

UNIVERSIDAD DE CUENCA



FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

**ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO E INESTABILIDAD DEL
REFUERZO LONGITUDINAL EN ESTRUCTURAS DE CONCRETO
REFORZADO SOMETIDAS A CARGAS CÍCLICAS**

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

AUTORES:

ANDREA FERNANDA MONCAYO TELLO
C.I. 1400567572

MAURO ANDRÉS VALLEJO BOJORQUE
C.I. 0105736490

DIRECTOR:

INGENIERO HOMERO FERNANDO CARRIÓN CABRERA MsC.
C.I. 0104201629

CUENCA-ECUADOR
2017



RESUMEN

Durante sismos, el desprendimiento del recubrimiento del concreto en estructuras de hormigón armado deja expuesto el acero del refuerzo longitudinal, pudiendo generar su falla por inestabilidad. El presente trabajo tiene por objeto proponer una relación entre la deformación crítica de pandeo y la esbeltez de barras del acero longitudinal de estructuras de hormigón armado bajo cargas cíclicas, generando información para el diseño sismorresistente eficiente. Como punto de partida y en base al estudio de ciclos histeréticos y los modelos revisados, se propone un nuevo modelo histerético del acero bajo cargas cíclicas de compresión-tracción antes de la falla por pandeo. En segunda instancia, se desarrolla un modelo que represente las restricciones laterales y de giro proporcionadas por los estribos y el diámetro del refuerzo longitudinal respectivamente, por medio del cual se puede obtener el esfuerzo crítico de pandeo que este último presenta, considerando la existencia de excentricidades y su efecto causado. Con los modelos propuestos, se obtienen curvas de esfuerzo crítico de pandeo vs. relación de esbeltez y deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez, calibradas y optimizadas con datos experimentales obtenidos de la revisión bibliográfica. Se compara las excentricidades calculadas y los desplazamientos laterales que pudiera presentar el hormigón en muros y columnas de la base de datos, para validar los resultados. Finalmente, se representa la curva final deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez mediante funciones matemáticas simples, para facilitar su uso.

Palabras Clave: Cargas cíclicas, hormigón armado, refuerzo longitudinal, ciclos histeréticos, pandeo, esbeltez, excentricidad, desplazamientos laterales.



ABSTRACT

During earthquakes, the detachment of the concrete covering in reinforced concrete structures exposes the steel of the longitudinal reinforcement, which can generate its failure by instability. The present work aims to propose a relation between the critical strain of buckling and the slenderness of longitudinal steel bars of reinforced concrete structures under cyclic loads, generating information for efficient seismic resistant design. As a starting point and based on the study of hysteretic cycles and the revised models, a new hysteretic model of the steel is proposed under cyclic loads of compression-traction before the buckling failure. In the second instance, a model is developed that represents the lateral and turning restrictions provided by the stirrups and the diameter of the longitudinal reinforcement, respectively, through which the critical buckling stress can be obtained, considering the existence of eccentricities and its effect caused. With the proposed models, critical buckling stress vs. slenderness ratio and critical buckling strain vs. slenderness ratio curves are obtained, calibrated and optimized with experimental data obtained from the bibliographic review. We compare the calculated eccentricities and the lateral displacements that could present the concrete in walls and columns of the database, to validate the results. Finally, the buckling critical strain vs. slenderness ratio curve is represented by simple mathematical functions, to facilitate its use.

Keywords: Cyclic loads, reinforced concrete, longitudinal reinforcement, hysteretic cycles, buckling, slenderness, eccentricity, lateral displacements.



Índice general

Resumen	2
Abstract	3
Índice de figuras	6
Índice de cuadros	8
Lista de símbolos	9
1. Introducción	15
1.1. Antecedentes	15
1.2. Justificación	15
1.3. Objetivos	16
1.4. Metodología	16
2. Estado del arte	18
2.1. Comportamiento del acero bajo carga de tensión	18
2.1.1. Zonas	19
2.1.1.1. Zona elástica lineal	19
2.1.1.2. Zona de fluencia	19
2.1.1.3. Zona de endurecimiento por deformación	20
2.2. Modelos del Acero	20
2.2.1. Modelo de Mander	20
2.2.2. Modelo de Park y Paulay	21
2.2.3. Modelo de Ahmad y Shah	22
2.3. Comportamiento del acero bajo carga de compresión	22
2.4. Comportamiento del acero bajo cargas cíclicas	23
2.4.1. Introducción a los ciclos histeréticos	23
2.4.2. Efecto Bauschinger	25
2.4.3. Modelos de curva esfuerzo vs. deformación bajo carga cíclica	26
2.4.3.1. Modelo de Chang y Mander	26
2.4.3.2. Modelo de Kent y Park	28
2.5. Pandeo inelástico	30
2.5.1. Teoría del Módulo Tangente	31
2.5.2. Teoría del Doble Módulo Reducido	32
2.5.3. Pandeo inelástico en elementos cargados excéntricamente	35
2.6. Métodos de optimización	36



3. Pandeo en barras de acero bajo cargas cíclicas	38
3.1. Modelo propuesto del comportamiento del acero bajo cargas cíclicas	38
3.1.1. Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga monotónica	38
3.1.2. Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga cíclica.	40
3.1.3. Modelo propuesto	41
3.2. Modelo de barra	49
3.3. Relación entre el pandeo y la esbeltez	54
3.3.1. Optimización y obtención del factor de la longitud efectiva	59
4. Pandeo en barras de acero del refuerzo longitudinal de estructuras de hormigón armado bajo cargas cíclicas	65
4.1. Optimización y obtención del factor de la longitud efectiva	69
4.2. Análisis de excentricidades y validación de las curvas: obtenida y propuesta .	73
5. Conclusiones y Recomendaciones	76
A. Codificación del programa Matlab del modelo propuesto del comportamiento del acero bajo cargas cíclicas	81
B. Codificación del programa Matlab de las curvas esfuerzo crítico de pandeo vs. relación de esbeltez y deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez	86
C. Codificación del programa Matlab de la obtención de K mediante optimización	89



Índice de figuras

2.1. Esfuerzo vs. deformación del acero bajo carga de tracción.	18
2.2. Punto experimental perteneciente a la zona de endurecimiento por deformación	21
2.3. Material inelástico.	24
2.4. Efecto de carga y descarga, con inversión del sentido de carga [1].	25
2.5. Ciclos de histéresis del acero de refuerzo. Obtenido de [2]	25
2.6. Modelo de Chang y Mander.	28
2.7. Modelo de Kent y Park.	29
2.8. comportamiento de la ecuación 2.31 con diferentes valores del parámetro r. .	30
2.9. Módulo Tangente	31
2.10. Comportamiento de la sección transversal del acero	32
2.11. Elemento cargado excéntricamente	35
3.1. Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga a tracción	39
3.2. Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga a compresión	40
3.3. Zona elástica y zona de descarga	42
3.4. Curva histerética en zona de tracción	43
3.5. Curva histerética en zona de compresión	45
3.6. Graficación de ciclos histeréticos.	47
3.7. Modelo propuesto con la curva de esbeltez 2.5 de Botero [3].	48
3.8. Modelo propuesto con la curva de esbeltez 4 de Botero [3].	48
3.9. Modelo propuesto con la curva de esbeltez 6 de Botero [3].	49
3.10. Modelo de barra	49
3.11. Esfuerzos en los extremos de la barra	50
3.12. Corte de longitud x en la barra	50
3.13. Esfuerzo de pandeo vs. relación de esbeltez	56
3.14. Deformación de pandeo crítico propuesto por Botero [3]	57
3.15. Deformación de pandeo vs. relación de esbeltez	58
3.16. Función error vs. número de iteraciones	61
3.17. Función error vs. número de iteraciones	61
3.18. Esfuerzo crítico de pandeo vs. esbeltez	62
3.19. Deformación crítica de pandeo vs. esbeltez	62
4.1. Gráfica deformación crítica vs. relación de esbeltez con datos experimentales obtenidos en [4] y [5]	67
4.2. Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.5$	68
4.3. Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.6$	68
4.4. Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.75$	69
4.5. Función error vs. número de iteraciones	70



4.6. Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.632$	71
4.7. Gráfica deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez	72
4.8. Relación entre los desplazamientos laterales del hormigón y las excentricidades	75
4.9. Curva obtenida y curva propuesta	75



Índice de cuadros

3.1. Parámetros de las probetas ensayadas por Botero [3].	39
3.2. Parámetros de barra ensayada por Botero con esbeltez 2.5	41
3.3. Factor R.	41
3.4. Esfuerzos críticos de pandeo de probetas ensayadas por Botero [3]	56
3.5. Deformaciones críticas de pandeo de probetas ensayadas por Botero [3]	58
3.6. Esfuerzos y deformaciones críticos experimentales y calculados.	63
3.7. Error entre esfuerzos críticos experimentales y calculadas	63
3.8. Error entre deformaciones críticas experimentales y calculadas	64
4.1. Resultados de ensayos experimentales en muros y columnas bajo cargas cíclicas obtenidos en [4] y [5].	66
4.2. Deformaciones críticas experimentales y calculados.	70
4.3. Relación entre deformaciones críticas experimentales y calculadas	70
4.4. Error entre deformaciones críticas experimentales y calculadas	73
4.5. Excentricidades calculadas y desplazamientos laterales del hormigón	74



Lista de símbolos

En la siguiente lista se encuentra la simbología utilizada en el presente estudio, en el orden en el que son introducidas.

Símbolos Generales

σ	Esfuerzo.
ε	Deformación.
E_s	Módulo Elástico.
f_y	Esfuerzo de fluencia.
P_{crit}	Fuerza crítica de pandeo.
I	Inercia.
L	Longitud.
R	Radio.
A	Área.
D	Diámetro.
Z	Módulo plástico.
f'_c	Esfuerzo del hormigón a compresión.

Estado del Arte

ε_y	Deformación del esfuerzo de fluencia.
ε_{sh}	Deformación del inicio de la zona de endurecimiento por deformación.
ε_{su}	Deformación última.
f_{su}	Esfuerzo último.
p	Parámetro de Mander.
ε_s	Deformación bajo carga de tracción.
f_s	Esfuerzo bajo carga de tracción.
ε_{sc}	Deformación bajo carga de compresión.
f_{sc}	Esfuerzo bajo carga de compresión.
f_{ch}	Tensión característica de Kent y Park.
R	Parámetro que define la curvatura de Mander.
r	Parámetro que define la curvatura de Kent y Park.
ε_{p1}	Deformación plástica del ciclo anterior de Kent y Park.
E_t	Módulo tangente.
E_r	Módulo reducido.



M_{max}	Momento máximo resistente a flexión.
e	Excentricidad.
L_e	Longitud efectiva.
r	Radio de giro.
d	Distancia al eje neutro de la sección transversal.
s	Radio del núcleo de Timoshenko.
σ_{max}	Esfuerzo máximo.
X	Espacio de búsqueda.
C_k	Restricciones en el espacio de búsqueda.
n	Número de parámetros.
f	Función objetivo.

Pandeo en barras de acero bajo cargas cíclicas

α_0	Restricción lateral al inicio de la barra.
α_L	Restricción lateral al final de la barra.
β_0	Restricción rotacional al inicio de la barra.
β_L	Restricción rotacional al final de la barra.
P	Carga axial.
Q	Cortante.
MA	Momento al inicio de la barra.
MB	Momento al final de la barra.
K	Factor de longitud efectiva.
σ_{crit}	Esfuerzo crítico de pandeo.
De	Diámetro del estribo.
Dl	Diámetro del refuerzo longitudinal.
K_1	Factor de reducción de la rigidez rotacional.
ε_{p*}	Deformación crítica de pandeo.
ε_{0*}	Punto de cambio de carga de tensión a carga de compresión.
ε_p	Deformación de pandeo.
ε_{exp_i}	Deformaciones experimentales.
ε_{e_i}	Deformaciones calculadas.

Pandeo en barras de acero del refuerzo longitudinal de estructuras de hormigón armado bajo cargas cíclicas

K	Factor de longitud efectiva optimizado.
μ	Módulo de Poisson.
δ_x	Desplazamientos laterales.



Universidad de Cuenca
Cláusula de derechos de autor

Yo, Andrea Fernanda Moncayo Tello, autora del Trabajo de Titulación "ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO E INESTABILIDAD DEL REFUERZO LONGITUDINAL EN ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO SOMETIDAS A CARGAS CÍCLICAS", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Ingeniera Civil. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autora.

Cuenca, 10 de abril de 2017.

Andrea Moncayo

Andrea Fernanda Moncayo Tello

C.I: 1400567572



Universidad de Cuenca
Cláusula de derechos de autor

Yo, Mauro Andrés Vallejo Bojorque, autor del Trabajo de Titulación "ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO E INESTABILIDAD DEL REFUERZO LONGITUDINAL EN ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO SOMETIDAS A CARGAS CÍCLICAS", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Ingeniero Civil. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 10 de abril de 2017.

Mauro Andrés Vallejo Bojorque.

C.I: 0105736490



Universidad de Cuenca
Cláusula de propiedad intelectual

Yo, Andrea Fernanda Moncayo Tello, autora del Trabajo de Titulación "ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO E INESTABILIDAD DEL REFUERZO LONGITUDINAL EN ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO SOMETIDAS A CARGAS CÍCLICAS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 10 de abril de 2017

Andrea Moncayo

Andrea Fernanda Moncayo Tello

C.I: 1400567572



Universidad de Cuenca
Cláusula de propiedad intelectual

Yo, Mauro Andrés Vallejo Bojorque, autor del Trabajo de Titulación "ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO E INESTABILIDAD DEL REFUERZO LONGITUDINAL EN ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO SOMETIDAS A CARGAS CÍCLICAS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 10 de abril de 2017

Mauro Andrés Vallejo Bojorque

C.I: 0105736490



Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

A lo largo de los años, la ingeniería civil ha puesto mayor énfasis en el estudio de estructuras bajo cargas dinámicas como el viento, los sismos, maquinaria rotatoria, olas marinas, entre otras. Por tanto es preciso desde el enfoque estructural, velar por la integridad de las estructuras bajo dichas cargas. Se ha demostrado que en situaciones donde se presentan cargas cíclicas, como en sismos, un daño frecuente es la desintegración del hormigón que trabaja como recubrimiento, por lo que los refuerzos longitudinales de acero quedan expuestos y da como resultado el pandeo de los mismos, una de los modos de falla más comunes.

La falla por pandeo se ha presentado en varios terremotos como el de México en 1985, Northridge en 1994, Kobe en 1995, Manzanillo en 1995, Chile en 2010, por mencionar algunos, en los cuales se observa evidencias de inestabilidad en el refuerzo longitudinal[3]. Varios reglamentos como el del ACI 318-14 de Estados Unidos o el NSR-10 de Colombia, consideran este problema y establecen separaciones máximas entre estribos de manera de retrasar el pandeo del acero de refuerzo longitudinal; no obstante, las separaciones máximas establecidas se basan en contados estudios del problema de pandeo del acero [3].

Autores como Mander [6], Salmon y Jhonson [7], Monti y Nuti [8] entre otros, han estudiado el pandeo de barras de acero de refuerzo longitudinal bajo cargas monotónicas. No obstante, existen pocos estudios del pandeo del acero bajo cargas cíclicas. Botero [3] estudió el pandeo en barras de acero bajo cargas cíclicas; sin embargo, la curva esfuerzo vs. deformación utilizada era bajo cargas monotónicas.

1.2. Justificación

Ecuador se sitúa en una zona de alta sismicidad y se encuentra geológicamente atravesado por varias fallas. Durante un evento sísmico, debido a cargas cíclicas, las barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal en estructuras de hormigón armado son sometidas a cargas de tensión y compresión, esto, junto con la exposición causada por el desprendimiento del recubrimiento o las fisuras que se ocasionan en el concreto por la tracción del acero en el borde de muros y columnas, provocan su inestabilidad y susceptibilidad al pandeo [9]; siendo de vital importancia que en el diseño de estructuras de hormigón armado se considere el comportamiento del refuerzo de acero longitudinal bajo cargas sísmicas con mayor



aproximación a la realidad.

1.3. Objetivos

Objetivo General

Proponer una relación entre la deformación crítica de pandeo y la esbeltez de barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal de estructuras de hormigón armado bajo cargas cíclicas, misma que pudiera ser fuente de información y ayuda para el diseño sismorresistente eficiente.

Objetivos Específicos

1. Proponer un modelo que represente el comportamiento del acero bajo cargas cíclicas antes de producirse la falla por pandeo, en base a modelos de diversos autores.
2. Proponer un modelo que represente las restricciones laterales y de giro proporcionadas por los estribos y el diámetro del refuerzo longitudinal respectivamente, que permita calcular el esfuerzo crítico de pandeo del acero longitudinal.
3. Obtener una curva de esfuerzo crítico de pandeo vs. relación de esbeltez L/D y una curva de deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez L/D del acero bajo cargas cíclicas, optimizarla y validarla con resultados de ensayos obtenidos de la bibliografía consultada.
4. Obtener una curva de deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez L/D del acero como refuerzo longitudinal en estructuras de hormigón armado sometidas a cargas cíclicas, considerando la presencia de excentricidades; optimizarla y validarla con resultados de ensayos obtenidos de la bibliografía consultada.
5. Representar la última curva con funciones matemáticas simples, para mejorar el manejo y la utilidad del resultado del presente trabajo de titulación.

1.4. Metodología

Se parte de una revisión literaria sobre el pandeo del acero bajo cargas cíclicas y modelos histeréticos del material. En base a modelos del acero bajo cargas monotónicas propuestos por Mander [10], Park y Paulay [11], y Ahmad y Shah [12]; y el modelo del acero bajo cargas cíclicas de Mander[6], se propone un modelo de curva esfuerzo vs. deformación del acero ante cargas cíclicas que depende solamente de las características del acero y la deformación máxima de cada ciclo. Se considera que las restricciones laterales y de giro del modelo de estudio son proporcionadas por los estribos y el diámetro del refuerzo longitudinal respectivamente. Implementado el modelo propuesto en Matlab, se obtienen curvas esfuerzo crítico de pandeo vs. relación de esbeltez y deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez. Los parámetros desconocidos del modelo se obtienen al ajustar las curvas con datos experimentales.



Posteriormente, se realiza un análisis de la existencia de excentricidades y su efecto en ensayos de muros y columnas bajo cargas cíclicas. Se obtiene una curva final deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez que considera el efecto de las excentricidades presentes, de manera que se aproxime adecuadamente al comportamiento real de las barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal en estructuras de hormigón armado. Se compara las excentricidades calculadas y los desplazamientos laterales que podría presentar el hormigón en los ensayos de muros y columnas, y se valida la última curva obtenida. Finalmente, el producto de la investigación es la curva final ajustada mediante funciones matemáticas simples, con el objetivo de mejorar el manejo y la utilidad de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

ESTADO DEL ARTE

2.1. Comportamiento del acero bajo carga de tensión

La curva esfuerzo vs. deformación a tracción del acero suele considerarse como elastoplástica en el análisis sísmico de estructuras de hormigón armado. Es decir, que el material tiene un comportamiento elástico hasta llegar a un esfuerzo igual a f_y , al cual le corresponde una deformación ε_y ; mientras que para deformaciones mayores a ε_y , el material posee esfuerzos iguales a f_y . Esta curva puede representar adecuadamente el comportamiento de aceros de baja resistencia. No obstante, Bonett [13] señala: “para el caso de diseño sísmico, los requerimientos de ductilidad, pueden implicar evaluar el esfuerzo del acero a deformaciones mayores que la de fluencia”.

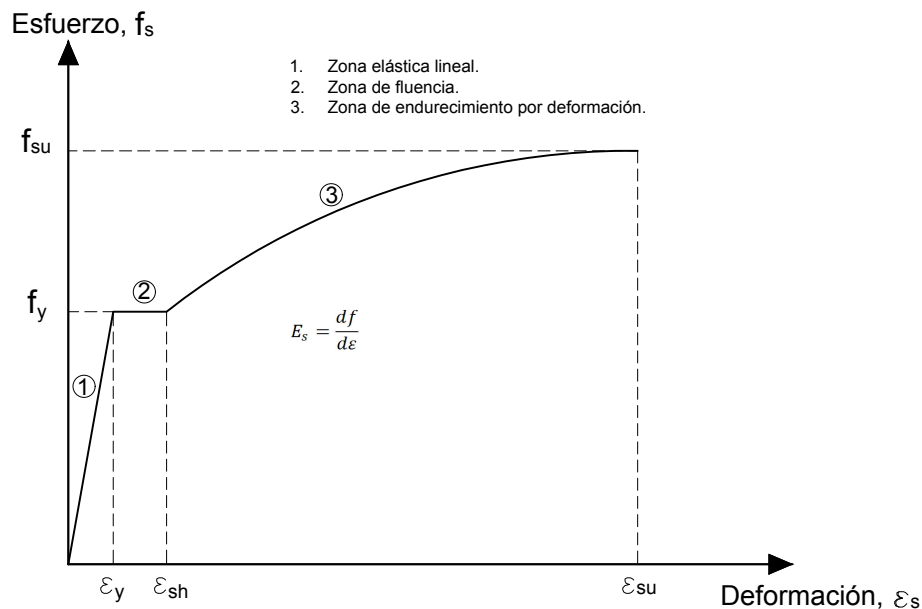


Figura 2.1: Esfuerzo vs. deformación del acero bajo carga de tracción.

2.1.1. Zonas

En la literatura revisada se encontraron varios modelos que dividen a la curva esfuerzo vs. deformación en tres zonas:

1. Zona elástica lineal.
2. Zona de fluencia.
3. Zona de endurecimiento por deformación.

2.1.1.1. Zona elástica lineal

La zona elástica lineal pertenece a deformaciones comprendidas entre 0 y ε_y , se caracteriza por cumplir la ley de Hooke, la relación entre esfuerzo y deformación es constante e igual al módulo de Young (E_s). Se representa por una línea recta que va desde el origen hasta el punto de fluencia del acero.

El valor del esfuerzo en esta zona se puede obtener utilizando la siguiente expresión [3]:

$$f_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad (2.1)$$

$$E_s = \frac{df_s}{d\varepsilon_s} \quad (2.2)$$

Donde E_t , f_s y ε_s son el módulo elástico, el esfuerzo y la deformación en cualquier punto de la curva dentro de la zona elástica lineal.

En esta zona el proceso es reversible, pues, si se retira la fuerza aplicada, el acero vuelve a su posición inicial siguiendo el mismo recorrido de carga.

2.1.1.2. Zona de fluencia

La zona de fluencia pertenece a deformaciones comprendidas entre ε_y y la deformación del inicio de la zona de endurecimiento por deformación (ε_{sh}). En esta zona las distorsiones de la estructura cristalográfica se vuelven permanentes y el material se comporta plásticamente, por lo tanto, no se requiere un aumento de carga para que los cristales que forman la estructura del material se puedan mover libremente [3]. Esto corresponde a una acomodación de los cristales dentro de su estructura.

Esta zona no es totalmente plana, pero debido a sus pequeñas variaciones, su forma puede suponerse de tal manera [14].

El valor del esfuerzo en esta zona se obtiene utilizando la siguiente expresión:

$$f_s = f_y \quad (2.3)$$

$$E_s \approx 0 \quad (2.4)$$

2.1.1.3. Zona de endurecimiento por deformación

La zona de “endurecimiento por deformación” pertenece a deformaciones comprendidas entre ε_{sh} y la deformación correspondiente al esfuerzo último f_{su} (ε_{su}). En esta zona los cristales que forman la estructura interna del material sufren grandes distorsiones con el aumento de carga, pero a diferencia de la zona elástica, el material no se comporta en forma lineal sino, debido al deslizamiento de los cristales, el material va perdiendo rigidez [3].

