UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

"OBJETO DE APRENDIZAJE COMO RECURSO EDUCATIVO EN LA ENSEÑANZA DE APLICACIONES DE LA DERIVADA A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS"

Trabajo de Titulación previo a la obtención del Título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física.

AUTOR:

Christian Mauricio Tenesaca Lojano.

DIRECTORA:

Ing. Lourdes Eugenia Illescas Peña.

CUENCA - ECUADOR

2016

RESUMEN.

El presente trabajo de titulación ofrece un recurso tecnológico innovador denominado Objeto de Aprendizaje (OA) el cual está compuesto por recursos multimedia utilizados en la enseñanza de las aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos.

Este recurso está dirigido a los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca quienes abordan la asignatura del Cálculo Diferencial.

EL CAPÍTULO I, contiene la Fundamentación Teórica de la propuesta, la misma está sustentada en un enfoque constructivista cuyo propósito es que el estudiante obtenga aprendizajes significativos de las matemáticas. Sumado a lo anterior se realiza una presentación de la importancia que tienen las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC's) en el campo de la educación específicamente se analiza las características, tipos e importancia del recurso tecnológico denominado Objeto de Aprendizaje.

EL CAPÍTULO II, aborda el tratamiento de conceptos, definiciones y ejercicios modelos de ciertos temas del Cálculo Diferencial que el estudiante debe poseer para el estudio de máximos y mínimos.

EL CAPÍTULO III, presenta el procedimiento seguido para la elaboración de los Objetos de Aprendizaje y sus respectivas guías didácticas y de pantallas basadas en la metodología propuesta por el proyecto DIUC "Impacto de un proceso de inducción mediante OA a alumnos de primer año de la Universidad de Cuenca".

Finalmente, se genera cinco Objetos de Aprendizaje estructurados sistemáticamente.

Palabras clave: Recurso Tecnológico, Objeto de Aprendizaje, Cálculo Diferencial, Enseñanza, TIC's, DIUC, Guías didácticas y de pantallas.

ABSTRACT

The present graduation work offers an innovative technological resource named “learning object” which is formed by multimedia resources used in the teaching of applications for the resolutions of problems of maximum and minimum.

This resource is directed to the students that have their major in Physics and Mathematics in the University of Cuenca who have in their academic preparation the subject of Differential Calculus.

Chapter I, contains the theoretical basis of the proposal which is based in a constructivist view which purpose is that the students get significant learning in mathematics. It is also developed a presentation of the importance of the technology, information and communication in the field of education, specifically of the technological resource named “learning object”

Chapter II, presents the concepts and definitions with model exercises of certain Differential Calculus topics that students must have for the study of maximum and minimum.

Chapter III, presents the procedure followed for the elaboration of the learning objects and their correspondent didactic guides and digital boards made based in the methodology proposed by DIUC. “Impact of induction process through learning objects for students of the first year in the University of Cuenca”

Finally, there are generated five Learning Objects made systematically.

Key Words: Technological resources, Learning object, Differential Calculus, Teaching, DIUC and TICS´s, Didactic guides and boards.

ÍNDICE GENERAL

Universidad de Cuenca

Cláusula de derechos de autor

Christian Mauricio Tenesaca Lojano, autor de la tesis “OBJETO DE APRENDIZAJE COMO RECURSO EDUCATIVO EN LA ENSEÑANZA DE APLICACIONES DE LA DERIVADA A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS”, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 24 de mayo de 2016

Christian Mauricio Tenesaca Lojano

C.I: 0105147599

Universidad de Cuenca

Cláusula de propiedad intelectual

Christian Mauricio Tenesaca Lojano, autor de la tesis "OBJETO DE APRENDIZAJE COMO RECURSO EDUCATIVO EN LA ENSEÑANZA DE APLICACIONES DE LA DERIVADA A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 24 de mayo de 2016

Christian Mauricio Tenesaca Lojano

C.I: 0105147599

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres Roberto y Rosario, por ser quienes me han apoyado económicamente con mis estudios y me han brindado en el transcurso de mi formación personal y académica con su sabios consejos; a mis hermanas Nancy, Miriam y Diana a mi hermano Henry; a mis sobrinas Karen, Evelyn y Daniela por compartirme sus alegrías, a la vez a una persona muy especial, Fanny Tuba, quien a pesar de la distancia siempre me ha estado motivando para seguir adelante con este mi trabajo; finalmente dedico este trabajo a mis amigos Geovanny, Zulema, Karen y Diana con quienes durante mis estudios he compartido gratos momentos.

Christian Tenesaca.

AGRADECIMIENTO

A la Universidad de Cuenca, a la carrera de Matemáticas y Física y sus docentes que lo conforman quienes desde el comienzo de mis estudios me guiaron con sus conocimientos para mi desarrollo profesional.

Al Msc. Germán Panamá por facilitarme y colaborarme con los recursos que requería para realizar mi trabajo de titulación, y también por apoyo brindado en el Laboratorio de Matemáticas.

A la directora de este trabajo, Ing. Lourdes Illescas, por su dedicación, apoyo y conocimiento brindado en la elaboración de este trabajo.

Christian Tenesaca.

INTRODUCCIÓN

El avance tecnológico en los últimos años ha impactado favorablemente para el beneficio en el desarrollo de la sociedad en ámbitos tales como la economía, la política, la educación, entre otros.

En este último, se ha introducido el surgimiento de nuevas metodologías de enseñanza que utiliza el docente para llevar a cabo su labor, por la razón que hoy en día se está dando paso a la incorporación de nuevos materiales o recursos educativos que sirven como soporte para las labores que desempeñan el docente y estudiante.

La matemática al ser una ciencia exacta comprende diversas ramas, entre una de ellas el Cálculo Diferencial, materia que tiene gran aplicación en carreras técnicas, la misma que es utilizada para resolver problemas aplicados a distintos campos de estudio tales como la física, la química, la ingeniería, la salud, etc. Dentro de la materia mencionada se encuentra contenidos de temáticas tales como: funciones, límites, la derivada y sus aplicaciones que son considerados esenciales para dicha materia. Sin embargo, al ser temas abstractos presenta dificultad en la comprensión, aprendizaje y aplicación de contenidos debido a que la mayoría de las veces el docente no cuenta con material didáctico innovador para explicar tales temas lo que conlleva a acudir a la enseñanza tradicional.

Ante lo expuesto anteriormente, es necesario que se cree nuevas metodologías de enseñanza como complemento a las ya existentes, por esto, es de gran importancia conocer que existen recursos apoyados por la TIC’s que cuentan con las herramientas necesarias para elaborar contenidos de un currículo escolar con el propósito de facilitar su comprensión y transmisión, estos recursos están diseñados con el fin de que se mejore el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La enseñanza y el aprendizaje conjuntamente con un modelo pedagógico son elementos que están ligados íntimamente para un proceso educativo, dentro de este proceso un aspecto fundamental que tiene emplear un recurso tecnológico es que permite tratar de otra forma contenidos curriculares.

La utilización de un OA permitirá que el estudiante adquiera nuevas estrategias de aprendizaje, a la vez que desarrolle sus habilidades o destrezas cumpliendo así con los objetivos planteados en la educación actual.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1 EDUCACIÓN Y ENSEÑANZA.

1.1.1 EDUCACIÓN.

Si bien es verdad, a lo largo de la vida de las personas, la educación ha variado a medida que avanza el tiempo y por el desarrollo de la sociedad en general. Esto se debe a que la educación se encuentra presente durante toda la etapa de crecimiento de cada individuo desde que nace.

La educación se basa en la interacción entre dos personas o un grupo determinado principalmente por medio de la comunicación. No todas las personas cuentan con la misma educación por la razón que existen modos o formas educacionales. Por ejemplo, se tiene a la educación formal y la educación informal.

La primera se refiere a la educación escolar; es decir, "aquella que se desarrolla en contextos escolares y la cual se abarca desde el nivel inicial al nivel superior, siempre con una exigencia pedagógica para el mismo; la segunda, se refiere a educación no instruccional, la misma que se desarrolla fuera de un contexto escolar, y no tiene un carácter institucional" (Mendoza Orellana 15-16). Estos dos tipos de educación están presentes toda la vida.

Por ello, estos aspectos antes tratados conllevan al desarrollo histórico del término educación.

1.1.1.1 DESARROLLO HISTÓRICO DE LA EDUCACIÓN.

Durante el proceso histórico de la educación, han existido diversas polémicas. Todo ello, se debe a que la educación a lo largo de toda su existencia ha sufrido transformaciones tanto positivas como negativas, lo que conlleva a ambientar una aproximación al significado del término educación y su propósito fundamental. Para Julián Luengo, el término educación "etimológicamente viene de los vocablos *educere*, que significa conducir, guiar, orientar; y *educare,* significa conducir fuera de, extraer de dentro hacia fuera" (32), estos aspectos hacen mención a un proceso de relación y de acción; es decir, debe haber personas que actúen y eduquen a otras personas. Por ello, la importancia de plantear y realizar un modelo de enseñanza-aprendizaje en donde se pueda contribuir con el manejo y aplicación de la educación.

Por otra parte, debido a la gran complejidad que se desprende del término educación y a sus diferentes perspectivas que surgen del mismo, se concibe que la educación surge a través de su historia y gracias al aporte de varios pensadores que dieron su aporte con sus respectivas teorías.

Al proporcionar una definición de educación, se puede mencionar a Guerra, quien define a la educación como un "conjunto de prácticas o actividades ordenadas a través de los cuales un grupo social ayuda a sus miembros a asimilar la experiencia colectiva culturalmente organizada y a preparar su interacción activa en el proceso social" (2). Estas prácticas o actividades han sucedido en diferentes momentos históricos que atravesó la sociedad en quienes recayó un proceso de formación como personas. La cultura y las relaciones sociales colectivas han sido los principales factores para saber que educar no consiste solo en enseñar y aprender, sino que también se convierte en todo momento un proceso complejo, en donde intervienen más factores tanto internos como externos, es decir, tanto para el aula de clase como fuera de ella.

La educación a través de su historia, fue adoptando múltiples paradigmas. Antiguamente y como indica Rodríguez Ruiz en su artículo *Evolución de la Educación* "el hombre recibía una educación, la cual se transmitía de padres a hijos, de generación en generación y, simplemente ésta consistía en el aprendizaje de las formas de vida" (37). Esto sucedía en los pueblos primitivos, en donde no existían personas dedicadas a enseñar estos aprendizajes para poder realizar dichas tareas.
Al pasar el tiempo, la educación se fue desarrollando poco a poco en siglos y territorios diferentes, contando con el apoyo principal de grandes pensadores, quienes influyeron en la educación y dieron paso al desarrollo y enseñanza de diferentes ciencias, entre ellas: la filosofía, artes, literatura, ingeniería, arquitectura y principalmente, la matemática.
Posteriormente, y en comparación con la educación antigua, "a comienzo del siglo XX la educación progresista era un sistema de enseñanza basado en las necesidades y en las potencialidades del niño más que en las necesidades de la sociedad o en los preceptos de la religión" (Rodríguez Ruíz 39-40).

Actualmente, la educación está basada en un adecuado sistema educativo orientado a renovar la metodología de enseñanza, centrado más en el estudiante buscando en él un aprendizaje activo, a la vez se busca de la educación su "calidad y calidez, pertinente, adecuada, contextualizada, actualizada y articulada en todo el proceso educativo" (Ley Orgánica de Educación Intercultural 10), para poder alcanzar esta educación y obtener la calidad de la misma, el docente debe hacer uso de material didáctico, de recursos educativos multimedia tecnológicos apoyados con las TIC's.

El término educación ha tomado gran impacto en el hombre desde que empezó a educarse, debido a que le proporciona una herramienta para que adquiera múltiples conocimientos en diferentes campos que son acumulados mediante la interacción entre dos o más personas en diferentes etapas de su vida ya sea en su hogar, en el ámbito escolar o en cualquier otro lugar.

Cabe mencionar que la educación, abarca paralelamente los conceptos de enseñanza y aprendizaje. Estos dos procesos indispensables que intervienen a lo largo de un proceso educativo, permiten llevar a cabo el quehacer tanto del docente como estudiante.

1.1.2 ENSEÑANZA.

Se entiende el término "enseñanza", como un proceso sistemático, en donde intervienen tanto el docente, el alumno, el conocimiento y, sobre todo, el entorno educativo en el que se desarrolla, es decir, la enseñanza no está centrada solamente entre docente y alumno, existe una conexión con otros elementos para que sea posible. Sin embargo, todo este proceso, está centrado en lo que pretenda enseñar el docente. Así, éste puede incluir ciertas técnicas o herramientas vinculadas con las estrategias particulares para que se cumplan los objetivos planteados.

La enseñanza para el ser humano, ha sido considerada como un componente elemental en su diario vivir, por la razón que le permite aprender múltiples actividades llevadas a cabo en diferentes ámbitos de la vida cotidiana, la escuela por ejemplo es uno de ellos.

Históricamente la enseñanza, "ha sido considerada en el sentido estrecho de realizar las actividades que lleven al estudiante a aprender, en particular, instruirlo y hacer que ejercite la aplicación de las habilidades” (Concepción de Enseñanza/Aprendizaje 1).

1.2 MODELOS PEDAGÓGICOS EN LA EDUCACIÓN.

Al ser la educación un aspecto que está presente durante toda la vida y la enseñanza un proceso organizado y sistemático, es importante utilizar ciertos modelos pedagógicos que transmitan de mejor manera la labor del docente y estudiante.

Un modelo pedagógico es definido como “una representación arquetípica o ejemplar del proceso de enseñanza-aprendizaje, en la que se exhibe la distribución de funciones y la secuencia de operaciones en la forma ideal que resulta de las experiencias recogidas al ejecutar una teoría del aprendizaje” (C. Castro 6). Dentro de un proceso educativo los modelos permiten alcanzar mejores resultados en la enseñanza y aprendizaje.

Es importante mencionar que la labor que el docente cumple en un proceso educativo permite orientarlos a elaborar diferentes formas de transmitir su enseñanza en cada programa de estudio que se plantea.

1.2.1 MODELO TRADICIONAL.

Desde años atrás, uno de los modelos utilizado con gran frecuencia en el ámbito escolar por parte de los docentes para llevar a cabo su proceso de enseñanza con sus estudiantes fue el modelo tradicional. En la educación actual, esta práctica aún no desaparece por completo a pesar de que nuestro nivel educativo y formación de docentes ha incrementado notablemente.

Para dar una definición sobre este modelo, se cita a Flórez, quien señala que este modelo es “academicista, verbalista, que dicta sus clases bajo un régimen de disciplina a unos estudiantes que son básicamente receptores” (167), este modelo exige al estudiante memorizar el contenido general de la temática tratada y que se le imparte en clase.

Un aspecto importante a tener en cuenta en el modelo tradicional es el rol que cumple el educador, de acuerdo con De Zubiría, “bajo el propósito de enseñar conocimientos y normas, el maestro cumple la función de transmisor” (55), esta transmisión de contenidos curriculares se da de forma cerrada por parte de este actor de la educación, el mismo quien narra y explica de forma aligerada su currículo pre-elaborado para que sea captado en su totalidad por parte del estudiante a quien se le pide la repetición holística de dichos contenidos tratados en cada clase. Aquí es en donde el aprendizaje es entonces un acto de autoridad.

1.2.1.1 EL MODELO TRADICIONAL Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

Dentro de nuestro sistema educativo, una gran parte de docentes del área de la matemática, están acostumbrados a utilizar una metodología tradicionalista. Por ejemplo, en el tema de aplicaciones de la derivada perteneciente a la asignatura del Cálculo Diferencial al ser tratados desde un enfoque tradicional hace que el proceso de enseñanza sea completamente de forma verbalista por parte del docente al momento de desarrollar su clase, lo que conlleva a que los estudiantes tomen apuntes de todo el contenido que aborda el tema a ser tratado. Como resultado se tiene que la parte didáctica para este proceso no es considerada por parte del docente y a la vez tampoco existe el aporte del estudiante en lo que se refiere a sus destrezas y actitudes durante su proceso de aprendizaje.

Conforme avanzó el tiempo, esta metodología ha ido perdiendo fuerza dentro del ámbito escolar dando lugar al surgimiento de nuevos modelos pedagógicos por la razón a que la educación actual cuenta con nuevas reformas y exigencias, que buscan de la educación su eficacia para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.2.2 MODELO COGNITIVO.

El modelo cognitivo es uno de los más importantes para un proceso educativo, debido a que a través de este modelo el discente desarrollará mayormente sus capacidades y habilidades en el aprendizaje, este modelo pedagógico fue basado en la teorías de Dewey y Piaget, que se enfoca en el progreso de capacidades en el estudiante que se puede alcanzar cuando el docente genera un ambiente atractivo que sirva como un medio para que el discente amplíe sus habilidades y capacidades reflexivas, con el fin de que se desenvuelva de mejor manera durante la materia objeto de estudio. El desarrollo de estas capacidades y habilidades permiten que la educación que recibe el discente acceda progresivamente a un nivel superior, de acuerdo con las necesidades que posea.

