atractivas numérica y físicamente y constituyen una solución simplificada para la complejidad microestructural inherente que acompaña a la degradación del material. Un revisión de tales métodos se puede encontrar en el trabajo de (Bazant & Jirásek, 2002).

Para el presente trabajo se utilizará un método sencillo y computacionalmente eficaz para evitar la sensibilidad patológica al refinamiento de la malla donde el módulo de ablandamiento (H) se ajusta al tamaño de los elementos finitos; además se revisa un concepto para el tratamiento de inestabilidades materiales y fenómenos de localización basados en principios de minimización de energía donde las microfases que surgen como solución al problema mal planteado pueden resolverse mediante la convexificación de la función de potencial de esfuerzo incremental W .

5.4.1 Módulo de ablandamiento ajustado a la malla

La sensibilidad patológica de los resultados del elemento finito al tamaño del elemento no es aceptable y debe evitarse. El remedio más simple, frecuentemente utilizado en aplicaciones de ingeniería, se basa en un ajuste del diagrama de esfuerzo-deformación en función del tamaño del elemento. Tales técnicas se propusieron para el ablandamiento por corte en plasticidad por (Pietruszczak & Mróz, 1981) y para el ablandamiento por tracción debido al agrietamiento distribuido continuamente por (Bazant & Oh, 1983); este último se conoce como el modelo crack band (banda de grietas). Se explica mejor usando el concepto de zona cohesiva.

Para muchos materiales (a excepción de los perfectamente quebradizos), la formación de una grieta macroscópica sin esfuerzo está precedida por el desarrollo de una zona de proceso de fractura, es decir, una región caracterizada por una deformación altamente localizada y por el desarrollo y crecimiento de microgrietas u otros defectos (huecos o deslizamientos), que reducen la cohesión del material y conducen al ablandamiento. Los modelos cohesivos agrupan los efectos inelásticos y reemplazan la zona de proceso por una superficie de discontinuidad, a través de la cual el campo de desplazamiento tiene un salto. El salto de desplazamiento se describe mediante el vector de separación, que representa la suma de las contribuciones de todos los microdefectos sobre el espesor de la zona de proceso. La ley de separación-tracción resultante proporciona una descripción objetiva (aunque algo simplificada) del proceso de decohesión.

La tracción cohesiva y el vector de separación se pueden descomponer en componentes normales y tangenciales con respecto a la superficie de discontinuidad. Si las componentes tangenciales son insignificantes, es suficiente especificar la relación entre la tracción normal, t_n y el componente normal del salto de desplazamiento (apertura de la grieta cohesiva) $[[u_n]]$. El área bajo la curva de tracción-separación representa la energía requerida para una descohesión completa del material

por unidad de área de la superficie de discontinuidad, y a menudo se denomina energía de fractura G_F en Modo I.

La solución numérica del proceso de decohesión puede basarse en una representación explícita de la discontinuidad de desplazamiento, ya sea por separación de elementos finitos vecinos a lo largo de sus interfaces, o por mejoras especiales discontinuas de la interpolación de elementos finitos. Alternativamente, es posible distribuir continuamente la discontinuidad de desplazamiento sobre una cierta distancia finita L_s , y transformarla en una deformación inelástica. Esto conduce directamente a una ley de esfuerzo-deformación con ablandamiento. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la descripción objetiva del proceso de decohesión viene dada por la ley de separación-tracción, y la ley correspondiente de esfuerzo-deformación depende de la distancia de distribución L_s . Para obtener la correspondencia deseada entre el modelo discreto (con un salto de desplazamiento) y el modelo distribuido continuamente (con una banda finita de deformación localizada), la distancia de distribución debe ser igual a (o al menos una buena aproximación) el ancho numérico de la banda de localización resuelta, que depende del esquema de discretización, por ejemplo en la malla de elementos finitos. Por lo tanto, los parámetros que definen la parte de ablandamiento de la ley de esfuerzo-deformación (por ejemplo, el módulo de ablandamiento) no pueden considerarse propiedades objetivas del material.

La técnica ilustrada esquemáticamente en la Figura 5.3 ajusta la ley de ablandamiento dependiendo de las características de la malla local, es decir, trabaja con un módulo de ablandamiento ajustado a la malla. Por el bien de la simplicidad, se considera una situación uniaxial. La tracción normal a la discontinuidad t_n , corresponde a la tensión uniaxial aplicada σ , y la separación se caracteriza por el salto de desplazamiento $[[u]]$.

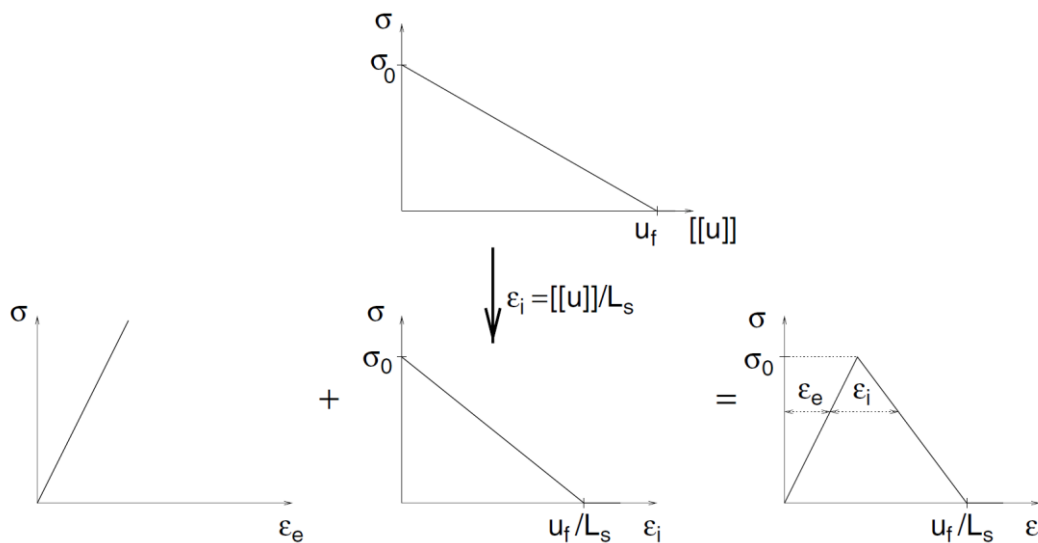


Figura 5.3: Diagrama esfuerzo-deformación derivado de una ley de separación-tracción cohesiva.

Se considera que la ley de separación-tracción es

$$\sigma = f_u([[u]]) \quad (5.4)$$

Si la separación es distribuida sobre una distancia L_s , la deformación inelástica correspondiente es

$$\varepsilon_i = \frac{[[u]]}{L_s} \quad (5.5)$$

Por lo tanto, la ley de ablandamiento para el modelo distribuido (continuo) debe escribirse como

$$\sigma_Y = f_u(L_s \varepsilon_i) \quad (5.6)$$

El módulo de ablandamiento

$$H = \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_i} = L_s f_u'(L_s \varepsilon_i) \quad (5.7)$$

depende de la pendiente del diagrama de separación-tracción f_u' , que es una propiedad objetiva del material, y en la distancia de distribución L_s , que depende de la malla del elemento finito elegido.

El valor apropiado de L_s debe deducirse de las características de la malla. Como se muestra en la Figura 4.5b, la deformación inelástica en el problema uniaxial se localiza en un solo elemento, por lo que L_s es igual a la longitud de ese elemento. En múltiples dimensiones, la deformación inelástica en general se localiza en una banda de elementos que se extiende a través de la malla (para concreto a menudo llamada “banda de grietas” (crack band)). Usualmente, la banda es el patrón más pequeño posible que aún permite la separación de nodos en sus lados opuestos.

Basándose en consideraciones similares, (Bazant, 1985) propuso las reglas básicas para la elección del tamaño del elemento equivalente L_s . Las consideraciones anteriores se aplican a los estados de tensión uniaxial (no necesariamente en una dimensión) y al ablandamiento que comienza inmediatamente al inicio de la no linealidad. En general, el inicio de la localización puede detectarse mediante el análisis de los valores propios (eigenvalores) del llamado tensor acústico (Rudnicki & Rice, 1975). Antes de la localización, la ley constitutiva formulada como una relación esfuerzo-deformación se considera objetiva, independiente de la malla, y el ajuste de acuerdo con el tamaño del elemento se realiza solo en el régimen localizado. En un caso multiaxial general, no es fácil detectar el inicio de la localización y definir qué característica geométrica del elemento debe desempeñar el papel del tamaño L_s . Estos problemas pueden omitirse si el modelo constitutivo se enriquece con un limitador de localización que impone un cierto tamaño de la

banda de localización considerada como un parámetro de material adicional (Jirásek & Bazant, 2002).