Los autores de los modelos revisados, discrepan entre ellos en la zona de endurecimiento por deformación. Cabe aclarar que después del esfuerzo último (f_{su}), la curva esfuerzo vs. deformación tiene una zona descendente, sin embargo, ninguno de los modelos consultados considera de importancia esta zona, ya que se pretende evaluar la capacidad máxima del acero, la cual se encuentra asociada al esfuerzo último, siempre que el modo de falla se presente por este efecto [15].

A continuación, se presentan los distintos modelos revisados:

2.2. Modelos del Acero

2.2.1. Modelo de Mander

Según el modelo de Mander [10], los esfuerzos dentro de la zona de endurecimiento por deformación se pueden obtener con la siguiente expresión:

$$f_s = f_{su} + (f_y - f_{su}) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)^p \quad (2.5)$$

Donde p es el parámetro que permite definir la forma de la curva esfuerzo vs. deformación dentro de la zona de endurecimiento por deformación.

Para la obtención de p mediante la ecuación 2.5, se puede utilizar la definición de logaritmo natural y haciendo que $f_s = f_{s1}$ y $\varepsilon_s = \varepsilon_{s1}$, donde $(\varepsilon_{s1}, f_{s1})$ es un punto experimental perteneciente a la zona de endurecimiento por deformación (Figura 2.2), p queda definido por la siguiente expresión:

$$p = \frac{\ln \left(\frac{f_{su} - f_{s1}}{f_{su} - f_y} \right)}{\ln \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)} \quad (2.6)$$

Mediante un análisis de las expresiones necesarias para obtener la curva esfuerzo vs. deformación, se puede observar en la ecuación 2.5 que los parámetros para obtener f_s entre $0 < \varepsilon_s < \varepsilon_{su}$ son: $f_y, f_{su}, \varepsilon_{sh}, \varepsilon_{su}, E_s$ y p [16]. Derivando dicha ecuación con respecto a ε_s y haciendo que $\varepsilon_s = \varepsilon_{sh}$, se obtiene:

$$E_{sh} = \frac{df_s}{d\varepsilon_s} = \frac{p \cdot (f_{su} - f_y) \cdot 1}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \quad (2.7)$$

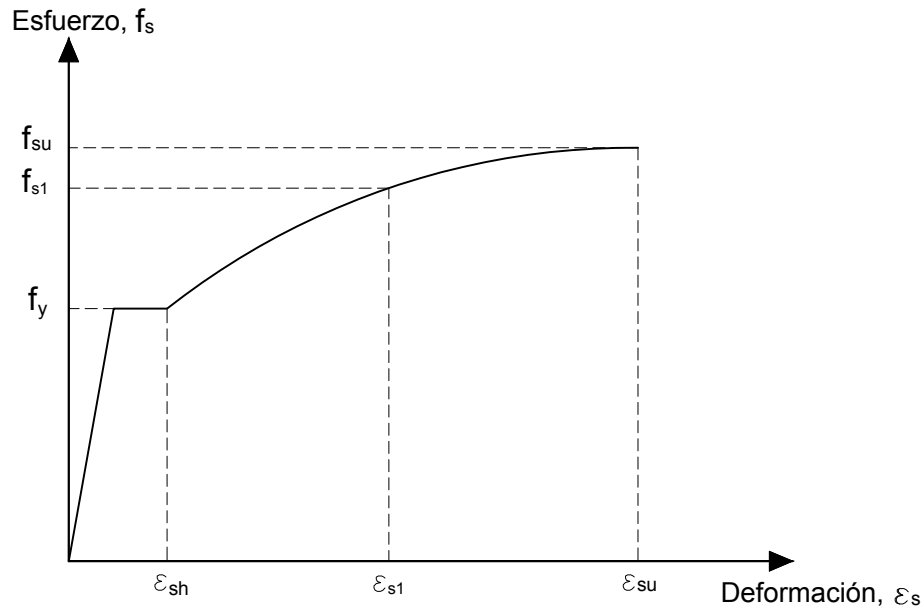


Figura 2.2: Punto experimental perteneciente a la zona de endurecimiento por deformación

Por tanto:

$$p = E_{sh} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}}{f_{su} - f_y} \right) \quad (2.8)$$

Se ha encontrado que para evaluar el valor de p , la ecuación 2.8 tiene buena relación entre los resultados analíticos y experimentales [10].

Una desventaja del uso de E_{sh} como parámetro de referencia radica en que pequeñas variaciones en los valores experimentales pueden conducir a cambios significativos en el valor de p .

2.2.2. Modelo de Park y Paulay

Los valores de f_s dentro de la zona de endurecimiento por deformación según el modelo de Park y Paulay [11] se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$f_s = f_y \cdot \left[\frac{m \cdot u + 2}{60 \cdot u + 2} + \frac{(60 - m) + u}{3(30 \cdot r + 1)^2} \right] \quad (2.9)$$

Los parámetros m , r y u se pueden obtener mediante pruebas experimentales, o mediante

las siguientes expresiones:

$$m = \frac{\left(\frac{f_{su}}{f_y}\right) (30r + 1)^2 - 60r - 1}{15r^2} \quad (2.10)$$

$$r = \varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh} \quad (2.11)$$

$$u = \varepsilon_s - \varepsilon_{sh} \quad (2.12)$$

Donde f_y es el esfuerzo de fluencia nominal en el acero, f_{su} es el esfuerzo último, ε_s la deformación unitaria del acero, ε_{su} la deformación unitaria última y ε_{sh} la deformación unitaria del acero en la cual empieza la zona de endurecimiento por deformación [11].

2.2.3. Modelo de Ahmad y Shah

El modelo propuesto por Ahmad y Shah [12], obtiene el f_s dentro de la curva de endurecimiento por deformación mediante las siguientes expresiones:

$$f_s = f_y + Y \cdot (f_{su} + f_y) \quad (2.13)$$

$$Y = \frac{A \cdot X - (B - 1) \cdot X^2}{A + (A - 2) \cdot X + B \cdot X^2} \quad (2.14)$$

$$X = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{sh} = 0.0145 - 1.2801e^{-6} \cdot f_y \quad (2.16)$$

Donde las constantes A y B tienen los siguientes valores obtenidos experimentalmente [12]:

$$A = 1.735$$

$$B = 3.62$$

2.3. Comportamiento del acero bajo carga de compresión

Los modelos descritos anteriormente, hacen referencia al comportamiento del acero bajo cargas de tracción. Sin embargo, Dodd y Restrepo [14] establecieron un procedimiento para determinar la curva esfuerzo vs. deformación del acero bajo carga de compresión a partir de

una curva esfuerzo vs. deformación bajo carga de tracción.

Este procedimiento pretende formar una relación entre deformaciones y esfuerzos de barras de acero bajo carga de tensión y bajo carga de compresión, mediante la teoría de que no existe pérdida de volumen de la barra de acero ensayada, lo que evidencia que las dimensiones transversales y longitudinales de la barra en estudio sólo varían según el efecto de Poisson [14].

Las expresiones para obtener f_{sc} y ε_{sc} que hacen referencia al esfuerzo y deformación bajo carga de compresión en función de la curva esfuerzo vs. deformación bajo carga de tracción son las siguientes [14]:

$$f_{sc} = -f_s \cdot (1 + \varepsilon_s)^2 \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{-\varepsilon_s}{1 + \varepsilon_s} \quad (2.18)$$

Combinando las ecuaciones se obtiene el parámetro p que define la forma de la zona de endurecimiento por deformación del modelo de Mander [16], para compresión:

$$p_c = \frac{\ln\left(\frac{f_{suc} - f_{sc}}{f_{suc} - f_{yc}}\right)}{\ln\left(\frac{\varepsilon_{suc} - \varepsilon_{sc}}{\varepsilon_{suc} - \varepsilon_{shc}}\right)} \quad (2.19)$$

2.4. Comportamiento del acero bajo cargas cíclicas

2.4.1. Introducción a los ciclos histeréticos

Como se ha visto anteriormente, el comportamiento elástico de un material permite que el mismo regrese a su estado original luego de retirar una fuerza impuesta, por lo que no existe una deformación permanente producto de haber aplicado y retirado dicha fuerza. Este proceso es el que ocurre con el acero en su parte elástica, es decir hasta que su deformación es igual a ε_y .

Sin embargo, cuando la deformación del acero es mayor a ε_y , éste se encuentra en su zona inelástica, pues cuando se quita una fuerza aplicada sobre el material, la descarga no ocurre siguiendo la misma trayectoria de carga, y se presenta una deformación permanente. Como se puede apreciar en la figura 2.3.

De acuerdo a Popov [17]; la figura 2.4 muestra un material que es cargado desde 0 hasta el punto A; posteriormente es descargado, y toma la trayectoria AB. Tanto en la parte inicial de la carga como en la descarga, el material tiene una respuesta esencialmente elástica con el módulo de elasticidad inicial del material. Debido a que incursiona el rango inelástico antes

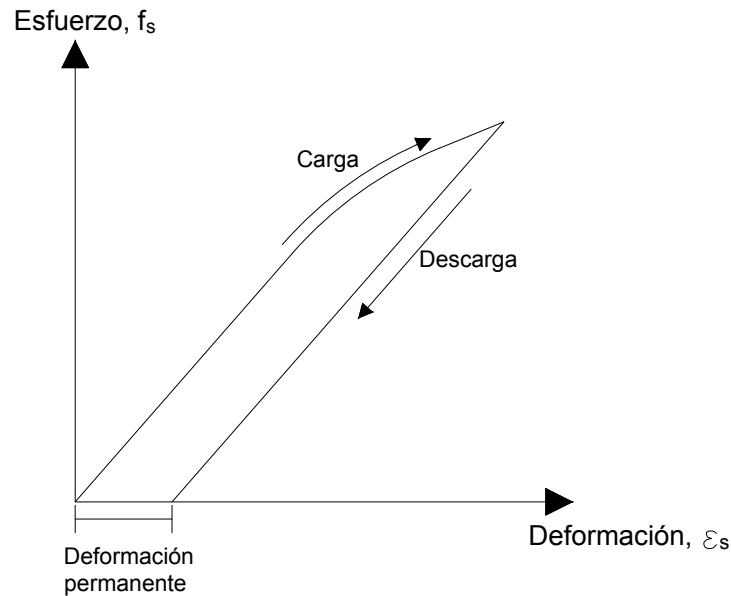


Figura 2.3: Material inelástico.

de llegar al punto A, presenta una deformación permanente; parte de la energía de deformación necesaria para alcanzar el punto A es acumulada como energía potencial y se libera en la descarga. En la Figura (2.4) puede observarse que al cargar nuevamente el material a partir del punto B; se comporta como un material elástico, hasta que encuentra la curva original en el punto C; y que al continuar la carga sigue la curva original. Si en el punto D se retira nuevamente la carga, el material llega al punto E de esfuerzo aplicado nulo. Cargándolo nuevamente en el sentido contrario a partir del punto E, desde F el material comienza a comportarse inelásticamente.

Cuando el material experimenta una serie de ciclos de carga, descarga, y carga en el sentido opuesto; donde los esfuerzos sobrepasan el límite elástico del material, se observa este tipo de comportamiento conocido como respuesta histerética. La Figura 2.5 muestra el resultado de dos tipos de ensayos de carga cíclica de acero de refuerzo. La gráfica (2.4.a) solo presenta deformaciones positivas, mientras que en la figura (2.4.b), las deformaciones son positivas y negativas, produciendo ciclos de histéresis simétricos.

El caso uno se presenta en el refuerzo de las vigas en zonas de rótulas plásticas que experimentan grandes deformaciones inelásticas a flexión y poca carga axial; mientras que el segundo caso se puede producir durante la respuesta de una columna a carga cíclica con niveles de carga axial moderada o alta [2].

Para ambos casos, se ha observado que la curva obtenida bajo cargas monótonicas resulta una envolvente de las curvas bajo cargas cíclicas [2].

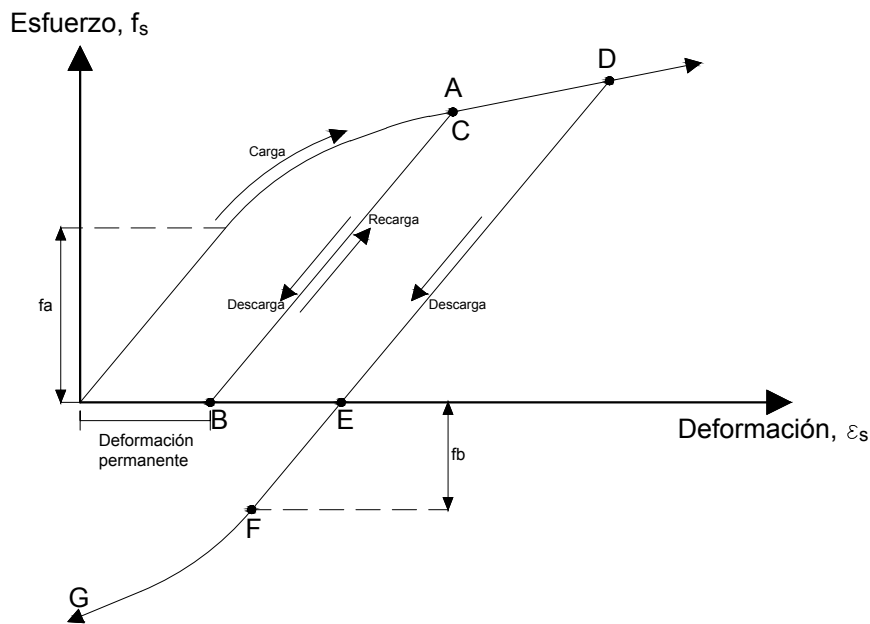


Figura 2.4: Efecto de carga y descarga, con inversión del sentido de carga [1].

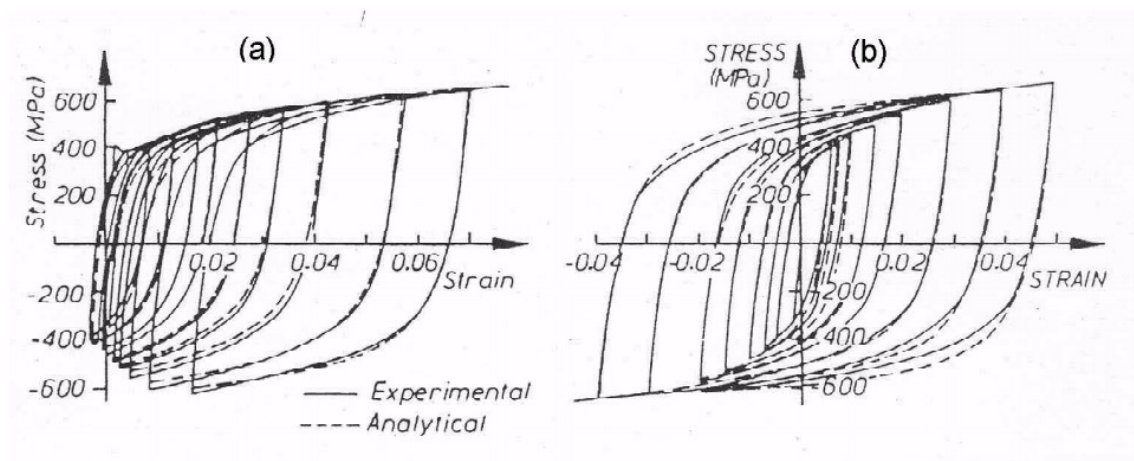


Figura 2.5: Ciclos de histéresis del acero de refuerzo. Obtenido de [2]

2.4.2. Efecto Bauschinger

En la figura (2.4), f_a y f_b representan las magnitudes del esfuerzo f_s para las cuales el material deja de comportarse elásticamente y pasa a tener un comportamiento plástico, en la carga inicial y en la carga realizada en sentido contrario respectivamente. Se observa que f_b es menor a f_a , lo que implica que el comportamiento no lineal del material inicia con

una magnitud del esfuerzo menor al cargar el material en sentido contrario. Esto se conoce como efecto de Bauschinger, quien fue el primero en observarlo, y por esto lleva su nombre [1].

Cuando el acero de refuerzo se somete a cargas cíclicas, dentro del rango inelástico. La plataforma de fluencia desaparece y la curva esfuerzo-deformación exhibe el efecto “Bauschinger”, según el cual, el comportamiento no lineal comienza para un nivel de esfuerzo mucho más bajo que la resistencia inicial de fluencia. En consecuencia, las curvas esfuerzo vs. deformación exhiben una forma redondeada durante la fluencia [13].

2.4.3. Modelos de curva esfuerzo vs. deformación bajo carga cíclica

2.4.3.1. Modelo de Chang y Mander

El siguiente modelo propuesto por Chang y Mander [6], se basa en etapas de carga y descarga, es decir, en fases de tracción y compresión del acero. Mantiene como envolventes las curvas del comportamiento monotónico del acero uniendo sus puntos finales con una curva A, basada en las ecuaciones de Menegotto-Pinto [18], definida para cada una de las etapas, como se muestra en la figura 2.6. La curva A considera el “Efecto Bauschinger” mencionado en la sección 2.4.2, puesto que presenta transiciones suaves en la capacidad del acero desde el inicio hasta el final de la curva, y presenta la siguiente formulación donde f_0 y ε_0 son la tensión y deformación al inicio de la curva; f_f y ε_f son la tensión y deformación al final de la curva, R es el parámetro que representa el efecto Bauschinger [19]:

$$f_s = f_0 + E_0 \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_0) \left\{ Q + \frac{1 - Q}{\{1 + \rho\}^{1/R}} \right\} \quad (2.20)$$

Donde:

$$\rho = \left[E_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_0}{f_s - f_0} \right) \right]^R \quad (2.21)$$

$$Q = \frac{\frac{E_{sec}}{E_0} - a}{1 - a} \quad (2.22)$$

Con:

$$E_{sec} = \frac{f_f - f_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \quad (2.23)$$

$$a = \left[1 + \left(\frac{E_0}{E_{sec}} \right)^R \right]^{-1/R} \quad (2.24)$$



Los parámetros E_0 y R fueron calibrados mediante ensayos de fatiga de bajo ciclo realizados por Mander [6] para las fases de carga y descarga respectivamente:

Fase de descarga:

$$E_0 = E_s \cdot (1 - \Delta\varepsilon) \quad (2.25)$$

$$R = 14 \cdot \left(\frac{f_y}{E_s} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1 - 14\Delta\varepsilon) \quad (2.26)$$

Fase de carga:

$$E_0 = E_s \cdot (1 - \Delta\varepsilon) \quad (2.27)$$

$$R = 20 \cdot \left(\frac{f_y}{E_s} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1 - 18\Delta\varepsilon) \quad (2.28)$$

Donde:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_0}{2} \quad (2.29)$$

$$R > 0 \quad (2.30)$$

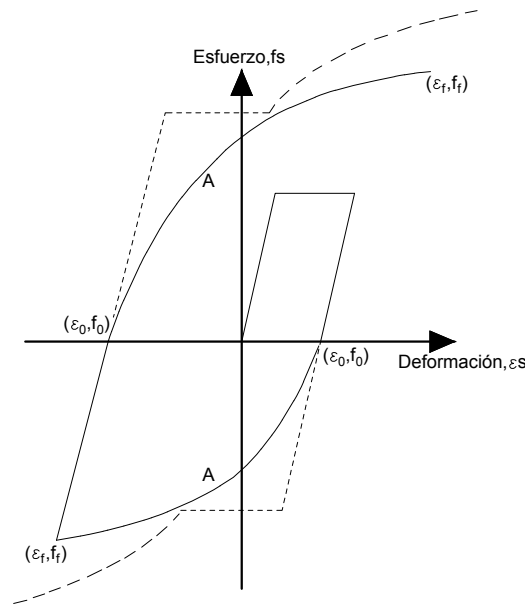


Figura 2.6: Modelo de Chang y Mander.

2.4.3.2. Modelo de Kent y Park

El modelo propuesto por Kent y Park [20] se puede observar en la figura 2.7, idealiza la curva que sigue el comportamiento del acero bajo cargas cíclicas, utiliza las curvas del comportamiento monotónico como envolventes y basa el comportamiento cíclico en la formulación propuesta por Ramberg-Osgood [21], donde f_0 y ε_0 son la tensión y deformación al inicio de la curva, f_f y ε_f son la tensión y deformación al final de la curva, f_{ch} es la tensión característica y r es un parámetro que define la curvatura y depende del número de ciclos incurridos anteriormente:

$$\varepsilon_s - \varepsilon_0 = \frac{(f_s - f_0)}{E_s} \left\{ 1 + \left| \frac{f_s - f_0}{f_{ch} - f_0} \right|^{r-1} \right\} \quad (2.31)$$

La figura 2.8 muestra el comportamiento de la ecuación 2.31 con diferentes valores del parámetro r .

Con el propósito de linealizar la ecuación anterior, Kent y Park realizaron un análisis de regresiones tomando los logaritmos en ambos lados de la ecuación y comparando con pruebas experimentales, de esta manera propusieron las siguientes expresiones empíricas para encontrar los valores de la tensión característica y el parámetro r de Ramberg-Osgood:

$$f_{ch} = f_y \cdot (0.973 - 9.806\varepsilon_{p1}) \quad (2.32)$$

$$r = 12.33 + \frac{45.07}{\exp(1000\varepsilon_{p1})} - \frac{9.77}{\log_e(1000\varepsilon_{p1} + 2)} \quad (2.33)$$

Donde f_y es la tensión de fluencia del material y ε_{p1} es la deformación plástica del ciclo anterior medida experimentalmente.

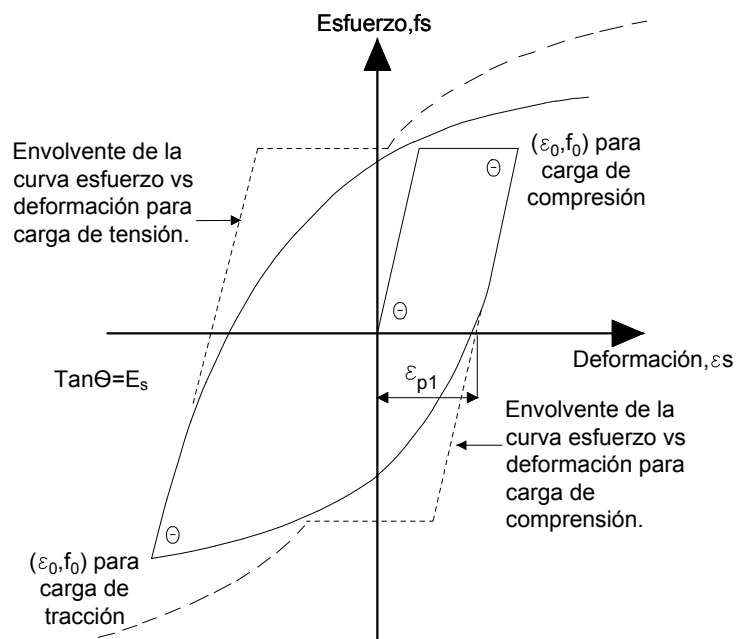


Figura 2.7: Modelo de Kent y Park.