Según Gómez y Néstor considera que, “el rol del docente está centrado en atender y seguir el nivel de desarrollo de las estructuras y el proceso cognitivo de sus alumnos” (64), es aquí que el docente a más de ser un facilitador de experiencias también debe ser quien cree espacios para que el discente razone de forma crítica con la finalidad a que su aprendizaje no sea mecánico sino que posea recepción significativa.

1.2.3 MODELO CONSTRUCTIVISTA.

Este modelo es el que se práctica en la actualidad, al menos en nuestro medio. Lo que se pretende con este modelo es que el estudiante sea capaz de crear su propio conocimiento que no solo se conforme con lo que el docente le enseña, sino que sea participe en este proceso y acuda a la exploración de nuevos conocimientos con el fin de que pueda desenvolverse en todas las áreas del conocimiento.

El principio general del enfoque constructivista es que las personas aprenden de modo significativo cuando construyen sus propios saberes, partiendo de los conocimientos previos que estos poseen. Esto indica que el estudiante al adquirir un aprendizaje propio requerirá que tenga un conocimiento adecuado acerca de los contenidos que le ha sido enseñado con anterioridad por parte de su docente, de tal modo que se pueda construir el nuevo saber, nuevo aprendizaje; es decir, que adopte un nueva forma de enseñanza.

Para Jonassen:

> La concepción constructivista del aprendizaje establece que el conocimiento es elaborado individual y socialmente por los alumnos, basado en las interpretaciones de sus experiencias en el mundo. Puesto que el conocimiento puede transmitirse, la enseñanza debería consistir en experiencias que facilita la elaboración del conocimiento (227).

1.2.3.1 EL MODELO CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Hoy en día el enfoque constructivista cumple un papel importante dentro de la enseñanza de la matemática debido a que facilitan y permiten al estudiante construir conceptos, definiciones y procedimientos matemáticos cada vez más abstractos.

Al adaptar la matemática una metodología constructivista, el docente en la enseñanza de esta área debe ofrecer nuevas estrategias para mejorar e innovar con su praxis, con el fin de que el estudiante pueda seguir progresando en su proceso de aprendizaje y para que posea cambios significativos en el desarrollo de dicho proceso.

El estudio de la matemática implica que sus contenidos pueden ser abordados desde diferentes paradigmas ya sea haciendo uso de cualquier tipo de modelo pedagógico o por medio de recursos educativos innovadores que ayuden en la explicación y aprendizaje de esta área.

1.3 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

Dentro de todo proceso educativo, lo que se pretende es llegar a alcanzar un aprendizaje significativo. Existen varios autores quienes abordan esta temática educativa. Sin embargo, se considera como mayor exponente a las teorías de Ausubel, quién es el más adecuado para enfocarse.

Ausubel, quien menciona en su artículo *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*, que un aprendizaje es significativo cuando los contenidos “son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe, señaladamente algún aspecto esencial de su estructura de conocimientos (por ejemplo, una imagen, un símbolo ya con significado, un contexto o una proposición)” (1), lo que significa que el estudiante al adquirir conocimientos previos y al pasar a saberes nuevos pueda relacionándolos unos con otros de tal forma que aprenda con gran facilidad.

El aprendizaje significativo se da cuando un nuevo conocimiento se produce a través de otro conocimiento preexistente, para esto se requiere de la estructura cognitiva del estudiante que indica que las nuevas ideas, conceptos, definiciones, etc., puedan ser aprendidas de otras ideas ya abordadas sirviéndoles como punto de referencia para las primeras.

Para el área de las matemáticas, por ejemplo, el estudio de temas tales como funciones, límites, continuidad, etc., si ya están en la estructura cognitiva del estudiante, éstos servirán como conocimientos preexistentes para la adquisición de nuevos conocimientos de temas como la derivada y sus aplicaciones en máximos y mínimos.

Siendo el aprendizaje significativo un requisito que debe estar presente en la educación moderna, necesitará de recursos que permitan servir de apoyo para el proceso de enseñanza-aprendizaje, para llevar a cabo esta tarea se da paso al uso de las tecnologías de la información y comunicación.

1.4 LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN Y SU APOYO EN LA EDUCACIÓN.

1.4.1 INTRODUCCIÓN.

El ser humano al encontrarse hoy en día en un mundo digitalizado, cuenta y posee de una gran variedad de recursos educativos tecnológicos, los mismos que son utilizados y están a su disposición en cualquier momento que lo requiera. Estos recursos tienen el propósito de facilitar las tareas de diferentes tipos de actividades educativas.

Entre los recursos con los que actualmente se cuentan dentro de un proceso educativo están las tecnologías de la información y comunicación (TIC's), tal como señala Pividori y Buseghin en su artículo, *Uso de las tics en el aula*, "son aquellas herramientas computacionales e informáticas que procesan, almacenan, sintetizan, recuperan y presentan información representada de la más variada forma" (4), entre las herramientas con las que se puede contar están los medios físicos que se encuentran alrededor y son parte de nuestra vida tales como: un ordenador, teléfono o medios virtuales como software educativos, son cada uno de estos los que permiten compartir información digitalizada con el resto de la sociedad.

Al mismo tiempo, el uso del internet se considerada como una gran herramienta y canal de información de mayor uso dentro de la educación y de otros campos.

Las TIC's son empleadas en múltiples ámbitos tales como: la economía, política, salud, educación y/o en actividades socioculturales.

1.4.2 LAS TIC’s EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE.

El surgimiento de la tecnología ha logrado desarrollar nuevas estrategias y metodologías educativas las mismas que apoyan al proceso de enseñanza-aprendizaje con la intención de responder a las necesidades que requiere la sociedad del siglo XXI.

El uso de las TIC’s en salón de clases proporciona tanto al docente como estudiante una herramienta útil. Permite al educador programar actividades educativas extracurriculares con el fin de complementar a su praxis en el salón de clase, a la vez estas herramientas se convierten en material adicional para el aprendizaje del discente debido a que son recursos que les ayuda a buscar, analizar y procesar información de acuerdo a las necesidades que requieran en sus tareas.

1.4.3 VENTAJAS DE LAS TIC’s EN EL PROCESO EDUCATIVO.

Entre las múltiples ventajas que brinda el uso de las TIC’s para un proceso educativo se puede destacar a las siguientes.

VENTAJAS DE LAS TIC´S	
Motivación.	El estudiante despierta mayor interés para aprender por la razón que la materia que su docente le enseñe se vuelve más atractiva y recreativa.
Aprendizaje cooperativo.	La TIC’s “facilitan el trabajo en grupo y el cultivo de actitudes sociales, el intercambio de ideas, la cooperación y el desarrollo de la personalidad” (Pividori y Buseghin 5) para lograr un buen éxito en cuanto a sus trabajos, tareas o proyectos.
Comunicación.	La comunicación deja de ser formal, tan directa y se convierte a ser más abierta dando lugar a una mayor comunicación entre docentes y estudiantes.
Múltiple variedad de información.	Las TIC’s proporcionan a los docentes el acceso a una gran variedad de información por la razón que el aprendizaje no solo se limite al uso de un solo texto.
Interactividad	El estudiante puede interactuar, comunicar para intercambiar experiencias de actividades educativas con otros compañeros o docentes dentro o fuera de un ámbito escolar.

Tabla 1: Ventajas de las TIC's.

1.4.4 EL USO DE LAS TIC's EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

La enseñanza de los contenidos del área de la matemática llevada a través de un enfoque tradicional no permite que su desarrollo pueda ser abordado desde otra perspectiva.

Actualmente, las TIC's inciden en el campo educativo, en el caso de la matemática, su enseñanza a través de estas herramientas permiten que el docente tenga a su disposición varios medios o recursos que apoyen a su labor.

Los medios tecnológicos con los que puede contar el educador y alumno se encuentra la inclusión de software educativos, como por ejemplo: GeoGebra, Derive, Modellus, Matlab, entre otros; por otra parte, la inclusión del hardware en el proceso educativo tales como una pizarra digital, una computadora o calculadora permiten que a través de la utilización de estos medios en cuanto a los contenidos del Cálculo Diferencial se pueda graficar cualquier tipo de función, calcular sus derivadas, sus puntos críticos, etc., para que sean resueltos con gran facilidad, por la razón que ahorran tiempo en la realización de cálculos matemáticos y la visualización de gráficas de funciones.

Los medios mencionados anteriormente, son considerados de gran importancia para los actores (docentes, estudiantes) de la educación, debido a que dejan de un lado hacer tareas de forma mecánica y además porque permiten hacer de la praxis del docente innovadora con una nueva forma en la manera de tratar y enseñar matemáticas.

Cada vez, para la educación sigue surgiendo nuevos recursos, es así que hoy en día se cuenta con la inserción de un recurso multimedia denominado Objetos de Aprendizaje.

1.5 OBJETO DE APRENDIZAJE.

1.5.1 HISTORIA.

Los Objetos de Aprendizaje por sus siglas OA, en cuanto a su historia y compartiendo con lo que señala Serrano en su revista "e-FORMADORES",

> Fue Wayne Hodgins en 1992, cuando trabajaba en el desarrollo de algunas estrategias de aprendizaje. Estando en su casa, observó a su hijo jugar con bloques de plástico interconectables LEGO y dedujo que este juego podrían servir de metáfora para explicar la formación de materiales educativos en pequeñas unidades , que permitieran el aprendizaje de una forma sencilla y que pudieran conectarse entre sí, es decir desarrollar piezas de aprendizaje fácilmente interoperables (Serrano 2).

1.5.2 CONCEPTO DE OBJETO DE APRENDIZAJE.

Diversas son las concepciones que otorgan ciertos investigadores con respecto al objeto de aprendizaje debido a que no existe un consenso para este término.

Los siguientes conceptos son los más relevantes y destacados. Por una parte, un objeto de aprendizaje es "cualquier recurso digital que puede ser usado como soporte para el aprendizaje" (Wiley 4); García señala que son "recursos digitales autocontenidos, diseñados para utilizarse en procesos de enseñanza y aprendizaje, y se caracterizan por la capacidad de rehusó que contienen" (1); y finalmente, el Comité de Estándares de Tecnologías de Aprendizaje, establece que los Objetos de Aprendizaje son "cualquier entidad, digital o no digital, que puede ser utilizada, reutilizada o referenciada durante el aprendizaje apoyado en la tecnología" (5).

Cada una de estas concepciones está enfocada con la finalidad de apoyar a un proceso educativo ofreciendo a los docentes y estudiantes la posibilidad de contar y disponer de material complementario de apoyo para su enseñanza y aprendizaje respectivamente.

1.5.3 CARACTERÍSTICAS DE UN OBJETO DE APRENDIZAJE.

Entre las características más importantes con las que cuenta un objeto de aprendizaje dentro de un proceso educativo se destacan las siguientes:

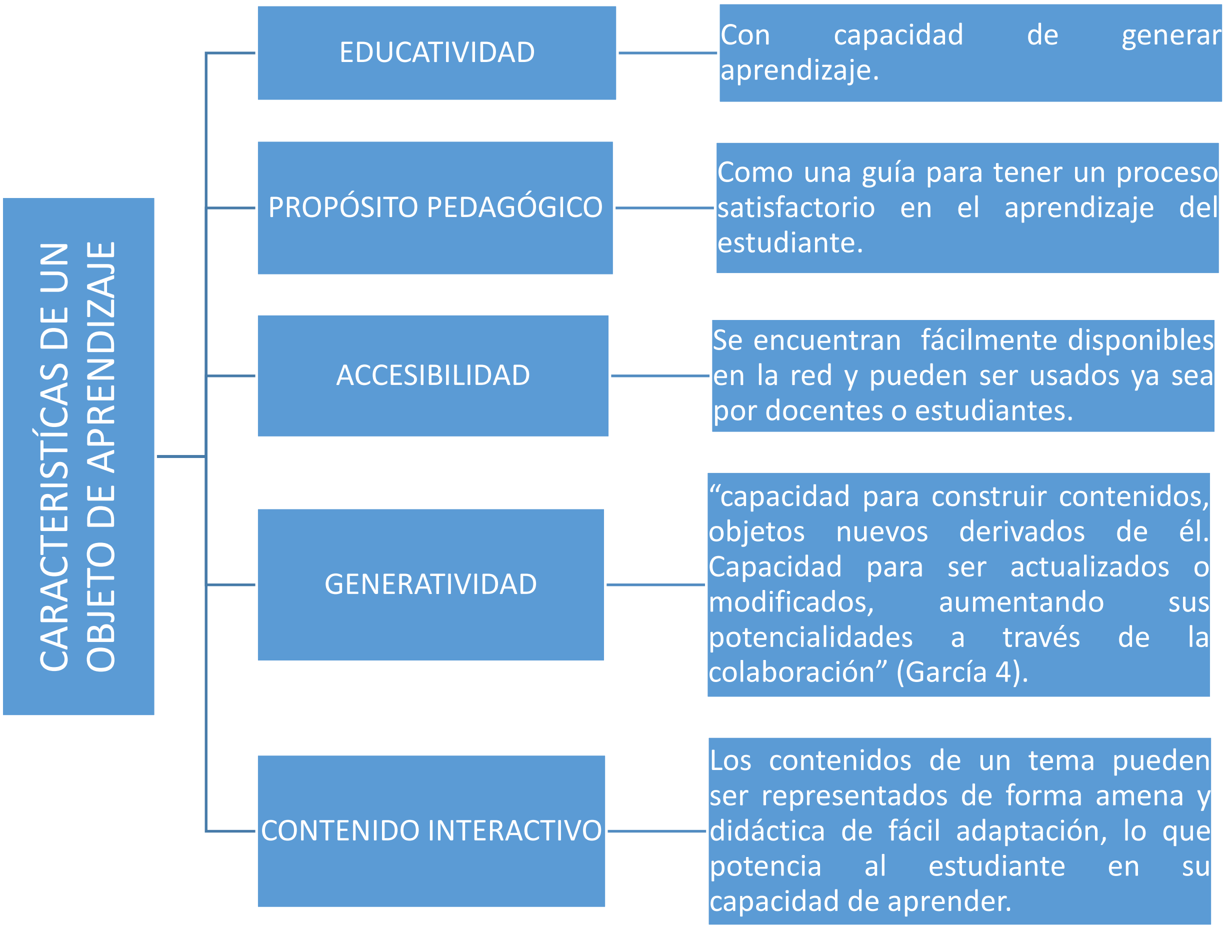


Figura 1: Características de un OA.

1.5.4 TIPOS DE OBJETOS DE APRENDIZAJE.

En una parte del apartado "PLAN DE ACCIONES PARA LA CONVERGENCIA EUROPEA (PACE)" del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Politécnica de Valencia se señala lo siguiente: que los objetos de aprendizaje se los puede clasificar atendiendo al tipo de "Contenido Pedagógico" y al de "Formato".

Según los Contenidos Pedagógicos:

- Conceptuales: traducir el concepto a nuestras propias palabras.
- Procedimentales: es algo práctico.
- Actitudinales: son disposiciones adquiridas y relativamente duraderas.

Según el Formato:

- Imagen.
- Texto.

- Sonido.
- Multimedia (6).

1.5.5 IMPORTANCIA DE UN OBJETO DE APRENDIZAJE EN LA EDUCACIÓN.

Actualmente, un objeto de aprendizaje en cuanto a su importancia es considerado como una herramienta tecnológica para la educación actual, por la razón que este tipo de recursos educativos aportan significativamente en las tareas que se llevan a cabo el docente y estudiante dentro de un proceso educativo, y a la vez porque si se cuenta con un OA elaborado sistemáticamente para una unidad de aprendizaje, servirá como soporte para utilizarlos en propósitos educacionales.

1.5.6 REPOSITORIO DIGITAL DE OBJETOS DE APRENDIZAJE.

Al ser un objeto de aprendizaje también un recurso multimedia, cabe hacerse las siguientes preguntas ¿En dónde va a estar almacenado este recurso? ¿Cómo podemos encontrarlo?

Una gran variedad de artículos, publicaciones, libros, tesis, etc., se suelen presentar clasificados y almacenados en bibliotecas tradicionales, las mismas que hoy en día cuentan con repositorios digitales para almacenar los recursos mencionados.

En cuanto a un objeto de aprendizaje, estos se encuentran en un repositorio de OA, que según García lo define como “una gran colección de los mismos (OA), estructurada como un banco o base de datos con metadatos asociados y que generalmente podemos buscar en los entornos Web” (5), en este repositorio los OA elaborados están clasificados y ubicados adecuadamente gracias a la información que contiene los metadatos, que son un conjunto organizado que contiene datos del OA, los cuales permiten su identificación para que se encuentre fácilmente en un repositorio digital para su posterior uso por parte del docente y estudiante.