El concepto de módulo de ablandamiento ajustado a la malla se ha explicado para los modelos de banda de grietas (crack band) con agrietamiento distribuido continuamente, pero se pueden hacer consideraciones muy similares para otros tipos de modelos constitutivos.

5.4.2 Convexificación del potencial de energía

Desde el punto de vista variacional, se puede asumir que la estabilidad del material de los sólidos inelásticos se basa en la condición de convexidad de las funciones de energía incremental en analogía con los tratamientos en elasticidad finita. De esta manera, los fenómenos de localización se interpretan como desarrollos de microestructuras asociados con funciones de energía incrementales no convexas. Las microfases que surgen pueden resolverse mediante la “relajación” de un funcional de energía mediante la convexificación de la función de potencial de esfuerzo incremental. El problema “relajado” proporciona una formulación bien planteada para un análisis objetivo de las localizaciones (Lambrecht et al., 2003).

Usando las expresiones de la sección 2.2.4, se demuestra que las leyes constitutivas de un material controlado por un potencial de energía W viene dado como

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}, \quad C = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \quad (5.8)$$

donde C se conoce como el módulo tangente y define la relación del esfuerzo con respecto a la deformación. Como ya se mencionó, la existencia de minimizadores globales está asegurada si el potencial W es una función convexa con respecto a la deformación real ε_{n+1} . La condición de convexidad clásica se expresa como

$$W(\xi \varepsilon^+ + (1 - \xi) \varepsilon^-) \leq \xi W(\varepsilon^+) + (1 - \xi) W(\varepsilon^-) \quad (5.9)$$

donde ε^+ y ε^- son las deformaciones correspondientes a las fases que aparecen, ξ se define como la fracción de volumen que ocupa la fase ε^+ ($0 \leq \xi \leq 1$), y ε_{n+1} es deformación total del sistema teniendo en cuenta las dos fases. Se define la energía total del sistema mediante el funcional

$$I(u_{n+1}) = \int_0^L W(\varepsilon_{n+1}) dx \quad (5.10)$$

el cual tiene un minimizador de energía si W es convexa, es decir, si cumple la condición de convexidad (4.11). Sin embargo, el potencial de esfuerzo incremental W puede consistir en rangos convexos y no convexos. Para detectar si W es convexo para una deformación dada ε_{n+1} , se



considera que la deformación ε^h se describe mediante una interpolación entre dos deformaciones ε^+ y ε^-

$$\varepsilon_{n+1} = \xi \varepsilon^+ + (1 - \xi) \varepsilon^- \quad (5.11)$$

La ecuación (5.11) también puede considerarse como una condición de compatibilidad que debe ser satisfecha por las deformaciones ε^+ y ε^- . Para el problema unidimensional en cuestión se hace la siguiente consideración

$$\varepsilon^- = \varepsilon_{n+1} - \xi d, \quad \varepsilon^+ = \varepsilon_{n+1} + (1 - \xi)d, \quad c = [\xi, d]^T \quad (5.12)$$

La variable d se denota como la intensidad de la micro-bifurcación, c es un vector que junta las variables ξ y d en un solo elemento. La introducción de (5.11) y (5.12) en (5.9) resulta en

$$\bar{W}^h(\varepsilon_{n+1}, c) = \xi W(\varepsilon^+) + (1 - \xi)W(\varepsilon^-) \quad (5.13)$$

La expresión (5.13) induce una reformulación de la condición de convexidad clásica (5.9). La deformación ε_{n+1} es un punto convexo del potencial de esfuerzo incremental W , si el mínimo de la función $\bar{W}^h(\varepsilon_{n+1})$ con respecto a las variables θ y d es igual al potencial $W(\varepsilon_{n+1})$.

$$W(\varepsilon_{n+1}) = \inf \left(\bar{W}^h(\varepsilon_{n+1}, c) \right) \quad (5.14)$$

Dependiendo de si se cumple la condición (5.14), la deformación ε_{n+1} se encuentra en un rango convexo o no convexo de la función potencial incremental W . Obviamente, la condición de convexidad alternativa (5.14) solo se cumple si las variables minimizadoras son $\xi \in [0,1]$ o $d = 0$. En estos casos, una o ambas micro-deformaciones ε^+ o ε^- son idénticos a la deformación macroscópica ε_{n+1} .

En el contexto de las transiciones de fase, la condición de convexidad (5.14) permite una interpretación mecánica instructiva: Según (5.11) la deformación ε_{n+1} puede considerarse como una homogeneización de las dos deformaciones ε^+ y ε^- . La condición de convexidad reformulada (5.14) postula que el estado de deformación homogénea ε_{n+1} es estable siempre que no exista una combinación de dos fases (+) y (-) que posea un nivel energético más bajo

$$\theta W(\varepsilon^+) + (1 - \theta)W(\varepsilon^-) < W(\varepsilon_{n+1}) \quad (5.15)$$

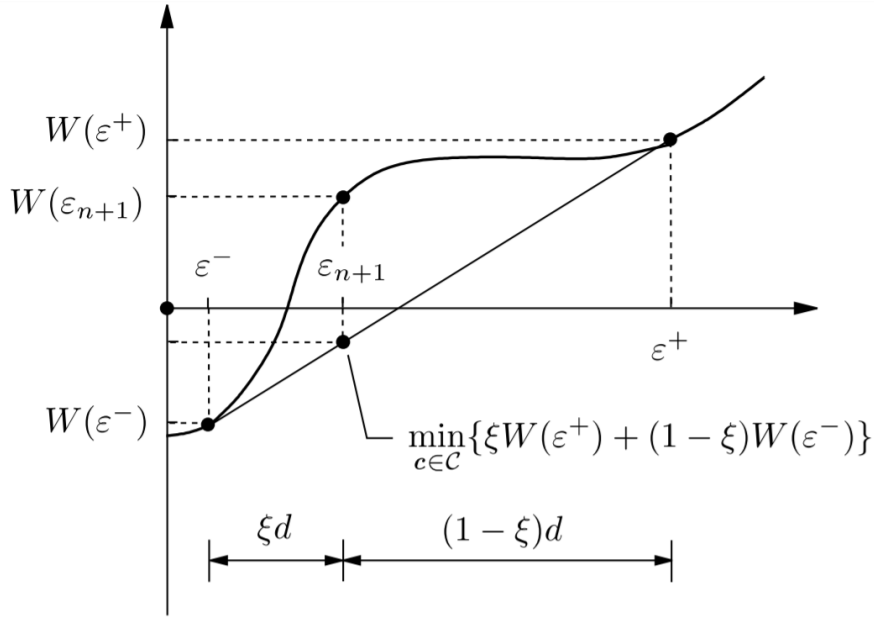


Figura 5.4: Convexidad del potencial de esfuerzo W .

La Figura 5.4 muestra la forma de un potencial de esfuerzo incremental no convexo W . Obviamente, el potencial incremental $W(\varepsilon_{n+1})$ es mayor que la interpolación de los potenciales incrementales $W(\varepsilon^+)$ y $W(\varepsilon^-)$ correspondientes a las dos fases (+) y (-). Como consecuencia, el estado de deformación homogénea no es estable y se descompone en las micro-deformaciones ε^+ y ε^- . Estas dos deformaciones descritas en términos de la expresión (5.12) minimizan la función \bar{W}^h con respecto a la intensidad d y la fracción de volumen ξ .

La pérdida de convexidad del potencial de esfuerzo W indica la pérdida de estabilidad del estado de deformación homogénea ε_{n+1} e inicia el desarrollo de microestructuras. Por lo tanto, el funcional descrito en (5.10) carece de un minimizador de energía. Para solucionar esto, se establece un nuevo funcional descrito como

$$I_c(u_{n+1}) = \int_0^L W_c(\varepsilon_{n+1}) dx \quad (5.16)$$

donde el integrando W no convexo se reemplaza por un potencial convexo W_c , el cual es una función convexificada de W . El problema de minimización ahora está definido como

$$W_c(\varepsilon_{n+1}) = \inf(\bar{W}^h(\varepsilon_{n+1}, c)) \quad (5.17)$$

donde aparece en la condición de convexidad (5.14). El potencial convexificado es idéntico a $\bar{W}^h(\varepsilon_{n+1}, c)$ que caracteriza el promedio de volumen de los potenciales en las micro-fases (+) y (-). La solución numérica del problema de minimización (5.17) consiste en demostrar que

existen dos variables $0 < \theta < 1$ y $d > 0$ que minimizan la función \bar{W}^h definida en (5.13). La condición necesaria del problema de minimización es

$$\begin{aligned} \bar{W}^h_{,c} &= 0 \\ \bar{W}^h_{,d} &= \xi(1 - \xi)[\sigma(\varepsilon^+) - \sigma(\varepsilon^-)] = 0 \\ \bar{W}^h_{,\theta} &= W(\varepsilon^+) - W(\varepsilon^-) - d[\xi\sigma(\varepsilon^+) - (1 - \xi)\sigma(\varepsilon^-)] = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

La condición (5.18b) establece que los esfuerzos en las microfases (+) y (-) están en equilibrio. Esto permite la conclusión a partir de (5.18c) de que la pendiente del potencial convexo W_c es constante.