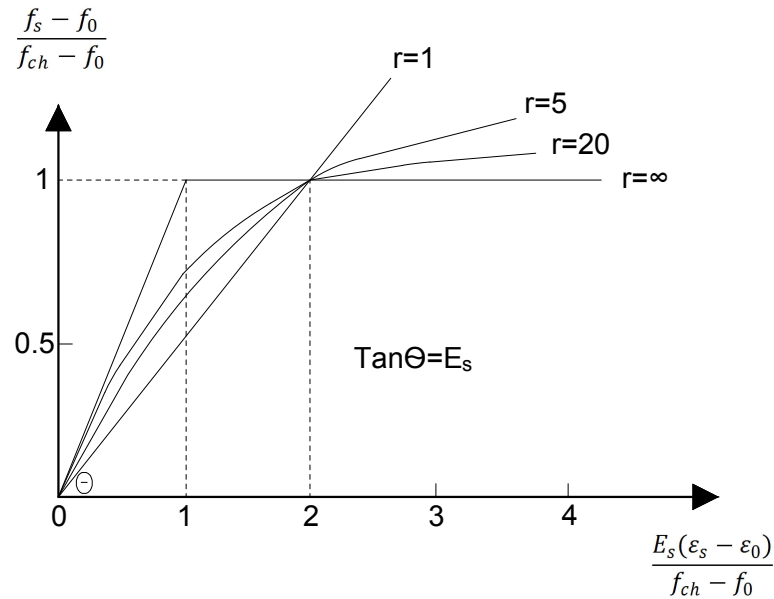


Figura 2.8: comportamiento de la ecuación 2.31 con diferentes valores del parámetro r .

2.5. Pandeo inelástico

Actualmente, el problema del pandeo inelástico presenta considerable importancia debido a que se han implementado diferentes usos del acero y sus aleaciones de alta resistencia en la mayoría de miembros estructurales pertenecientes a casas, edificios, puentes, vías, etc. Por esta razón, se ha presentado la necesidad de realizar varios estudios e investigaciones sobre el comportamiento de este material y su utilidad.

Uno de los primeros problemas estudiados fue sobre inestabilidad elástica en relación al pandeo lateral de miembros a compresión realizado por Leonhard Euler, quien presentó una solución teórica enfocada en barras doblemente apoyadas, en la cual la carga crítica de pandeo es representada por la siguiente expresión [22]:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.34)$$

Donde E es el módulo de elasticidad del material, I la inercia de la sección transversal y L la longitud de la barra.

Sin embargo, una columna o barra con una esbeltez moderada se pandea cuando parte de sus fibras han alcanzado la fluencia [23], estudios analíticos y ensayos a compresión experimentales han demostrado que esta solución solo es válida cuando el pandeo se presenta en la zona elástica del material debido a su comportamiento lineal pero es errónea su consideración después de haber alcanzado el límite de proporcionalidad puesto que el módulo

de elasticidad deja de ser constante, aspecto mencionado por Lamarle en 1845 y debido al cual se plantean teorías sobre variaciones que se deben realizar para utilizar la ecuación de Euler, en el rango inelástico.

2.5.1. Teoría del Módulo Tangente

Engesser propuso una teoría para el pandeo inelástico que supone el incremento de la desviación lateral simultáneamente con el incremento de la carga axial. En tal caso, la tensión en el lado convexo de la barra disminuye en las etapas iniciales de flexión pero puede ser compensada por el aumento de esfuerzo de compresión directa debido a que la fuerza axial crece continuamente [22].

Para encontrar la carga crítica de pandeo tomando en cuenta esta teoría, basta con reempla-

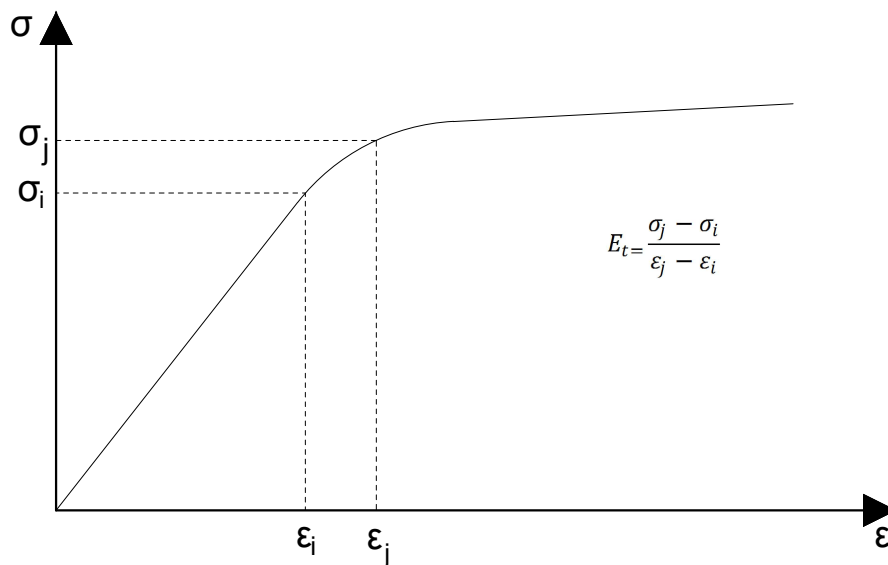


Figura 2.9: Módulo Tangente

zar el módulo de elasticidad E_s por el módulo tangente E_t en la ecuación de Euler:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.35)$$

2.5.2. Teoría del Doble Módulo Reducido

Considerare indicó en 1889, que en una columna sometida a carga de compresión y que ha sobrepasado el límite de proporcionalidad, los esfuerzos aumentan en el lado cóncavo al inicio de la flexión regidos por el módulo tangente E_t mientras que disminuyen en el lado convexo siguiendo una pendiente aproximadamente igual al módulo elástico del material E_s . Por lo tanto, la resistencia máxima de la columna no depende del módulo tangente ni del módulo elástico, sino de un módulo reducido E_r comprendido entre estos dos [3].

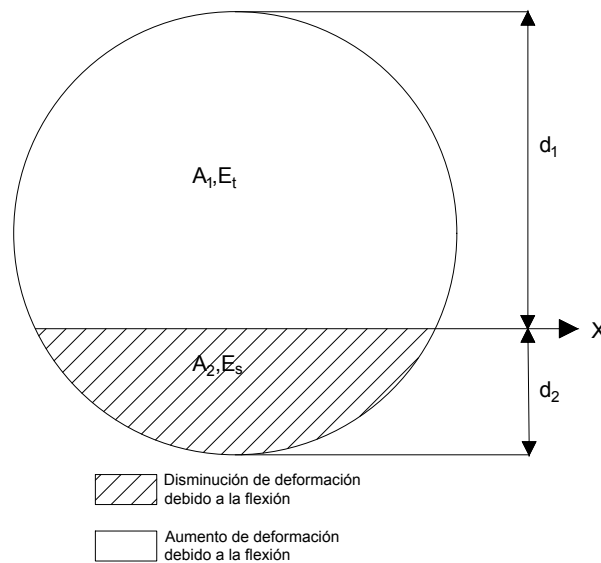


Figura 2.10: Comportamiento de la sección transversal del acero

En 1985, Engesser consideró los comentarios realizados por Considerare y planteo la “Teoría del Doble Módulo Reducido” la cual supone lo siguiente [3]:

- Los desplazamientos laterales de los ejes de la columna son pequeños comparados con las dimensiones de su sección transversal
- Las secciones transversales planas permanecen planas y normales al eje deformado después de la flexión.
- El comportamiento de cualquiera de las fibras longitudinales del material se representa con la curva esfuerzo vs. deformación de este.
- El plano de flexión es un plano de simetría de todas las secciones transversales.

A continuación se presenta la demostración de la teoría del doble módulo reducido, lo que permite evaluar el esfuerzo de pandeo una barra de refuerzo bajo carga de compresión [24].

En la figura (2.10) se puede apreciar que el lado cóncavo de la sección presenta un módulo

tangente E_t , mientras que el lado convexo presenta un módulo de elasticidad E ; debiendo encontrar un módulo equivalente, es decir, el doble módulo reducido E_r . Para obtener el doble módulo reducido E_r , se realiza un promedio de pesos de las áreas 1 y 2, obteniéndose [7]:

$$E_r I = E_t I_{1x} + E_s I_{2x} \quad (2.36)$$

Donde:

- E_r es el módulo reducido.
- E_t es el módulo tangente.
- E_s es el módulo elástico.
- I es el momento de inercia de la sección circular de la barra.
- I_{1x} es el momento de inercia del sector circular 1 respecto al eje X.
- I_{2x} es el momento de inercia del sector circular 2 respecto al eje X.

Despejando E_r de la ecuación 2.36 se obtiene:

$$E_r = \frac{E_t I_{1x}}{I} + \frac{E_s I_{2x}}{I} \quad (2.37)$$

El momento de inercia I de una sección circular es:

$$I = \frac{\pi R^4}{4} \quad (2.38)$$

Reemplazando el momento de inercia I en la ecuación 2.37, se obtiene:

$$E_r = \frac{4}{\pi R^4} \cdot [E_t I_{1x} + E_s I_{2x}] \quad (2.39)$$

Por definición de momento de inercia, de la figura 2.10 se obtiene:

$$I_{1x} = \int_0^{d_1} z_1^2 dA_1 \quad (2.40)$$

$$I_{2x} = \int_0^{d_2} z_2^2 dA_2 \quad (2.41)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la ecuación 2.39:

$$E_r = \frac{4}{\pi R^4} \cdot \left[E_t \int_0^{d_1} z_1^2 dA_1 + E_s \int_0^{d_2} z_2^2 dA_2 \right] \quad (2.42)$$

Con el propósito de simplificar, se hacen los siguientes cambios de variables [3]:

$$X = \frac{1}{R^4} \cdot \int_0^{d_1} z_1^2 dA_1 \quad (2.43)$$

$$Y = \frac{1}{R^4} \cdot \int_0^{d_1} z_2^2 dA_2 \quad (2.44)$$

Al sustituir las dos expresiones anteriores en la ecuación 2.42, se obtiene:

$$\frac{E_r}{E_s} = \frac{4}{\pi} \cdot \left[X \cdot \frac{E_t}{E_s} + Y \right] \quad (2.45)$$

Como se puede apreciar en la expresión 2.45, el módulo reducido depende de la geometría de la sección, del módulo elástico E y del módulo tangente E_t .

Para obtener el módulo tangente E_t , se calcula el primer momento de área respecto al eje neutro X:

$$A_1 Y_1 E_t = A_2 Y_2 E_s \quad (2.46)$$

Donde:

- A_1 y A_2 son las áreas del sector circular 1 y 2 respectivamente, definidas en la figura 2.10.
- Y_1 y Y_2 son los centroides del sector circular 1 y 2 respectivamente.

$$A_1 = R^2 \cdot \left[\alpha - \frac{\text{seno}2\alpha}{2} \right] \quad (2.47)$$

$$A_2 = R^2 \cdot \left[(\pi - \alpha) + \frac{\text{seno}2\alpha}{2} \right] \quad (2.48)$$

$$Y_1 = R \cdot \left[\frac{2 \text{seno}(\alpha)^3}{3 \left(\alpha - \frac{\text{seno}2\alpha}{2} \right)} - \text{cos}\alpha \right] \quad (2.49)$$

$$Y_2 = R \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \text{seno}(\alpha)^3}{3 \cdot \left[(\pi - \alpha) + \frac{\text{seno}2\alpha}{2} \right]} + \text{cos}\alpha \right\} \quad (2.50)$$

Sustituyendo las cuatro expresiones anteriores en la ecuación 2.46 y despejado E_s/E_t se obtiene:

$$\frac{E_s}{E_t} = \frac{\left[\alpha - \frac{\text{seno}2\alpha}{2}\right] \left[\frac{2(\text{seno}\alpha)^3}{3(\alpha - \frac{\text{seno}2\alpha}{2})} - \text{cos}\alpha\right]}{\left[(\pi - \alpha) + \frac{\text{seno}2\alpha}{2}\right] \left[\frac{2(\text{seno}\alpha)^3}{3((\pi - \alpha) + \frac{\text{seno}2\alpha}{2})} + \text{cos}\alpha\right]} \quad (2.51)$$

La expresión anterior permite obtener el módulo tangente E_t necesario para evaluar el módulo reducido equivalente E_r .

De manera similar a la “Teoría del módulo tangente”, basta con remplazar el módulo de elasticidad del material E_s por el módulo reducido E_r en la ecuación del pandeo de Euler:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (2.52)$$

2.5.3. Pandeo inelástico en elementos cargados excéntricamente

El pandeo inelástico ha sido también estudiado tomando en cuenta las imperfecciones que se presentan en el elemento o estructura, tales como excentricidades debidas a otros elementos parte de la misma estructura, así como excentricidades involuntarias causadas por la fabricación, armado o ejecución. Tal análisis se basa en la falla por pandeo producida una vez que la estructura alcanza el máximo momento resistente a flexión, anulando la capacidad de seguir recibiendo carga.

Para un mejor enfoque se considera un elemento cargado excéntricamente como se muestra en la figura 2.11.

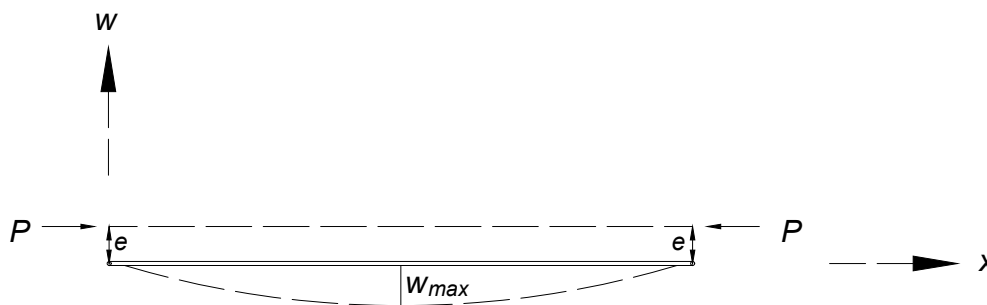


Figura 2.11: Elemento cargado excéntricamente

Los momentos producidos en los extremos son:

$$M_0 = P \cdot e \quad (2.53)$$

El máximo momento resistente a flexión, como lo demuestra [22] es:

$$M_{max} = M_0 \cdot sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L_e}{2} \right) \quad (2.54)$$

Donde L_e es la longitud efectiva para cualquier condición de apoyo del elemento.

Por tanto, el esfuerzo máximo resistente en el lado cóncavo del elemento se puede representar por la siguiente ecuación denominada *Ecuación de la Secante*:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max} \cdot d}{I} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ed}{r^2} \cdot sec \left(\frac{L_e}{2r} \sqrt{\frac{P}{AE}} \right) \right] \quad (2.55)$$

Donde d es la distancia entre la fibra del extremo y el eje neutro de la sección transversal y r es su radio de giro. El factor $\frac{ed}{r^2}$ es conocido como la relación de excentricidad.

Introduciendo el concepto del radio del núcleo (s), propuesto por Timoshenko [25], se presenta la siguiente igualdad:

$$s = \frac{Z}{A} = \frac{I}{Ad} = \frac{r^2}{d} \quad (2.56)$$

donde Z es el módulo plástico de la sección transversal.

Por tanto se puede escribir una variación de la Ecuación de la Secante de la siguiente forma:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{e}{s} \cdot sec \left(\frac{L_e}{2r} \sqrt{\frac{P}{AE}} \right) \right] \quad (2.57)$$

Al usar esta ecuación se puede encontrar el esfuerzo crítico de pandeo de un elemento o estructura cargada excéntricamente.

2.6. Métodos de optimización

La optimización puede plantearse como el ajuste de las entradas o características de un proceso industrial, modelo matemático o experimento para lograr que la salida alcance un punto mínimo o máximo dependiendo de los intereses. Si la salida es ganancia, el objetivo es maximizar; y si son pérdidas, la salida es minimizar. El problema a optimizar se puede plantear mediante un modelo matemático descrito por $f : X \subseteq R_n \rightarrow R$ donde X es el espacio de búsqueda. Así el problema de optimización puede definirse como:

$$\min f(x)_{X \subseteq R^n} \quad \text{suje}to \quad a \quad C_k \leq 0 \quad (2.58)$$

Donde $X \subseteq R_n \rightarrow R$ es un conjunto en el espacio Euclidiano de dimensión n , $f(x)$ es un conjunto de números reales, k es el número de restricciones y C_k proporciona la forma de la



restricción, la cual es una función que limita el espacio de búsqueda, a esto se le llama problema de optimización restringido. Un punto X_i se le llama punto factible si satisface todas las restricciones y al conjunto de todos los puntos factibles se le llama conjunto factible de búsqueda. En el caso donde las restricciones no se definen es un problema de optimización no restringido, por lo mismo, el dominio de la función es el espacio factible de búsqueda [26].

Los diferentes campos de la optimización pueden clasificarse por las propiedades de la función objetivo: la forma de las restricciones, el dominio, naturaleza de la función objetivo, etc. [26].

Matlab es un software de cálculo numérico que ofrece un ambiente para realizar operaciones aritméticas y vectoriales en línea de comandos. Además, ofrece un entorno de programación de scripts que facilitan la implementación de códigos para la solución de problemas de gran envergadura. Matlab ha sido utilizado en la implementación de algoritmos de optimización, debido a su facilidad de programación y su poder de cómputo en el manejo de vectores y matrices; y a sus herramientas para graficar funciones o series de datos en 2 y 3 dimensiones, lo que permite analizar los resultados de la optimización de forma visual. Cuenta con un conjunto de funciones predefinidas para realizar operaciones matriciales, para que el usuario no invierta tiempo en la programación de tales operaciones.

Este software incluye módulos adicionales llamados “toolbox”, los cuales contienen entornos para el desarrollo de aplicaciones más específicas. Dentro de los toolbox se encuentra el de optimización, el cual consta de un conjunto de comandos que determinan el mínimo de una función lineal o no lineal que puede ser o no multivariable con restricciones de igualdad y desigualdad.

De los comandos de optimización de Matlab se escogió *fminsearch*, una función que resuelve los problemas de optimización de funciones de una o más de una variable sin restricciones, que tiene la siguientes sintaxis:

$$fminsearch(fun, x0)$$

Donde *fun* es la función objetivo y *x0* es un vector de valores iniciales de iteración. El comando:

$$[x, fvalor] = fminsearch(fun, x0, options)$$

devuelve el parámetro minimizado (*x*), y el valor de la función en *x*. En *options* se especifica la estructura con la que el comando *fminsearch* optimizará, se utiliza *optimset* para establecer los valores de *options* descritos en [26].

Capítulo 3

PANDEO EN BARRAS DE ACERO BAJO CARGAS CÍCLICAS

3.1. Modelo propuesto del comportamiento del acero bajo cargas cíclicas

Como punto de partida, se realiza un análisis comparativo de las diferentes curvas esfuerzo vs. deformación propuestas en la bibliografía consultada, tanto para cargas monotónicas como para cargas cíclicas.

3.1.1. Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga monotónica

Para la obtención de una curva esfuerzo vs. deformación bajo carga monotónica, se requieren los parámetros $f_y, f_{su}, \varepsilon_{sh}, \varepsilon_{su}, E_s$ y p en el caso del modelo de Mander. Estos parámetros se obtuvieron de las pruebas experimentales realizadas por [3], ellos ensayaron 100 probetas procedentes de distintos lugares de la ciudad de México en el año 1993. Las probetas ensayadas fueron de 600mm de longitud con un espacio libre entre mordazas igual a 80mm. La velocidad del ensayo fue constante de manera que el mismo duró en promedio tres minutos. Las probetas ensayadas fueron 50 de diámetro grande dentro del cual se encuentran diámetros de 5/8 pulg, 3/4 pug y 1 1/2 pulg, y 50 de diámetros de 5/16 pulg, 3/8 pulg y 1/2 pulgada pertenecientes a los diámetros pequeños. Se usaron 50 para la obtención del parámetro f_y y 45 para los demás parámetros debido a que 5 probetas de diámetro pequeño se detectaron con posibles fallas en medición.

Los valores obtenidos de los distintos parámetros se muestran en la tabla 3.1

Cabe aclarar que el valor de p se obtuvo con ayuda de un punto experimental de la curva esfuerzo vs. deformación $(\varepsilon_{sh1}, f_{sh1})$ en la zona de endurecimiento por deformación, y ε_{sh1} se obtuvo como un promedio entre ε_{sh} y ε_{su} . Y en estos ensayos se consideró E_s constante e igual a $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Debido a que en muchos ensayos de probetas con diámetros pequeños, se obtuvo mucha variabilidad en las estadísticas correspondientes, se optó por tomar como parámetros base los obtenidos de los diámetros grandes.

	Media Global	Media Diámetros Grandes	Media Diámetros Pequeños
$f_y(kg/cm^2)$	4591	4577	4609
$f_{su}(kg/cm^2)$	7465	7491	7436
ε_{sh}	0.0075	0.0088	0.006
ε_{su}	0.1289	0.1171	0.142
p	3.421	3.474	3.362

Cuadro 3.1: Parámetros de las probetas ensayadas por Botero [3].

Con los parámetros establecidos, se obtiene la curva de esfuerzo vs. deformación de una barra de acero bajo carga de tensión con los modelos de Mander [6], Park y Paulay [11] y Ahmad y Shah [12].

En la gráfica 3.1 se muestra las tres curvas obtenidas con los distintos modelos, con el propósito de compararlas entre sí.

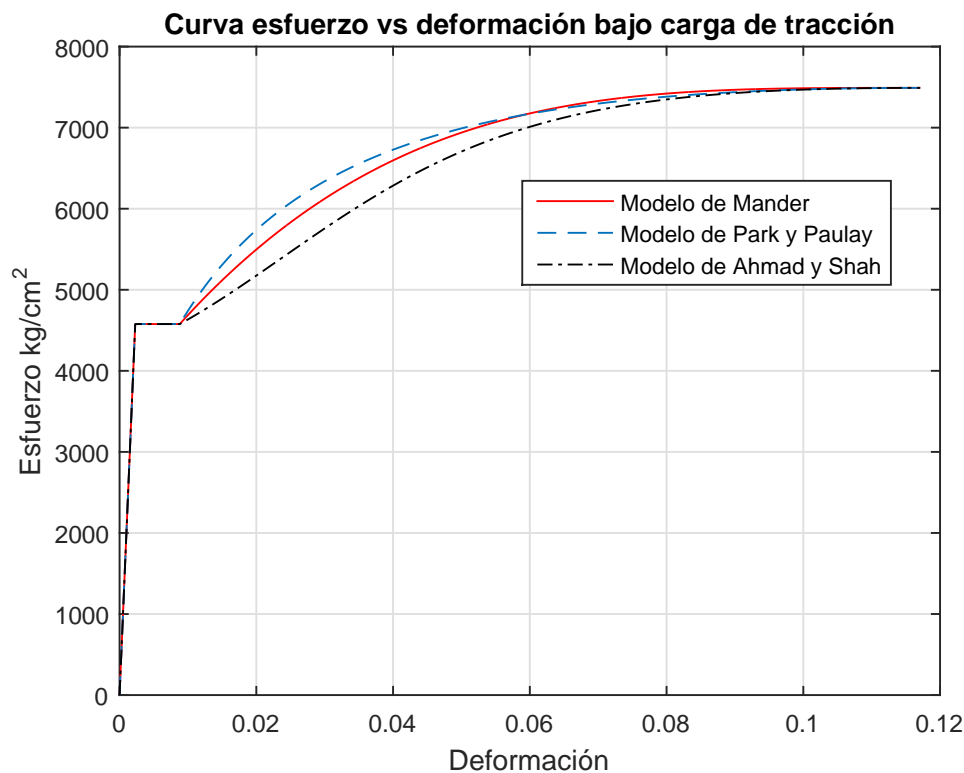


Figura 3.1: Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga a tracción

Se considera que el modelo de Mander se adapta de mejor manera a las curvas experimentales, debido a que el modelo de Park y Paulay y el modelo de Ahmad y Shah se basan en el uso de una función cuadrática para representar la zona de endurecimiento por deformación. Sin embargo, el modelo de Mander considera el parámetro p , el cual depende de un punto

dentro de la curva experimental en la zona de endurecimiento por deformación, por tanto este modelo cuenta con una mejor relación con la curva experimental.