1.5.7 EJEMPLO DE OBJETO DE APRENDIZAJE.

En la consulta de recursos educativos similares se pudo encontrar un ejemplo de un OA relacionado al tema “aplicaciones de la derivada”, el mismo que se encuentra en el Repositorio de Objetos de Aprendizaje[1] perteneciente a la Universidad de Antioquia.

En este ejemplo se puede apreciar la estructura del OA con sus respectivas secciones, siendo estas:

- Portada: Título del objeto de aprendizaje, autor.
- Concepto de Derivada, Reglas y Aplicaciones.
- Actividad No 1: Cuestionario de Diagnóstico.
- Actividad No 2: Videos.
- Actividad No 3: Ejercicios de Mecanización, Trabajo individual y Cooperativo.

Portada.

Ilustración 1: "PORTADA" del ejemplo del OA: "Concepto de derivada y su aplicación en diversos contextos".

Concepto de Derivada, Reglas y Aplicaciones.

[1]El ejemplo de este objeto de aprendizaje se encuentra disponible en el sitio web: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/ova/?q=node/759.

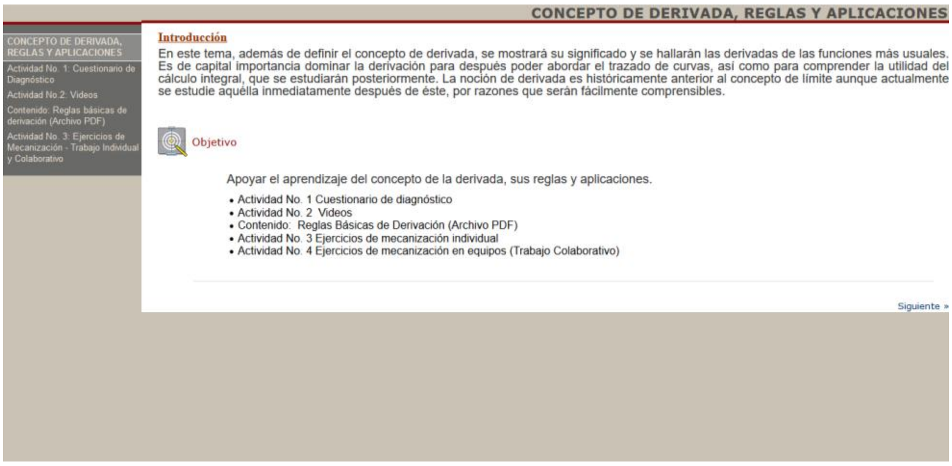


Ilustración 2: "CONCEPTO DE DERIVADA, REGLAS Y APLICACIONES" del ejemplo del OA.

Actividad No 1.

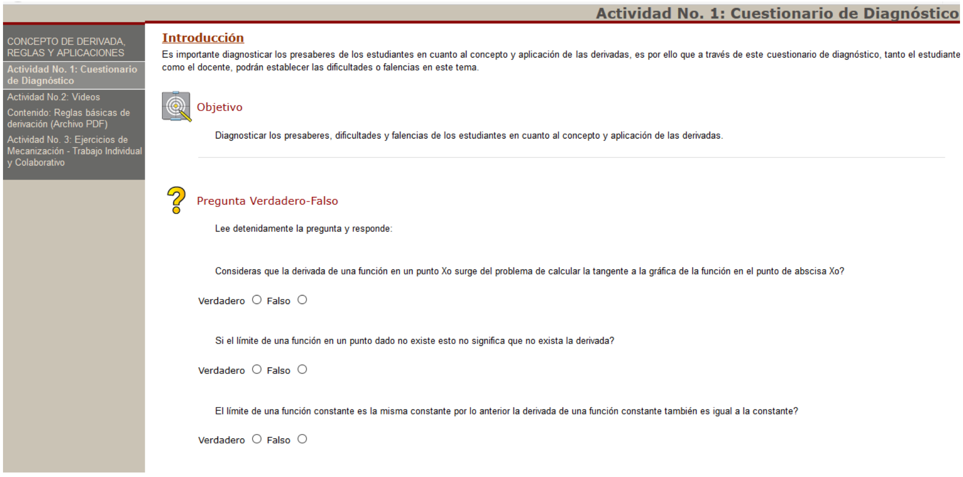


Ilustración 3: "ACTIVIDAD No 1" del ejemplo del OA.

Actividad No 2.

Ilustración 4: "ACTIVIDAD No 2" del ejemplo del OA.

Contenido.

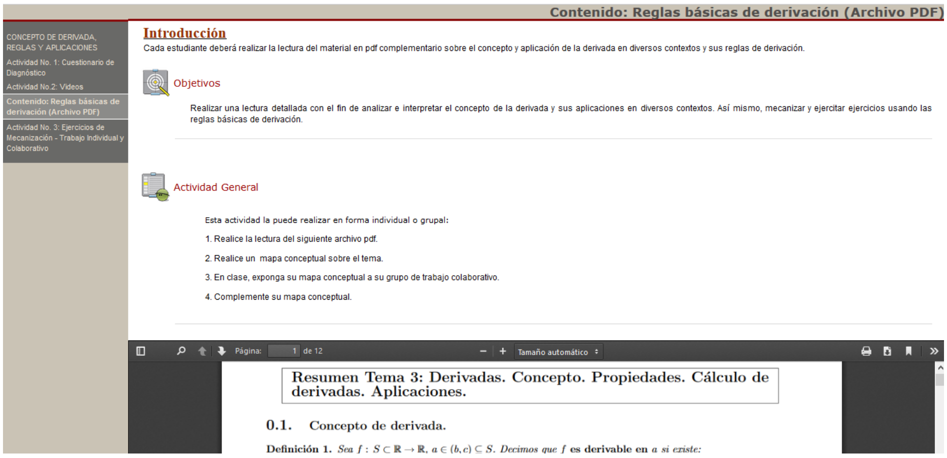


Ilustración 5: "CONTENIDO" del ejemplo del OA.

Actividad No 3.

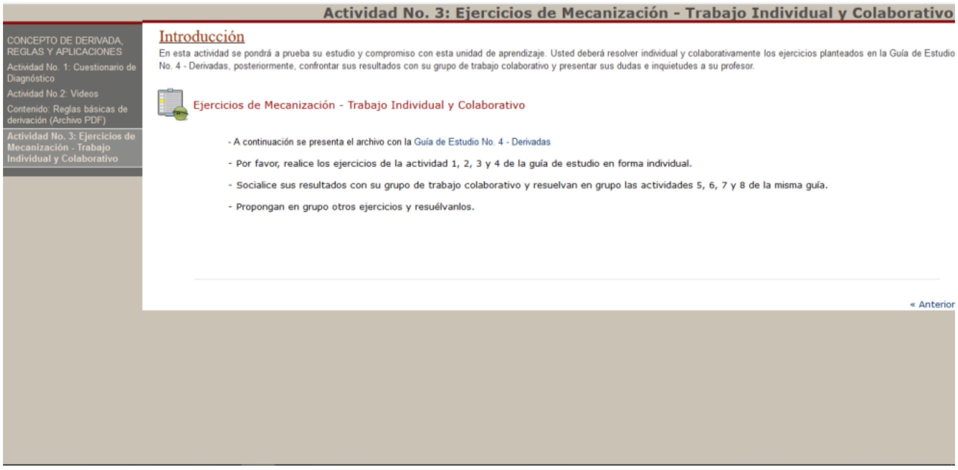


Ilustración 6: "ACTIVIDAD No 3" del ejemplo del OA.

En este ejemplo se puede notar que el diseño de este OA con la que cuenta cada una de sus secciones es elemental; este OA puede ser mejorado para que la unidad temática tratada presente la inclusión de recursos multimedia tales como avatar e imágenes animadas, gifs, videos elaborados con herramientas novedosas, etc., esto es lo que se pretende en cuanto a la propuesta de este trabajo que se presentará más adelante.

CAPÍTULO II

LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES EN PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Para la realización de la base teórica de este capítulo se tomó en cuenta extractos de los siguientes libros de Cálculo Diferencial, entre ellos:

- Precálculo Matemáticas para el Cálculo, Autores: James Stewart; Lothar Redlin y Saleem Watson.
- Cálculo Diferencial e Integral, Autor: William Anthony Granville.
- Cálculo con Geometría Analítica, Autores: Ron Larson, Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwards.
- El Cálculo, Autor: Louis Leithold.
- Cálculo, Autores: Edwin Purcell; Dale Varbeng y Steven Rigdon.

2.1. INTRODUCCIÓN.

El cálculo diferencial considerada una de las herramientas importantes de la matemática, trata del estudio del cambio de una cantidad (variable dependiente) cuando otra cantidad (variable independiente) que está relacionada con la primera varía. El principal objeto de estudio dentro del Cálculo Diferencial es la derivada.

Por ejemplo, en la velocidad de una partícula en movimiento para cierto instante determinado se tiene *la razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla*; por otra lado, la pendiente se tiene *la diferencia entre dos puntos del eje de las ordenadas por las diferencia de sus abscisas* da como resultado la recta tangente a una gráfica en un punto dado de ésta, entre otros.

Cabe mencionar lo siguiente, para este capítulo, la elaboración de las gráficas, figuras; los ejemplos y ejercicios modelos fueron realizadas por autoría propia. Las gráficas y figuras fueron elaboradas con el software matemático “GEOGEBRA”.

Antes de introducir a los temas de mayor interés, el estudiante debe tener como conocimientos previos los temas de: pendiente de una recta y el límite de una función.

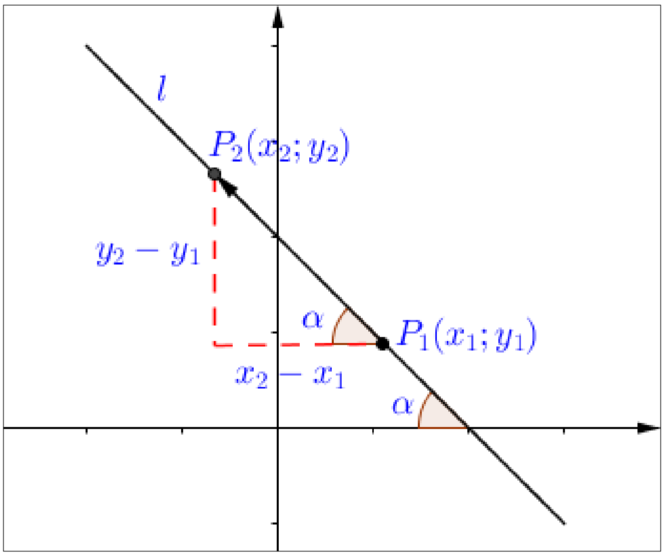
2.2. CONOCIMIENTOS PREVIOS.

2.2.1. PENDIENTE DE UNA RECTA.

La pendiente de una recta como conocimiento previo sirve de base para el estudio del Cálculo Diferencial en cuanto a los temas que lo requieran de su empleo.

Por geometría analítica se conoce que la pendiente de una recta que se denota con la letra "m", para dos puntos de la recta es definida como la diferencia de cambio en "y" dividida por la diferencia de cambio en "x", que en otras palabras determina el grado de inclinación de una recta con el eje x.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_2 \neq x_1$$



Gráfica 2.2.1.1: Representación de la pendiente de una recta.

La pendiente de una recta puede ser positiva, negativa y en otros casos que no exista, dependerá del ángulo "α" de inclinación de la recta $\boldsymbol{l}$.

- Si $0° < \alpha < 90°$ la pendiente es positiva.
- Si $90° < \alpha < 180°$ la pendiente es negativa.
- Si $\alpha = 90°$ la pendiente no existe.

Para determinar el ángulo de inclinación se utiliza la siguiente relación:

$$tan\, \alpha = \frac{sin\, \alpha}{cos\, \alpha} = m$$

2.2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

El concepto de límite como conocimiento previo, también sirve de base para el estudio del Cálculo Diferencial debido a que interviene en dos de las tres condiciones para saber si una función es continua; para definir los conceptos de recta secante y de la derivada, entre otros.

La definición es, “el límite de una función $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a L

$$lim_{x \to a} f(x) = L$$

se dice que los valores de $f(x)$ se acercan mas y mas a L, cuando x se acerca mas al numero a ya sea por cualquiera de sus lados teniendo en cuenta que $x \neq a$” (Stewart 840).

Para hallar el límite de una función, se puede emplear uno de los siguientes métodos:

- Calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a L.
- Bosquejar la gráfica de la función $y = f(x)$.
- Utilizar procesos algebraicos.

Además del concepto de límite, el estudiante debe conocer que existen límites laterales, unilaterales, infinitos, entre otros.

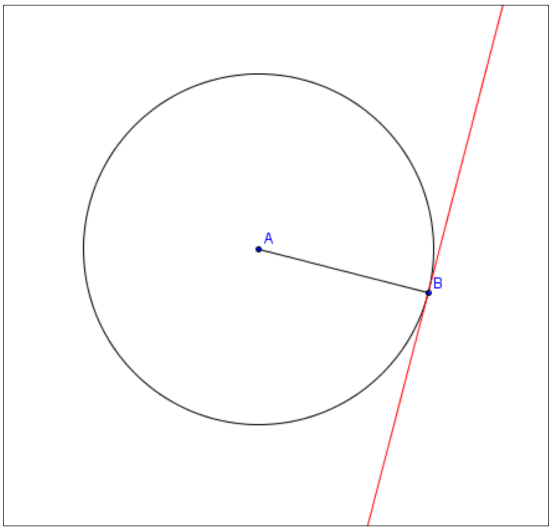
Las propiedades de los límites permiten facilitar su cálculo, se puede aplicar para cualquier tipo de función.

A continuación se presenta el desarrollo de los temas a ser tratados a más profundidad.

2.3 RECTA SECANTE Y TANGENTE.

2.3.1 RECTA TANGENTE.

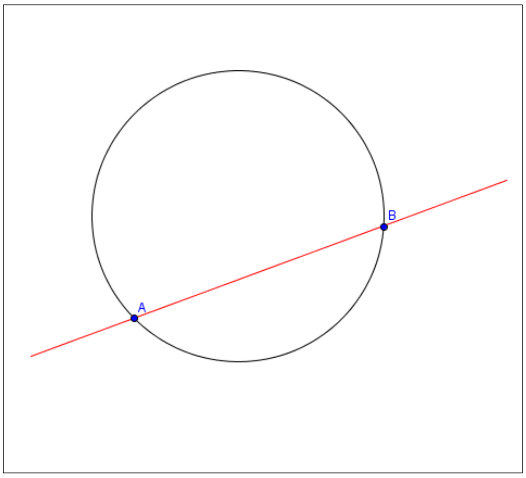
Por geometría plana, se conoce que una recta tangente es aquella que intersecta a un solo punto de una circunferencia y que es perpendicular a su radio.



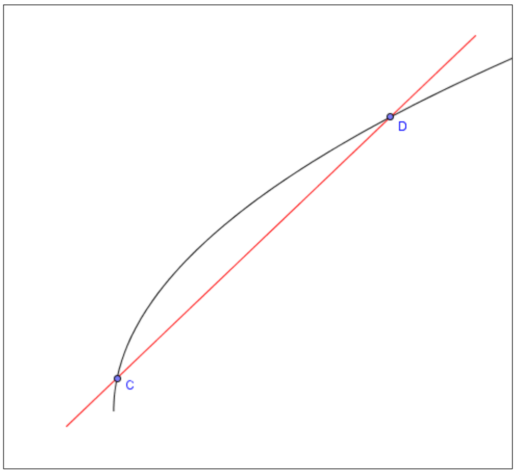
Gráfica 2.3.1.1: Tangente a una circunferencia.

2.3.2 RECTA SECANTE.

Es aquella recta que intersecta a dos puntos de una curva.



Gráfica 2.3.2.1: Recta secante a una circunferencia.



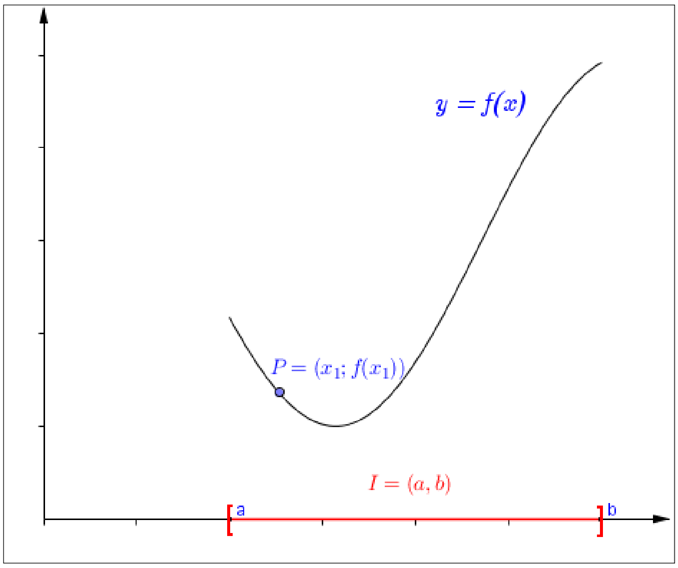
Gráfica 2.3.2.2: Recta secante a una curva.