La Figura 5.5 representa la forma de una función potencial no convexa y su versión convexificada que se describe por las micro-deformaciones ε^+ y ε^- en términos de la fracción de volumen ξ y la micro-grieta d . En el rango no convexo $\varepsilon^- < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon^+$ la función potencial incremental no convexa W se reemplaza por su convexificación W_c . Las condiciones necesarias (4.20) caracterizan de manera única la forma del perfil convexo W_c como se muestra en la Fig. 4.10.

El potencial incremental convexificado $W_c(\varepsilon_{n+1})$ se obtiene mediante una proyección ficticia del potencial incremental no convexo $W(\varepsilon_{n+1})$ en el perfil convexo. Como consecuencia, el análisis de convexificación produce una respuesta de esfuerzo perfectamente plástico en el incremento considerado, esta respuesta puede verse en la Figura 5.6.

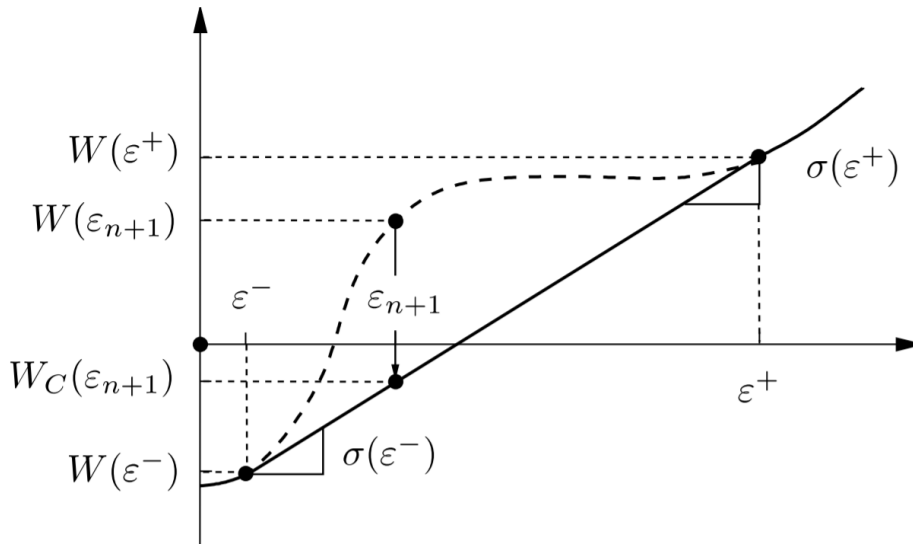


Figura 5.5: Convexificación de un potencial de esfuerzo no convexo.

Como se representa en la Figura 5.6, el esfuerzo relajado $\bar{\sigma}_{n+1}$ en ε_{n+1} está asociado con una línea de tipo Maxwell similar a los tratamientos clásicos en descomposiciones de fase de gases reales (Lambrecht et al., 2003).

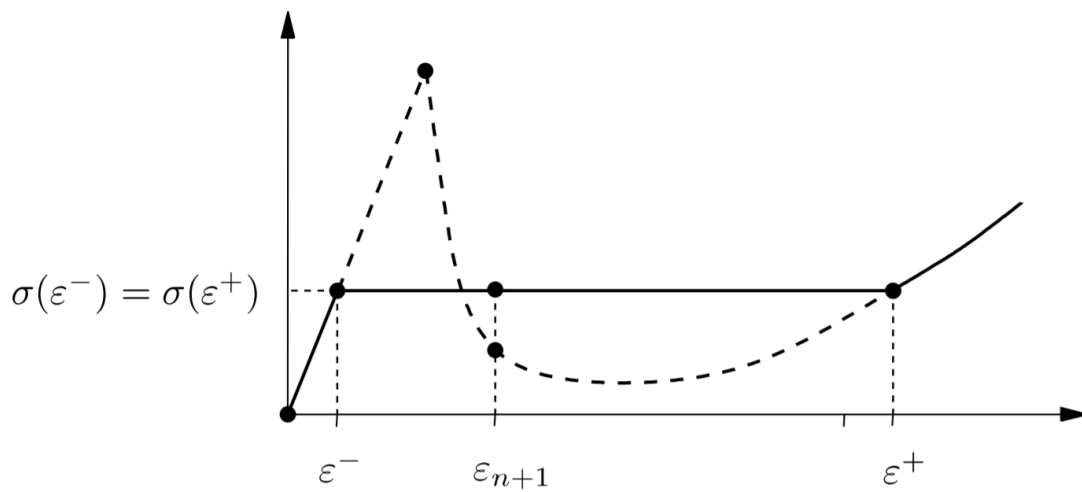


Figura 5.6: Pendiente del potencial convexificado W_c .

Como se señaló anteriormente, el análisis de convexificación representa un análisis de homogeneización a dos escalas de dos microfases (+) y (-) que surgen debido a una inestabilidad del estado de deformación homogénea. Para implementar numéricamente estos conceptos, se requiere un procedimiento distinto al ya empleado hasta ahora, considerando la formulación energética con un problema de valor de límite adecuado. Considerando a lo mencionado al final del capítulo 2, estos conceptos variacionales se usarán como herramienta de análisis más que como herramientas de cómputo.

Capítulo 6

Experimentación Numérica y Resultados

En este capítulo se presenta la formulación y la implementación numérica de los modelos de plasticidad unidimensionales. Los modelos constitutivos desarrollados en los capítulos anteriores se han implementado en el marco del método del elemento finito no lineal, usando para ello el método de iteración de Newton-Raphson. Para el problema local, los valores actualizados $(\bullet)_{n+1}$ del esfuerzo y las variables internas al final del paso se obtienen mediante una integración totalmente implícita de la forma incremental de las ecuaciones constitutivas, a partir de sus valores conocidos $(\bullet)_n$ al comienzo del paso y aplicando el incremento de deformación dado. En la tabla 4.1 se presentan los valores usados en el algoritmo de elementos finitos, considerando de nuevo que el elemento central posee una reducción del 4% de límite de elasticidad inicial σ_Y para desencadenar el inicio de la localización.

E	σ_Y	$long$	u
Módulo de elasticidad	Esfuerzo de fluencia	Longitud de la barra	Desplazamiento impuesto
1	1	1	1.2

Tabla 6.1: Valores usados para experimentación numérica

6.1 Solución a la dependencia de la malla

Si el modelo constitutivo descrito en el capítulo 3 se usa de inmediato dentro del método de elementos finitos, la cantidad de energía disipada dependerá en gran medida de la malla. Esta dependencia de la malla es causada por la localización de deformaciones en zonas dependientes del tamaño de los elementos finitos. Cuanto más fina sea la malla, menos energía se disiparía. Esta es una limitación bien conocida de las leyes constitutivas con ablandamiento por deformación. Una forma de superar esta dependencia de la malla es ajustar el módulo de ablandamiento con respecto al tamaño del elemento. La metodología a usar se presenta en la sección 5.4.1, y en esta sección se presentan los resultados de dicha estrategia.