Posterior a la obtención de las curvas esfuerzo vs. deformación de acero bajo carga de tensión, se procede a graficar las curvas esfuerzo vs. deformación bajo carga de compresión mediante las fórmulas 2.17 y 2.18 de Dodd y Restrepo [14]. En la gráfica 3.2 se muestra las tres curvas obtenidas con los distintos modelos junto a una curva experimental de una barra de acero bajo carga de compresión, la cual pertenece al mismo lote de barras ensayadas bajo carga de tensión para obtener los parámetros f_{su} , f_y , ε_{sh} y ε_{su} .

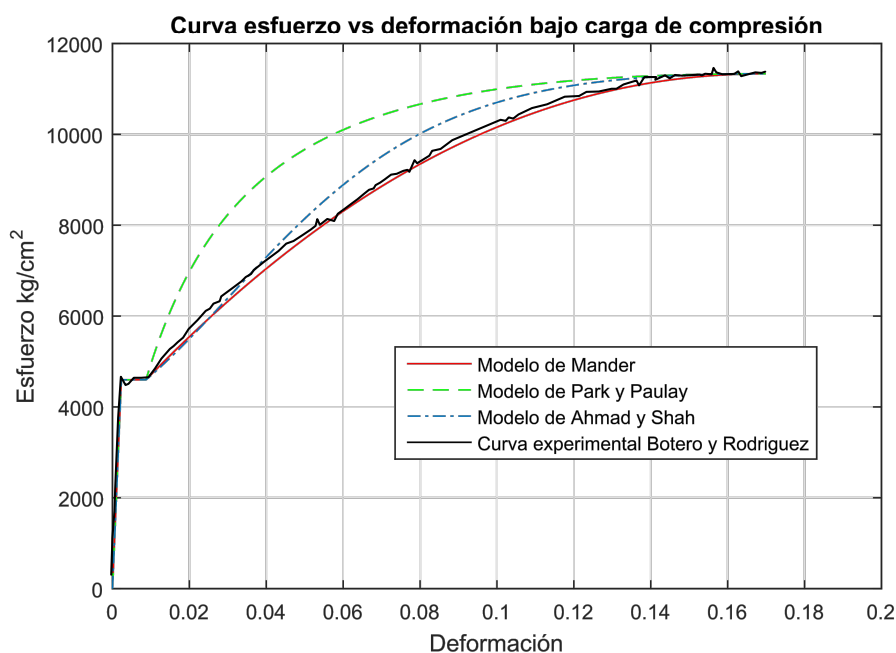


Figura 3.2: Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga a compresión

Como se puede apreciar en la figura 3.2, el modelo de Mander es el que más se aproxima a la curva experimental.

3.1.2. Curva esfuerzo vs. deformación bajo carga cíclica.

Tanto el modelo de curva esfuerzo vs. deformación bajo carga cíclica propuesto por Mander [6], como el modelo de Kent y Park [20], utilizan parámetros experimentales que se obtienen de un ensayo de tensión previo. Por esta razón, se propone un modelo aproximado del comportamiento del acero bajo cargas cíclicas que nos permita obtener la curva esfuerzo-deformación basado en las características básicas del material, las cuales se especifican en la mayoría de catálogos que disponen las empresas distribuidoras.

3.1.3. Modelo propuesto

El siguiente modelo se basa en las ecuaciones propuestas por Menegotto-Pinto [18] y el modelo propuesto por Chang y Mander [6], y tiene la finalidad de representar el comportamiento del acero bajo cargas cíclicas antes de que ocurra la falla del material.

Descripción del Modelo

Datos requeridos:

Los datos necesarios son las características básicas del material que comúnmente se especifica en los catálogos de las empresas distribuidoras, éstas son: el esfuerzo de fluencia a tracción f_y , y el módulo de elasticidad del material E_s .

Además, es preciso ubicar las deformaciones máximas en cada uno de los ciclos compresión-tracción que se vayan a representar en el modelo.

Datos supuestos:

Los valores iniciales de los esfuerzos y deformaciones últimas, y del factor p correspondientes a las características del acero, se obtienen del promedio de los ensayos producidos por Botero [3] bajo carga de compresión para una esbeltez de 2.5. La tabla 3.2 muestra los valores de las características mencionadas

Tracción		Compresión	
$f_{sut}(kg/cm^2)$	10800	$f_{suc}(kg/cm^2)$	11333
ε_{sut}	0.1949	ε_{suc}	0.1629
p	2.092	p	3.474

Cuadro 3.2: Parámetros de barra ensayada por Botero con esbeltez 2.5

Para hacer uso de la ecuación 2.20 propuesta en el modelo de Chang y Mander [6], se supone inicialmente los valores correspondientes al factor R tanto para tracción como para compresión:

Tracción		Compresión	
Característica	Valor	Característica	Valor
R_t	0.547	R_c	0.580

Cuadro 3.3: Factor R.

Datos calculados:

La deformación de la fluencia del material en tracción, se calcula al despejar la ecuación 2.1 y reemplazar los datos que se han denominado como requeridos. Se obtiene la deformación del inicio de la zona de endurecimiento ε_{sh} con la ecuación 2.16. Con el uso de las ecuaciones 2.17 y 2.18, se calcula el esfuerzo de fluencia del material F_{yc} , las deformaciones de fluencia ε_{yc} y de inicio de la zona de endurecimiento por deformación ε_{shc} , correspondientes a compresión.

Zona de descarga y Zona elástica lineal

El modelo presentado supone que el material es sometido a compresión, posteriormente, existe una descarga hasta que el esfuerzo es nulo, y empieza a someterse a tracción. De igual manera, existe la zona de descarga al final de la tracción y de esta manera se completa un ciclo, como se puede apreciar en la figura 3.3. La descarga tiene un comportamiento lineal con pendiente igual al módulo elástico del material E_s .

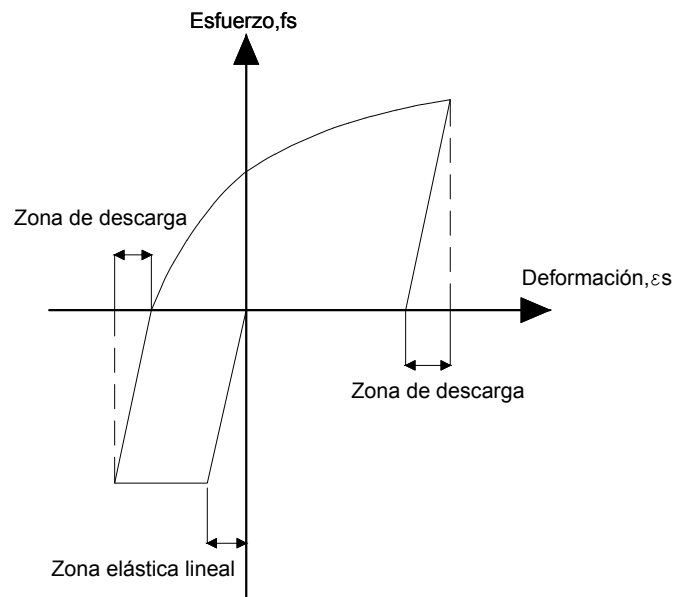


Figura 3.3: Zona elástica y zona de descarga

Zona de endurecimiento por deformación

Cuando el material se comprime por primera vez, su comportamiento en la zona de endurecimiento por deformación se representa mediante la ecuación 2.5 propuesta en el modelo de Mander [10] para acero sometido a cargas monotónicas, que se demostró es la que mejor se aproxima a los resultados experimentales de Botero [3].

Posterior a la primera compresión, el comportamiento del material en la zona de endurecimiento por deformación se representa con las ecuaciones de Menegotto-Pinto [18] propuestas en el modelo de Chang y Mander [6] para acero sometido a cargas cíclicas, con las variaciones que se describen a continuación:

Tracción

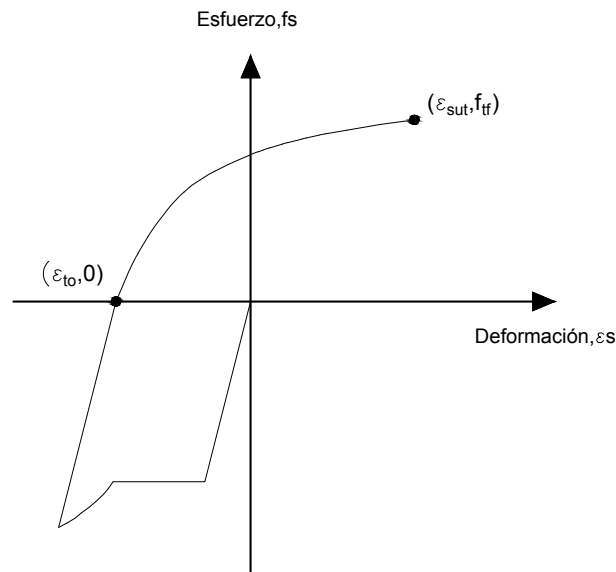


Figura 3.4: Curva histerética en zona de tracción

- La deformación al inicio de la curva es ε_{t0} y es igual a la deformación que presenta el material al final de la zona de descarga ante cargas de la compresión.
- La deformación al final de la curva es la deformación última del material en tracción ε_{sut} y su valor es constante.
- El esfuerzo al inicio de la curva es nulo.
- El esfuerzo al final de la curva es f_{tf} y su valor es igual al del esfuerzo último del material en tracción f_{sut} multiplicado por un factor de reducción que depende de ε_{t0} .
- El parámetro R , que regula la curvatura de la curva en tracción, es igual a R_t del cuadro 3.3 más un factor que depende de la deformación inicial ε_{t0} .

Después de un análisis de varias curvas histeréticas experimentales, se observa que mientras mayor es la deformación inicial de la curva ε_{t0} , el esfuerzo final disminuye y la curvatura de la curva aumenta, por lo tanto el parámetro R . Debido a esto, se establecieron las últimas dos variaciones mencionadas.

Las ecuaciones propuestas para tracción son:

$$f_{tf} = f_{sut} \cdot (1 - 2.4207 \cdot \varepsilon_{t0}) \quad (3.1)$$

$$E_{sec} = \frac{f_{tf}}{\varepsilon_{sut} - \varepsilon_{t0}} \quad (3.2)$$



$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_{sut} + \varepsilon_{t0}}{2} \quad (3.3)$$

$$E_0 = E_s \cdot (1 - \Delta\varepsilon) \quad (3.4)$$

$$R = R_t - (\varepsilon_{t0} \cdot 4.4715) \quad (3.5)$$

$$a = \left[1 + \left(\frac{E_0}{E_{sec}} \right)^R \right]^{-1/R} \quad (3.6)$$

$$Q = \frac{\frac{E_{sec}}{E_0} - a}{1 - a} \quad (3.7)$$

$$\rho = \left[E_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon_S - \varepsilon_{t0}}{f_{tf}} \right) \right]^R \quad (3.8)$$

$$f_s = f_0 + E_0 \cdot (\varepsilon_S - \varepsilon_{t0}) \left\{ Q + \frac{1 - Q}{\{1 + \rho\}^{1/R}} \right\} \quad (3.9)$$

Compresión:

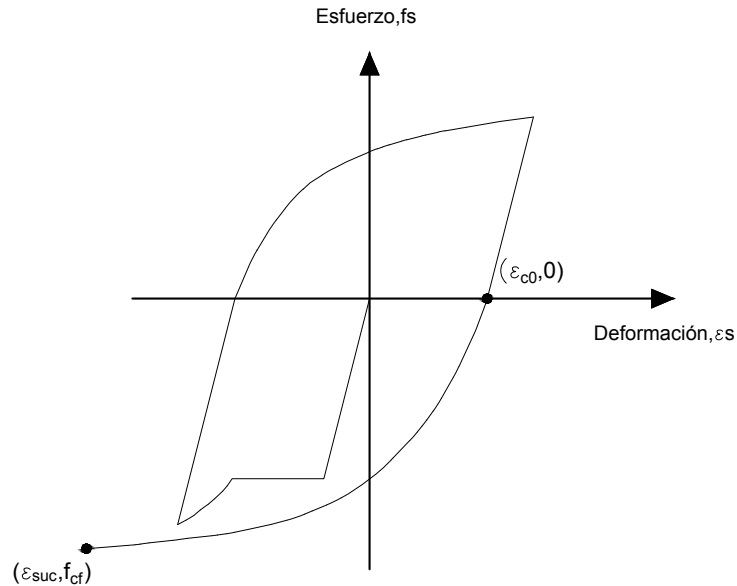


Figura 3.5: Curva histerética en zona de compresión

- La deformación al inicio de la curva es ε_{c0} y es igual a la deformación que presenta el material al final de la zona de descarga después de la tracción.
- La deformación al final de la curva es la deformación última del material en compresión ε_{suc} y su valor es constante.
- El esfuerzo al inicio de la curva es nulo.
- El esfuerzo al final de la curva es f_{cf} y su valor es igual al del esfuerzo último del material en compresión f_{suc} multiplicado por un factor de reducción que depende de ε_{c0} .
- El parámetro R , que regula la curvatura de la curva en compresión, es igual a R_c del cuadro 3.3.

Las ecuaciones propuestas bajo carga de compresión son:

$$f_{cf} = f_{suc} \cdot (1 - 0.9529 \cdot \varepsilon_{c0}) \quad (3.10)$$

$$E_{sec} = \frac{f_{cf}}{\varepsilon_{suc} - \varepsilon_{c0}} \quad (3.11)$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_{suc} + \varepsilon_{c0}}{2} \quad (3.12)$$

$$E_0 = E_s \cdot (1 - \Delta\varepsilon) \quad (3.13)$$

$$R = R_c \quad (3.14)$$

$$a = \left[1 + \left(\frac{E_0}{E_{sec}} \right)^R \right]^{-1/R} \quad (3.15)$$

$$Q = \frac{\frac{E_{sec}}{E_0} - a}{1 - a} \quad (3.16)$$

$$\rho = \left[E_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon_S - \varepsilon_{c0}}{f_{cf}} \right) \right]^R \quad (3.17)$$

$$f_s = f_0 + E_0 \cdot (\varepsilon_S - \varepsilon_{c0}) \left\{ Q + \frac{1 - Q}{\{1 + \rho\}^{1/R}} \right\} \quad (3.18)$$

A continuación se indica el proceso que sigue el modelo propuesto para la graficación de los ciclos histeréticos, mostrado en la figura 3.6.

1. Se calcula la curva AB con el modelo de Mander bajo cargas monotónicas, y se grafica hasta la deformación deseada ε_1 . Posteriormente, se grafica la descarga que tiene pendiente igual a el módulo elástico.
2. Se calcula la curva CD con el modelo de Mander bajo cargas cíclicas junto a las variaciones propuestas anteriormente para tracción, y se grafica hasta la deformación deseada ε_2 . Seguidamente, se grafica la descarga.
3. Se calcula la curva EF con el modelo de Mander bajo cargas cíclicas junto a las variaciones propuestas anteriormente para compresión, y se grafica hasta la deformación deseada ε_3 .
4. Se repite el paso 2 y 3 para la gráfica de más ciclos.

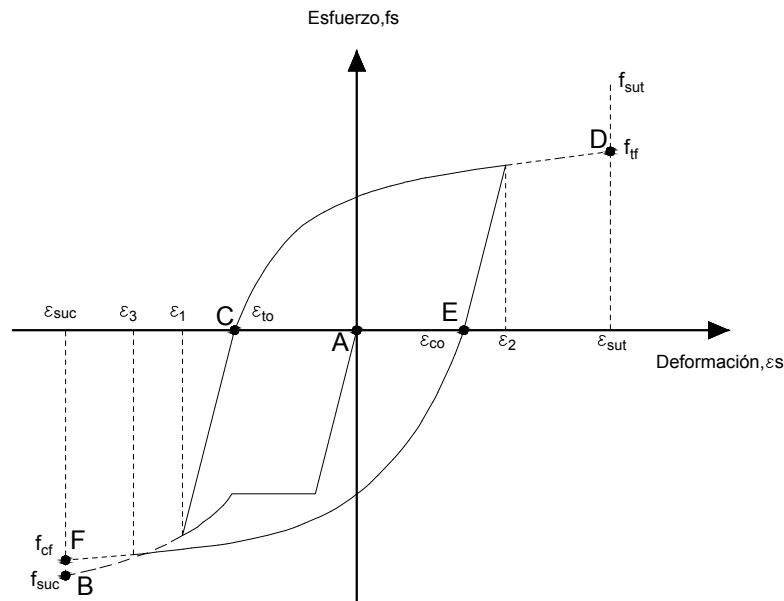


Figura 3.6: Graficación de ciclos histeréticos.

En las figuras 3.7, 3.8 y 3.9, se compara las curvas esfuerzo vs. deformación bajo cargas cíclicas del modelo propuesto junto con las curvas experimentales obtenidos por Botero [3]. El modelo propuesto tiene una aproximación aceptable con relación a los resultados experimentales comparados. Este modelo representa adecuadamente el comportamiento del acero bajo cargas cíclicas y tiene como ventaja que los datos requeridos son propiedades del material que se pueden obtener fácilmente y las deformaciones finales de cada ciclo histerético.

El modelo se elaboró en el software matemático Matlab. El código del programa se presenta en el Apéndice A.

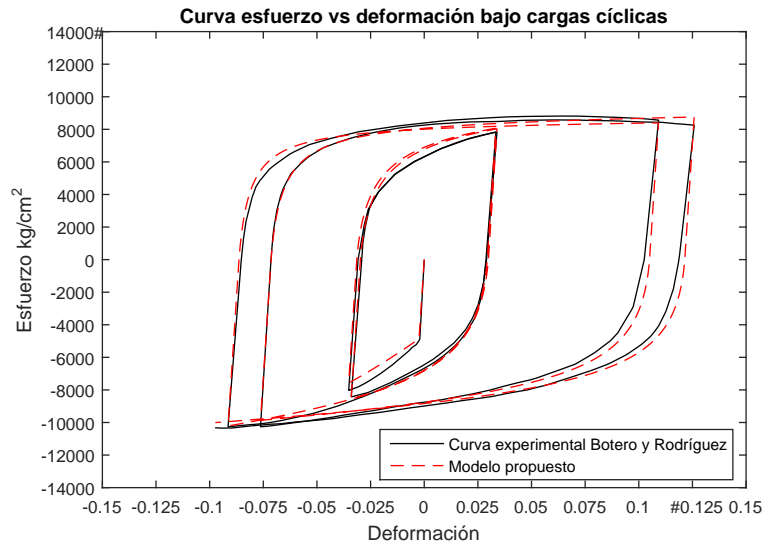


Figura 3.7: Modelo propuesto con la curva de esbeltez 2.5 de Botero [3].

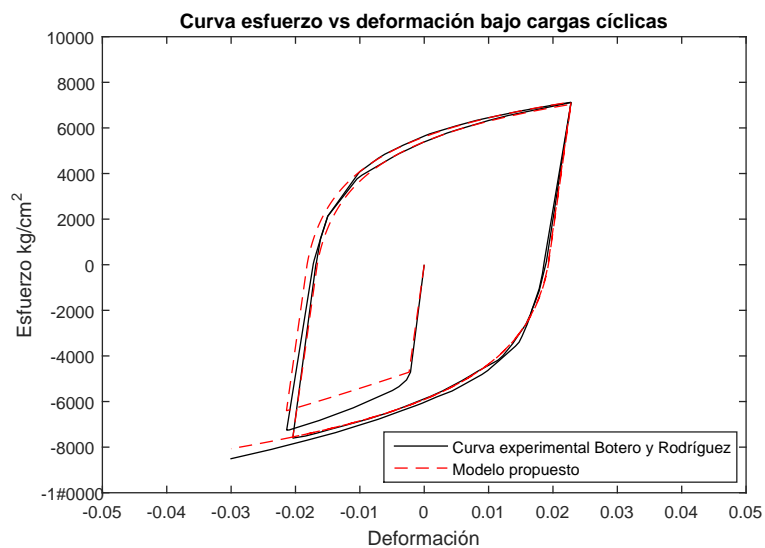


Figura 3.8: Modelo propuesto con la curva de esbeltez 4 de Botero [3].

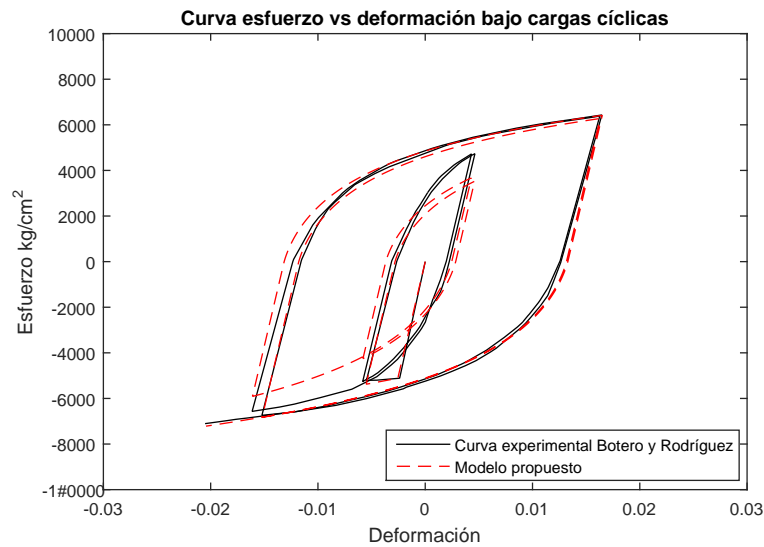


Figura 3.9: Modelo propuesto con la curva de esbeltez 6 de Botero [3].

3.2. Modelo de barra

A continuación, se establece el esfuerzo crítico de pandeo para una barra con cualquier condición de apoyo. Con el fin de representar una barra entre dos estribos.

Las hipótesis son:

Una barra de sección constante, con cualquier condición de apoyo.

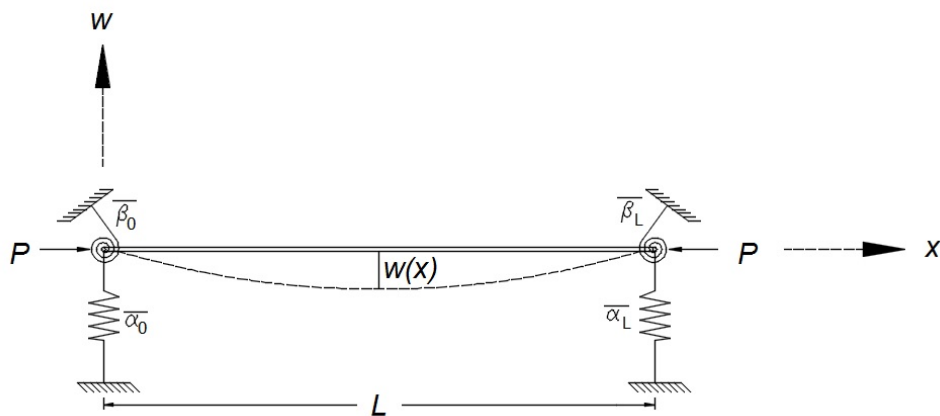


Figura 3.10: Modelo de barra

Existe una carga axial P centrada en el eje de la barra, así como un cortante Q y dos momentos genéricos en los extremos de la misma [27].