2.3.3. RECTA TANGENTE A UNA CURVA.

En la gráfica 2.3.2.2 la recta secante interceptó a los puntos C y D de la curva, entonces cabe hacerse las siguientes preguntas ¿Cuál es la recta tangente en un P cualesquiera de la curva en general?, ¿Cómo se puede obtener? ¿Existe algún proceso a seguir?

Bien, para responder a estas interrogantes, se procede a hacer lo siguiente:

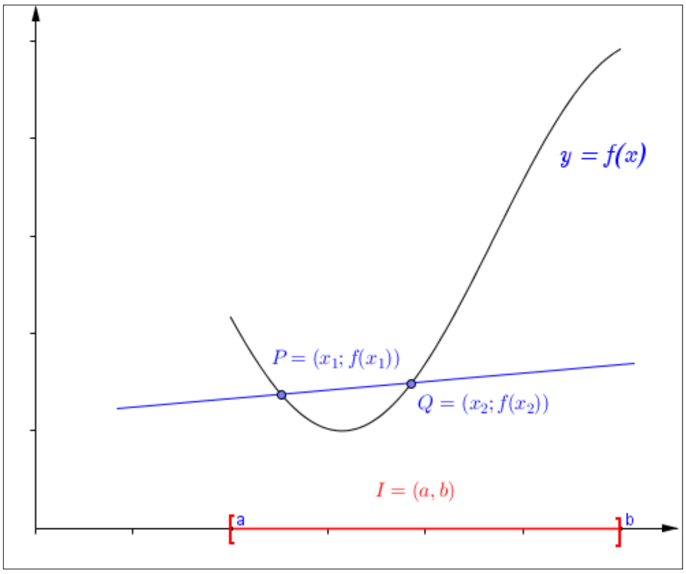
La gráfica $y = f(x)$ representa una curva general, se desea hallar la recta tangente en un punto $P\ (x_1;\ f(x_1))$ cualesquiera de dicha función, de tal forma que el punto x_1 se encuentre dentro del intervalo [a, b].



Gráfica 2.3.3.1: Representación de la función $y = f(x)$, el punto P y el Intervalo [a, b].

Entonces, “el uso de la definición de límite permite hallar la recta tangente en el punto P, para aplicar dicha definición se necesita de otro punto Q $(x_2;\ f(x_2))$ el cual se encuentre dentro del mismo intervalo” (Leithold 101).

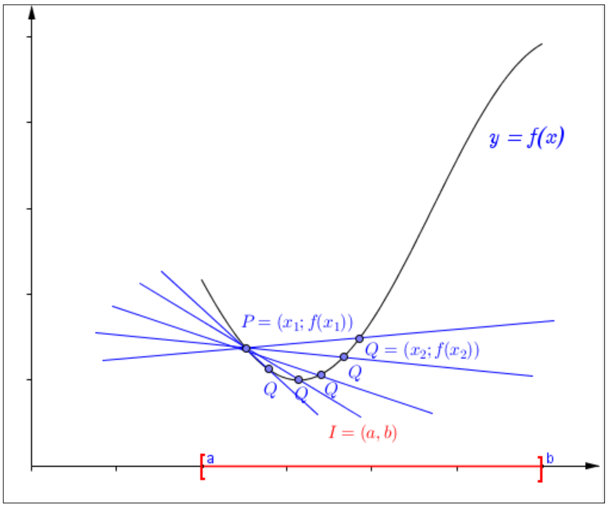
Por estos dos puntos se traza una recta secante que intersecta a los puntos P y Q.



Gráfica 2.3.3.2: Representación de la recta secante que intersecta los puntos P y Q.

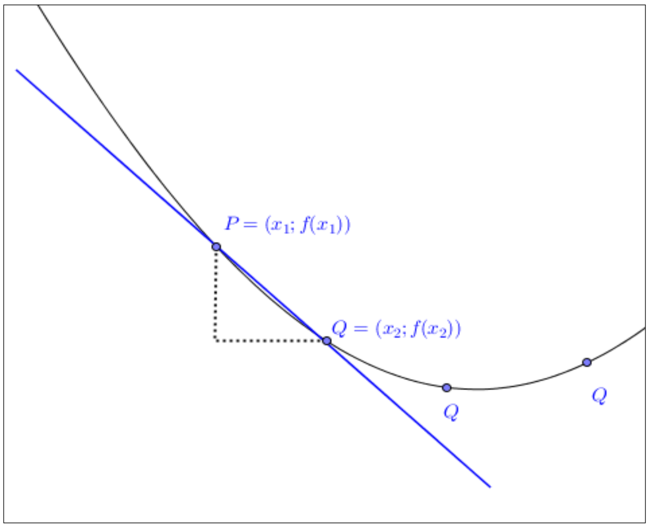
Para este caso, en tal curva mencionada el punto P se ubicó a la izquierda del punto Q, pero no necesariamente debe ser así, estos dos puntos pueden estar ubicados en cualquier lado.

Bien, al hacer girar esta recta en sentido horario (tal es este caso), el punto Q se aproximara al punto P, nuevamente se traza rectas secantes que intersecten el punto fijo P con cada uno de los puntos Q.



Gráfica 2.3.3.3: Representación de las rectas secantes que intersectan el punto P con los puntos Q.

Ahora, al ser P un punto fijo y cuando se toma la aproximación más cercana del punto Q al punto P queda hallar su pendiente con los nuevos valores de sus coordenadas que han sufrido un incremento "Δx". Para esto se forma un triángulo rectángulo.



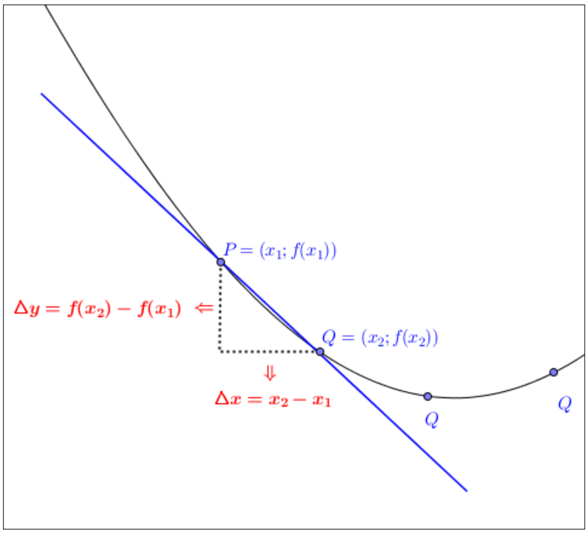
Gráfica 2.3.3.4: Representación de la aproximación más cercana del punto Q a P.

Antes de empezar con el análisis del triángulo rectángulo que se ha formado, Leithold define que el **Incremento de una variable x** "representa el cambio en el valor de x de x_1 a x_2 y puede ser positivo o negativo" (101).

Analizando el triángulo rectángulo de la gráfica 2.3.3.5, se deduce que: $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{x_2 - x_1}$ de donde $\boldsymbol{x_2 = x_1 + \Delta x}$, que al hallar su pendiente se obtiene:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\boldsymbol{x_1 + \Delta x}) - f(x_1)}{\Delta x}$$



Gráfica 2.3.3.5: Representación del triángulo rectángulo formado con la aproximación más cercana del punto Q al punto P.

Conforme Δx tienda a 0, el punto Q se nota que se aproxima y coincide con el punto P de tal forma que la recta que pasa por el punto P, otorga la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE UNA RECTA TANGENTE A UNA CURVA.

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\left(x1, f(x1)\right)$ es la recta que pasa por el punto P con pendiente:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x_1 + \Delta x}) - f(x_1)}{\Delta x} \; si\ este\ límite\ existe.$$

A continuación se presenta la resolución de ejemplos modelos.

Ejemplo 2.3.3.1.- Calcular la pendiente tangente a la curva $y = f(x) = x^2 + 2x$ en el punto (4, 2).

Resolución:

Según la definición de una recta tangente:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x_1 + \Delta x}) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Que al aplicar esta definición en $f(x) = x^2 + 2x$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(\boldsymbol{x + \Delta x})^2 + 2(x + \Delta x)] - (x^2 + 2x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x] - x^2 - 2x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x}{\Delta x} =$$

Reduciendo términos semejantes, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} =$$

Por factor común, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 2)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 2)$$

Al hallar este límite con las respectivas propiedades, se tiene:

$$2x + 0 + 2 =$$

$$2x + 2$$

Por lo tanto $m = 2x + 2$, ahora cuando se evalúa el punto asignado a x, resulta:

$$m = 2(4) + 2 = 10$$

Ejemplo 2.3.3.2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 3x^2 - 2$ en el punto (1, 1). Grafiqué la función de la parábola y de la recta secante.

Resolución:

Según la definición de recta tangente:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x_1} + \Delta \boldsymbol{x}) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Que al aplicar esta definición en $y = 3x^2 - 2$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x})^2 - 2] - (3x^2 - 2)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 2] - 3x^2 + 2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2 - 3x^2 + 2}{\Delta x} =$$

Al reducir términos semejantes, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} =$$

Por factor común, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$\lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x)$

Al hallar este límite con las respectivas propiedades, se tiene $6x + 3(0) = 6x$, que al reemplazar el punto (1, 1) en $6x$, resulta:

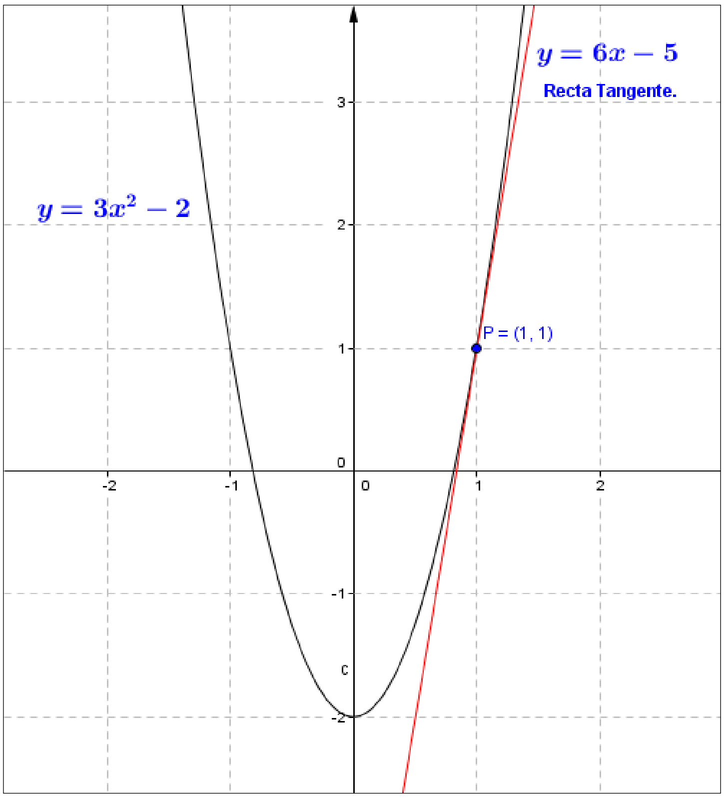
$$m = 6(1) = 6$$

Ahora, para hallar la ecuación de la recta tangente se utiliza la forma punto - pendiente de la ecuación de la recta, siendo esta $y - y_1 = m(x - x_1)$, en la cual al sustituir datos resulta: $y - 1 = 6(x - 1)$

$y - 1 = 6x - 6$

$y = 6x - 5$, que es la ecuación conocida como la recta tangente en el punto (1, 1).

Finalmente, la gráfica de la parábola $y = 3x^2 - 2$ y de la recta tangente $y = 6x - 5$ se presenta a continuación.



Gráfica 1: Representación de la función $y = 3x^2 - 2$
y de la recta tangente $y = 6x - 5$ en el punto (1, 1).

2.4. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

El límite empleado para definir la pendiente de una recta tangente también se usa en la definición de la derivada, su estudio es de gran importancia dentro de la asignatura del Cálculo Diferencial.

2.4.1. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

"La derivada de una función $f(x)$ es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero, se expresa como:

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ si\ este\ límite\ existe.$$

Cuando existe este límite se dice que la función es derivable o que tiene una derivada" (Granville 27), prácticamente se tiene una nueva función siendo esta la "derivada de $\boldsymbol{y}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$".

Dicha función derivable "$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$", proporciona la pendiente de la recta tangente en un punto continuo de una función, la cual se la conoce como la **primera derivada**.

Además de lo anterior, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- "Una función es derivable en x si su derivada en x existe.
- Se llama derivación al proceso de calcular la derivada de una función.
- En un intervalo (a, b), la función es derivable en todos y cada uno de estos puntos de este intervalo" (Larson 99).

Existen algunas notaciones para representar la derivada de una función $y = f(x)$, siendo estas:

$$\frac{dy}{dx}\ ;\ f'(x)\ ;\ y'\ ;\ \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\ ;\ D_x(y)$$

Las notaciones $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ y $f'(x)$, de Leibniz y de Lagrange respectivamente, serán de mayor aplicación en los temas siguientes.

REGLA GENERAL PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

La aplicación de esta regla permite hallar la derivada para cualquier función cuando se hace uso de los siguientes pasos.

Sea $y = f(x)$ (a)

1er. Paso: Se incrementa las variables x y y de cada miembro, lo cual resulta:

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ (b)

2do. Paso: Se resta (b) de (a), lo cual resulta:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3er. Paso: Se divide a cada miembro por Δx, lo cual resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4to. Paso: Se halla el límite de este cociente cuando Δx tiende a 0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El límite así hallado es la derivada buscada.

A continuación se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.1.1. Encuentre la derivada de $f(x) = 9x^3$.

Al aplicar los cuatro pasos de la regla general se tiene:

1. Se incrementa las variables x y y de cada miembro, lo que resulta:

   $$y + \Delta y = 9(x + \Delta x)^3$$

2. Se resta la función incrementada menos la función original, lo que resulta:

   $$\begin{array}{r} y + \Delta y = 9(x + \Delta x)^3 \\ -y = -(9x^3) \\ \hline \Delta y = 9(x + \Delta x)^3 - 9x^3 \end{array}$$

3. Se divide a cada miembro por Δx, lo que resulta:

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9(x + \Delta x)^3 - 9x^3}{\Delta x}$$

   $$= \frac{9[x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x.\Delta x^2 + \Delta x^3] - 9x^3}{\Delta x}$$

   $$= \frac{9x^3 + 27x^2\Delta x + 27x.\Delta x^2 + 9\Delta x^3 - 9x^3}{\Delta x}$$

   Al reducir términos semejantes, se tiene:

$$= \frac{27x^2\Delta x + 27x.\Delta x^2 + 9\Delta x^3}{\Delta x}$$

Al sacar factor común, se obtiene:

$$= \frac{9\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$= 9(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

4. Se halla el límite de este cociente cuando Δx tiende a 0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}[9(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)]$$

Al hallar el límite del segundo miembro con la aplicación de las respectivas propiedades, resulta:

$\frac{dy}{dx} = 27x^2$ o $f'\,(9x^3\,) = 27x^2$ que es la derivada encontrada.

Para encontrar el valor de la derivada en cualquier punto de una curva, Granville propone el siguiente teorema.

TEOREMA 2.4.1. “El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto” (33), se reemplaza el valor asignado a x en la derivada encontrada de $f(x)$.

Observe la resolución del siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.1.2. Encuentre la derivada de $f(x) = 6x^2 - 5$ en $x = 3$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[6(\mathrm{x} + \Delta \mathrm{x})^2 - 5] - (6x^2 - 5)}{\Delta x} \quad \textit{Según la definición de Derivada}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[6(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}\Delta\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}^2) - 5] - 6x^2 + 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{x}\Delta\mathrm{x} + 6\Delta\mathrm{x}^2 - 5 - 6x^2 + 5}{\Delta x}$$

Al reducir términos semejantes, se tiene:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\mathrm{x}\Delta\mathrm{x} + 6\Delta\mathrm{x}^2}{\Delta x}$$

Al sacar factor común, resulta:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta\mathrm{x}(2\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 6(2\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x})$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (12\mathrm{x} + 6\Delta\mathrm{x})$$

Al hallar el límite con las respectivas propiedades, resulta

$= 12\mathrm{x}$

Por lo tanto

$\frac{d}{dx}(6x^2+5) = f'(6x^2+5) = 12x$, es la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de la curva, como $x = 3$ y al reemplazar este valor en la derivada encontrada de $f(x)$, resulta:

$$\frac{d}{dx}(6x^2+5) = 12x = 12(3) = 36 = m\text{: } \mathit{Pendiente\ de\ la\ recta\ tangente}.$$

2.5. REGLAS PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

Es importante que el estudiante conozca las reglas elementales de derivación de funciones tales como la suma, resta, potencia, producto, entre otras, con el fin de que pueda encontrar la derivada de la función a maximizar o minimizar al momento de resolver los problemas prácticos sobre las aplicaciones de la derivada que se presentarán más adelante.