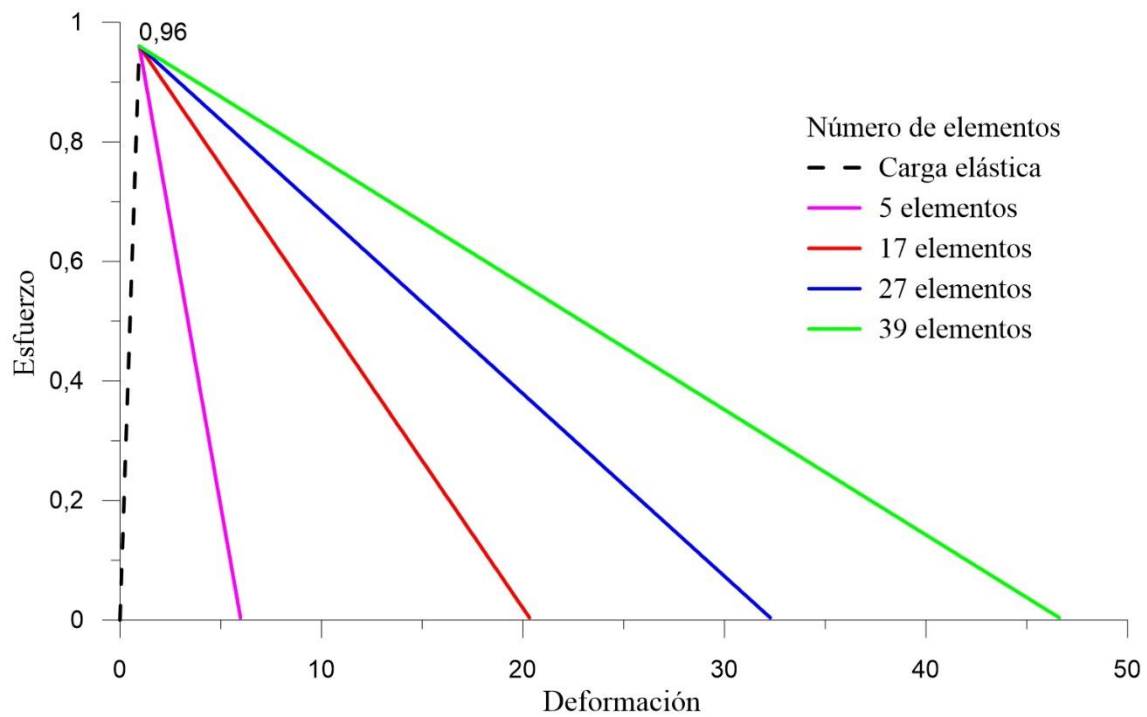


Figura 6.1: Diagrama esfuerzo-deformación con módulo plástico ajustado a la malla

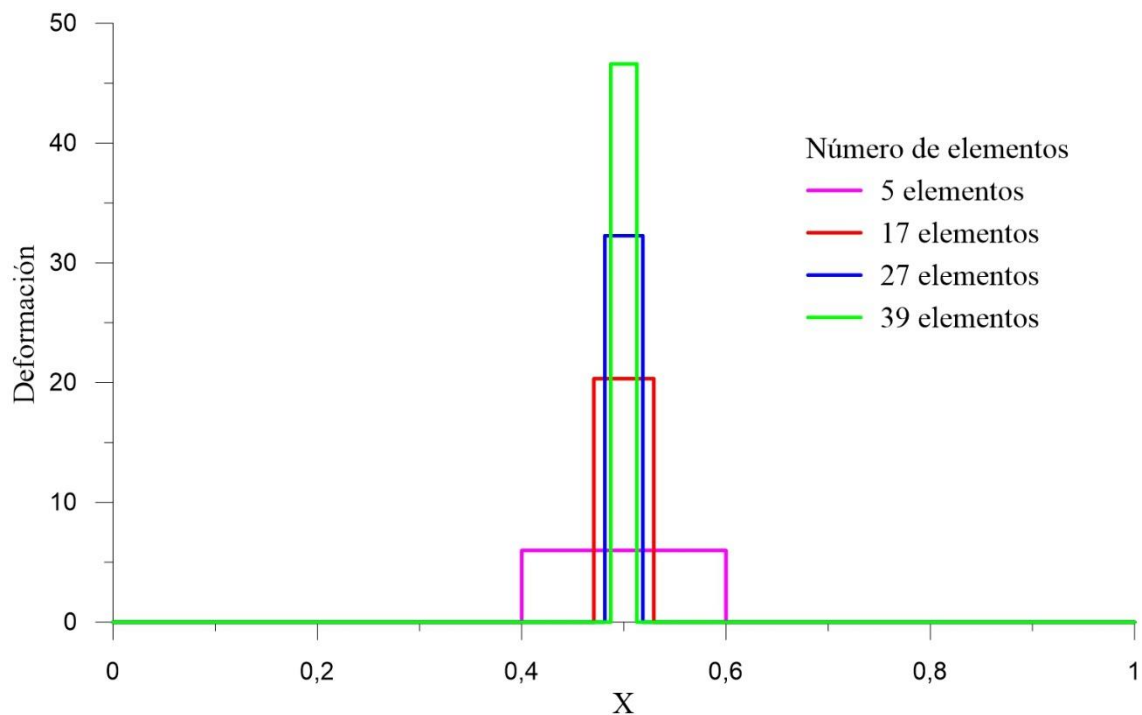


Figura 6.2: Perfil de deformaciones debido al módulo plástico ajustado a la malla

En la Figura 6.1, se puede observar que el módulo plástico cambia dependiendo del número de elementos usados, esto debido a que el módulo deja de ser una propiedad objetiva del material.

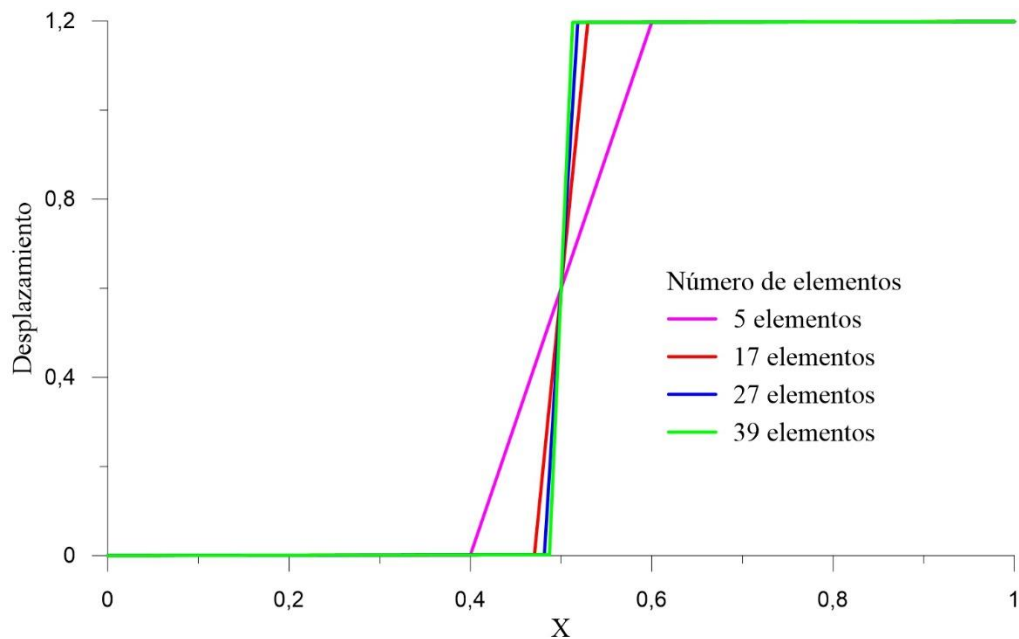


Figura 6.3: Salto de desplazamiento del problema ajustado a la malla

Este enfoque, que a menudo se le conoce como *crack band* es aplicable no solo a los materiales que experimentan agrietamiento sino también a otros materiales con ablandamiento, por ejemplo, a la plasticidad con degradación del esfuerzo. Considerando un marco de fractura para el presente modelo, se puede manifestar que las grietas están representadas por perfiles de deformación localizados dentro de elementos finitos, como los que se pueden apreciar en la Figura 6.2. Desde el punto de vista físico puede suponerse que la fractura de una matriz heterogénea, tal como el hormigón, se presenta en forma de una banda de grietas en la que el material experimenta un agrietamiento progresivo caracterizado por una relación de tensión-deformación que exhibe ablandamiento por deformación (Bazant & Oh, 1983).