Al analizar una longitud x , se puede representar la ecuación de equilibrio de la siguiente manera [27]:

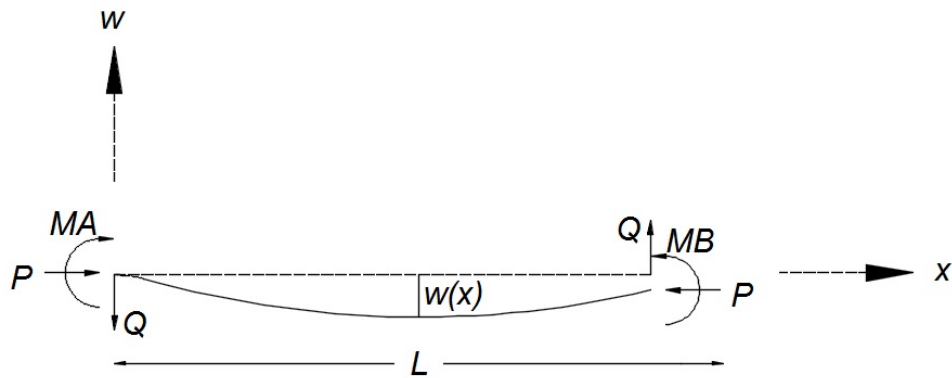
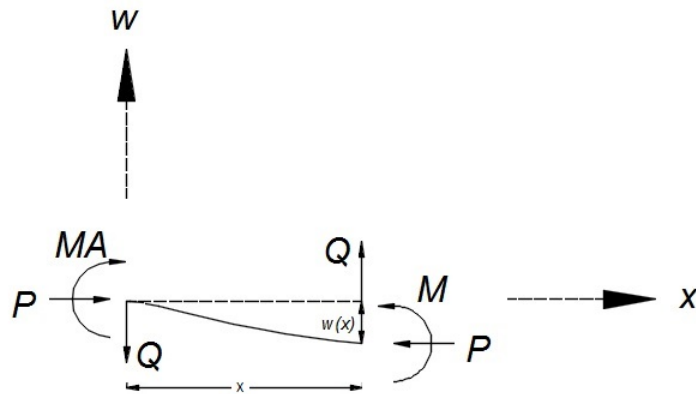


Figura 3.11: Esfuerzos en los extremos de la barra

Figura 3.12: Corte de longitud x en la barra

$$M + P \cdot w - MA + Q \cdot x = 0 \quad (3.19)$$

Al considerar $M = EIw_{xx}$, la ecuación puede reescribirse:

$$EIw_{xx} + P \cdot w = MA - Q \cdot x \quad (3.20)$$

Derivando dos veces la ecuación con respecto a x :

$$EIw_{xxxx} + Pw_{xx} = 0 \quad (3.21)$$

La ecuación diferencial 3.21 representa el comportamiento de la barra sometida a carga axial y cualquier condición de apoyo. Las soluciones de la ecuación son:

$$w = 0 \quad (3.22)$$

Con multiplicidad 2, y

$$w = \pm \sqrt{\frac{P}{EI}} i \quad (3.23)$$



La solución general es:

$$w = A_1 \operatorname{seno} \left(\frac{P}{EI} x \right) + A_2 \operatorname{cos} \left(\frac{P}{EI} x \right) + A_3 + A_4 x \quad (3.24)$$

Condiciones de frontera:

$$x = 0$$

$$-[EIw_{xxx} + Pw_x] = \bar{\alpha}_0 w \quad (3.25)$$

$$EIw_{xxx} = \bar{\beta}_0 w \quad (3.26)$$

$$x = L$$

$$-[EIw_{xxx} + Pw_x] = -\bar{\alpha}_L w \quad (3.27)$$

$$EIw_{xxx} = -\bar{\beta}_L w \quad (3.28)$$

Al considerar:

$$\alpha_0 = \frac{\bar{\alpha}_0}{EI} \quad (3.29)$$

$$\alpha_L = \frac{\bar{\alpha}_L}{EI} \quad (3.30)$$

$$\alpha_0 = \frac{\bar{\beta}_0}{EI} \quad (3.31)$$

$$\alpha_L = \frac{\bar{\beta}_L}{EI} \quad (3.32)$$

Se obtiene:

$$w_{xxx} + K^2 w_{xx} = 0 \quad (3.33)$$

$$w_{xxx}(0) + K^2 w_{xx}(0) + \alpha_0 w(0) = 0 \quad (3.34)$$

$$w_{xx}(0) - \beta_0 w_x(0) = 0 \quad (3.35)$$

$$w_{xxx}(L) + K^2 w_x(L) + \alpha_L w(L) = 0 \quad (3.36)$$

$$w_{xx}(L) - \beta_L w_x(L) = 0 \quad (3.37)$$

Al sustituir las condiciones de frontera:

$$\alpha_0 A_2 + K^2 A_3 + \alpha_0 A_4 = 0 \quad (3.38)$$

$$\beta_0 K A_2 + K^2 A_2 + \beta_0 A_3 = 0 \quad (3.39)$$

$$(\alpha_L \text{seno}(KL))A_1 + (\alpha_L \text{cos}(KL))A_2 - (K^2 - \alpha_L L)A_3 + \alpha_L A_4 = 0 \quad (3.40)$$

$$(K\beta_L \text{cos}(KL) - K^2 \text{seno}(KL))A_1 - (\beta_L K \text{seno}(KL) + K^2 \text{cos}(KL))A_2 + \beta_L A_3 = 0 \quad (3.41)$$

Para que exista una solución diferente de la trivial:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & K^2 & \alpha_0 \\ \beta_0 K & K^2 & \beta_0 & 0 \\ \alpha_L \text{seno}(KL) & \alpha_L \text{cos}(KL) & \alpha_L L - K^2 & \alpha_L \\ (K\beta_L \text{cos}(KL) - K^2 \text{seno}(KL)) & -(\beta_L K \text{seno}(KL) + K^2 \text{cos}(KL)) & \beta_L & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver el determinante se obtiene la siguiente ecuación característica:

Si $KL = u$

$$\begin{aligned} & \left[-(\alpha_0 + \alpha_L) \frac{u^6}{L^6} + \{\beta_0 \beta_L (\alpha_0 + \alpha_L) + \alpha_0 \alpha_L L\} \frac{u^4}{L^4} + \alpha_0 \alpha_L (\beta_0 + \beta_L - \beta_0 \beta_L L) \frac{u^2}{L^2} \right] \text{sen}(u) \\ & + \left[(\alpha_0 + \alpha_L) (\beta_0 + \beta_L) \frac{u^5}{L^5} - \alpha_0 \alpha_L L (\beta_0 + \beta_L) \frac{u^3}{L^3} - 2\alpha_0 \alpha_L \beta_0 \beta_L \frac{u}{L} \right] \text{cos}(u) \\ & + 2\alpha_0 \alpha_L \beta_0 \beta_L \frac{u}{L} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Cuya solución general se puede escribir de la siguiente manera y hace referencia a la ecuación de la carga de pandeo crítico para una columna con cualquier condición de apoyo[28].

$$P_{crit} = \frac{u^2 EI}{L^2} \quad (3.43)$$



$$\sigma_{crit} = \frac{u^2 EI}{AL^2} \quad (3.44)$$

Si $u = \pi/k$ donde k es el factor de longitud efectiva, y reemplazando la inercia del círculo $I = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$ y su área $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{16 \cdot \left(\frac{KL}{D}\right)^2} \quad (3.45)$$

A continuación se presentan un ejemplo para mejor entendimiento. Para el caso de que la barra se encuentre articulada en sus dos extremos, α_0 y α_L son infinito ya que no existe un desplazamiento, mientras que β_0 y β_L son 0 debido a que la articulación acepta el giro. Reemplazando estos valores de α y β en la ecuación 3.42:

$$\left[-(\alpha_o + \alpha_L) \frac{u^6}{L^6} + \{\alpha_o \cdot \alpha_L \cdot L\} \frac{u^4}{L^4} \right] \sin(u) = 0$$

Dividiendo para ∞^2 y aplicando los límites de $\alpha_0 \rightarrow \infty$ y $\alpha_L \rightarrow \infty$:

$$\frac{u^4}{L^3} \cdot \text{sen}(u) = 0$$

Por lo tanto, $u = \pi$ y la fuerza crítica de pandeo es igual a la fuerza de Euler:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Debido a que el modelo de la barra presentado previamente representa al comportamiento de un refuerzo longitudinal entre dos estribos, se puede asumir que α_0 y α_L representan la rigidez lateral proporcionada por el estribo inferior y superior respectivamente, por lo que se encuentran en función del diámetro de los estribos; mientras que β_0 y β_L representan la rigidez rotacional del refuerzo longitudinal y dependen del diámetro del mismo.

$$\alpha = \frac{E \cdot A}{L} = \frac{E \cdot \pi \cdot De^2}{4 \cdot L} \quad (3.46)$$

$$\beta = \frac{4 \cdot E_r \cdot I}{L} \cdot k_1 = \frac{E_r \cdot Dl^4}{16 \cdot L} \cdot k_1 \quad (3.47)$$

Donde:

A = área de la sección transversal del refuerzo longitudinal

I = inercia de la sección transversal del refuerzo longitudinal

De = diámetro de los estribos
 Dl = diámetro del refuerzo longitudinal
 L = separación entre estribos
 E = módulo de elasticidad del acero
 E_r = doble módulo reducido del acero
 k_1 = factor de reducción de la rigidez rotacional

Finalmente, con ayuda de la ecuación de la secante 2.55 o su variación 2.57, se determina el esfuerzo crítico de pandeo del refuerzo longitudinal para una excentricidad e o relación de excentricidad $\frac{ed}{r^2}$ conocida.

3.3. Relación entre el pandeo y la esbeltez

Como se ha indicado anteriormente, para la obtención de la carga crítica con pandeo inelástico se puede utilizar el módulo tangente o el doble módulo reducido.

Ciertos resultados experimentales obtenidos con especímenes de distintas secciones transversales, indican que las cargas de pandeo obtenidas se encuentran entre las predichas por estas dos teorías. Estas dudas fueron finalmente aclaradas por Shanley en 1946 [29].

Shanley demostró que cuando se somete a compresión a una columna recta hasta alcanzar una posición deformada en equilibrio, los esfuerzos del lado cóncavo de la sección aumentan asociados al módulo tangente E_t , pero al aumentar un diferencial de carga, no se presenta una disminución inmediata de los esfuerzos del lado convexo ya que éstos son compensados por los esfuerzos de compresión directa. Esto genera que en el instante en el que ocurre el pandeo, el valor obtenido por el doble módulo reducido disminuya, por lo que el esfuerzo de pandeo de la columna se encuentra entre los predichos por la teoría del módulo tangente y la teoría del doble módulo reducido. Por tanto, se puede indicar que la teoría del módulo tangente puede ser considerada como un límite inferior mientras que la teoría del doble módulo reducido puede considerarse como un límite superior [7].

En este estudio, se emplea el doble módulo reducido, ya que considera el aumento y reducción de los esfuerzos en el lado convexo y cóncavo respectivamente, producidos por la flexión [3]. A más de esto, Mander[10] ha demostrado que la teoría del doble módulo reducido presenta una mejor aproximación que la teoría del módulo tangente. Por lo tanto, el esfuerzo crítico de pandeo es:

$$\sigma_{crit} = \frac{u^2 E_r I}{AL^2} = \frac{\pi^2 E_r}{16 \left(\frac{kL}{D}\right)^2} \quad (3.48)$$

Para obtener el esfuerzo crítico de pandeo de una barra bajo carga cíclica, se necesita la gráfica esfuerzo vs. deformación del acero que represente el comportamiento del mismo para la obtención del doble módulo reducido. La gráfica a utilizar es la curva experimental esfuerzo vs. deformación de una barra de acero de esbeltez 2.5 sometida a carga cíclica con ciclos simétricos obtenida por Botero [3]. Se escogió esta gráfica ya que es de interés en este estudio el comportamiento del acero antes del pandeo puesto que el objetivo es ubicar el punto donde empieza el mismo. Debido a una esbeltez de 2.5, la barra no llega al pandeo en



ninguno de sus ciclos.

Las características del acero para la obtención de su curva esfuerzo vs. deformación son f_y de 4836 kg/cm^2 y E_s de 2000000 kg/cm^2 . Utilizando estas características y con ayuda del modelo propuesto en el inciso 3.1.3, se obtiene la gráfica esfuerzo vs. deformación bajo carga cíclica del acero estudiado por Botero [3].

Una vez obtenida la gráfica de esfuerzo vs. deformación deseada, con ayuda de la ecuación 3.44, se procede a graficar el esfuerzo de pandeo σ_p vs. (kL/D) que hace referencia al factor de longitud efectiva por la relación de esbeltez, es decir la separación entre estribos sobre el diámetro de la barra.

El proceso que se realiza para la obtención de la curva esfuerzo vs. relación de esbeltez es el siguiente:

1. Se escogen las condiciones de apoyo de la barra que se requiere analizar, se obtienen tres curvas con k de 0.5, 0.75 y 1 respectivamente.
2. Se escoge una relación de esbeltez L/D .
3. Se escoge un esfuerzo de la curva esfuerzo vs. deformación obtenida anteriormente σ_1 y se obtiene su módulo reducido.
4. Con el módulo reducido obtenido y la relación de esbeltez escogida, se utiliza la ecuación 2.55 ó 2.57, para una excentricidad o relación de excentricidad conocida, y se obtiene σ_2 .
5. Si σ_1 y σ_2 son iguales, entonces σ_1 es el esfuerzo de pandeo crítico de la barra con las condiciones de apoyo y la relación de esbeltez indicadas.
6. Si σ_1 y σ_2 no son iguales se debe escoger de la gráfica esfuerzo vs. deformación otro σ_1 hasta que éste sea igual a σ_2 .
7. Se repite el mismo proceso para una relación de esbeltez desde 2 hasta 13, cada 0.1. No se tomaron en cuenta relaciones de esbeltez menores a 2 debido a que no se registra pandeo.
8. Como a cada esbeltez le corresponde un esfuerzo de pandeo crítico para un mismo k , se procede a graficar.

La figura 3.13 presenta las gráficas de esfuerzo de pandeo crítico vs. relación de esbeltez con un k de 0.5, 0.75 y 1, junto con los puntos experimentales que hacen referencia al esfuerzo crítico de las barras de distintas relaciones de esbeltez ensayadas por Botero [3]. Debido a que los datos experimentales se obtienen de ensayos en barras de acero aisladas, se consideró una relación de excentricidad nula.

Una vez obtenida las curvas esfuerzo de pandeo crítico vs. relación de esbeltez, se procede a la elaboración de curvas deformación de pandeo crítico vs. relación de esbeltez.

A cada esfuerzo de pandeo crítico le corresponde una esbeltez y una deformación de pandeo crítico debido a la curva esfuerzo vs. deformación, por lo tanto se grafica la deformación de

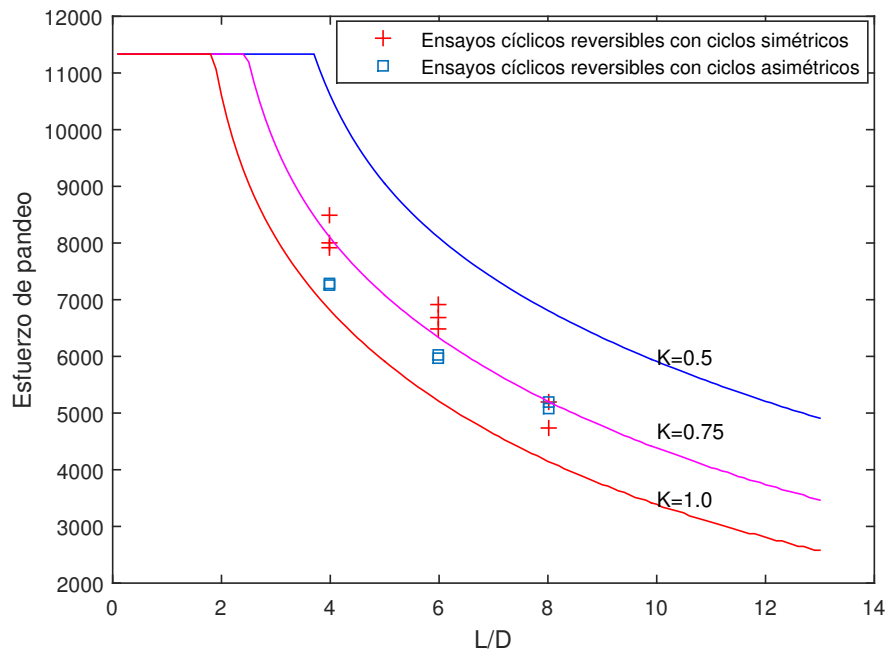


Figura 3.13: Esfuerzo de pandeo vs. relación de esbeltez

Esbeltez		Esfuerzo de pandeo (kg/cm^2)
4	Ciclos simétricos	8486
4	Ciclos simétricos	8000
4	Ciclos simétricos	7930
4	Ciclos asimétricos	7300
4	Ciclos asimétricos	7250
6	Ciclos simétricos	6900
6	Ciclos simétricos	6681
6	Ciclos simétricos	6484
6	Ciclos asimétricos	6030
6	Ciclos asimétricos	5956
8	Ciclos simétricos	5204
8	Ciclos simétricos	4750
8	Ciclos asimétricos	5186
8	Ciclos asimétricos	5088

Cuadro 3.4: Esfuerzos críticos de pandeo de probetas ensayadas por Botero [3]

pandeo crítico junto a la esbeltez correspondiente.

Para obtener la deformación correspondiente al esfuerzo de pandeo crítico, se utiliza el modelo planteado por Botero [3]. Donde la deformación ε_o^* corresponde al punto en el cambio de carga de tensión a carga de compresión, en el ciclo donde ocurre el pandeo para la defor-

mación ε_p . Por tanto, se considera que la deformación crítica de pandeo es igual a:

$$\varepsilon_{p^*} = \varepsilon_0 * -\varepsilon_p \quad (3.49)$$

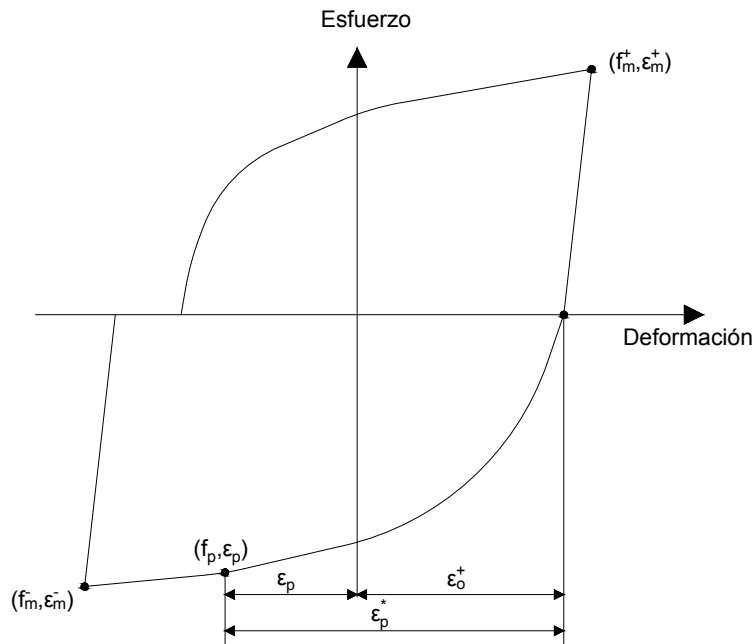


Figura 3.14: Deformación de pandeo crítico propuesto por Botero [3]

Los puntos experimentales ensayados por Botero [3], mostrados en las figuras 3.13 y 3.15, siguen la forma de la curva propuesta debido a que pertenecen a barras del mismo lote del acero de esbeltez 2.5 al que pertenece la curva esfuerzo vs. deformación considerada.

La programación en el programa Matlab para la obtención de las gráficas se muestra en el Apéndice B del presente trabajo.

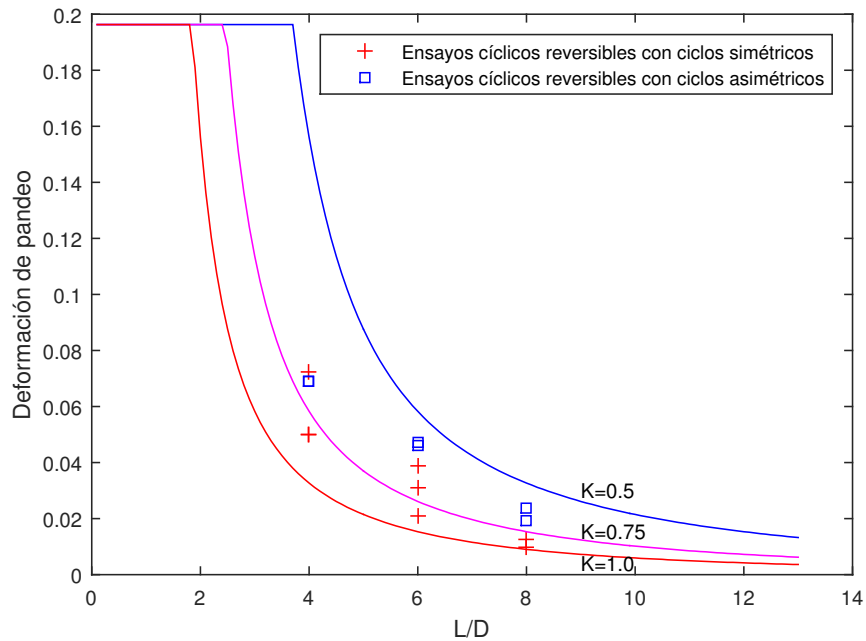


Figura 3.15: Deformación de pandeo vs. relación de esbeltez

Esbeltez		Deformación de pandeo ε_p
4	Ciclos simétricos	0.0722
4	Ciclos simétricos	0.0500
4	Ciclos simétricos	0.0500
4	Ciclos asimétricos	0.0690
4	Ciclos asimétricos	0.0690
6	Ciclos simétricos	0.0390
6	Ciclos simétricos	0.0310
6	Ciclos simétricos	0.0211
6	Ciclos asimétricos	0.0472
6	Ciclos asimétricos	0.0459
8	Ciclos simétricos	0.012
8	Ciclos simétricos	0.0097
8	Ciclos asimétricos	0.0236
8	Ciclos asimétricos	0.0190

Cuadro 3.5: Deformaciones críticas de pandeo de probetas ensayadas por Botero [3]

3.3.1. OPTIMIZACIÓN Y OBTENCIÓN DEL FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA

Las gráficas 3.13 y 3.15 muestran que los puntos experimentales de las probetas ensayadas por Botero se acercan más a la curva con un factor de longitud efectiva k igual a 0.75 que a las curvas de k igual a 0.5 y 1. Esto sucede porque al momento de realizarse los ensayos de las probetas, no se puede garantizar un empotramiento perfecto debido a la existencia de pequeños movimientos entre las probetas y el dispositivo de agarre, lo que produce un giro en los extremos. Por tal razón, el factor de longitud efectiva de los ensayos es mayor a un k de 0.5 que pertenece al empotramiento perfecto. Se consideran los valores de la longitud efectiva k de 0.5 y 1 como los límites superior e inferior que representan las condiciones de apoyo doblemente articulada y doblemente empotrada respectivamente.