En base a la “Definición de la Derivada” y el procedimiento de los cuatro pasos llamados conjuntamente regla general, se conoció que ambas se las puede emplear para encontrar la derivada de cualquier función.

Bien, existen reglas de derivación que permiten encontrar rápidamente diversas derivadas de funciones ya que facilitan, simplifican y evitan procedimientos largos y tediosos.

El uso de estas reglas se las puede emplear a funciones elementales de uso frecuente.

A continuación se da a conocer las reglas elementales de derivación:

En estas reglas “las variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ representan funciones derivables de la función $\boldsymbol{f}$ donde: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$” (Granville 36).

Conforme se avance en el estudio de las reglas de derivación, se notará que en los ejercicios para el o los términos que posea una función se combinan dichas reglas.

1. Regla de una constante.

Si $\boldsymbol{c}$ es una constante y si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

La derivada de una función constante es siempre igual a cero.

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) = 12$.

Si $c = 12$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{12}) = 0$$

2. **Regla para la Potencia.**

Si $\boldsymbol{n}$ es un número racional y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v^n}$ entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{v^n}) = \boldsymbol{nv^{n-1}}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$$

La derivada de la potencia de una función con exponente entero es igual al producto entre el exponente por la función elevada al mismo exponente menos uno y por la derivada de dicha función.

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) = x^5$.

Si $n = 5$ y $v = x$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x^5}) = 5x^{5-1}(1)$$

$$= 5x^4$$

3. **Regla de la Función Identidad.**

Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ **,** entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}$$

La derivada de una variable para sí misma es igual a la unidad.

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) = x$.

Si $f(x) = x$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] = 1$$

4. **Regla del producto de una constante por una función.**

Si $\boldsymbol{c}$ es una constante y si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cv}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{cv}) = \boldsymbol{c}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$$

La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de esa función.

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) = 9x^4$.

Solución, si $c = 9$ y $v = x^4$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{9x^4}) = 9.\frac{d}{dx}(x^4)$$

$$= 9.4x^{4-1}(1)$$

$$= 36x^3$$

5. **Regla para la Suma y la Diferencia.**

Sea $f(x) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} + \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} - \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dx}}$$

La derivada de una suma o diferencia es igual a la suma o diferencia de sus derivadas.

Estas reglas se amplían a cualquier número finito de términos.

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 3$.

Si $u = 7x^3, v = 2x^2, w = -5x$ y $z = -3$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{7x^3} + \boldsymbol{2x^2} - \boldsymbol{5x} - \boldsymbol{3}) = \frac{d}{dx}(7x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) - \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$= 7.\frac{d}{dx}(x^3) + 2.\frac{d}{dx}(x^2) - 5.\frac{d}{dx}(x) - 0$$

$$= 7.3x^{3-1}(1) + 2.2x^{2-1}(1) - 5.1$$

$$= 21x^2 + 4x - 5$$

6. **Regla para el Producto.**

Sea $f(x) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} + \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

La derivada de un producto, es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más la segunda función por la derivada de la primera función.

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) = 8x^4(5x-3)$.

Si $u = 8x^4$ y $v = (5x-3)$, entonces:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}}[\boldsymbol{8x^4(5x-3)}] = (8x^4).\frac{d}{dx}(5x-3) + (5x-3).\frac{d}{dx}(8x^4)$$

$$= (8x^4).\left[\frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(3)\right] + (5x-3).8\frac{d}{dx}(x^4)$$

$$= (8x^4)\left[5\frac{d}{dx}(x) - 0\right] + (5x-3).8.4x^{4-1}(1)$$

$$= (8x^4)[5(1)] + (5x-3).32x^3$$

$$= 40x^4 + 160x^4 - 96x^3$$

$$= 200x^4 - 96x^3$$

$$= 4x^3(50x-24)$$

La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores

Por ejemplo si $f(x) = \boldsymbol{u.v.w}$, entonces:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(u.v.w) = u.v\frac{dw}{dx} + u.w\frac{dv}{dx} + v.w\frac{du}{dx}}$$

7. Regla para el Cociente.

Sea $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ con $\boldsymbol{v \neq 0,}$ entonces:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}}$$

"La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador" (Granville 42).

Ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) = \frac{3x^6+7}{2x^2}$.

Si $u = 3x^6 + 7$ y $v = 2x^2$, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^6+7}{2x^2}\right)=\frac{(2x^2).\frac{d}{dx}(3x^6+7)-(3x^6+7).\frac{d}{dx}(2x^2)}{(2x^2)^2}$$

$$=\frac{2x^2\left[\frac{d}{dx}(3x^6)+\frac{d}{dx}(7)\right]-(3x^6+7).(2.2x^{2-1})(1)}{4x^4}$$

$$=\frac{2x^2\left[3.\frac{d}{dx}(x^6)+0\right]-(3x^6+7).(4x)}{4x^4}$$

$$=\frac{2x^2(3.6x^{6-1})-(12x^7+28x)}{4x^4}$$

$$=\frac{2x^2(18x^5)-12x^7-28x}{4x^4}$$

$$=\frac{36x^7-12x^7-28x}{4x^4}$$

$$=\frac{24x^7-28x}{4x^4}$$

$$=\frac{4x(6x^6-7)}{4x^4}$$

$$=\frac{6x^6-7}{x^3}$$

2.6. MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

2.6.1. DEFINICIÓN DE EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN.

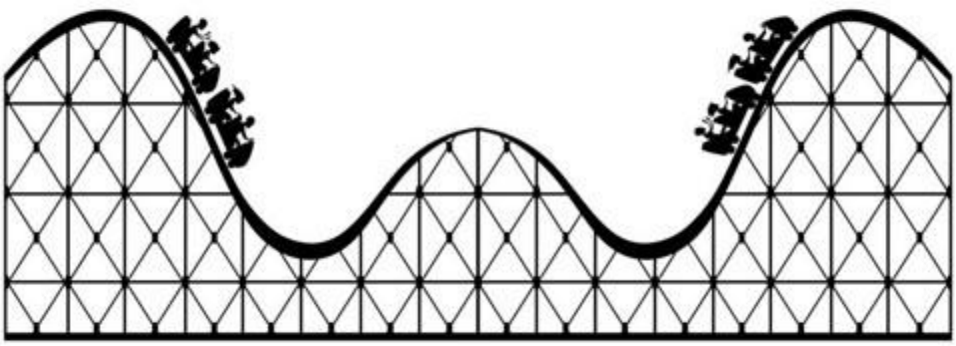
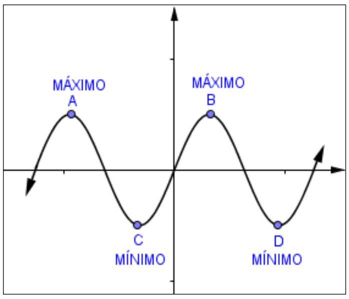


Figura 1: Representación de los valores máximos y mínimos en la vida real.

http://www.viniloscasa.com/14405-thickbox/vinilo-decorativo-montana-rusa.jpg

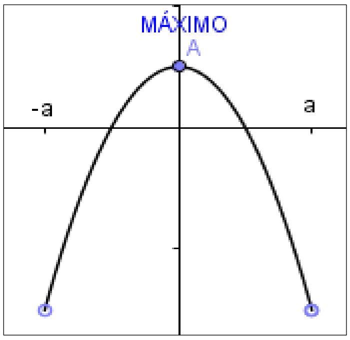
Los máximos y mínimos de una función conocidos como valores extremos, son aquellos valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma una función ya sea en una región en particular o en su dominio total de la curva.

Una función puede alcanzar más de un valor, un solo valor o incluso no puede tener ninguno de los valores extremos.

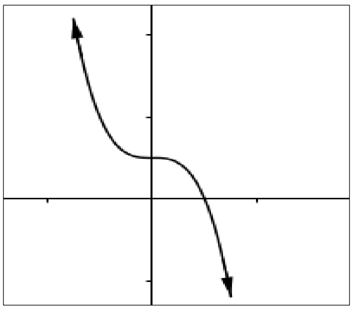


Función continua en ***R***, alcanza valores máximos en los puntos A y B, y valores mínimos en los puntos C y D.

Función continua en el solo un valor máximo



intervalo abierto $(-a,\ a)$ alcanza en el punto A.



Función continua en ***R*** no presenta ni valores máximos ni valores mínimos.

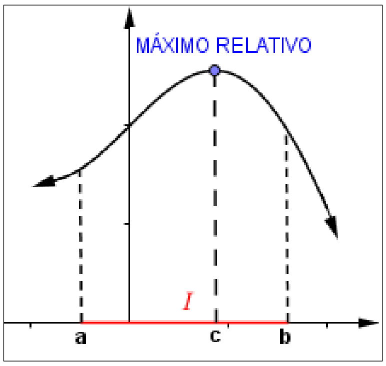
Ahora se presenta las siguientes definiciones.

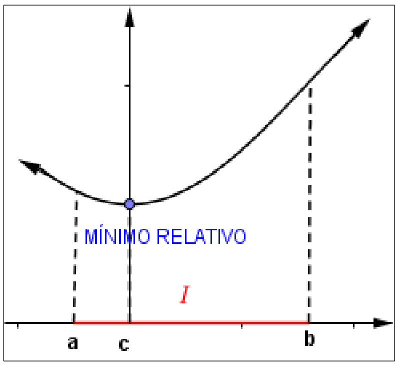
2.6.1.1 DEFINICIÓN DE VALORES EXTREMOS RELATIVOS.

Sea $y = f(x)$ una función definida en el intervalo abierto (a, b) y que contiene al número **c**, entonces la función tiene:

$Un\ máximo\ relativo\ para\ el\ cual\ f(c) \geq f(x) para\ todo\ x\ en\ ese\ intervalo.$

$Un\ mínimo\ relativo\ para\ el\ cual\ f(c)\ \leq f(x)\ para\ todo\ x\ en\ ese\ intervalo.$





Gráfica 2.6.1.1.1: Representación de valores extremos relativos.

Leithold propone un teorema el mismo que debe utilizarse para determinar los números posibles en los que una función tiene un extremo relativo, siendo este.

TEOREMA 2.6.1.1: "Si $f(x)$ existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en **c**, donde $a < c < b$, y además $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$" (Leithold 198).

Ejemplo 2.6.1.1.1. Sea f la función definida por $f(x) = 2x^4 + 4x^3$ encuentre los valores extremos relativos.

Resolución:

Esta función es continua en el dominio $(-\infty, +\infty)$.

Al derivar $f(x)$, se tiene:

$$f' = 8x^3 + 12x^2$$

Al hallar sus raíces cuando se hace $f'(x) = 0$, se obtiene:

$$8x^3 + 12x^2 = 0$$

$$8x^3 + 12x^2 = 0$$

$$4x^2(2x + 3) = 0$$

$$x^2 = 0\,;\, 2x + 3 = 0$$

$$x_1 = 0\,;\;\; x_2 = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Por lo tanto en estas raíces: 0 y -1.5 la función puede presentar un extremo relativo.

Con $x_1 = 0$, $f'(0) = 0$, f puede tener un extremo relativo en cero.

Sin embargo, como $f(0) = 0$, y

$$0 < f(x) \; cuando \; x > 0, y$$

$$0 > f(x) \; cuando \; x < 0.$$

Lo cual significa que en $x_1 = 0$ no se puede aplicar ninguna de las definiciones de valores extremos relativos. De modo que $f(x)$ no cuenta con un extremo relativo en 0.

Ahora, con $x_2 = -1.5, f'(-1.5) = 0, f$ puede tener un extremo relativo en -1.5.

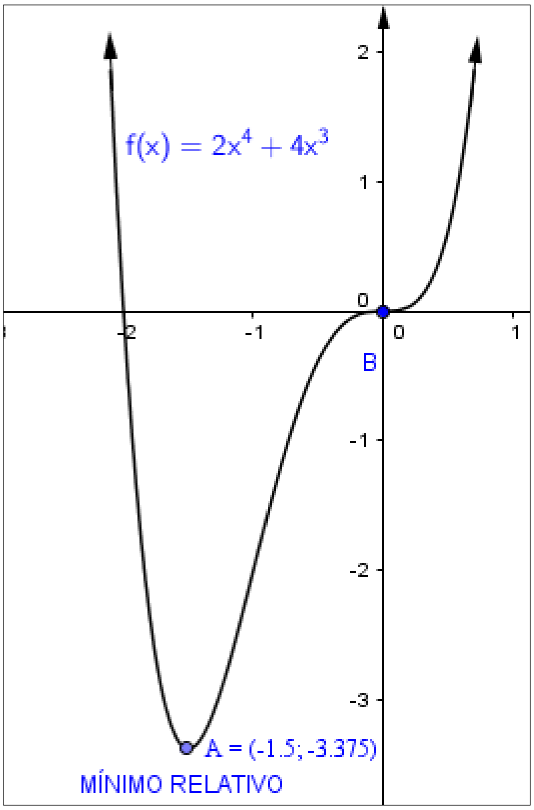
Sin embargo, como $f(-1.5) = -3.375, y$

$-3.375 < f(x)$ $cuando\ x < -1.5\ o\ x > -1.5.$

Lo cual cumple con la definición de un valor mínimo relativo.

En consecuencia, existe un valor mínimo relativo en -3.375 con el punto $x_2 = -1.5$.

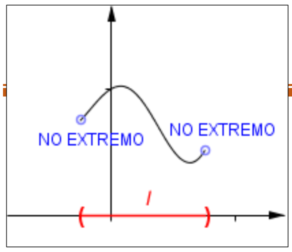
Gráficamente se tiene:



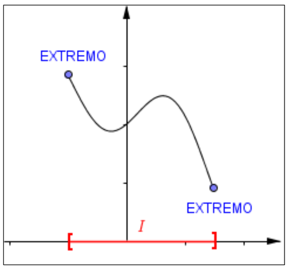
Gráfica 2.6.1.1.1.1: Representación de la función $f(x) = 2x^4 + 4x^3$ continua en $(-\infty, +\infty)$ con su valor mínimo relativo en el punto A.

Los valores extremos de una función se pueden presentar en los siguientes puntos, entre estos se tiene:

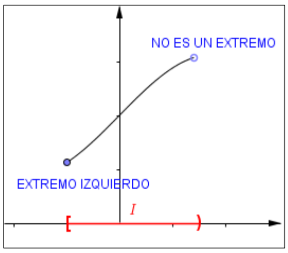
Puntos frontera o extremo: Son el o los puntos que se encuentran en los puntos finales de un Intervalo.



Si el intervalo es abierto, no contiene ninguno de los puntos frontera.

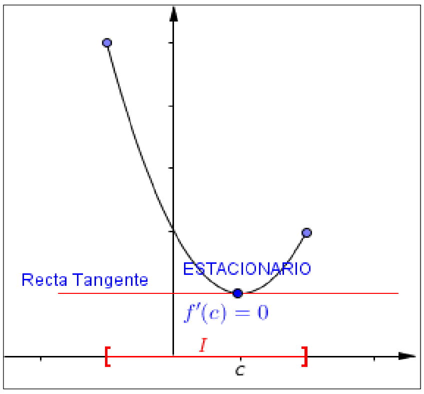


Si el intervalo es cerrado, contiene ambos puntos frontera.

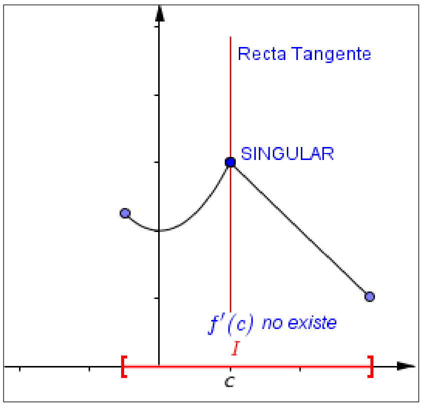


Si el intervalo es cerrado en un extremo y abierto en el otro, solo contiene a su punto frontera izquierda o derecho.

Punto estacionario: Es un punto ***c*** del intervalo I en donde su derivada es igual a cero y su recta tangente en ***c*** es paralela al eje x.
Las raíces encontradas en el ejemplo 2.6.1.1.1 son denominados puntos estacionarios de f.