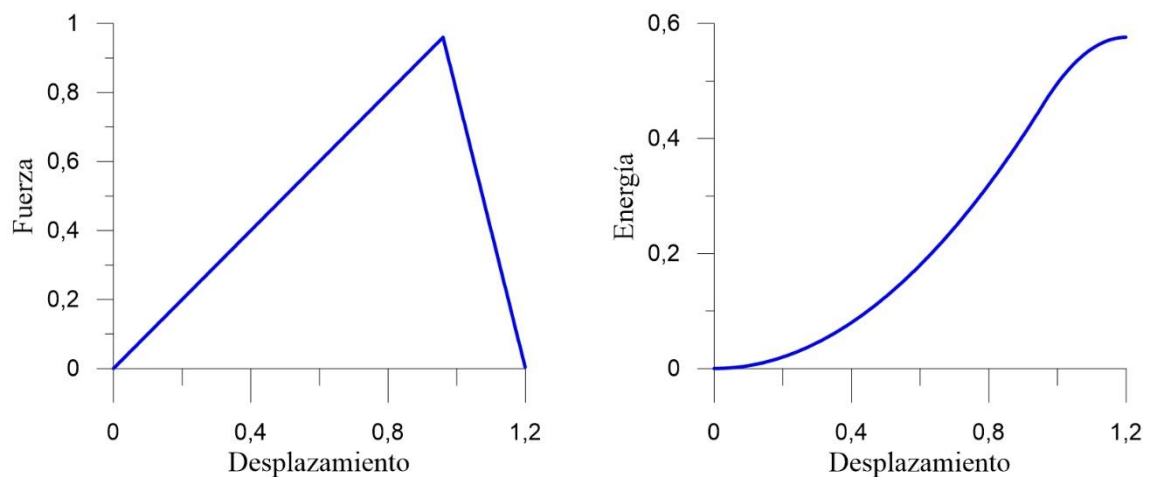


Figura 6.4: Diagrama fuerza-desplazamiento para el problema ajustado a la malla y la energía resultante

En la Figura 6.4 se demuestra que el problema deja de ser sensible al tamaño de la malla de discretización, gracias a esto, la energía disipada calculada es la correcta. Además, puede apreciarse la no-convexidad de la energía acumulada resultante y notar que el tamaño de la parte no-convexa depende del desplazamiento impuesto como condición de contorno.

Alternativamente, se podrían aplicar enfoques más sofisticados para eliminar el mal planteamiento del problema debido a la sensibilidad de la malla usando los modelos no locales de tipo integral o los modelos con gradiente mejorado ((Jirásek, 2011), (Hien Poh & Swaddiwudhipong, 2009)) para regularizar el comportamiento del ablandamiento. Sin embargo, los últimos enfoques también son computacionalmente más exigentes.

6.2 Límite de la homogenización

Una vez que se ha obtenido la energía almacenada en la barra, la cual puede verse en la Figura 6.4b, se pretende explicar desde un punto de vista variacional la aparición de inestabilidades materiales debido al tipo de potencial considerado. Para ello se usará conceptualmente la regla de Cauchy-Born, la cual es una suposición cinemática estándar para vincular la deformación de un sistema atomista con la de un continuo.

Como ya se dijo antes, se puede asumir que un modelo de N átomos se asemeja al problema de elementos finitos planteado, en donde se usará el potencial dado en la Figura 6.4b para describir la energía del sistema de átomos. El potencial se denotará de la siguiente manera

$$V_N(r_1, \dots, r_N) = \sum_{i=1}^N v(r_i; N), \quad i = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

donde r_i es la longitud entre dos átomos y que para este ejemplo discreto se lo denomina como la longitud deformada de un resorte que une dos átomos. Se impone la restricción para un dispositivo duro (hard device) de manera semejante a la sección 5.3

$$\sum_{i=1}^N r_i = R \quad (6.2)$$

Usando la consideración de la tabla 4.1, la longitud de la barra se asume igual a 1, de esta manera de definen las siguientes variables

$$r_0 = \frac{1}{N}, \quad \varepsilon_i = \frac{r_i}{r_0} - 1, \quad d = R - 1 \quad (6.3)$$

donde r_0 puede tomarse como la longitud inicial del resorte, ε_i es la deformación del resorte y d es el desplazamiento total del sistema de átomos.



Para una solución no trivial del problema ($\phi \neq 0$), la deformación ε_i puede tener únicamente dos valores, ε^+ y ε^- , los cuales representan el límite de las interfases en el sistema de átomos, esto requiere que la regla de Cauchy-Born se rompa al inicio del cambio de fase, Se establece que $\varepsilon^- < \varepsilon^+$ y a ε^+ se le asocia con la región “fracturada”. Para lograr el equilibrio, debe existir una cantidad de resortes que están sobrecargados y desarrollan la deformación ε^+ , se denomina a esta cantidad como p ($0 \leq p \leq N$). De esta manera, la energía resultante se divide en dos contribuciones, donde p y $N - p$ corresponden a dos ramificaciones diferentes de energía y se expresan como

$$\begin{aligned} F_N(\theta, \varepsilon^+, \varepsilon^-) &= (1 - \theta)f_N(\varepsilon^-) + \theta f_N(\varepsilon^+) \\ (1 - \theta)\varepsilon^- + \theta\varepsilon^+ &= d \\ \theta &= p/N \end{aligned} \tag{6.4}$$

donde

$$f_N(\varepsilon) = N \left(v \left(\frac{\varepsilon + 1}{N}; N \right) - v \left(\frac{1}{N}; N \right) \right) \tag{6.5}$$

es análogo a la densidad de energía usada en la mecánica clásica, y $F_N = V_N - V_0$ es la densidad de energía local almacenada en el sistema de átomos. Aquí $V_0 = Nv(1/N; N)$ es la energía del estado no distorsionado la cual se asume como una constante independiente de N .

Se asume ahora que $N = 6$, es decir que el sistema de átomos está formado por 6 átomos unidos con 5 resortes. La solución al problema (6.4a) y (6.5) es trivial si $\varepsilon^- = \varepsilon^+$ y si se mantiene así hasta una deformación $d^* = r^*N - 1$. Si se toma $p = 1$, se estaría asumiendo que existe una sola grieta o discontinuidad en la deformación. Si se tomara $N \rightarrow \infty$, el término $f_N \rightarrow 0$; se concluye que en el límite continuo el sistema de átomos puede romperse sin ningún gasto de energía lo cual es incorrecto. Esta conclusión es equivalente a una localización de deformación en una medida cero sin disipación de energía.

La desaparición de la energía en el límite del continuo se debe al hecho de que no existe una escala de longitud interna en la teoría desarrollada. Al mismo tiempo, se sabe que la fractura es un fenómeno dependiente del tamaño; la teoría del continuo adecuado debe contener un pequeño parámetro con la escala de longitud. Para implementar estas ideas, se considera $r_0 = \epsilon$, donde ϵ es una "longitud" pequeña pero finita. De hecho, es un parámetro no dimensional ya que se asume que $r_0N = 1$, por lo tanto $N = \epsilon^{-1}$.

De esta manera se define a $[u]_i = \varepsilon_i \epsilon$ como la discontinuidad en el campo de desplazamiento en la zona de fractura y que ε^- sería la deformación fuera de la zona de fractura. Usando la ecuación

(6.4a) se puede representar mediante dos términos el comportamiento dentro y fuera de la zona de fractura como

$$F = \int_0^1 f_{out}(\dot{u}(x))dx + \epsilon \sum_{i=1}^k f_{int}\left(\frac{[u]_i}{\epsilon}\right) \quad (6.6)$$

En la expresión (6.6) el campo de desplazamiento se define como $u(x)$ y se asume discontinuo en k puntos, se considera además $\dot{u}(x) = du/dx = \epsilon$. Analizando la expresión (6.6) se puede afirmar que la energía total del sistema tiene una contribución de la fase elástica y una de la fase fracturada (o plástica). Si se deriva el segundo término de esta expresión se obtiene claramente un modelo de zona cohesiva, que es muy parecido al modelo presentado en la sección 4.3.1.

De esta manera se puede concluir que el potencial (6.6) describe el comportamiento de la curva de energía vista en la Figura (6.4b), además puede verse que para que exista una solución al problema de minimización de (6.4a) debe existir al menos una discontinuidad la cual genera un cambio de fase en el sistema de átomos, debido a esto se demuestra que la regla de Cauchy-Born debe romperse en esa discontinuidad. Se presenta la tabla 6.2, en la cual se demuestran los valores del parámetro de orden ϕ que mide el desvío de la regla de Cauchy-Born para cada átomo considerando un sistema de 5 resortes y por lo tanto, 6 átomos, en este caso, cada átomo se puede tomar como un nodo de la barra discretizada por elementos finitos.