La optimización tiene como objetivo calibrar parámetros determinados de un modelo para minimizar las diferencias entre los resultados experimentales y los resultados obtenidos por el modelo. En este caso el parámetro a calibrar será el factor de longitud efectiva k , de manera que se obtenga las mínimas diferencias entre los puntos experimentales de esfuerzo de pandeo crítico y deformación de pandeo crítico, y las curvas esfuerzo crítico vs. relación de esbeltez y deformación crítica vs. relación de esbeltez.

En el presente trabajo, la calibración de la curva se realiza mediante el programa Matlab. Ya que representa una buena herramienta de optimización de una o varias variables.

Se define ε_{exp_i} como el rango de deformaciones de pandeo crítico experimentales, x un vector de un término que representa el parámetro a optimizar, en este caso el factor de longitud efectiva y $\varepsilon_i(x)$ el rango de valores de las deformaciones de la curva deformación crítica vs. relación de esbeltez propuesta con cada esbeltez correspondiente a las deformaciones experimentales. El error en cada punto de deformación es:

$$R_i(x) = \varepsilon_{exp_i} - \varepsilon_i(x) \quad (3.50)$$

Se define a la función de error igual a la suma de los cuadrados de los errores, por lo tanto, la función error queda:

$$f(x) = \sum R_i^2(x) \quad (3.51)$$

Aplicando la función ***fminsearch*** del programa Matlab, se obtiene el parámetro (x) óptimo para que la función error sea mínima.

Se procede a indicar la obtención de la función error, para la cual se necesitaron una serie de funciones en Matlab que se explican a continuación una a una y se presenta el código de cada función en anexos.



1. La primera función tiene el nombre de *Erm*, pide como dato de entrada la deformación crítica experimental de cada ensayo y tiene como finalidad devolver el valor del módulo reducido perteneciente a cada deformación crítica de entrada.
2. La segunda función llamada *K* tiene como datos de entrada la esbeltez, el diámetro de la barra, y la deformación crítica de pandeo de cada ensayo experimental. Primero se obtiene la longitud de la barra igual a la multiplicación de la esbeltez por el diámetro de la barra. Se procede a obtener α y β en función de k_1 (factor de reducción de la rigidez rotacional) con las ecuaciones 3.46 y 3.47. Debido a que los ensayos de Botero [3] tenían barras sujetas en sus extremos, se considera que la rigidez de los estribos es muy grande y por lo tanto se utiliza un diámetro de estribo muy grande. Mediante la función *Erm* se obtiene el módulo reducido para cada deformación crítica y con ayuda de la ecuación 3.42, esta función devuelve el factor de longitud efectiva en función de k_1 .
3. La función número tres es *Fs*, la cual tiene como datos de entrada la esbeltez de cada ensayo, la deformación crítica de pandeo, el diámetro de cada barra y el diámetro de los estribos. Tiene como objetivo devolver la carga crítica de pandeo en función de k_1 con ayuda de la ecuación 3.48, obteniéndose el módulo reducido de la función *Erm* y el factor de longitud efectiva de la función *K*.
4. La cuarta función se llama *Df*, la cual tiene como objeto devolver la deformación de la gráfica esfuerzo vs. deformación perteneciente al esfuerzo de entrada obtenido de la función *Fs*.
5. La quinta función *Fe* hace referencia a la función error, ya que suma las diferencias al cuadrado entre las deformaciones obtenidas de la función *Df* y las deformaciones críticas de cada ensayo experimental.
6. Finalmente, con ayuda de *fminsearch* se optimiza la función *Fe* de manera que se obtiene el k_1 que produce el valor mínimo de la función error.

Se realiza el proceso de optimización tanto con las deformaciones críticas de pandeo como con los esfuerzos críticos de pandeo de los datos obtenidos por Botero [16]. En el caso de los esfuerzos, la función *Erm* tiene como datos de entradas los esfuerzos críticos experimentales y el error se calcula como el cuadrado de la diferencia entre los esfuerzos calculados en el paso 3 y los de entrada.

En la gráfica 3.16 se presenta el valor de la función error vs. el número de iteraciones del proceso de optimización, para la optimización con las deformaciones.

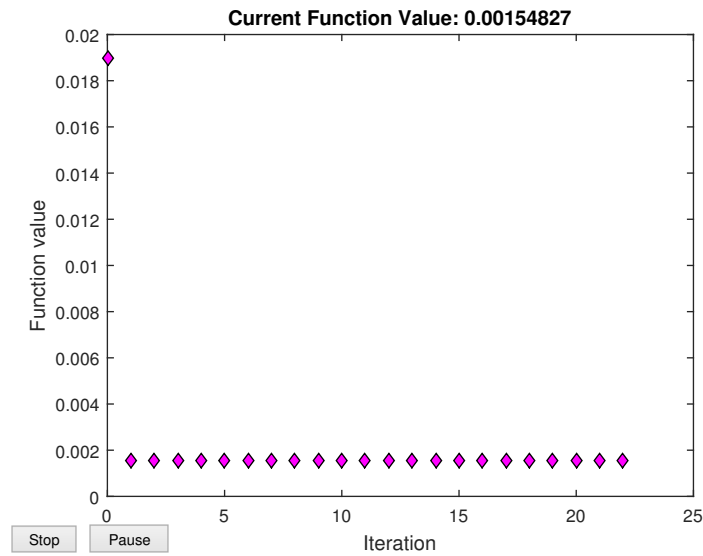


Figura 3.16: Función error vs. número de iteraciones

La gráfica 3.17 muestra el valor de la función error vs. el número de iteraciones del proceso de optimización, para la optimización con los esfuerzos.

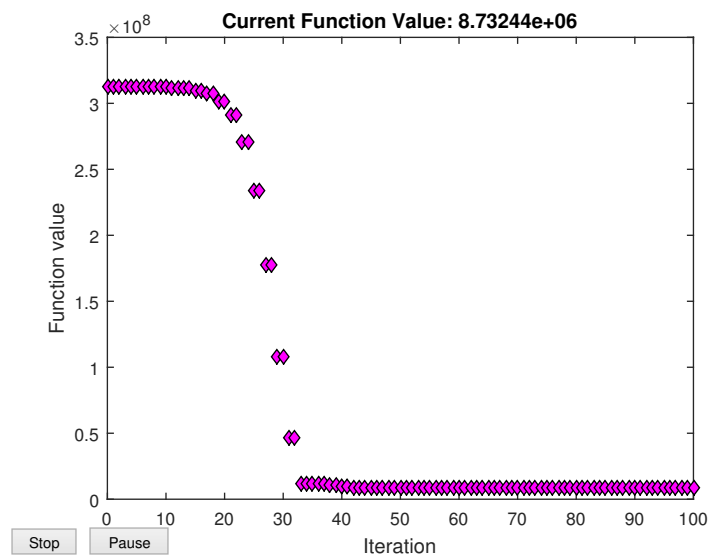


Figura 3.17: Función error vs. número de iteraciones

El factor de reducción de la rigidez rotacional k_1 optimizado es igual a $1.26e-05$ y $1.068e-05$ para deformaciones y esfuerzos respectivamente, los mismos que corresponden a un factor de longitud efectiva promedio de 0.755

En la tabla 3.6, se presenta el valor de las cargas críticas de pandeo y las deformaciones críticas de pandeo calculadas con el k de 0.755

La tabla 3.7 presenta las cargas críticas de pandeo experimentales y las cargas calculadas

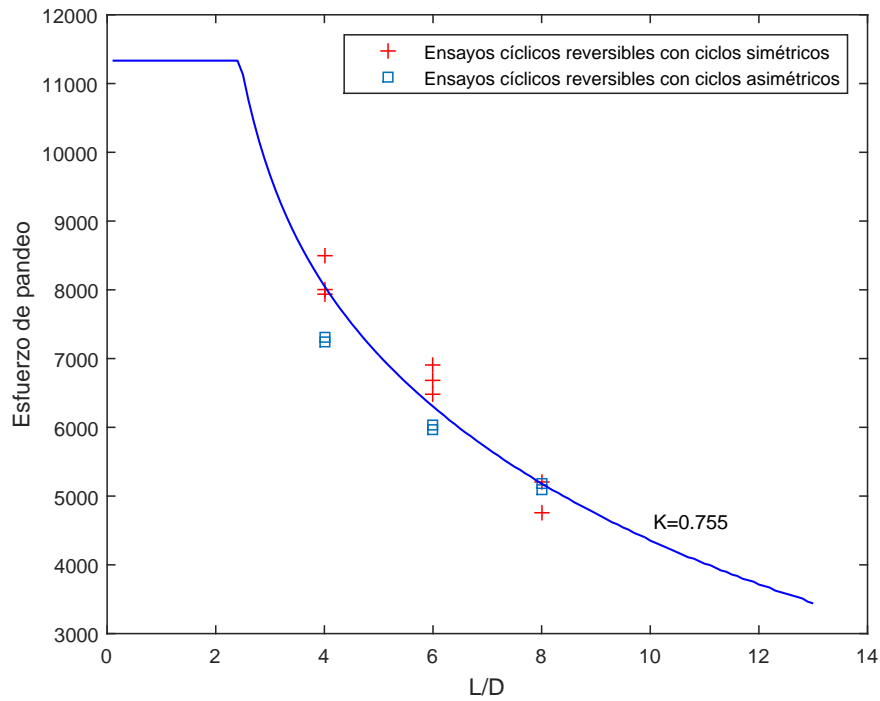


Figura 3.18: Esfuerzo crítico de pandeo vs. esbeltez

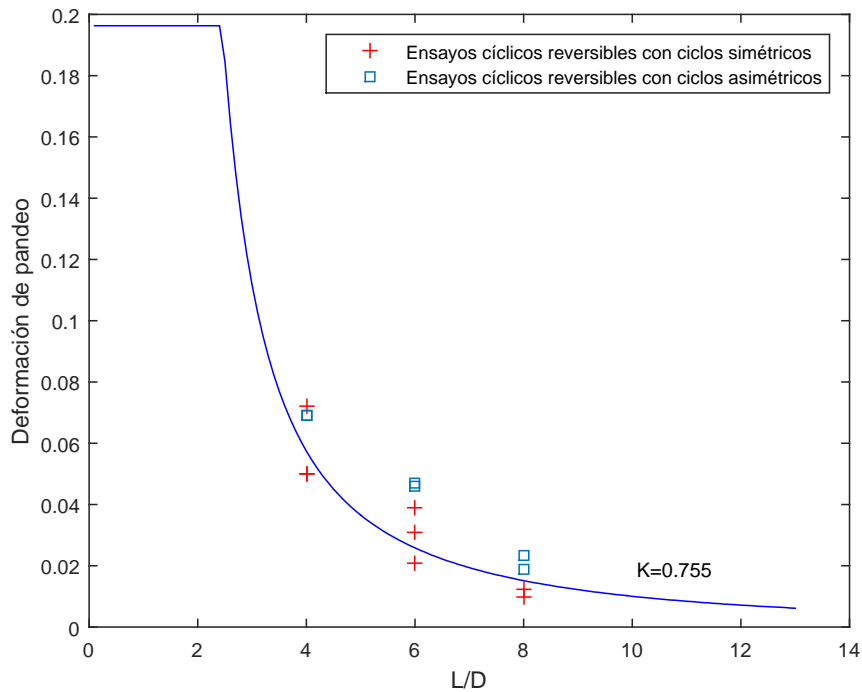


Figura 3.19: Deformación crítica de pandeo vs. esbeltez

junto a la relación de estos dos valores. La relación promedio entre los esfuerzos críticos experimentales y calculados es de 0.98, con un coeficiente de variación del 6 % por lo que es

Esbeltez		Esfuerzo de pandeo	Esfuerzo de pandeo calculado	Deformación de pandeo	Deformación de pandeo calculado
4	Ciclos simétricos	8486	8056	0.072	0.05742
4	Ciclos simétricos	8000	8056	0.050	0.05742
4	Ciclos simétricos	7930	8056	0.050	0.05742
4	Ciclos asimétricos	7300	8056	0.069	0.05742
4	Ciclos asimétricos	7250	8056	0.069	0.05742
6	Ciclos simétricos	6900	6304	0.039	0.02584
6	Ciclos simétricos	6681	6304	0.031	0.02584
6	Ciclos simétricos	6484	6304	0.021	0.02584
6	Ciclos asimétricos	6030	6304	0.047	0.02584
6	Ciclos asimétricos	5956	6304	0.045	0.02584
8	Ciclos simétricos	5204	5182	0.0123	0.01514
8	Ciclos simétricos	4750	5182	0.0097	0.01514
8	Ciclos asimétricos	5186	5182	0.0236	0.01514
8	Ciclos asimétricos	5088	5182	0.0190	0.01514

Cuadro 3.6: Esfuerzos y deformaciones críticos experimentales y calculados.

aceptable.

Esfuerzo de pandeo	Esfuerzo de pandeo calculado	$\frac{Esf_{exp}}{Esf_{calculado}}$
8486	8056	1.05
8000	8056	0.99
7930	8056	0.98
7300	8056	0.89
7250	8056	0.88
6900	6304	1.09
6681	6304	1.06
6484	6304	1.03
6030	6304	0.96
5956	6304	0.94
5204	5182	1.00
4750	5182	0.92
5186	5182	0.99
5088	5182	0.97

Cuadro 3.7: Error entre esfuerzos críticos experimentales y calculadas

En la tabla 3.8 se presenta las deformaciones críticas de pandeo experimentales y las deformaciones calculadas junto con la relación de estos dos valores. La relación promedio entre las deformaciones críticas experimentales y calculadas es de 1.15, con un coeficiente de variación de 17% por lo que es aceptable.



Deformación de pandeo	Deformación de pandeo calculado	$\frac{Def_{exp}}{Def_{calculado}}$
0.0722	0.05742	1.26
0.05	0.05742	0.87
0.05	0.05742	0.87
0.069	0.05742	1.20
0.069	0.05742	1.20
0.039	0.02584	1.53
0.031	0.02584	1.31
0.0211	0.02584	0.77
0.0472	0.02584	1.71
0.0459	0.02584	1.67
0.0123	0.01514	0.63
0.0097	0.01514	0.48
0.0236	0.01514	1.47
0.019	0.01514	1.18

Cuadro 3.8: Error entre deformaciones críticas experimentales y calculadas

Capítulo 4

PANDEO EN BARRAS DE ACERO DEL REFUERZO LONGITUDINAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO BAJO CARGAS CÍCLICAS

Como parte de una estructura de hormigón armado, el esfuerzo crítico de pandeo en barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal se ve afectado por la resistencia del hormigón, el armado del refuerzo transversal y las excentricidades que se presentan. La relación de esbeltez depende directamente de la separación del refuerzo transversal y por lo tanto se relaciona con la capacidad resistente de las barras de acero del refuerzo longitudinal, mientras que las excentricidades que se presentan en el momento de aplicar una carga axial, reducen la resistencia de las barras de acero del refuerzo longitudinal y se deben principalmente a la expansión ocurrida en el hormigón al ser comprimido, que a su vez depende de la resistencia del mismo.

En este capítulo, se utilizan los resultados obtenidos en ensayos experimentales de muros rectangulares de concreto reforzado sometidos a cargas cíclicas ensayados por [30], [31] y [32]; y presentados en [4] y ensayos experimentales de columnas circulares de concreto reforzado sometidas a cargas cíclicas realizados por Mervyn Kowalsky [5].

Como un primer enfoque, se muestra en la figura 4.1 las gráficas deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez obtenidas en el Capítulo 3, con factores de longitud efectiva k iguales a 0.5, 0.75 y 1, junto con los datos de elementos experimentales. Se observa que los puntos de los muros se encuentran entre las curvas con factor de longitud efectiva k igual a 0.5 y 0.75. Además, los puntos de las columnas presentan deformaciones críticas de pandeo bajas en relación con las curvas mostradas, una de las causas posibles es la presencia de excentricidades. Razón por la cual, se realiza el siguiente análisis que permite comprobar el efecto que las excentricidades tienen en el refuerzo longitudinal de estructuras de hormigón armado.

	Denominación	Relación de esbeltez L/D	Deformación de pandeo ε^*
Muros	WSH3	6.3	0.032
	WSH2	7.50	0.028
	WSH5	6.30	0.031
	WSH6	4.50	0.039
	RW1	8.00	0.031
	RW2	5.30	0.040
	W-MC-N	5.00	0.049
	TW1	8.00	0.021
Columnas	N-9	2.67	0.061
	N-13	3.66	0.05
	N-14	5.33	0.0457
	N-15	3.67	0.048
	N-16	2.00	0.063
	N-19	2.67	0.054
	N-20	2.67	0.0514
	N-21	2.67	0.059
	N-22	2.67	0.056
	N-23	2.67	0.058
	N-24	2.67	0.052
	N-25	2.29	0.052
	N-26	2.29	0.05
	N-27	2.67	0.0618
	N-28	2.67	0.058
N-29	2.67	0.055	
N-30	2.67	0.046	

Cuadro 4.1: Resultados de ensayos experimentales en muros y columnas bajo cargas cíclicas obtenidos en [4] y [5].

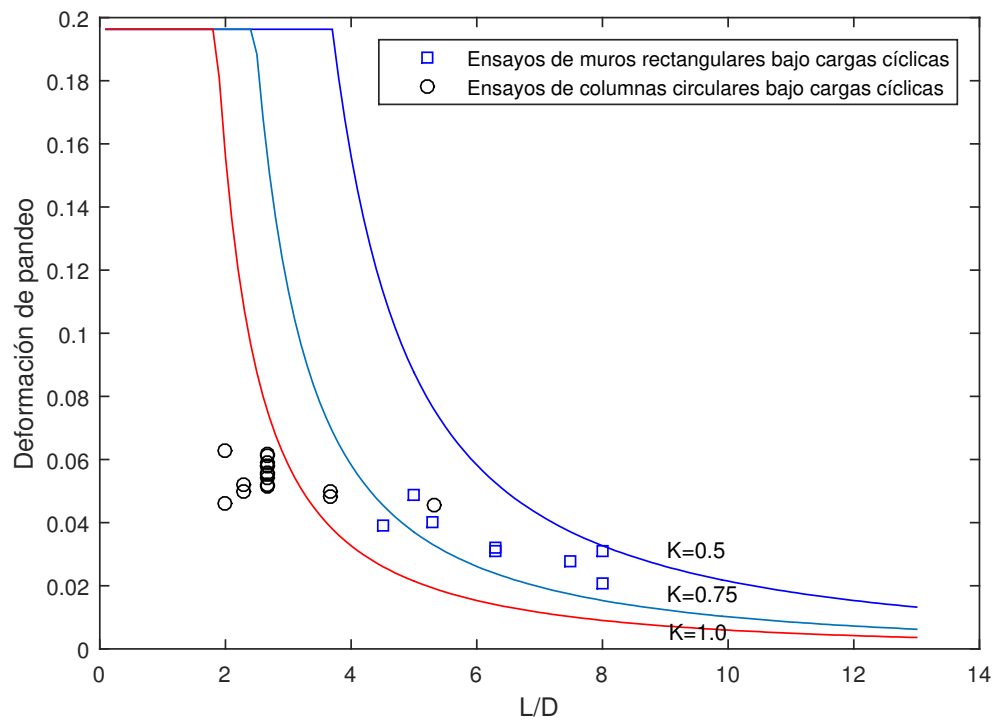


Figura 4.1: Gráfica deformación crítica vs. relación de esbeltez con datos experimentales obtenidos en [4] y [5]

Las curvas deformación crítica vs. relación de esbeltez mostradas en la figura 4.1 representan el comportamiento de las barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal de muros y columnas, sin presencia de excentricidades. Para analizar el efecto de las mismas, se usa la ecuación de la secante (Ec.2.55), con el fin de obtener la relación de excentricidad $\frac{ed}{r^2}$ de cada uno de los elementos ensayados. Los demás términos de la ecuación se obtienen de la siguiente manera:

- El factor $\frac{P}{A}$ es el esfuerzo crítico de pandeo de cada elemento. Debido a que disponemos solamente de las deformaciones críticas de pandeo, se utiliza el modelo del material propuesto en este trabajo para determinar el esfuerzo correspondiente a cada una de las deformaciones, con las características de la barra de acero de esbeltez 2.5, de acuerdo a lo explicado en el Capítulo 5.
- El término E es el doble módulo reducido correspondiente a cada una de las deformaciones críticas de los elementos y se obtiene de la misma manera que el anterior factor.
- El radio de giro r depende de las características geométricas de cada barra de acero obtenidas de [4] y [5].
- La longitud efectiva $L_e = k \cdot L$, es la separación del refuerzo transversal de cada elemento multiplicado por el factor de longitud efectiva que, para este análisis se utilizan valores

de 0.5, 0.6 y 0.75.

Las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 presentan la variación de la relación de excentricidad con respecto a la relación de esbeltez para los diferentes factores de longitud efectiva usados en el análisis:

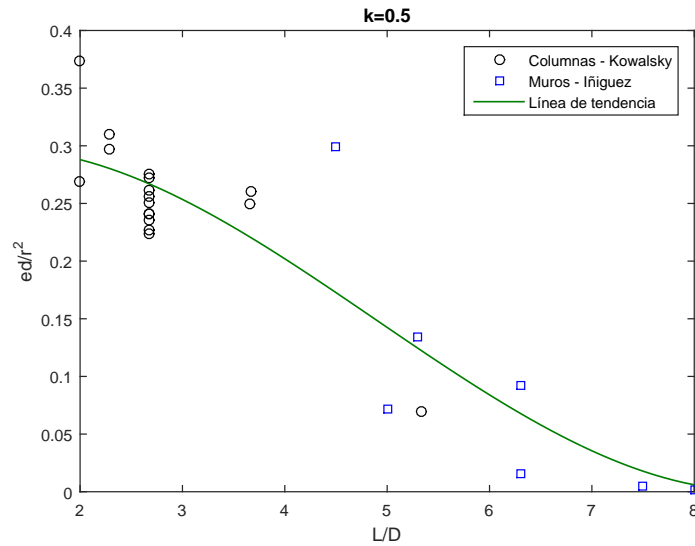


Figura 4.2: Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.5$

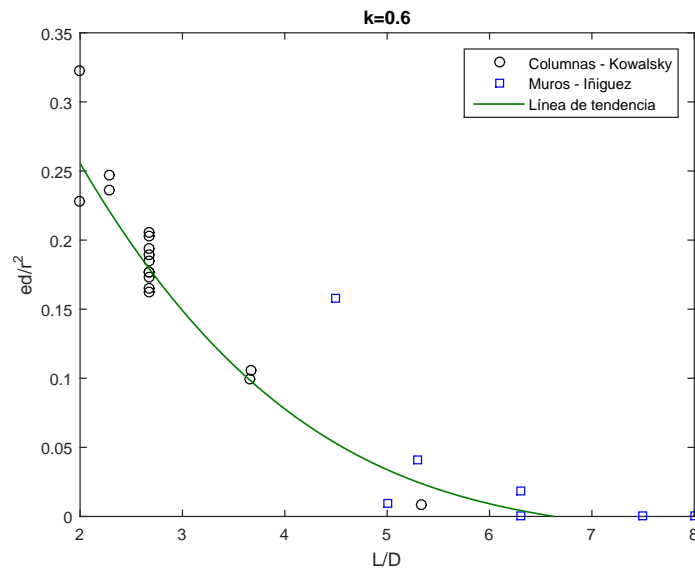


Figura 4.3: Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.6$

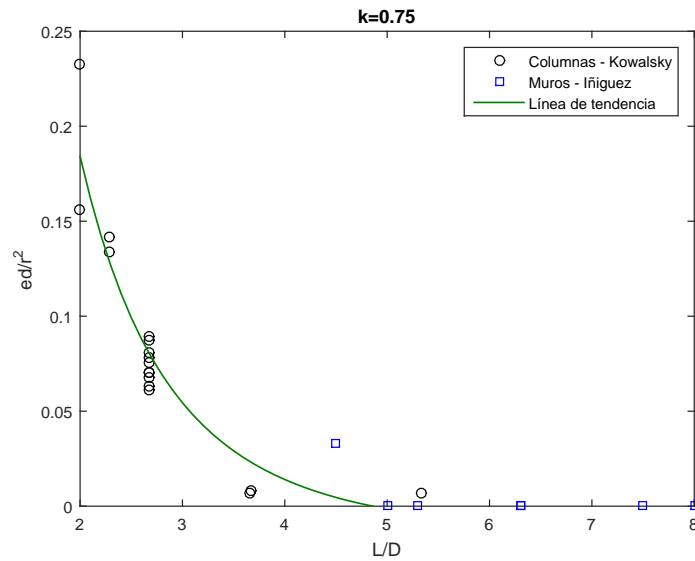


Figura 4.4: Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.75$

Como se puede apreciar en las figuras 4.2, 4.3 y 4.4, la relación de excentricidad disminuye con el aumento de la relación de esbeltez hasta alcanzar valores muy cercanos a cero en relaciones de esbeltez de 6 en adelante aproximadamente.