Punto singular: Es un punto ***c*** del intervalo I en donde $f'(x)$ no existe y su recta tangente en ***c*** es paralela al eje y.



Estos tres tipos de puntos frontera, estacionario y singular conllevan a establecer la siguiente definición.

2.6.1.2 DEFINICIÓN DE UN PUNTO CRÍTICO.

Sea f definida en un intervalo *I* que contiene al punto ***c***. Si $f(c)$ es un valor extremo, entonces ***c*** debe ser un punto crítico; es decir, ***c*** es alguno de los siguientes:

"Un punto frontera de I;

Un punto estacionario de f; es decir, un punto donde $f'(c) = 0$; o

Un punto singular de f; esto es, un punto en donde $f'(c)$ no existe" (Purcell 152).

Observe la resolución del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.1.2.1. Encuentre los puntos críticos de $f(x) = 2x^3 + 6x - 4$ en el intervalo cerrado [-5, 2].

Resolución:

Puntos frontera o extremo:

Al estar $f(x)$ en un intervalo cerrado los puntos frontera son los puntos finales -5 y 2.

Puntos estacionarios:

Derivando $f(x)$ e igualando a cero, resulta:

$f'(x) = 6x^2 + 6x = 0$

$6x(x - 1) = 0$

Sus raíces son:

$x_1 = 0;\ (x - 1) = 0$

$x_2 = 1$

Por lo tanto los puntos estacionarios son: 0 y 1.

Punto singular: no existe debido a que la derivada de $f(x)$ existe.

En consecuencia, los puntos críticos de $f(x) = 2x^3 + 6x - 4$ son: $-5,\ 0,\ 1$ y 2.

Con frecuencia se trata con funciones definidas en un intervalo de cualquier tipo, y se desea determinar el valor de función más grande o más pequeño en el intervalo. Estos valores son denominados valores extremos absolutos, cuya definición se presenta a continuación.

2.6.1.3 DEFINICIÓN DE VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS.

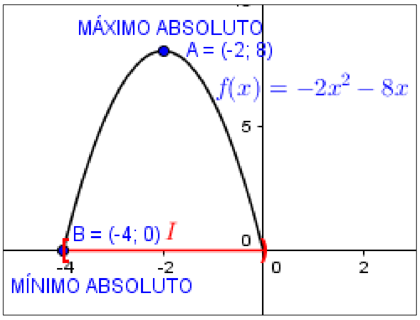
Sea $y = f(x)$ definida sobre un intervalo I el cual contiene al punto ***c***, entonces la función tiene:

$Un\ valor\ mínimo\ absoluto\ para\ el\ cual\ f(c)\ \leq\ f(x)\ para\ todo\ x\ en\ I.$

$Un\ valor\ máximo\ absoluto\ para\ el\ cual\ f(c)\ \geq\ f(x)\ para\ todo\ x\ en\ I.$

A continuación se presenta ejemplos en los cuales se da una función y un intervalo *I*.

Ejemplo 2.6.1.3.1. Analice los valores extremos absolutos sí $f(x) = -2x^2 - 8x$ continua en el intervalo [-4, 0) en la gráfica que se presenta a continuación.

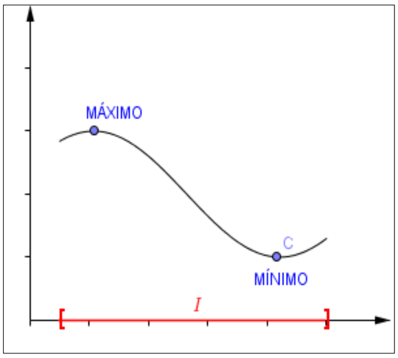


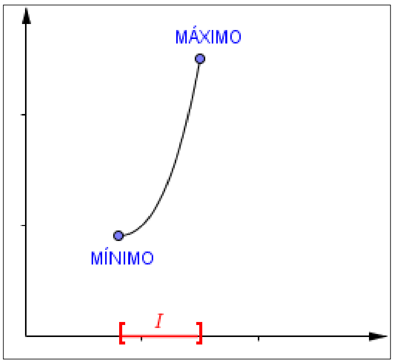
En base a la gráfica, la función $f(x)$ presenta un valor máximo absoluto de -2 en [-4, 0) es decir ocurre en el punto estacionario; y además presenta un valor mínimo absoluto en -4 es decir en el punto frontera derecho.

El análisis general de este ejemplo se realiza más adelante después de dar a conocer el teorema del valor extremos y la regla para calcular los valores extremos absolutos.

Si una función es continua en un intervalo cerrado, Larson expone un teorema que asegura la existencia de un valor máximo o mínimo absoluto en dicho intervalo.

TEOREMA DEL VALOR EXTREMO. “Si f es continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo” (164).





Gráfica 2.6.1.3: Representación de los valores extremos absolutos de una función continua en el intervalo [a, b].

Un extremo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado debe ser un extremo relativo o un valor de función en un extremo del intervalo, de modo que los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado [a, b] pueden determinarse empleando la siguiente regla.

2.6.1.4 REGLA PARA CALCULAR LOS VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN CONTINUA EN UN INTERVALO CERRADO.

Esta regla consiste en seguir ordenadamente los siguientes pasos, se los aplica también para la resolución de ejercicios de aplicaciones de la derivada.

Paso 1: Encontrar la primera derivada de $f(x)$.

Paso 2: Igualar la primera derivada a cero y hallar los valores de las raíces (puntos críticos) de la ecuación resultante.

Paso 3: Evaluar en $f(x)$ cada uno de estos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el valor más pequeño es el valor mínimo (Purcell 163).

En los siguientes ejemplos que se presentan a continuación, se muestra ejemplos modelos para ver si es que existen los valores extremos absolutos.

Ejemplo 2.6.1.4.1. Calcular los valores extremos absolutos de $f(x) = -2x^2 - 8x$ continua en el intervalo [-4, 0).

Al aplicar los pasos de la regla para calcular los valores extremos absolutos, se tiene:

Paso 1: Al derivar $f(x)$ con las respectivas reglas de derivación, se tiene:

$$f'(x) = -4x - 8$$

Paso 2: Al igualar $f'(x)$ a cero y al hallar sus raíces, se obtiene:

$$-4x - 8 = 0$$

$$-4x = 8$$

$$-x = \frac{8}{4}$$

$$x = -2$$

Por lo tanto los puntos críticos de $f(x)$ son: $\mathbf{-4}\ y\ \mathbf{-2}$.

Paso 3: Al evaluar cada uno de estos puntos críticos en $f(x)$, se tiene:

$$f(-4) = -2(-4)^2 - 8(-4) = 0$$

$$f(-2) = -2(-2)^2 - 8(-2) = 8$$

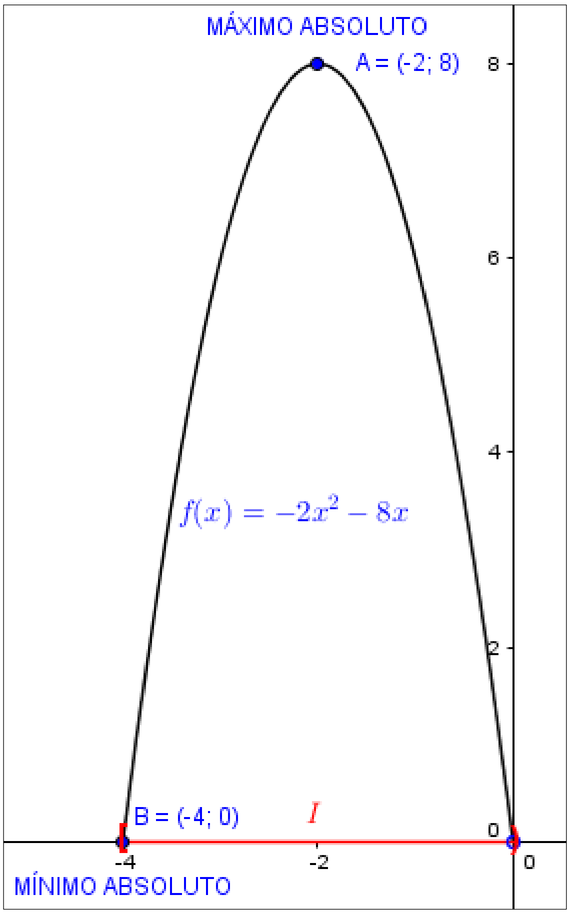
Se observa que el mayor de estos valores es 8 y el valor más pequeño es 0.

En consecuencia, existe un:

$$Máximo\ Absoluto\ de\ 8, en\ el\ punto\ x = -2.$$

$$Mínimo\ Absoluto\ de\ 0, en\ el\ punto\ x = -4.$$

Gráficamente se tiene:



Gráfica 2.6.1.4.1: Representación de la función $f(x) = -2x^2 - 8x$ continua en [-4, 0) con sus valores extremos absolutos.

Bien, ahora se presenta y trata el tema práctico de este capítulo.

2.7. APLICACIONES DE LA DERIVADA.

2.7.1. INTRODUCCIÓN.

En nuestra vida cotidiana, a menudo se nos presenta una gran variedad de problemas en la cual nos encontramos con la necesidad de encontrar la mejor forma de hacer algo. Por ejemplo en el ámbito económico se desea maximizar ganancias o reducir costos de productos, en geometría por lo general se desea maximizar áreas o volúmenes, entre otras posibilidades, requieren que estos problemas se formulen de tal modo que conlleve a buscar maximizar o minimizar una función y encontrar donde se alcanzan estos valores de un conjunto específico (Purcell 151).

Es aquí que el estudio del cálculo diferencial se convierte en una herramienta importante para utilizar mecanismos y encontrar una respuesta al resolver este tipo de problemas.

Una vez que se conoció y estudió los conceptos sobre la pendiente de la recta tangente, la derivada, las reglas de derivación, los valores máximos y mínimos de una función, se continúa con la aplicación de estos contenidos a la resolución de ejercicios prácticos que se planteen sobre aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos.

2.7.2. EJERCICIOS DE APLICACIONES DE LA DERIVADA: MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

En los problemas que se presentan a continuación se necesita encontrar simplemente el valor máximo o mínimo que la función presente, teniendo en cuenta el tipo de dominio que posee dicha función del ejercicio para saber si se trata de un valor extremo relativo o absoluto.

Durante la resolución de los ejercicios se debe tener presente las siguientes instrucciones que plantea Barrientos.

a) Escribir una ecuación que represente la cantidad que se desea maximizar o minimizar y hacer una gráfica (si es necesario) adecuada de la situación.

b) Si la ecuación contiene más de una variable se debe encontrar otra ecuación que relacione las variables, para expresar la ecuación en función de una única variable.
c) A la función resultante se le aplica la regla para calcular los valores extremos de una función teniendo en cuenta el dominio de la función.
d) Concluir cuál es el punto de máximo o mínimo y darle respuesta a la pregunta del problema (77).

2.7.2.1 EJERCICIO MODELO 1.

Figura 2.7.2.1. Modelo de la caja sin tapa.
http://www.suministrospanaderiasguzman.es/imagenes/bandejasycarros/LATA%204%20LADOS%20RECTOS.jpg

Un granjero desea construir un caja sin tapa para poder colocar alimento para sus aves, para hacerlo posee de un pedazo de lámina metálica rectangular cuyas dimensiones tienen de ancho 25 cm y de largo 60 cm, para la altura de la caja a construir se recortará cuadrados idénticos de las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados cortados del material a utilizar de tal manera que se forme la caja. Encuentre las dimensiones de la caja con volumen máximo ¿Cuál es el valor de este volumen?

DESARROLLO DEL EJERCICIO:

En este problema los datos que se conocen son:

Largo de la lámina metálica rectangular = 60 cm.

Ancho de la lámina metálica rectangular = 25 cm.

La incógnita designada para este ejercicio es:

x: *Representa la altura de la caja a construir y el ancho del cuadrado que se recortará.*

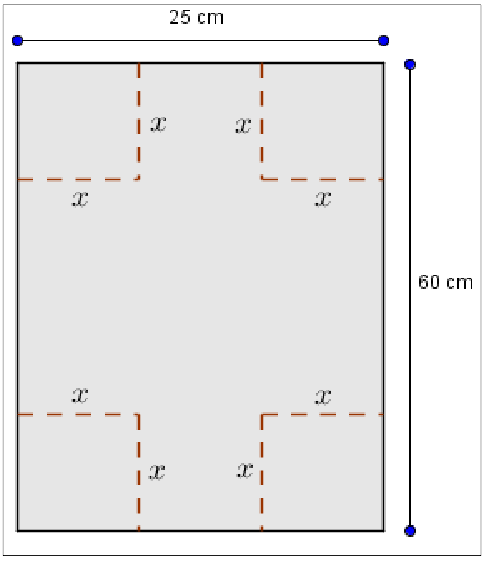
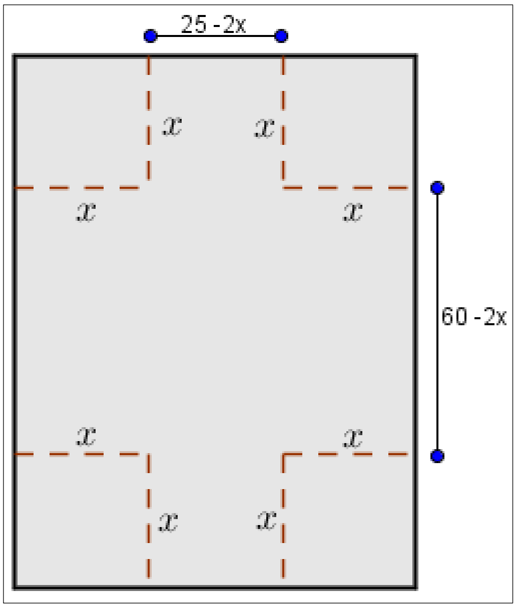


Figura 2.7.2.1.1: Representación de la lámina metálica rectangular con sus dimensiones y los cuadrados que se recortarán en cada esquina.

Para hallar el largo de la caja a construir se debe hacer lo siguiente:

Restar los 60 cm menos la suma de los dos lados de los cuadrados del largo de la lámina, es decir: $60 - 2x$.



Para hallar el ancho de la caja a construir se debe proceder de la misma manera.

Restar los 25 cm menos la suma de los dos lados de los cuadrados del ancho de la lámina, es decir: $25 - 2x$.

Al realizar una gráfica de acuerdo a la situación del ejercicio se obtiene:

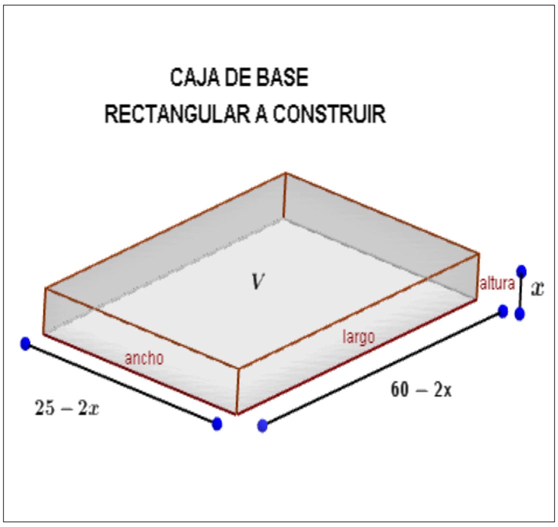


Figura 2.7.2.1.2: Representación de la caja rectangular que se desea construir.

Por la figura 2.7.2.1.2 el volumen para esta caja es igual:

$$V = x(25-2x)(60-2x)$$

$$V = (25x-2x^2)(60-2x)$$

$$V = 1500x - 50x^2 - 120x^2 + 4x^3$$

$$V = 4x^3 - 170x^2 + 1500x$$

Por lo tanto: $V(x) = 4x^3 - 170x^2 + 1500x$ es la ecuación que se desea maximizar.

Ahora, x no puede ser menor a 0 ni mayor a 12.5 cm.

Por lo tanto: [0; 12.5] es el dominio de la ecuación a maximizar.

Como $V(x)$ es continua en este dominio, se sabe que por el teorema del valor extremo que en este intervalo V presenta un máximo absoluto.

Al aplicar los pasos de la regla para calcular los valores extremos de una función, se tiene:

Paso 1: Derivar la función $V(x)$.