	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6
$u = 0.5, \quad u/5 = 0.1$						
u_{nodal}	0.00	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500
Δu		0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
ϕ		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$u = 0.96, \quad u/5 = 0.192$						
u_{nodal}	0.00	0.192	0.384	0.576	0.768	0.960
Δu		0.192	0.192	0.192	0.192	0.192
ϕ		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$u = 2.5, \quad u/5 = 0.5$						
u_{nodal}	0.00	0.138	0.275	2.225	2.362	2.500
Δu		0.138	0.138	1.949	0.138	0.138
ϕ		-0.362	-0.362	1.449	-0.362	-0.362
$u = 6.35, \quad u/5 = 1.27$						
u_{nodal}	0.00	0.002	0.004	6.346	6.348	6.350
Δu		0.002	0.002	6.343	0.002	0.002
ϕ		-1.268	-1.268	5.073	-1.268	-1.268

Tabla 6.2: Parámetros de orden evaluados para diferentes valores de desplazamiento

6.3 Convexificación de la energía resultante

En esta sección se utilizarán los conceptos desarrollados en la sección 5.4.2, usando a la energía obtenida luego de la experimentación numérica realizada, la cual puede verse en la Figura 6.4b.

Se va a demostrar que el método de convexificación de energía no es aplicable a un potencial del tipo que se muestra en la figura 6.4b. Un requisito para determinar un minimizar de energía es que

$$\sigma(\varepsilon^-) = \sigma(\varepsilon^+) \quad (6.7)$$

es decir, la pendiente de la gráfica de energía correspondientes a las dos fases (+) y (-) deben ser iguales. Asumiendo dos puntos de la Figura 6.4b, puede demostrarse que (6.7) puede cumplirse

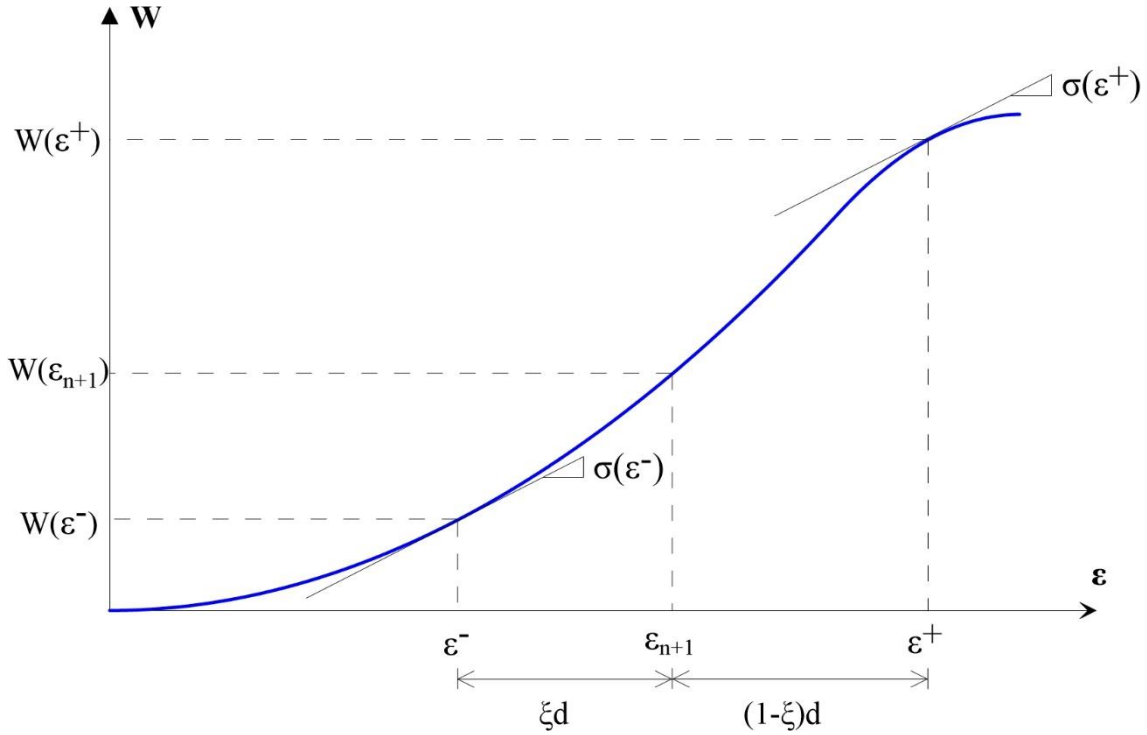


Figura 6.5: Convexificación del potencial obtenido

Además de la condición (6.7) debe cumplirse la condición de convexidad clásica (5.9),

$$W(\varepsilon_{n+1}) \leq \xi W(\varepsilon^+) + (1 - \xi)W(\varepsilon^-) \quad (6.8)$$

Debido a que la deformación supuesta ε^+ está en un punto donde la energía es cóncava, no se cumple la condición (6.8), si se considerara que $d \rightarrow 0$ las deformaciones ε^- y ε^+ se acercarían a un solo punto, en el límite $d = 0$ la condición de convexidad alternativa (5.14) se cumpliría.



Puede afirmarse que la homogeneización de las dos deformaciones ε^+ y ε^- no pueden existir si se considera una combinación de dos fases (+) y (-) en el sistema, la condición de convexidad (6.8) nunca se cumplirá, por lo tanto, no existe una línea de Maxwell que cumpla con las condiciones establecidas y que permita la existencia de un potencial convexificado W_c .

Se puede concluir que para el marco de la fractura, la convexificación no puede emplearse, ya que el comportamiento de la densidad de energía W no cumple con los requisitos mencionados. Esto es debido al modelo constitutivo considerado, ya que solo se considera una disminución gradual del esfuerzo conforme aumenta la deformación debido al ablandamiento, para que la densidad de energía tome una forma como la Figura 5.4, se necesita que el modelo constitutivo permita una recuperación del esfuerzo y que no sea cero en ningún punto, esto significa que la barra no desarrolla grietas sino un cambio de fase.



Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido investigar los marcos constitutivos simples de formulaciones de plasticidad definidas en la superficie post-crítica. Con esta investigación se pretende contribuir a la aclaración de algunos conceptos básicos en la modelización de materiales disipativos. En las últimas décadas, se ha logrado un gran progreso en la comprensión de los fenómenos de fractura como resultado de una intensa actividad de investigación, desarrollada en varios frentes: matemática, ingeniería, numérica, experimentación y modelado mecánico.

Ningún modelo matemático puede describir completamente el comportamiento complejo de materiales reales en todas las condiciones. Cada modelo de material está dirigido a una cierta clase de fenómenos, captura sus características esenciales y desprecia lo que se considera de menor importancia en esa clase de aplicaciones. Por lo tanto, este modelo constitutivo presentado cumple con sus límites de aplicabilidad tomando en cuenta sus respectivas consideraciones numéricas.

Se ha demostrado la capacidad del modelo para capturar características clave del comportamiento constitutivo de materiales considerados como elasto-plásticos, como el endurecimiento por deformación y el ablandamiento por deformación en la región posterior al punto de bifurcación. Claramente, un valor negativo del módulo plástico puede resultar en un comportamiento de ablandamiento sin pérdida de rigidez. Para hacer que el ablandamiento por deformación sea una relación constitutiva aceptable, se debe prevenir primero la localización de deformaciones en pequeñas regiones arbitrarias.

Las simulaciones de elementos finitos demostraron, que una ley constitutiva inelástica local con ablandamiento por deformación conduce inevitablemente a la localización espuria en una zona de dimensión cero. Esto hace que la solución numérica se vuelva no objetiva con respecto a la elección de la malla. Una vez que se ajustó el módulo de ablandamiento al refinamiento de la malla, la solución converge de manera adecuada.

La ventaja es que esta formulación sigue siendo local y la estructura algorítmica del código de elementos finitos requiere solo ajustes menores, limitados a la parte del código responsable de la evaluación de la esfuerzo (y la rigidez) correspondiente a un incremento de deformación dado.



Con este modelo, se logra una respuesta sin dependencia espuria y en general poco sensible al tamaño de la malla; salvo por el campo de deformaciones plásticas, donde se obtuvo un incremento en las deformaciones conforme disminuye el tamaño del elemento. Estos resultados concuerdan con la respuesta analítica de (Alessi, 2013).

El problema mal planteado se puede transformar en un problema bien planteado mediante la introducción de una escala de longitud. En relación con la mecánica de fractura, la longitud característica L_s con agrietamiento distribuido puede interpretarse físicamente como (o se relaciona con) el tamaño efectivo de la zona de proceso de fractura en la punta de una grieta macroscópica. Con respecto a la teoría de la homogeneización, la longitud característica puede tomarse como igual a (o relacionarse con) el tamaño del volumen representativo del material.

En el presente modelo unidimensional, la zona de proceso observada como fractura está representada por la zona inelástica. Esta zona aparece al inicio de la deformación inelástica. En la evolución posterior, su tamaño puede aumentar o disminuir, según las propiedades de convexidad/concavidad de W . Para grietas cohesivas, el comportamiento antes del punto máximo de la relación entre esfuerzo y deformación puede ser no lineal, pero para muchos propósitos es suficiente asumir un comportamiento lineal hasta el pico seguido de ablandamiento.