Se procede a realizar la optimización y obtención del factor de longitud efectiva de la curva deformación crítica vs. relación de esbeltez obtenida en el capítulo anterior con los datos de deformación crítica de los muros de esbelteces mayores e iguales a 6, debido a que su capacidad de resistencia es afectada de manera mínima por la presencia de excentricidades o éstas son nulas.

4.1. Optimización y obtención del factor de la longitud efectiva

Siguiendo el mismo procedimiento para la optimización y obtención del factor de longitud efectiva descrito en el Capítulo 3, con la ayuda del software Matlab, se calibra la longitud efectiva k con la variación del factor que reduce la rigidez rotacional k_1 .

En la gráfica 4.5 se muestra el valor de la función error vs. el número de iteraciones del proceso de optimización, generado por Matlab, para la optimización con las deformaciones.

El k_1 optimizado es igual a $1.15e-04$, el mismo que corresponde a un factor de longitud efectiva promedio de 0.632

En la tabla 4.2, se presenta el valor de las deformaciones críticas de pandeo calculadas con el el factor de longitud efectiva k igual a 0.632.

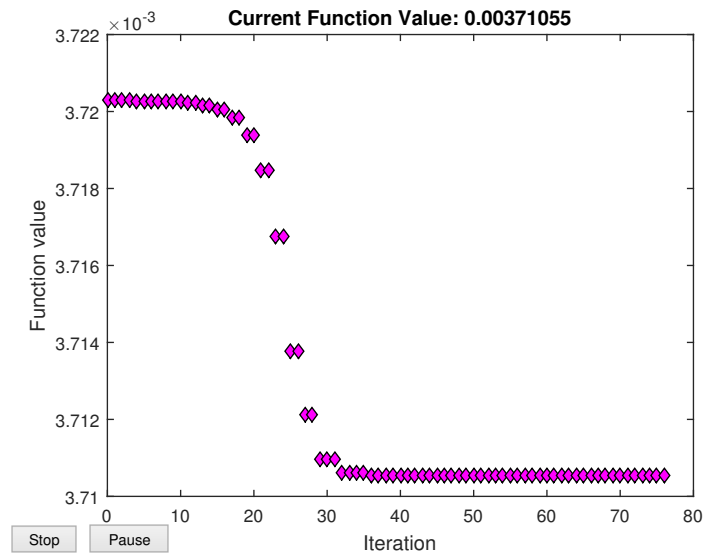


Figura 4.5: Función error vs. número de iteraciones

Esbeltez		Deformación de pandeo	Deformación de pandeo calculado
6.3	Muro-WSH3	0.032	0.3296
6.3	Muro-WSH5	0.031	0.3296
7.5	Muro-WSH2	0.028	0.0237
8	Muro-RW1	0.031	0.02106
8	Muro-TW1	0.021	0.02106

Cuadro 4.2: Deformaciones críticas experimentales y calculados.

La tabla 4.3 presenta las deformaciones críticas de pandeo experimentales y calculadas junto a la relación entre los dos valores anteriores. El promedio de la relación entre las deformaciones críticas de pandeo experimentales y calculadas es 1.1, por lo que es aceptable.

Deformación de pandeo	Deformación de pandeo calculado	$\frac{Def_{exp}}{Def_{calculado}}$
0.032	0.03296	0.97
0.031	0.03296	0.94
0.028	0.0237	1.18
0.031	0.02106	1.47
0.021	0.02106	1

Cuadro 4.3: Relación entre deformaciones críticas experimentales y calculadas

Una vez obtenido el factor de longitud efectiva óptimo, se realiza nuevamente el análisis del comportamiento de la relación de excentricidad con respecto a la relación de esbeltez con $k=0.632$, mediante la ecuación 2.57, con el fin de encontrar una función que represente dicho comportamiento y tenerlo en cuenta para la obtención de la curva deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez de elementos de hormigón armado.

La figura 4.6 muestra las relaciones de excentricidad correspondientes a las relaciones de esbeltez de los diferentes elementos y la función que representa su comportamiento obtenida con la herramienta *CurveFitting* del software Matlab. Se utiliza una ecuación racional cuyo denominador es un polinomio de tercer grado y su numerador un polinomio de primer grado. La ecuación obtenida es:

$$\frac{ed}{r^2} = \frac{-0.04206 \cdot \left(\frac{L}{D}\right) + 0.4084}{\left(\frac{L}{D}\right)^3 - 6.399 \cdot \left(\frac{L}{D}\right)^2 + 13.81 \cdot \left(\frac{L}{D}\right) - 8.74} \quad (4.1)$$

Se considera que para relaciones de esbeltez menores a 2, la relación de excentricidad se mantiene constante en un valor de 0.25, puesto que no es razonable que este factor crezca indefinidamente.

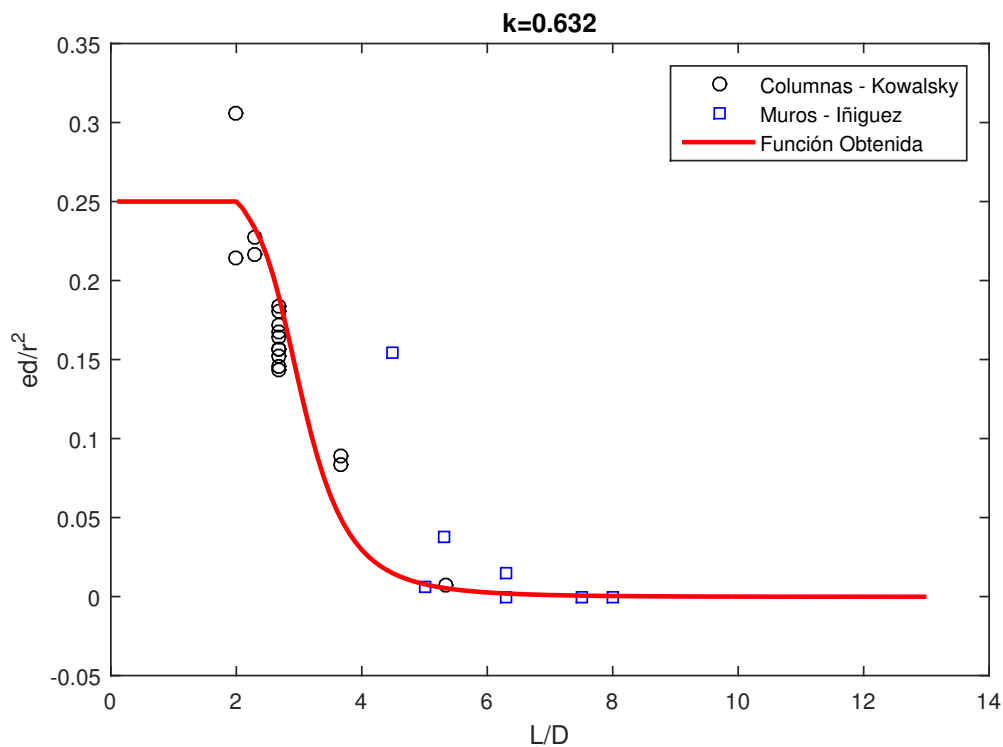


Figura 4.6: Gráfica relación de excentricidad vs. relación de esbeltez, con $k=0.632$

Con los resultados obtenidos de los análisis que se realizaron en este capítulo, se modifica la curva deformación de pandeo vs. relación de esbeltez de manera que se considere el efecto que las excentricidades provocan en la capacidad resistente de las barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal en elementos de hormigón armado y represente de la manera

más aproximada a la realidad los valores de deformación críticos de pandeo de dichas barras. Por lo tanto, utilizando la ecuación 2.55 y considerando la relación de excentricidad con respecto a la relación de esbeltez, se obtiene una nueva curva deformación de pandeo vs. relación de esbeltez y se compara con las deformaciones de muros y columnas para su validación.

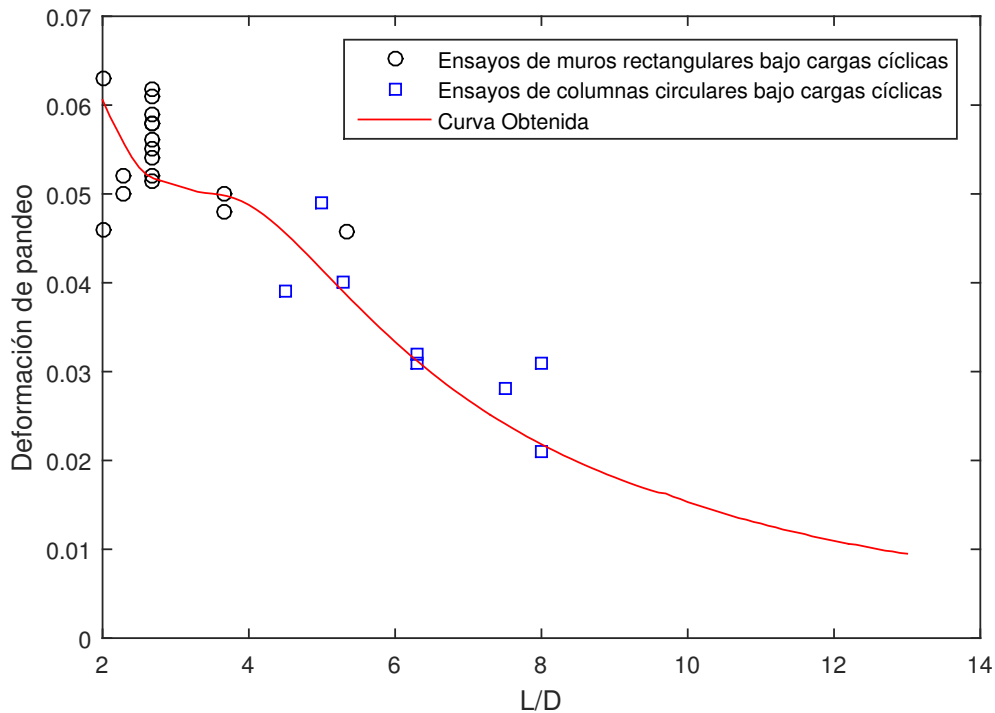


Figura 4.7: Gráfica deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez

Como se puede observar, la curva obtenida 4.7 tiene una buena aproximación con las deformaciones críticas de pandeo tanto para las columnas ensayadas por Kowalsky [5] como para los muros obtenidos en [4]. La tabla 4.4 muestra las relaciones entre las deformaciones de pandeo experimentales y calculadas, donde la relación promedio es de 1.05 con un coeficiente de variación igual a 11 %, por lo tanto responde de manera correcta al comportamiento de las barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal en elementos de hormigón armado sometidos a cargas cíclicas.

	Deformación de pandeo	Deformación de pandeo calculado	$\frac{Def}{Def_{calculado}}$
Muros	0.032	0.031	1.03
	0.028	0.024	1.16
	0.031	0.031	0.99
	0.039	0.046	0.86
	0.031	0.022	1.42
	0.04	0.039	1.03
	0.049	0.041	1.18
	0.021	0.022	0.96
Columnas	0.061	0.052	1.18
	0.05	0.050	1.00
	0.045	0.039	1.18
	0.048	0.050	0.96
	0.063	0.061	1.04
	0.054	0.052	1.04
	0.051	0.052	0.99
	0.059	0.052	1.14
	0.056	0.052	1.08
	0.058	0.052	1.12
	0.052	0.052	1.00
	0.052	0.056	0.93
	0.050	0.056	0.90
	0.061	0.052	1.19
	0.058	0.052	1.12
0.055	0.052	1.06	
0.046	0.052	0.89	

Cuadro 4.4: Error entre deformaciones críticas experimentales y calculadas

4.2. Análisis de excentricidades y validación de las curvas: obtenida y propuesta

Una razón de la existencia de excentricidades en elementos de hormigón armado, puede ser las expansiones laterales del hormigón bajo carga de compresión debido al efecto de Poisson. El mismo que es la relación entre las deformaciones transversales y las longitudinales. Por tal razón se realiza un análisis comparativo entre las excentricidades que se obtienen con las correspondientes relaciones de excentricidad calculadas para los datos experimentales de muros obtenidos en [4] y columnas ensayadas por Kowalsky [5] respectivamente y los desplazamientos producto de la expansión del hormigón en cada elemento.

Con el fin de obtener las excentricidades de cada uno de los elementos, se calcula el radio del núcleo $\frac{Z}{A}$, que para una sección circular maciza es igual a $\frac{4R}{3\pi}$. Obtenido el radio del núcleo, con ayuda de la ecuación 2.57, se despeja la excentricidad.



Para la obtención de los desplazamientos laterales, el coeficiente de Poisson relativo a las deformaciones elásticas puede tomarse entre 0.1 y 0.2 [33]. Por lo tanto, se procede a obtener las deformaciones laterales de las columnas y los muros con un coeficiente de Poisson de 0.15.

La tabla 4.5 contiene las excentricidades calculadas junto a los desplazamientos laterales del hormigón δ_x . Como se aprecia en la tabla se han ignorado los datos de los muros y columnas con esbeltez mayor e igual a 6, debido a que la relación de excentricidad de estos puntos es cercana a 0, las excentricidades son muy pequeñas, motivo por el cual son ignoradas.

	Esbeltez	Excentricidad (cm)	f'c (kg/cm ²)	δ_x
Muros	4.5	0.06	465	0.04
	5.3	0.015	349.6	0.014
	5	0.009	333.24	0.015
Columnas	2.67	0.06	478.8	0.1
	3.66	0.034	428.9	0.07
	3.67	0.036	508.3	0.06
	2.67	0.07	445.03	0.08
	2.67	0.074	454.9	0.08
	2.67	0.061	449	0.08
	2.67	0.066	459.1	0.08
	2.67	0.063	464.7	0.079
	2.67	0.073	454.8	0.08
	2.29	0.1	442.2	0.1
	2.29	0.106	414	0.11
	2.67	0.06	432.4	0.08
	2.67	0.063	438.7	0.08
	2.67	0.068	416	0.08

Cuadro 4.5: Excentricidades calculadas y desplazamientos laterales del hormigón

Como puede apreciarse en la gráfica 4.8 las excentricidades calculadas son semejantes a los desplazamientos laterales del hormigón de los muros y las columnas, pues la relación entre ellas se aproxima a 1, verificándose así que las excentricidades tienen una buena relación con la realidad, por lo tanto se valida la curva deformaciones de pandeo vs. relación de esbeltez, tanto obtenida con el estudio realizado como la propuesta en el presente trabajo.

Finalmente, con el fin de mejorar el manejo y la utilidad del presente trabajo, se propone una aproximación de la curva obtenida mediante una función hiperbólica simple y una función lineal como se muestra en la gráfica 4.9.

La curva propuesta responde a la función lineal $y = 0.051$ para esbelteces menores a 4 y a la función parabólica $y = 0.191 \cdot x^{-0.614} - 0.031$ desde esbelteces iguales y mayores a 4.

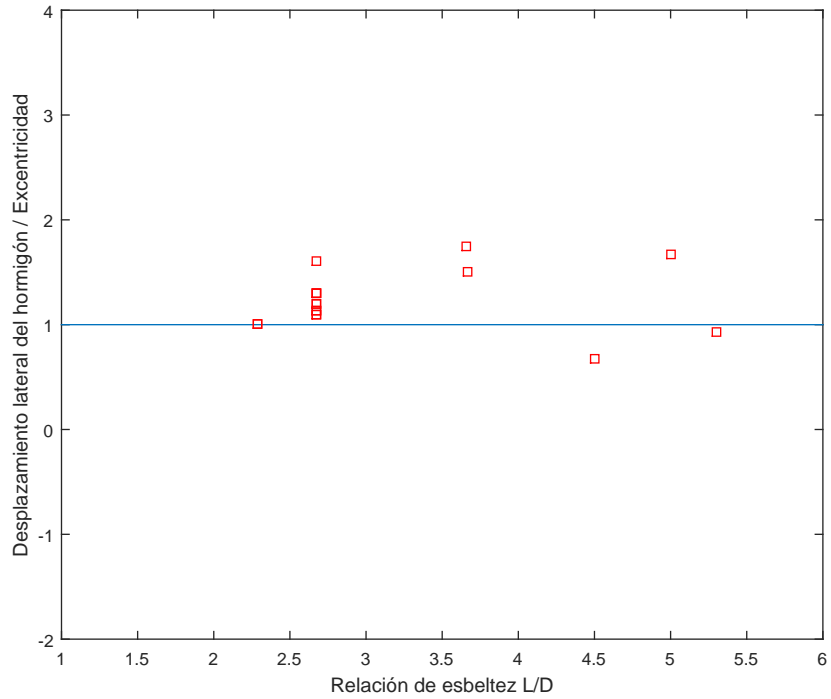


Figura 4.8: Relación entre los desplazamientos laterales del hormigón y las excentricidades

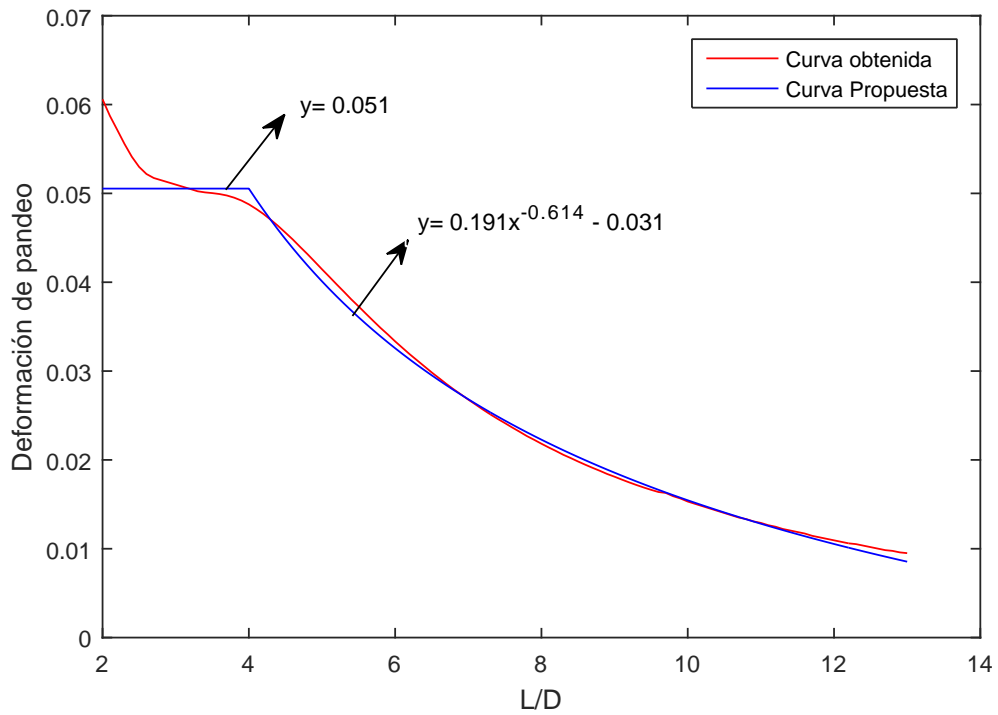


Figura 4.9: Curva obtenida y curva propuesta

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

- La relación propuesta en el presente trabajo de titulación, entre la deformación crítica de pandeo y la esbeltez de barras de acero pertenecientes al refuerzo longitudinal de estructuras de hormigón armado, tiene una aproximación aceptable con el comportamiento real de dichas barras ante cargas cíclicas, debido a que la relación entre deformaciones experimentales y calculadas tiene una media de 1.05 y un coeficiente de variación de 11 %. La relación antes mencionada se evidencia en la correlación con los datos experimentales obtenidos en [4] y [5] en los ensayos en muros y columnas como muestra la gráfica 4.7, representa una buena fuente de información y ayuda para un diseño sismorresistente eficiente.
- Del Capítulo 3, el modelo de Mander de la curva esfuerzo vs. deformación del acero bajo carga de compresión es el que más se acerca a la curva experimental obtenida por Botero [3], por lo que es el modelo que mejor representa la realidad; razón por la cual, se escoge los modelos de Mander bajo carga monotónica y bajo cargas cíclicas como base para la obtención de un nuevo modelo que se basa solamente en el módulo elástico, el esfuerzo de fluencia del acero y en las deformaciones máximas de cada ciclo. Se puede observar en las gráficas 3.7, 3.8 y 3.9 que el modelo propuesto tiene una buena aproximación con las gráficas experimentales obtenidas por Botero [3], por lo que podemos decir que el modelo da resultados aceptables. Cabe recalcar que el modelo de Mander de curva de esfuerzo vs. deformación bajo carga monotónica hace referencia a carga de tracción, y debido a que las características de las curvas a tracción son ligeramente diferentes a compresión, se debe usar las ecuaciones 2.17 y 2.18 de Dodd y Restrepo [14] para relacionarlas.
- Los parámetros de rigidez lateral α y rotacional β , pretenden representar condiciones de apoyo de una barra de refuerzo longitudinal de manera real. Es un modelo de mucha utilidad, debido a que con el diámetro de la barra de refuerzo longitudinal y el diámetro de los estribos, se obtiene una buena aproximación de la condición de apoyo de la barra entre estribos. Sin embargo, cabe recalcar que en el desarrollo de este modelo no se consideró la acción del hormigón, por lo que este trabajo puede ser base para

futuras investigaciones.

- Se demostró que la utilización del doble módulo reducido da esfuerzos críticos de pandeo que se aproximan a la realidad, debido a que la curva de esfuerzo crítico de pandeo vs. relación de esbeltez L/D se ajustan a los ensayos realizados por Botero.
- El factor de longitud efectiva K optimizado para los ensayos de barras aisladas de Botero, es 0.755, valor que se justifica por las condiciones del ensayo, debido a la existencia de un pequeño giro entre las probetas y el dispositivo de agarre, lo que produjo un giro en los extremos de las probetas.
- Se considera que los ensayos de los muros obtenidos en [4] con relación de esbeltez igual o mayor que 6 presentan una excentricidad despreciable, consecuencia de que las relaciones de excentricidad de estos ensayos son muy cercanas a 0. Al optimizar el factor de longitud efectiva de la curva deformación de pandeo vs. relación de esbeltez sin excentricidad con dichos ensayos, se obtiene k de 0.632, esto es producto de que en ensayos experimentales es difícil conseguir un empotramiento perfecto.
- Con el fin de validar las excentricidades calculadas, y por ende la curva obtenida, se calcula la expansión lateral del hormigón bajo carga de compresión debido al efecto Poisson, puesto que es una de las causas de la presencia de excentricidades en las estructuras de hormigón armado. Se observa en la gráfica 4.8 que las excentricidades calculadas y los desplazamientos del hormigón tienen una relación aceptable.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda calibrar el modelo con ensayos realizados con barras de acero usadas en Ecuador. Los ensayos utilizados se obtuvieron de la bibliografía con material de México y Alaska, debido a que no se realizaron ensayos propios por la falta de equipo.
- Para futuras líneas de investigación, se recomienda considerar los esfuerzos que ejerce el hormigón sobre el refuerzo longitudinal con el objeto de obtener un estudio más completo y detallado.