Al aplicar la regla de una constante por una función a cada término, se obtiene:

$$\frac{dV}{dx} = V'(x) = 12x^2 - 340x + 1500$$

Paso 2: Al igualar $V'(x)$ a cero y al hallar sus raíces, se tiene:

$$12x^2 - 340x + 1500 = 0$$

$$4(3x^2 - 85x + 375) = 0$$

$$3x^2 - 85x + 375 = 0$$

$$x=\frac{-(-85)\pm\sqrt{(-85)^2-4(3)(375)}}{2(3)}=\frac{85\pm\sqrt{7225-4500}}{6}=\frac{85\pm\sqrt{2725}}{6}$$

Los puntos estacionarios de $V(x)$ son: $x_1=\frac{85+\sqrt{2725}}{6}\approx 22.87$

$$x_2=\frac{85-\sqrt{2725}}{6}\approx 5.47$$

Se puede apreciar que $x_1=22.87$ no es parte del intervalo [0; 12.5].
En consecuencia, existen solo tres puntos críticos: 0, 5.47 y 12.5.
Paso 3: Al evaluar estos puntos críticos en la función $V(x)$, se tiene:

$V(5.47)=4(5.47)^3-170(5.47)^2+1500(5.47)=3773.12\text{ cm}^3$

$V(0)=4(0)^3-170(0)^2+1500(0)=0\text{ cm}^3$

$V(12.5)=4(12.5)^3-170(12.5)^2+1500(12.5)=0\text{ cm}^3$

Lo cual resulta que el mayor de estos valores es 3773.12.

Observe que cuando $x=0$ da un volumen igual a cero, esto se debe que cuando el ancho de las esquinas es cero no hay que doblar la lámina metálica hacia arriba, y cuando $x=12.5$ también da un volumen cero, esto se debe a que el pedazo de lámina se dobla a la mitad, de modo que no tiene base.

EN CONCLUSIÓN: La caja tiene un volumen máximo de 3773.12 cm^3 si $x=5.47$, es decir, el granjero debe construir la caja con un ancho de 14.06 cm, un largo de 49.06 cm y una altura de 5.47 cm.

2.7.2.2 EJERCICIO MODELO 2.

Se desea construir un marco para una ventana rectangular de 3 m^2 de superficie. El costo del material a utilizar cuesta 3 $ el metro lineal de los tramos horizontales y 4$ de los tramos verticales de la ventana. Encuentre las dimensiones de la ventana para que el costo del marco sea mínimo. ¿Cuál es este valor?

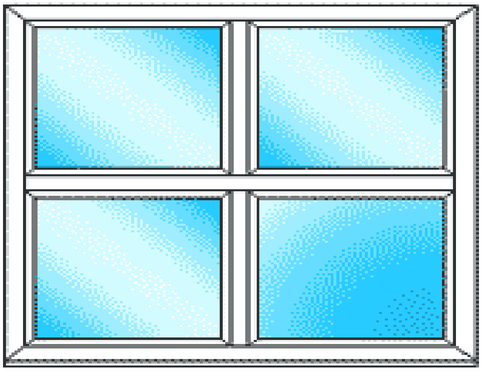


Figura 2.7.2.2: Modelo de la ventana
http://www.ferrodiver.pt/i/fixa2.gif

DESARROLLO DEL EJERCICIO.

Al realizar una gráfica de acuerdo a la situación del ejercicio, se tiene:

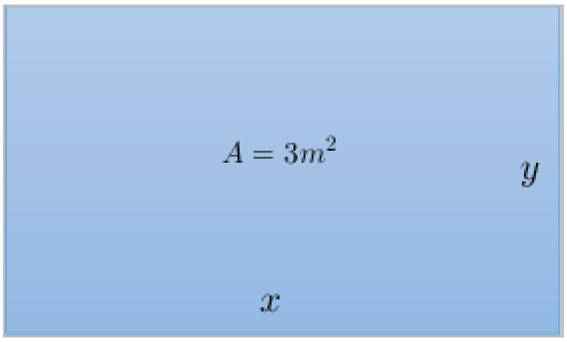


Figura 2.7.2.1: Representación del largo y ancho de la ventana rectangular.

En este problema el dato que se conoce es:

Área de la ventana = $3m^2$.

Las incógnitas designadas para este ejercicio son:

x: Representa el largo de la ventana

y: Representa el ancho de la ventana

Se sabe que el área de un rectángulo es igual a:

$A = base \times altura$

Por lo tanto, el área de esta ventana es:

$A = x.y = 3$ (1)

El perímetro de esta ventana es igual a la suma de todos los lados de la ventana:

$P = x + x + y + y = 2x + 2y$

El costo del marco de la ventana es igual al valor por cada metro lineal:

$C = 3.2x + 4.2y$

$C = 6x + 8y$ (2)

Esta ecuación contiene más de una variable, se debe encontrar otra ecuación que relacione las variables para expresar la ecuación en función de una única variable.

Para esto se debe despejar y de (1) y sustituir en (2) lo que resulta:

$C(x) = 6x + 8\left(\frac{3}{x}\right) = 6x + \frac{24}{x}$ que es la ecuación que se desea minimizar.

Ahora, x no puede ser 0 porque no está definido en $C(x)$, y tampoco menor que 0 porque da un área negativa.

Por lo tanto, el dominio de esta función es $(0,\infty)$, al tener este tipo de intervalo abierto se sabe que se trata de un valor extremo relativo.

Para continuar con el desarrollo del ejercicio se debe proceder a hacer lo siguiente:

Primero: Derivar la función $C(x)$.

Al emplear la regla de una constante por una función al primer término y la regla del cociente al segundo término, resulta:

$$\frac{dC}{dx} = C'(x) = 6(1) + \frac{x(0) - 24(1)}{x^2} = 6 - \frac{24}{x^2}$$

Segundo: Hallar las raíces de la función al igualar $C'(x)$ a cero, se tiene:

$$6 - \frac{24}{x^2} = 0$$

$$\frac{6x^2 - 24}{x^2} = 0$$

$$6x^2 - 24 = 0$$

$$6x^2 = 24$$

$$x^2 = \frac{24}{6}$$

$$x^2 = \pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Por lo tanto en estas raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$ la función debe presentar el valor mínimo relativo, pero se observa que $x_2 = -2$ no es parte del intervalo $(0,\infty)$.

En consecuencia, existe un solo punto crítico en $x_1 = 2$.

Ahora este valor debe corresponder a un mínimo relativo.

Si $x_1 = 2, C'(2) = 0, C$ puede tener un extremo relativo en 2.

Sin embargo, como $C(2) = 24, y$

$24 < C(x)\ cuando\ x < 2\ o\ x > 2.$

Lo cual cumple con la definición de un valor mínimo relativo.

EN CONCLUSIÓN: El marco de la ventana tiene un costo mínimo de 24 $ si $x = 2$, es decir, las dimensiones de la ventana deben tener un ancho de 1.5 m y un largo de 2 m.

2.7.2.3 EJERCICIO MODELO 3.

Figura 2.7.2.3.
http://thumbs.dreamstime.com/t/fabrik-9421932.jpg

Diariamente una fábrica produce x artículos que se pueden vender a un precio de 200 dólares por unidad. Si $C(x) = 3x^2 + 20x + 1200$ es el costo de producción diaria al producir x artículos. Determine el número de unidades que se deben producir diariamente a fin de que la fábrica obtenga la máxima ganancia.

DESARROLLO DEL EJERCICIO.

En este problema el dato que se conoce es:

Precio de cada producto = 200$.

La incógnita designada para este ejercicio es:

x: Número de artículos producidos diariamente.

Además se tiene que la función del costo de producción diaria es:

$C(x) = 3x^2 + 20x + 1200$

Se sabe que la Ganancia o Utilidad es igual al Ingreso menos el Costo de producción, es decir

$G = I - C$ (1)

De donde, I es igual al precio de cada unidad multiplicado por el número de unidades producidas.

$I = 200.x$, y

$G = I - C = 200x - (3x^2 + 20x + 1200)$

$G(x) = 200x - 3x^2 - 20x - 1200$

$G(x) = 180x - 3x^2 - 1200$, es la función que se desea maximizar que el dominio: $[(30 - 5\sqrt{20}); (30 + 5\sqrt{20})]$ que son raíces de dicha función.

Como $G(x)$ es continua en este dominio, se sabe que por el teorema del valor extremo que en este intervalo G tiene un valor máximo absoluto.

Al aplicar la regla para calcular los valores extremos de una función, se tiene

Paso 1: Derivar la función $G(x)$.

Al emplear la regla de una constante por una función al primer y segundo término y la regla de una constante al tercer término, resulta:

$$\frac{dG}{dx} = G'(x) = 180(1) - 6x - 0$$

Paso 2: Al igualar $G'(x)$ a cero y al hallar sus raíces, se obtiene:

$$180 - 6x = 0$$

$$-6x = -180$$

$$x = \frac{180}{6}$$

$$x = 30$$

Por lo tanto, el punto estacionario de $G(x)$ es $x = 30$.

Se observa que existen solo tres puntos críticos: $\left(30 - 5\sqrt{20}\right), 30\ y\ (30 + 5\sqrt{20})$.

Paso 3: Al evaluar los puntos críticos en $G(x)$, se tiene:

$$G\left(30 - 5\sqrt{20}\right) = 180(30 - 5\sqrt{20}) - 3(30 - 5\sqrt{20})^2 - 1200 = 0\ \$$$

$$G(30) = 180(30) - 3(30)^2 - 1200 = 1500\ \$$$

$$G\left(30 + 5\sqrt{20}\right) = 180(30 + 5\sqrt{20}) - 3(30 + 5\sqrt{20})^2 - 1200 = 0\ \$$$

Lo cual resulta que el mayor de estos valores es 1500.

EN CONCLUSIÓN: El números de artículos que la fábrica debe producir diariamente es $x = 30$ para que su ganancia máxima sea de 1500 $.

2.7.2.4 EJERCICIO MODELO 4.

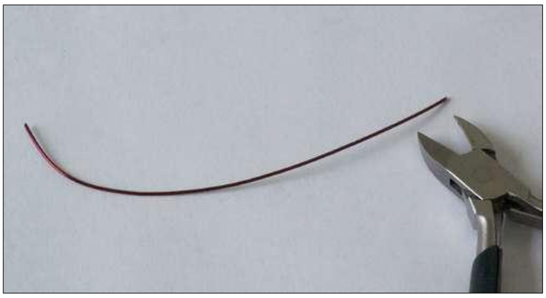


Figura 2.7.2.4: Modelo de alambre.
http://manualidades.name/wp-content/uploads/2012/04/120.jpg

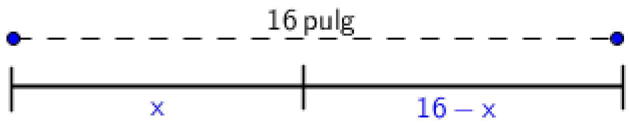
Un pedazo de alambre de 16 pulgadas de largo, se corta en dos pedazos. Una parte se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar una circunferencia. Halle cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas de estas figuras sea mínima.

DESARROLLO DEL EJERCICIO.

En este problema el dato que se conoce es:

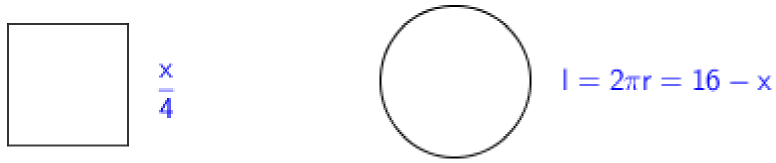
Largo del alambre = 16 pulgadas.

Al usar la siguiente figura, se tiene:



x: es el pedazo de alambre para formar el cuadrado, y

$16 - x$: es el pedazo de alambre para formar la circunferencia, que gráficamente se tiene:



Se sabe que:

El área del cuadrado es: $A = l^2 = (\frac{x}{4})^2$

El área del círculo es: $A = \pi . r^2$

Por lo tanto, el área total $A_T = A_{cuadrado} + A_{círculo}$

$$A_T = (\frac{x}{4})^2 + \pi . r^2 \qquad (1)$$

Al despeja "r" de la longitud de la circunferencia, se tiene: $r = \frac{16-x}{2\pi}$ que al reemplazar en (1) da: $A_T = \frac{x^2}{16} + \pi . (\frac{16-x}{2\pi})^2$ y al resolver se obtiene:

$A_T(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(16-x)^2}{4\pi}$, que es la función que se desea minimizar en el dominio [0; 16] por la razón de que la longitud del alambre es de 16 pulgadas.

Como $A_T(x)$ es continua en este dominio, se sabe que por el teorema del valor extremo que en este intervalo A_T tiene un valor mínimo absoluto.

Al Aplicar la regla para calcular los valores extremos de una función, se tiene:

Paso 1: Derivar la función $A_T(x)$.

Al emplear la regla de una constante por una función al primer y segundo término, resulta:

$$\frac{dA_T}{dx} = A_T{}'(x) = \frac{1}{16} . 2x + \frac{1}{4\pi} . 2(16 - x)(-1) = \frac{x}{8} - \frac{(16 - x)}{2\pi}$$

Paso 2: Al igualar $A_T{}'(x)$ a cero y al hallar sus raíces, se obtiene:

$$\frac{x}{8} - \frac{(16-x)}{2\pi} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{(16-x)}{\pi}\right) = 0$$

$$\frac{x}{4} = \frac{(16-x)}{\pi}$$

$$\pi x = 64 - 4x$$

$$\pi x + 4x = 64$$

$$x(\pi + 4) = 64$$

$$x = \frac{64}{\pi + 4} \approx 8.96$$

Por lo tanto, el punto estacionario de $A_T{}'(x)$ es $x \approx 8.96$

Se observa que existen solo tres puntos críticos: $(0,\ 8.96\ y\ 16)$.

Paso 3: Al evaluar los puntos críticos en $A_T(x)$, se tiene:

$$A_T(0) = \frac{0^2}{16} + \frac{(16-0)^2}{4\pi} \approx 20.37\ pulg^2$$

$$A_T(8.96) = \frac{8.96^2}{16} + \frac{(16-8.96)^2}{4\pi} \approx 8.96\ pulg^2$$

$$A_T(16) = \frac{16^2}{16} + \frac{(16-16)^2}{4\pi} = 16\ pulg^2$$

Lo cual resulta que el menor de estos valores es 8.96.

EN CONCLUSIÓN: El alambre debe cortarse cuando $x =\ 8.96$ pulgadas para que la suma de las áreas sea mínima con 8.96 pulgadas cuadradas.

CAPÍTULO III

DESCRIPCIÓN Y ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA.

3.1. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA.

Los contenidos que abarca y que abordan ciertos temas de la asignatura del Cálculo Diferencial son los que se caracterizan por ser abstractos. Está materia es la que se presenta en el currículo escolar de los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.

La presente propuesta consiste en elaborar objetos de aprendizaje (OA), que son considerados como un recurso educativo que se basa en un modelo constructivista por la razón que:

> Un objeto de aprendizaje es más abierto, no "lleva de la mano" al alumno a través de una serie de temas o actividades de aprendizaje, sino más bien plantea un problema general a resolver, ofrece los recursos para que el alumno los revise, puede haber apoyo en el proceso, y al final el alumno construye, generalmente mediante una actividad de aprendizaje, el conocimiento que se pretendía para una unidad o tema de aprendizaje (Peñalosa y Landa 26).

El OA se convierte en un material complementario de apoyo para el docente y estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para elaborar un objeto de aprendizaje fue necesario seguir una secuencia y una organización adecuada para desarrollar y explicar una unidad temática.

En la presente propuesta se elaboró 5 Objetos de Aprendizaje, los mismos que abordan y desarrollan los siguientes temas:
Parte Teórica:

- OA-1: Conocimientos Previos: Pendiente de una recta y Límite de una función.
- OA-2: La Derivada de una Función.

- OA-3: Reglas para encontrar la derivada de una función.
- OA-4: Valores máximos y mínimos de una función, y

Parte Práctica:

- OA-5: Aplicaciones de la derivada: resolución de problemas prácticos de máximos y mínimos.

La elaboración de cada OA, demanda de un diseño instruccional mínimo.

Cada uno de estos OA está representado a través de componentes internos los mismos que se encuentran estructurados, contenidos y presentados en un menú principal en el cual se muestra el desarrollo ordenado de cada OA.

Entre los componentes internos que posee un OA, se tiene y presenta a los siguientes:

- Presentación.
- Introducción.
- Objetivos.
- Contenido Teórico.
- Actividades para el Aprendizaje.
- Autoevaluación.
- Conclusión, y finalmente una
- Referencia.

Para el componente de “Contenido Teórico” se extiende y se muestra en varias secciones.

Conjuntamente con estos componentes, cada OA detalla sus propios metadatos.

La metodología para la elaboración de OAs se basa en la propuesta presentada por el proyecto de investigación DIUC: “Impacto de un proceso de inducción mediante OA a los alumnos de primer año de la Universidad de Cuenca”, el mismo que plantea el uso de dos modelos de diseños basados en: una Guía Didáctica y Guía de Distribución de Pantallas.