Una de las desventajas de los modelos de plasticidad es el procedimiento de evaluación de esfuerzo implícito, donde para un incremento de deformación dado, el estado de tensión final debe ser iterado para satisfacer la condición de fluencia. Además, los modelos de plasticidad son incapaces de describir la degradación de la rigidez observada en algunos experimentos. Por otro lado, los modelos de daño se basan en el concepto de una reducción gradual de la rigidez elástica impulsada por una medida de deformación total. Estos modelos generalmente se basan en un algoritmo explícito de evaluación de esfuerzo, que permite una determinación directa del estado de tensión, sin procedimientos de cálculo iterativos.

Se ha visto que el umbral de la localización es una especie de interruptor "encendido/apagado" entre la estabilidad y la inestabilidad, por lo que no hay evidencia directa de que haya un posible fenómeno antes de que se cumpla el umbral.

Desde el enfoque variacional, se concluyó que un modelo de zona cohesiva aparece en la formulación energética cuando se considera un potencial con una zona no convexa. La formulación variacional desarrollada en este trabajo permite la definición de la estabilidad del material de un sólido homogéneo basado en la convexidad del potencial de esfuerzo incremental y aplica los resultados a la predicción de microestructuras de deformación en plasticidad.



Como se demostró en la sección 6.3, el método de relajación (convexificación) de energía no se pudo implementar debido al potencial considerado. Para poder demostrar su metodología es necesario considerar un potencial de “doble pozo”. La aplicación de la técnica de relajación propuesta produce una respuesta invariante al tamaño de la malla similar al método de ajustar el módulo de ablandamiento al tamaño de los elementos finitos.

La cuestión de si las condiciones de convexidad global o local son relevantes depende de la capacidad física de un material sólido inelástico para desarrollar microestructuras de deformación en los rangos inestables asociados. Sin embargo, la convexidad es una condición integral global que es difícil de verificar en la práctica.

En ambos enfoques (clásico y variacional) se ha visto la necesidad de introducir un parámetro de tamaño, lo que sugiere que exista la suficiente diferencia de escala entre el tamaño de las discontinuidades del material y el tamaño de la estructura a calcular.

Para concluir, se sugieren posibles ampliaciones a este trabajo:

- Realizar la implementación computacional en dos y tres dimensiones.
- Implementar condiciones de descarga en el modelo propuesto.
- Desarrollar un modelo matemático que represente un potencial de doble pozo como el mencionado en el trabajo de (Truskinovsky, 1996) con el fin de ejemplificar los resultados del método de convexificación de energía.



Bibliografía

- Alessi, R. (2013). *Variational Approach to Fracture Mechanics with Plasticity*. Ecole Polytechnique X.
- Angelillo, M., Babilio, E., & Fortunato, A. (2003). A computational approach to fracture of brittle solids based on energy minimization. *Preprint Universita Di Salerno*.
- Arroyo, M., & Belytschko, T. (2002). An atomistic-based finite deformation membrane for single layer crystalline films. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(9), 1941–1947. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00002-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00002-9)
- Askes, H., & Sluys, L. J. (2000). Remeshing strategies for adaptive ALE analysis of strain localization. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 19(3), 447–467. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(00\)00176-5](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00176-5)
- Bazant, Z. (1976). Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(2), 331–344. Retrieved from <http://cedb.asce.org/cgi/WWWdisplay.cgi?6599>
- Bazant, Z. (1982). Crack Band Model for Fracture of Geomaterials. *PROC., 4TH INT. CONF. OF NUMER. METH. IN GEOMECH*, 1137--1152. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.694.2900>
- Bazant, Z. (1985). Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures. In *Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation* (pp. 1–94). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-6152-4_1
- Bazant, Z., & Jirásek, M. (2002). Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11), 1119–1149. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119))
- Bazant, Z., & Oh, B. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16, 155–177. <https://doi.org/10.1007/BF02486267>
- Bigoni, D. (2012). *Nonlinear Solid Mechanics: Bifurcation Theory and Material Instability*.
- Bourdin, B., Francfort, G. A., & Marigo, J. J. (2000). Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4), 797–826.



[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00028-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00028-9)

Chen, W.-F., & Saleeb, A. (2013). *Constitutive Equations for Engineering Materials: Elasticity and Modeling* (Vol. 1). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-88408-4.50013-X>

Comi, C., Mariani, S., Negri, M., & Perego, U. (2006). A one-dimensional variational formulation for quasibrittle fracture. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(8), 1323–1343. <https://doi.org/10.2140/jomms.2006.1.1323>

Dal Maso, G., & Toader, R. (2002). A model for the quasi-static growth of brittle fractures: Existence and approximation results. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 162(2), 101–135. <https://doi.org/10.1007/s002050100187>

Dill, E. H. (2007). *Continuum mechanics : elasticity, plasticity, viscoelasticity*. CRC/Taylor & Francis.

Ericksen, J. L. (1975). Equilibrium of bars. *Journal of Elasticity*, 5(3–4), 191–201. <https://doi.org/10.1007/BF00126984>

Ericksen, J. L. (1977). Special Topics in Elastostatics. *Advances in Applied Mechanics*, 17(C), 189–244. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70221-7](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70221-7)

Ericksen, J. L. (1984). The Cauchy and Born Hypotheses for Crystals. In *Phase Transformations and Material Instabilities in Solids* (pp. 61–77). <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-309770-5.50008-4>

Ericksen, J. L. (2008). On the Cauchy-Born rule. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 13(3–4), 199–220. <https://doi.org/10.1177/1081286507086898>

Friesecke, G., & Theil, F. (2002). Validity and failure of the Cauchy-Born hypothesis in a two-dimensional mass-spring lattice. *Journal of Nonlinear Science*, 12(5), 445–478. <https://doi.org/10.1007/s00332-002-0495-z>

Gao, D. Y., & Ogden, R. W. (2008). Multiple solutions to non-convex variational problems with implications for phase transitions and numerical computation. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 61(4), 497–522. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbn014>

Hien Poh, L., & Swaddiwudhipong, S. (2009). Over-nonlocal gradient enhanced plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 46(25–26), 4369–4378. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.08.025>



- Hodges, D. H., Atilgan, A. R., Cesnik, C. E. S., & Fulton, M. V. (1992). On a simplified strain energy function for geometrically nonlinear behaviour of anisotropic beams. *Composites Engineering*, 2(5–7), 513–526. [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(92\)90040-D](https://doi.org/10.1016/0961-9526(92)90040-D)
- Hori, M., & Nemat-Nasser, S. (1999). On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids. *Mechanics of Materials*, 31(10), 667–682. [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(99\)00020-4](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(99)00020-4)
- Hughes, T. J. R. (1987). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications. <https://doi.org/620/.001/51535>
- James, R. D. (1979). Co-existent phases in the one-dimensional static theory of elastic bars. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 72(2), 99–140. <https://doi.org/10.1007/BF00249360>
- Jirásek, M. (2011). Damage and smeared crack models. In *CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures* (Vol. 532, pp. 1–49). Springer, Vienna. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-0897-0_1
- Jirásek, M., & Bazant, Z. (2002). *Inelastic analysis of structures*. John Wiley & Sons.
- Lambrecht, M., Miehe, C., & Dettmar, J. (2003). Energy relaxation of non-convex incremental stress potentials in a strain-softening elastic-plastic bar. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6), 1369–1391. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00658-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00658-3)
- Lasry, D., & Belytschko, T. (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6), 581–597. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90059-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90059-5)
- Maimí, P. (2006). *Modelización constitutiva y computacional del daño y la fractura de materiales compuestos*. Universitat de Girona.
- Merán, S. (2016). *Estudio de inestabilidad en sólidos con ablandamiento por deformación*. Universidad Politécnica de Madrid.
- Miehe, C., & Schröder, J. (1994). Post-critical discontinuous localization analysis of small-strain softening elastoplastic solids. *Archive of Applied Mechanics*, 64(4), 267–285. <https://doi.org/10.1007/BF00789125>
- Miehe, C., Schröder, J., & Becker, M. (2002). Computational homogenization analysis in finite elasticity: Material and structural instabilities on the micro- and macro-scales of periodic composites and their interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and*