Bibliografía

- [1] Luis Enrique García. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. *Universidad de los Andes, Colombia*, 1998.
- [2] T. Paulay and M. J. N Priestly. Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings. 1992.
- [3] J. C. Botero and M. E. Rodriguez. Pandeo en barras de refuerzo sometidas a cargas monotónicas y cíclicas reversibles. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 1996.
- [4] M. A. Iñiguez. Resistencia a flexo-compresión y capacidad de deformación lateral de muros rectangulares de concreto reforzado en zonas sísmicas. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.
- [5] J. C. Goodnight, Y. Feng, M. J. Kowalsky, and J. M. Nau. *The effects of load history and design variables on performance limit states of circular bridge columns*. North Carolina State University, 2015.
- [6] G. A. Chang and B. Mander. *Seismic energy based fatigue damage analysis of bridge columns: Part I- evaluation of seismic capacity*, 1994.
- [7] C. G. Salmon and J. E. Johnson. *Steel Structures: Design and Behavior*. Ed. Harper Collins Publishers, 1990.
- [8] G. Monti and C. Nuti. Nonlinear cyclic behavior of reinforcing bars including buckling. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1992.
- [9] M. A. Iñiguez and M. E. Rodriguez. Resistencia a flexo-compresión y capacidad de deformación lateral de muros rectangulares de concreto reforzado en zonas sísmicas. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.
- [10] J. B. Mander, M. J. N. Priestley, and R. Park. *Seismic Design of Bridge Piers*, 1984.
- [11] R. Park and T. Paulay. *Estructuras de concreto reforzado*. Limusa, México, DF, 1986.
- [12] H. Ahmad and S. Shah. Structural properties of high strength concrete and its implications for precast prestressed concrete. *Journal Prestressed Concrete Institute*, 1985.
- [13] R. L. Bonett. *Vulnerabilidad y riesgo sísmico de edificios. Aplicación a entornos urbanos en zonas de amenaza alta y moderada*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, España, Barcelona, 2003.



- [14] L. L. Dodd and J. I. Restrepo. Model for predicting cyclic behavior of reinforcing steel. *ASCE*, 121(3), 1995.
- [15] T. Andriano and R. Park. Seismic design considerations of the properties of new zealand manufactured steel reinforcing bars. *New Zealand National Society for Earthquake Engineering*, 19, 1986.
- [16] J. C. Botero and M. E. Rodriguez. *Criterios de diseño sísmico de estructuras de concreto reforzado considerando las propiedades mecánicas de aceros de refuerzo producidos en México*, 1994.
- [17] E. P. Popov. *Introduction to the Mechanics of Solids*. Prentice Hall Inc., 1968.
- [18] M. Menegotto and P. E. Pinto. *Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-elastic Behaviour of Elements Under Combined Normal Force and Bending*. 1973.
- [19] C. Lacaze. *Estudio y Modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos ciclos en barras longitudinales para hormigón armado*, 2009.
- [20] D. C. Kent and R. Park. Inelastic behavior of reinforced concrete members with cyclic loading. Master's thesis, University of Canterbury, 1969.
- [21] W. Ramberg and W. R. Osgood. *Description of stress-strain curves by three parameters*, 1943.
- [22] Timoshenko and Gere. *Theory of Elastic Stability*. Ed. McGraw Hill International Book Company, 1970.
- [23] O. Ruiz. *Diseño y comportamiento de miembros estructurales de acero por el método LRFD*, 2002.
- [24] D. Bernal. *Ductilidad y rotaciones plásticas en secciones críticas de marcos de concreto reforzado*, 1982.
- [25] S. Timoshenko. *Strength of materials*, volume 210. van Nostrand New York, 1955.
- [26] N. Hernández, J. Medina, and J. C. Seck Tuoh. *Introducción a Matlab para Resolver Problemas de Ingeniería Aplicando Algoritmos Genéticos*, 2012.
- [27] A. E. Martínez, A. E. Puertas, and R. Gallego. *Inestabilidad de barras comprimidas y pandeo global de estructuras*, 2015.
- [28] A. E. Martínez, M. E. Puertas, and R. Gallego. *Inestabilidad de estructuras. Inestabilidad de barras comprimidas y pandeo global de estructuras*.
- [29] B. G. Johnston. Column buckling theory: Historic highlights. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1983.
- [30] Dazio. Alessandro, Beyer. Katrin, and Bachmann. Hugo. Quasi-static cyclic tests and plastic hinge analysis of rc structural walls. *Engineering Structures*, 31(7):1556–1571, 2009.



- [31] Thomsen. John H and Wallace. John W. *Displacement based design of reinforced concrete structural walls: an experimental investigation of walls with rectangular and t-shaped cross-sections: a dissertation*. PhD thesis, Clarkson University Postdam, 1995.
- [32] Villalobos Fernandez. Enrique Javier. *Seismic response of structural walls with geometric and reinforcement discontinuities*. PhD thesis, PURDUE UNIVERSITY, 2014.
- [33] P. J. Montoya, A. G. Meseguer, and F. M. Cabré. *Hormigón Armado*. Gustavo Gili,, 1991.



Apéndice A

Codificación del programa Matlab del modelo propuesto del comportamiento del acero bajo cargas cíclicas

```
%Entrada de datos
%Se pide el ingreso de las características básicas del material del cual se desea obtener la
curva esfuerzo vs. deformación..
Es=input('Ingrese el Es: ');
Fy=input('Ingrese el Fy: ');
%Se coloca los datos correspondientes a las características del material supuestos en el mo-
delo.
fsu=10800;
ey=(Fy/Es);
esh=ey;
esu=0.1946;
 $F_{yc} = -F_y * ((1 + (ey))^2)$ ;
fsuc=-11333;
eyc=-((ey)/(1+ey));
eshc=-((esh)/(1+esh));
esuc=-0.1629;
P=3.474;
Pc=2.092;
R=0.58;
Rt=0.5472;
%Se pide el ingreso de las deformaciones que se desean alcanzar en cada ciclo, comenzando
por la compresión.
ec=input('Ingrese la primera deformación: ');
et=input('Ingrese la segunda deformación: ');
ec1=input('Ingrese la tercera deformación: ');
et1=input('Ingrese la cuarta deformación: ');
ec2=input('Ingrese la quinta deformación: ');
et2=input('Ingrese la sexta deformación: ');
ec3=input('Ingrese la séptima deformación: '); i=1;
%Se prosigue a calcular el valor de esfuerzos para deformaciones en intervalos de 0.0001
```



hasta las deformaciones ingresadas por el usuario, para cada una de las zonas.
%Zona elástica lineal.

```
for a=0:-0.0001:eyc
    defc(i)=a;
    i=i+1;
end
```

%Zona de fluencia.

```
if eshc < ec
    for a=eyc:-0.0001:eshc
        defc(i)=a;
        i=i+1;
    else
        defc(i)=a;
        i=i+1;
    end
```

%Zona de endurecimiento por deformación.

```
for a=eshc:-0.0001:ec
    defc(i)=a;
    i=i+1;
end
```

%Zona de descarga.

```
ec0=(ec-((fsc(i-1))/(Es)));
for a=ec:0.0001:ec0
    defc(i)=a;
    i=i+1;
end
```

%Zona de tracción tomando en cuenta el efecto Bauschinger.

```
for a=ec0:0.0001:et
    dE=abs((esu-ec0))/2;
    Eo=Es*(1-dE);
    c = (1 + (Eo/Esec)^(Rt - (ec0 * 4.4715)))^( - 1/(Rt - (ec0 * 4.4715)));
    (Rt-(ec0*4.4715))
    Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);
    fsc(i) = Eo * (a - ec0) * (Q + ((1 - Q)/((1 + (Eo * ((a - ec0)/
    (fsu + (ec0 * 2.4207 * fsu))))^(Rt - (ec0 * 4.4715))))^(1/(Rt - (ec0 * 4.4715)))));
```



```
defc(i)=a;  
i=i+1;  
end
```

%Zona de descarga.

```
et0=(et-((fsc(i-1))/(Es)));  
for a=et:-0.0001:et0  
defc(i)=a;  
i=i+1;  
end
```

%Zona de compresión tomando en cuenta el efecto Bauschinger.

```
for a=et0:-0.0001:ec1  
dE=abs((esuc+et0))/2;  
Eo=Es*(1-dE);  
c = (1 + (Eo/Esec)R)-1/R;  
Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);  
fsc(i) = Eo * (a - et0) * (Q + ((1 - Q)/((1 + (Eo * ((a - et0)/  
((fsc - (fsc * et0 * 0.9529))))R))1/R));  
defc(i)=a;  
i=i+1;  
end
```

%Zona de descarga.

```
ec01=(ec1-((fsc(i-1))/(Es)));  
for a=ec1:0.0001:ec01  
defc(i)=a;  
i=i+1;  
end
```

%Zona de tracción tomando en cuenta el efecto Bauschinger.

```
for a=ec01:0.0001:et1  
dE=abs((esu-ec01))/2;  
Eo=Es*(1-dE);  
c = (1 + (Eo/Esec)(Rt - (ec01 * 4.4715)))-1/(Rt - (ec01 * 4.4715));  
Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);  
fsc(i) = Eo * (a - ec01) * (Q + ((1 - Q)/((1 + (Eo * ((a - ec01)/  
(fsu + (ec01 * 2.4207 * fsu))))(Rt - (ec01 * 4.4715)))1/(Rt - (ec01 * 4.4715))));  
defc(i)=a;  
i=i+1;  
end
```



%Zona de descarga.

```
et01=(et1-((fsc(i-1))/(Es)));
for a=et1:-0.0001:et01
    defc(i)=a;
    i=i+1;
end
```

%Zona de compresión tomando en cuenta el efecto Bauschinger.

```
for a=et01:-0.0001:ec2
    dE=abs((esuc+et01))/2;
    Eo=Es*(1-dE);
    c = (1 + (Eo/Esec)R)(- 1/R);
    Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);
    fsc(i) = Eo * (a - et01) * (Q + ((1 - Q)/((1 + (Eo * ((a - et01)/
    ((fsuc - (fsuc * et01 * 0.9529))))R)(1/R))));
    defc(i)=a;
    i=i+1;
end
```

%Zona de descarga.

```
ec02=(ec2-((fsc(i-1))/(Es)));
for a=ec2:0.0001:ec02
    defc(i)=a;
    i=i+1;
end
```

%Zona de tracción tomando en cuenta el efecto Bauschinger.

```
for a=ec02:0.0001:et2
    dE=abs((esu-ec02))/2;
    Eo=Es*(1-dE);
    c = (1 + (Eo/Esec)(Rt - (ec02 * 4.4715)))(- 1/(Rt - (ec02 * 4.4715)));
    Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);
    fsc(i) = Eo * (a - ec02) * (Q + ((1 - Q)/((1 + (Eo * ((a - ec02)/
    (fsu + (ec02 * 2.4207 * fsu))))(Rt - (ec02 * 4.4715)))(1/(Rt - (ec02 * 4.4715))))));
    defc(i)=a;
    i=i+1;
end
```

%Zona de descarga.



```
et02=(et2-((fsc(i-1))/(Es)));  
for a=et2:-0.0001:et02  
    defc(i)=a;  
    i=i+1;  
end
```

%Zona de compresión tomando en cuenta el efecto Bauschinger.

```
for a=et02:-0.0001:ec3  
    dE=abs((esuc+et02))/2;  
    Eo=Es*(1-dE);  
    c = (1 + (Eo/Esec)R)(- 1/R);  
    Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);  
    fsc(i) = Eo * (a - et02) * (Q + ((1 - Q)/  
    ((1 + (Eo * ((a - et02)/((fsc - (fsc * et02 * 0.9529))))R))(1/R)));  
    defc(i)=a;  
    i=i+1;  
end
```

%Se grafica como resultado la curva obtenida.

```
plot(defc,fsc,'-r')  
title('Curva esfuerzo vs deformación bajo cargas cíclicas')  
xlabel('Deformación')  
ylabel('Esfuerzokg/cm2')  
grid  
legend('Modelo propuesto')
```



Apéndice B

Codificación del programa Matlab de las curvas esfuerzo crítico de pandeo vs. relación de esbeltez y deformación crítica de pandeo vs. relación de esbeltez

```
%Entrada de datos
%Como primer punto se coloca los datos correspondientes a las características del material
para poder elaborar la curva esfuerzo vs. deformación.
H2(1)=1000000000;
H1(1)=1000000000;
H(1)=1000000000;
Es=2100000;
i=1;
j=1;
l=1;
n=1;
F(1)=1;
Fy=4680;
ey=(Fy/Es);
esh=ey;
esu=0.1649;
fsu=10800;
eshc=-0.0026;
esuc=-0.1629;
fsuc=-11333;
Fyc = -Fy * ((1 + (ey))^2);
eyc=((ey)/(1+ey));
ec=esuc;
fsc=fsuc;
e0=0.0334;
Gcr2(1)=0;
```



```
Gcr1(1)=0;
Gcr(1)=0;
```

%Se procede a graficar la curva esfuerzo vs. deformación para intervalos de deformación de 0.0001.

```
for e=(e0-0.0001):-0.0001:ec
    s=0.0001:0.0001:e0+abs(ec);
    Esec= (fsc)/(ec-e0);
    dE=abs((ec-e0))/2;
    R=0.58;
    Eo=Es*(1-3*dE);
    c = (1 + (Eo/Esec)^R)^( - 1/R);
    Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);
    fs(i) = Eo * (e - e0) * (Q + ((1 - Q)/((1 + (Eo * ((e - e0)/(fsc))^R)^(1/R))));
    a(i)=e;
    ac(j)=e;
    Gc(j)=fs(i);
    j=j+1;
    i=i+1;
end
```

% A continuación se obtiene el Gcr que hace referencia a los esfuerzos críticos correspondientes a un rango de esbelteces hasta 13.

% Se obtienen los esfuerzos críticos de pandeo con un factor de longitud efectiva k de 0.5, 0.75 y 1.

```
for esb=0.1:0.1:13
    Y(1)=esb;
    for k=1:(size(Gc,2)-1)
        Et(k)=((Gc(k+1)-Gc(k))/(ac(k+1)-ac(k)));
        Er(k) = (4 * Es * Et(k))/((((Es)^(1/2)) + ((Et(k))^(1/2))))^2);
        Gcr(k + 1) = -((((pi)^2) * (Er(k)))/(16 * ((0.5 * esb)^2)));
        Gcr1(k + 1) = -((((pi)^2) * (Er(k)))/(16 * ((0.75 * esb)^2)));
        Gcr2(k + 1) = -((((pi)^2) * (Er(k)))/(16 * ((1 * esb)^2)));
        H2(k+1)=abs(Gcr2(k+1)-Gc(k+1));
        H1(k+1)=abs(Gcr1(k+1)-Gc(k+1));
        H(k+1)=abs(Gcr(k+1)-Gc(k+1));
    end
    posicion2=find(H2==min(H2));
    posicion1=find(H1==min(H1));
    posicion=find(H==min(H));
    Z2(1)=-Gc(posicion2);
    Z1(1)=-Gc(posicion1);
    Z(1)=-Gc(posicion);
    def2(1)=df(Z2(1));
```



```
def1(l)=df(Z1(l));
def(l)=df(Z(l));
Erp(l)=Er(posicion2-1);
l=l+1;
end

% Se introducen los datos experimentales de esfuerzos críticos de pandeo y deformaciones
críticas de pandeo de los ensayos de Botero.

CSx=[4 4 4 6 6 6 8 8];
CAx=[4 4 6 6 8 8];
CSyc=[8486 8000 7930 6900 6681 6484 5204 4750];
CAyc=[7300 7250 6030 5956 5186 5088];
CSydc=[0.07216 0.05 0.05 0.039 0.031 0.0211 0.0123 0.0097];
CAydc=[0.069 0.069 0.0472 0.0459 0.0236 0.019];

% Por último, se grafica los esfuerzos vs. la relación de esbeltez y las deformaciones vs.
la relación de esbeltez.

subplot(2,1,1),plot(CSx,CSydc,'+r',CAx,CAydc,'s',Y,def,Y,def1,Y,def2,'b');
subplot(2,1,2),plot(CSx,CSyc,'+r',CAx,CAyc,'s',Y,Z,Y,Z1,Y,Z2,'b');
```




Apéndice C

Codificación del programa Matlab de la obtención de K mediante optimización

```
% Programa para la optimización utilizando la herramienta fminsearch.  
% Las matrices x,x1,...,xm son las esbelteces de los datos a optimizar.  
% Las matrices f,f1,...,fm son las deformaciones de pande de los datos a optimizar.  
% Las matrices D,Dl1,...,Dlm son los diámetros del refuerzo longitudinal.  
% Las matrices De,De1,...,Dem son los diámetro del refuerzo transversal.
```

```
x=[];  
f=[];  
Dl=[];  
De=[];  
x1=[];  
f1=[];  
Dl1=[];  
De1=[];  
.  
.  
.  
xm=[];  
fm=[];  
Dlm=[];  
Dem=[];
```

```
% Uso de la herramienta fminsearch para la optimización de m datos en donde el valor a optimizar es el factor n, minimizando el error.
```

```
options = optimset('TolFun',1e-15,'Display','iter','PlotFcns',@optimplotfval);
```

```
[n,fval,exitflag,output] = fminsearch(@(n) Fe(n,x,f,Dl,De,x1,f1,Dl1,De1,...,xm,fm,Dlm,Dem),[1],options)
```



% Función Fe el cual calcula el error de cada iteración comparando las deformaciones calculadas con las deformaciones de entrada.

```
function z = Fe(n,x,f,Dl,De,x1,f1,Dl1,De1,...,xm,fm,Dlm,Dem)
```

```
yca =(Fs(n,x,f,Dl,De));
```

```
yca1 =(Fs(n,x1,f1,Dl1,De1));
```

```
.
```

```
.
```

```
.
```

```
ycam =(Fs(n,xm,fm,Dlm,Dem));
```

```
dca=Df(yca);
```

```
dca1=Df(yca1);
```

```
.
```

```
.
```

```
.
```

```
dcam=Df(ycam);
```

```
z1=0;
```

```
z2=0;
```

```
.
```

```
.
```

```
.
```

```
zm=0;
```

```
for k=1:size(yca,2)
```

```
    z1=z1+s(k);
```

```
end
```

```
for k=1:size(yca1,2)
```

```
    z1=z1+s1(k);
```

```
end
```

```
.
```

```
.
```

```
.
```

```
for k=1:size(ycam,2)
```

```
    zm=zm+sm(k);
```

```
end
```

```
z=z4+z5+...+zm;
```

% Función Fs que calcula el esfuerzo de pandeo para cada dato con la variación de la ecuación de Euler para una barra con diferentes restricciones en los apoyos.



```
function z = Fs(n,x,f,Dl,De)
```

```
Er=Erm(f);
```

```
for k=1:size(f,2)
```

```
    fle(n, x(k), Dl(k), De(k), Er(k)) * x(k)).^2);
```

```
end
```

% Función Erm que calcula el doble módulo reducido con la deformación de cada dato, con la curva propuesta con las características de la barra de esbeltez 2.5 ensayada por Botero.

```
function Erm = Erm(y)
```

```
Es=2000000;
```

```
Fy=4680;
```

```
fsu=10800;
```

```
ey=(Fy/Es);
```

```
esh=ey;
```

```
esu=0.1649;
```

```
P=3.474;
```

```
Fyc=-Fy * ((1 + (ey))^2);
```

```
fsuc=-11333;
```

```
eyc=-((ey)/(1+ey));
```

```
eshc=-((esh)/(1+esh));
```

```
esuc=-0.1963;
```

```
et0=0;
```

```
ec1=-0.1963;
```

```
Pc=2.092;
```

```
Esec= (fsuc)/(esuc-et0);
```

```
dE=abs((esuc+et0))/2;
```

```
R=0.58;
```

```
Eo=Es*(1-dE);
```

```
c=(1 + (Eo/Esec)^R)^( - 1/R);
```

```
Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);
```

```
for i=1:size(y,2)
```

```
    (fsuc))^R(1/R)))));
```

```
    f2 = -(Eo * ((-y(i) + 0.00001) - et0) * (Q + ((1 - Q)/
```

```
    ((1 + (Eo * (((-y(i) + 0.00001) - et0)/(fsuc))^R(1/R))))));
```

```
    Et = (f1 - f2)/(y(i) - (y(i) - 0.00001));
```

```
    Er1(i) = (4 * Es * Et)/((((Es)^(1/2)) + ((Et)^(1/2)))^2);
```

```
end
```

```
Erm=Er1
```



% Función K que calcula el factor de longitud efectiva para cada dato con la variación de n, el cual es el factor que reduce las restricciones de giro .
function k=K(n,x,DI,De,Er)

```
L=DI*x;
I=(pi * DI^4)/64;
k1=(2000000 * pi * De^2)/(4 * L);
k2=k1;
kr1=((4*Er*I)/L)*n;
kr2=kr1;
syms u
U = vpasolve((((((-k1 + k2) * (u^6/(L^6))) + ((kr1 * kr2) * (k1 + k2)
+(k1 * k2 * L) * (u^4/(L^4)) + (k1 * k2 * (kr1 + kr2 - kr1 * kr2 * L) * (u^2/(L^2)))
*sin(u) + ((k1 + k2) * (kr1 + kr2) * (u^5/(L^5)) - (k1 * k2 * L) * (kr1 + kr2)
*(u^3/(L^3)) - (2 * k1 * k2 * kr1 * kr2) * (u/L)) * cos(u) + (2 * k1 * k2 * kr1 * kr2)
*(u/L)))) == 0, u, [17]);
k=pi/U;
```

% Función Df que devuelve el valor de las deformaciones correspondientes a cada uno de los esfuerzos calculados con la variación de la ecuación de Euler y las características de la barra de esbeltez 2.5 ensayada por Botero.

function Df = Df(y)

```
Es=2000000;
Fy=4680;
fsu=10800;
ey=(Fy/Es);
esh=ey;
esu=0.1649;
P=3.474;
Fyc=-Fy * ((1 + (ey))^2);
fsuc=-11333;
eyc=-((ey)/(1+ey));
eshc=-((esh)/(1+esh));
esuc=-0.1963;
et0=0;
ec1=-0.1963;
Pc=2.092;
Esec= (fsuc)/(esuc-et0);
dE=abs((esuc+et0))/2;
R=0.58;
Eo=Es*(1-dE);
c=(1 + (Eo/Esec)^R)^( - 1/R);
Q=((Esec/Eo)-c)/(1-c);
```



```
for i=1:size(y,2)
    A(i) = vpsolve((y(i) + Eo * (a - et0) * (Q + ((1 - Q)/
    ((1 + (Eo * ((a - et0)/(fsuc))^R)(1/R)))))) == 0, a, [-10]);
    df(i)=-A(i);
end
```