- Engineering*, 191(44), 4971–5005. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00391-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00391-2)
- Mielke, A. (2006). A mathematical framework for standard generalized materials in the rate-independent case. *Multifield Problems in Fluid and Solid Mechanics*, 28, 399–428. Retrieved from <http://www.springerlink.com/index/VM224X1785J5164L.pdf>
- Moës, N., & Belytschko, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7), 813–833. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00128-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00128-X)
- Oliver, J., Huespe, A., & Samaniego, E. (2003). A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(14), 2135–2161. <https://doi.org/10.1002/nme.657>
- Omar, A. Al, & Prado, J. (2010). Criterios de predicción de inestabilidades plásticas en procesos de conformado en caliente.(Parte I: Revisión teórica). *Revista de Metalurgia*.
- Ottosen, N. S., & Ristinmaa, M. (2005). *The mechanics of constitutive modeling*. Elsevier *Engineering Information*. Elsevier.
- Pandolfi, A., & Ortiz, M. (2002). An efficient adaptive procedure for three-dimensional fragmentation simulations. *Engineering with Computers*, 18(2), 148–159. <https://doi.org/10.1007/s003660200013>
- Pietruszczak, S., & Mróz, Z. (1981). Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(3), 327–334. <https://doi.org/10.1002/nme.1620170303>
- Rodríguez, P. S., Ulloa, J. I., & Samaniego, E. P. (2015). *Enfoque energético a la modelización de fractura no lineal unidimensional*. Universidad de Cuenca. Retrieved from <http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/22876>
- Rudnicki, J. W., & Rice, J. R. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6), 371–394. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
- Runesson, K. (2006). *Constitutive Modeling of Engineering Materials—Theory and Computation*. The Primer.
- Sánchez, J. (2006). *Desarrollos en mecánica computacional de falla material. Aplicación a modelos de plasticidad y daño*. Universidad Nacional del Litoral.



- Simo, J. C., & Hughes, T. J. R. (2006). *Computational inelasticity* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
- Simo, J., Oliver, J., & Armero, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12(5), 277–296. <https://doi.org/10.1007/BF00372173>
- Steinmann, P., Elizondo, A., & Sunyk, R. (2007). Studies of validity of the Cauchy-Born rule by direct comparison of continuum and atomistic modelling. In *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* (Vol. 15, pp. S271–S281). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/0965-0393/15/1/S21>
- Toro, S. (2013). *Modelado de falla de materiales mediante formulaciones multiescala*. Universidad Nacional del Litoral.
- Truskinovsky, L. (1996). Fracture as a phase transition. *Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials*.
- Truskinovsky, L., & Zanzotto, G. (1996). Ericksen's bar revisited: Energy wiggles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(8), 1371–1405. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(96\)00020-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(96)00020-8)
- Ulloa, J., Rodríguez, P., & Samaniego, E. (2016). On the modeling of dissipative mechanisms in a ductile softening bar. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 11(4), 463–490. <https://doi.org/10.2140/jomms.2016.11.463>
- Weinan, E., & Pingbing, M. (2007). Cauchy-Born Rule and the Stability of Crystalline Solids: Static Problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 183(2), 241–297. <https://doi.org/10.1007/s00205-006-0031-7>
- Wells, G., & Sluys, L. (2001). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12), 2667–2682. <https://doi.org/10.1002/nme.143>
- Wu, H. C. (2005). *Continuum Mechanics and Plasticity* (Vol. 3). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/doi:10.1201/9780203491997.ch6>



Anexos

Algoritmo de mapeo para el modelo 1-D con endurecimiento isotrópico en MATLAB

```
function datos= endurecimiento_iso_2( sigma_y, E, K, delta_epsi, datos)
epsi = datos(1);
epsi_p = datos(2);
alpha = datos(3);
sigma = datos(4);
epsi = epsi+delta_epsi;
sigma_pr = E*(epsi-epsi_p);
f_pr = abs(sigma_pr) - (sigma_y+(K*alpha));
if f_pr < 0
    sigma = sigma_pr;
    datos(5) = E;
else
    delta_gamma = f_pr/(E+K);
    sigma = (1-(delta_gamma*E/abs(sigma_pr)))*sigma_pr;
    epsi_p = epsi_p + (delta_gamma*sign(sigma_pr));
    alpha = alpha + delta_gamma;
    datos(5) = E*K/(E+K);
end
datos(1) = epsi;
datos(2) = epsi_p;
datos(3) = alpha;
datos(4) = sigma;
```

Algoritmo de solución iterativa para el problema de plasticidad unidimensional en MATLAB

```
%Datos iniciales del problema
t = 1000;           %Pasos
E = 1;             %Módulo de elasticidad del material
K = -0.03;         %Constante de endurecimiento
sigma_y = 1;      %Esfuerzo de fluencia
long = 1;         %Longitud de la barra
u_0 = 0;          %Valor de contorno
n_el = 39;        %# de elementos finitos
u=1.2;
reduccion=0.04;
el_perturb = round(n_el/2);
%-----
% Variables del problema
delta_u = long / t;   %Salto de desplazamiento
he = long/n_el;      %Mesh size
Be = (2/he)*[-1/2 1/2];
d = zeros(n_el+1,1);
```



```
var = zeros(5,n_el);
varint = zeros(5,n_el);
result_epsilon = zeros(n_el,t+1);
result_epsilon_p = zeros(n_el,t+1);
result_alpha = zeros(n_el,t+1);
result_sigma = zeros(n_el,t+1);
result_modulo = zeros(n_el,t+1);
fd = [0;0];
W = [0];
cont = 0;
final = 1;
K=-sigma_y*(1-reduccion)*he/u;    %Módulo ajustado a la malla
while final == 1
    cont = cont +1;
    dn = zeros(n_el+1,1);
    dn(end) = delta_u;
    d(end) = d(end) + delta_u;
    bucle = 1;
    iter = 0;
    while bucle == 1
        F_int = zeros(1,n_el+1);
        Ke = zeros(n_el+1);

        for k=1:n_el
            dk = [dn(k);dn(k+1)];
            epsilon = Be*dk;
            varconv = varint(:,k);
            if k == el_perturb
                sigma_y=sigma_y*(1-reduccion);
            else
                sigma_y=1.0;
            end
            variter = endurecimiento_iso_2(sigma_y, E, K, epsilon, varconv);
            var(:,k) = variter;

            f_int = Be*(variter(4))*he;
            F_int = ensamblaje_vector( F_int, f_int, k );

            ke = Be*variter(5)*Be*he;
            Ke = ensamblaje_matriz( Ke, ke, k );

        end
        residuo = F_int;
        residuo(1) = [];
        residuo(end) = [];
        reaccion = F_int(1);
        if norm(residuo) < 0.0001
            bucle = 0;
            iteraciones(cont) = iter;
            varint = var;
            if -1*fd(1,cont)>-1*reaccion
                if round(reaccion,2)==0
                    final = 0;
                end
            end
        end
    end
end
```



```
        end
    end
else
    Ke(1,:) = [];
    Ke(:,1) = [];
    Ke(end,:) = [];
    Ke(:,end) = [];

    delta_dn = -1*(Ke\residuo');
    delta_dn = [u_0;delta_dn];
    delta_dn = [delta_dn;0];
    dn = dn + delta_dn;
    d = d+delta_dn;
    iter = iter + 1;

    end
end
result_epsi(:,cont+1) = varint(1,:);
result_epsi_p(:,cont+1) = varint(2,:);
result_alpha(:,cont+1) = varint(3,:);
result_sigma(:,cont+1) = varint(4,:);
result_modulo(:,cont+1) = varint(5,:);
fd(1,cont+1) = reaccion;
fd(2,cont+1) = d(end);
W(cont+1) = W(cont) + (-1)*(fd(1,cont+1)+fd(1,cont))*delta_u/2;
end

reaccion;
subplot(2,3,1)
plot(result_epsi,result_sigma')
    xlabel('Deformación')
    ylabel('Esfuerzo')
    grid on
subplot(2,3,2)
plot(fd(2,:),'-1*fd(1,:)')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Fuerza')
    grid on
subplot(2,3,3)
plot(fd(2,:),W')
    xlabel('Desplazamiento')
    ylabel('Energía')
    grid on
fd=fd';
W=W';
result_epsi=result_epsi';
result_sigma=result_sigma';
x1=linspace(0,long,n_el+1);
def=result_epsi(end,:);
def(end+1)=def(end);
def(el_perturb+1)=def(el_perturb);
subplot(2,3,4)
plot(x1,def)
```



```
xlabel('X')
ylabel('Deformación')
grid on
x2=linspace(0,long,n_el+1);
subplot(2,3,5)
plot(x2,d)
ylabel('Desplazamiento')
xlabel('X')
grid on
```