Las Guías Didácticas que se muestran más adelante, son las que contienen y detallan los contenidos que posee cada uno de los componentes internos de cada OA; y las Guías de Distribución de Pantallas que se muestran también más adelante, son las que indican el espacio de distribución que ocupa la parte textual, gráfica, de imágenes, videos, etc. en cada sección el mismo que contiene cada componente interno. Estas guías fueron necesarias realizarlas para elaborar cada OA.

Como aporte de esta propuesta, se plantea que en el proceso de enseñanza – aprendizaje, se le considere al estudiante como ejecutor y protagonista de su aprendizaje; y en segundo lugar al docente como facilitador de los medios disponibles en su salón o área de trabajo.

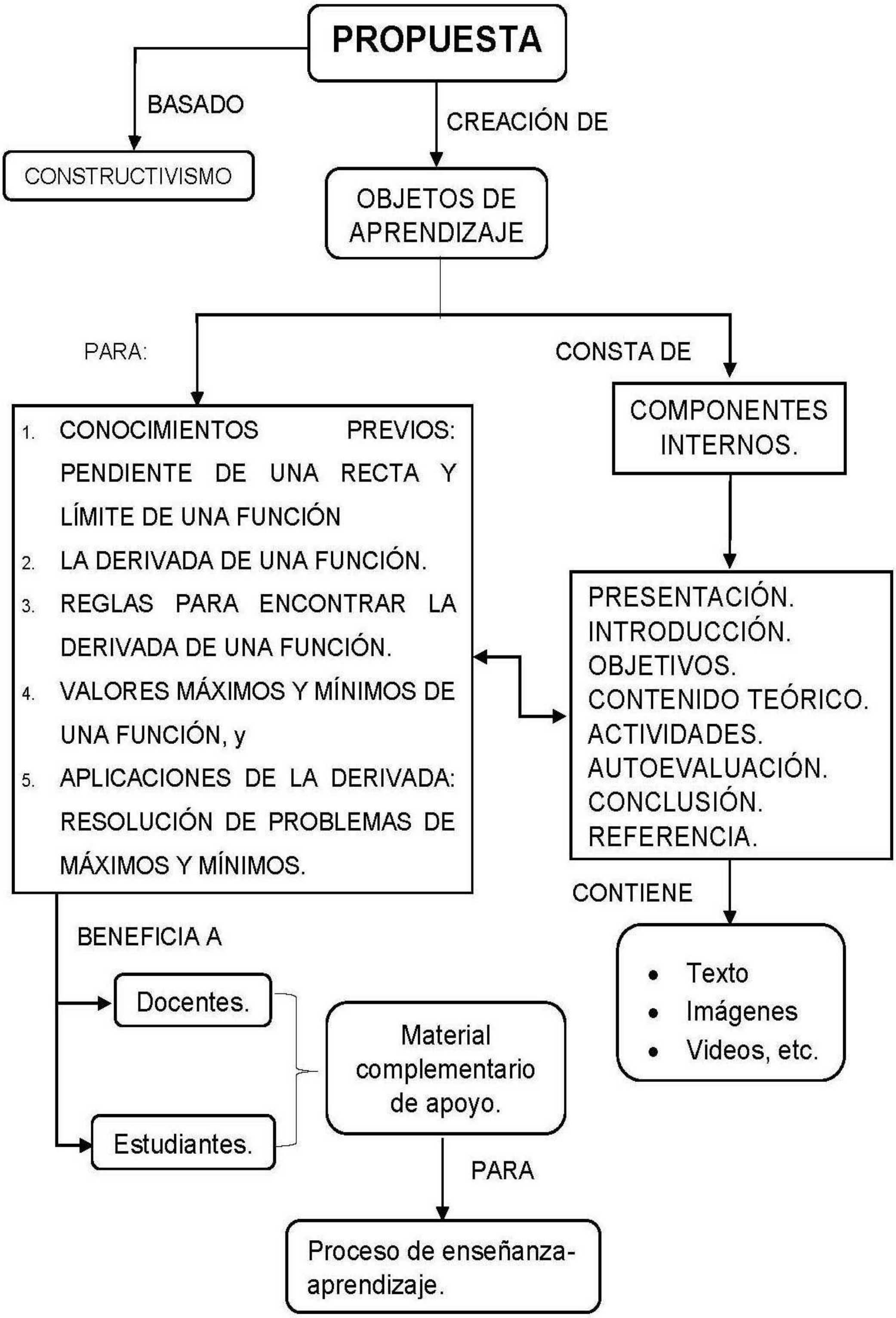
Para elaborar los objetos de aprendizaje se utilizó el software de libre acceso denominado "EXELEARNING"[2], que según Avello y Martín lo definen como "un entorno de desarrollo para auxiliar a educadores en general, a diseñar, desarrollar y publicar material para la enseñanza y aprendizaje basado en web, su característica principal es su fácil utilización" (2).

Para desarrollar una unidad temática este software dispone de una gran variedad de idevices definidos como elementos que pueden insertarse para crear y exponer un contenido educativo, entre estos y los que se utilizó en la elaboración de cada OA se tiene:

- Texto libre: Permite editar la parte teórica del tema de cada OA, puede incluirse imágenes, ecuaciones matemáticas, videos, gifs animados, avatar animado, tablas, texto, etc.
- Actividades: De rellenar espacios en blanco, de elección múltiple, de selección múltiple, de verdadero y falso.
- Experimental: Ordenar objetos.
- Sitios Web: Permite insertar páginas web externas, esto funciona con conexión a Internet. Estos idevices se los utilizó en cada componente interno dependiendo los contenidos que se plantearon.

[2] El software "EXELEARNIG" se encuentra disponible y el mismo que se puede descargar de la siguiente dirección web: http://exelearning.net/

3.2. ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA.



A continuación, se describe cada uno de los componentes internos que conforman los OA.

3.3. COMPONENTES DE LOS OBJETOS DE APRENDIZAJE.

La descripción se realizó de forma general por la razón que la estructura que posee y con la que cuenta cada OA es la misma que adquiere el resto de OA.

COMPONENTES:

a. PRESENTACIÓN.

Sección constituida por un escudo de la Universidad de Cuenca, el nombre de la Facultad, la carrera de Matemáticas y Física, el título, el nombre del diseñador y coordinador del OA.

Ilustración 1: Componente "PRESENTACIÓN" del OA: Conocimientos Previos.

b. INTRODUCCIÓN.

Esta sección está constituida por una breve introducción que aborda al tema tratado en el recurso, cada OA contiene una imagen sobre el tema desarrollado.

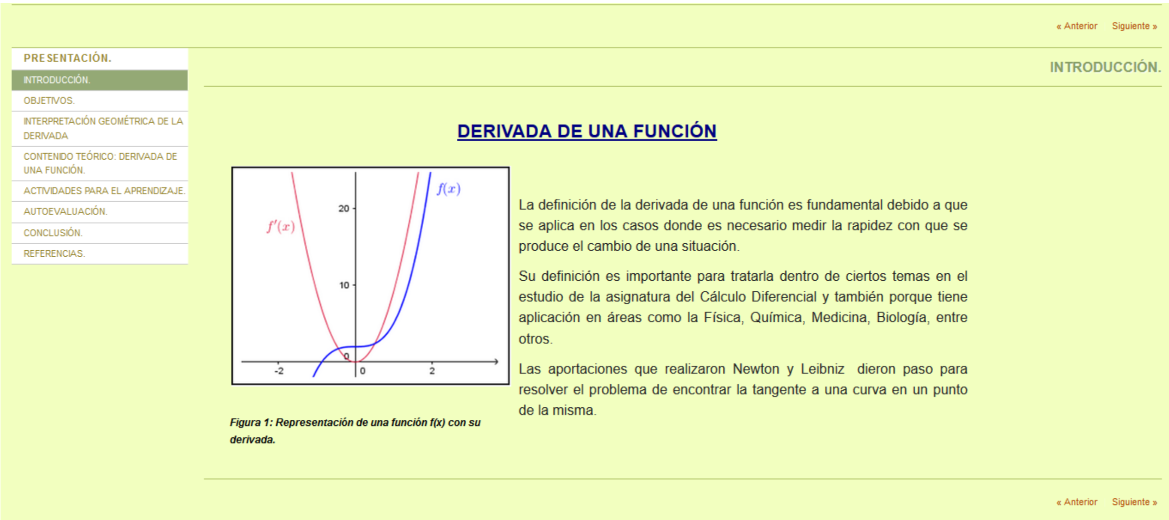


Ilustración 2: Componente "INTRODUCCIÓN" del OA: Derivada de una Función.

c. OBJETIVO GENERAL.

Presenta los objetivos generales del OA que se apoyan con un avatar animado, los objetivos describen lo que se pretende alcanzar con los estudiantes durante la aplicación de cada OA.

Ilustración 3: Componente "OBJETIVOS" del OA: Reglas para encontrar la derivada de una función.

d. CONTENIDO TEÓRICO.

En esta sección se expone el desarrollo de la unidad temática en cuanto a sus definiciones, expresiones, ejemplos, entre otros, los cuales pueden ser presentados de forma textual, por medio de gráficas, imágenes, etc. con el fin de mostrarlos ordenadamente. Esta sección posee una imagen representativa que hace mención a este componente.

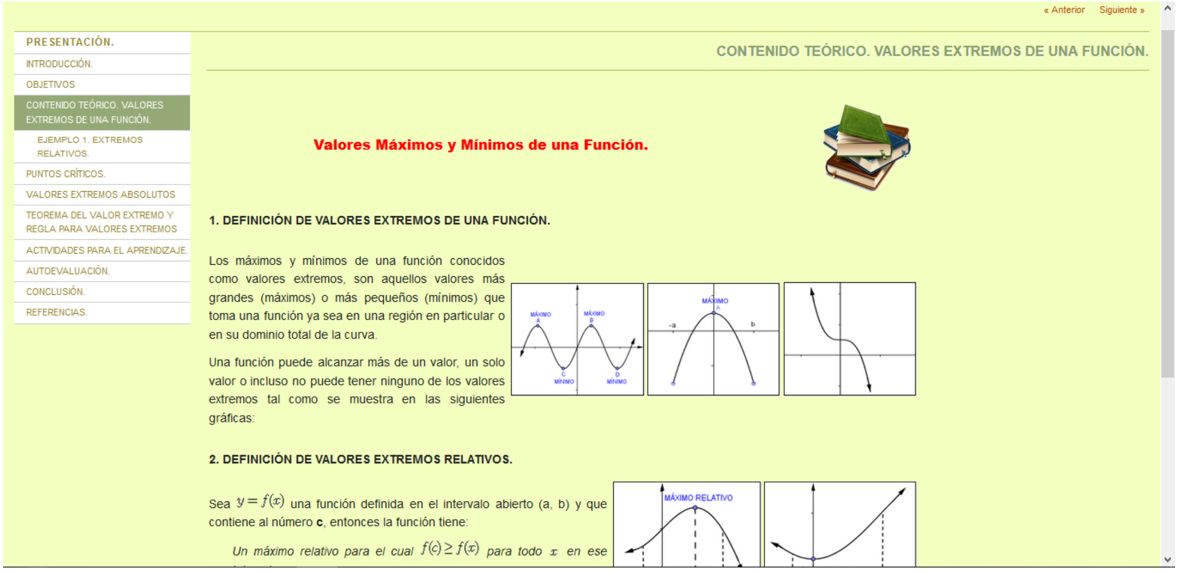


Ilustración 4: Componente “CONTENIDO TEÓRICO” del OA: Valores máximos y mínimos de una función.

e. ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE.

En esta sección se presenta un conjunto de actividades individuales que debe desarrollar y poner en práctica el estudiante para reforzar los conocimientos adquiridos sobre los temas tratados en cada OA.

Se formularon actividades que potencien el análisis y aseguren una lectura previa del tema antes de poder ser solucionado.

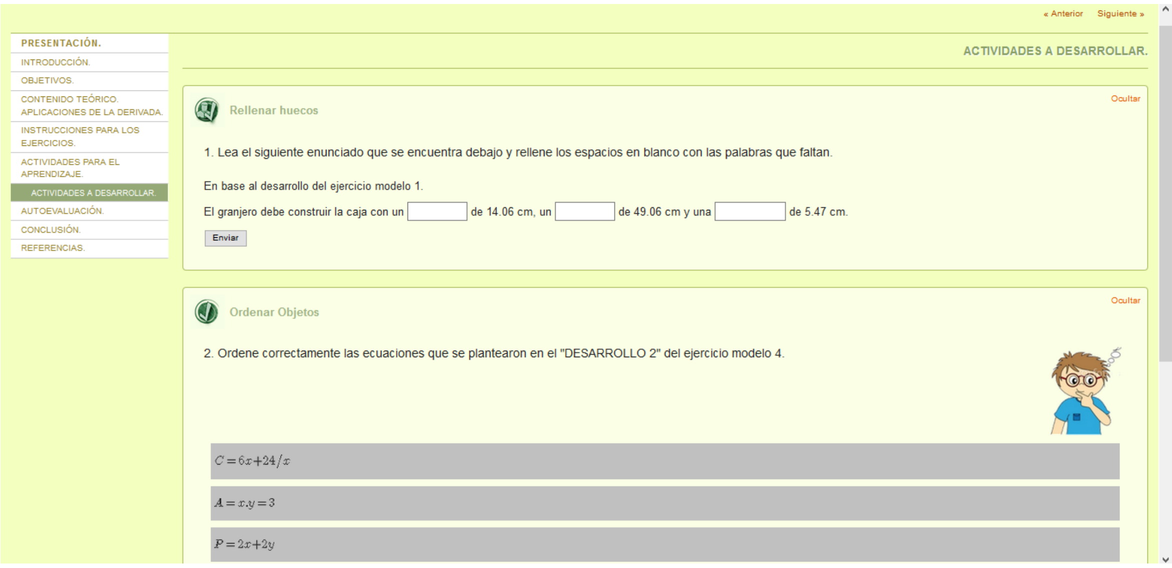


Ilustración 5: Componente “ACTIVIDADES” del OA: Aplicaciones de Derivada: resolución de problemas de máximos y mínimos.

f. AUTOEVALUACIÓN.

Esta sección contiene el planteamiento de una autoevaluación que permite consolidar los aprendizajes que han logrado adquirir los estudiantes durante la aplicación del OA, cada pregunta contiene la retroalimentación que orienta al usuario sobre la respuesta correcta

El contenido teórico sirvió de base para elaborar esta autoevaluación.

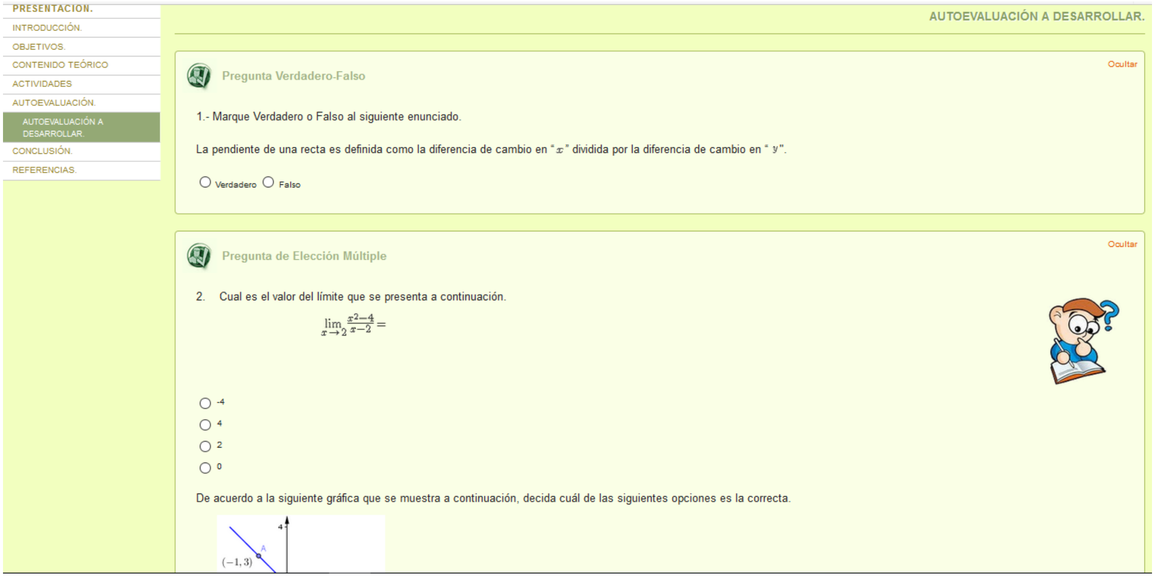


Ilustración 6: Componente “AUTOEVALUACIÓN” del OA: Conocimientos Previos.

g. SÍNTESIS.

Sección que presenta una conclusión la cual contiene las ideas principales del contenido teórico del tema tratado en cada OA. Este componente presenta una imagen animada para la conclusión.

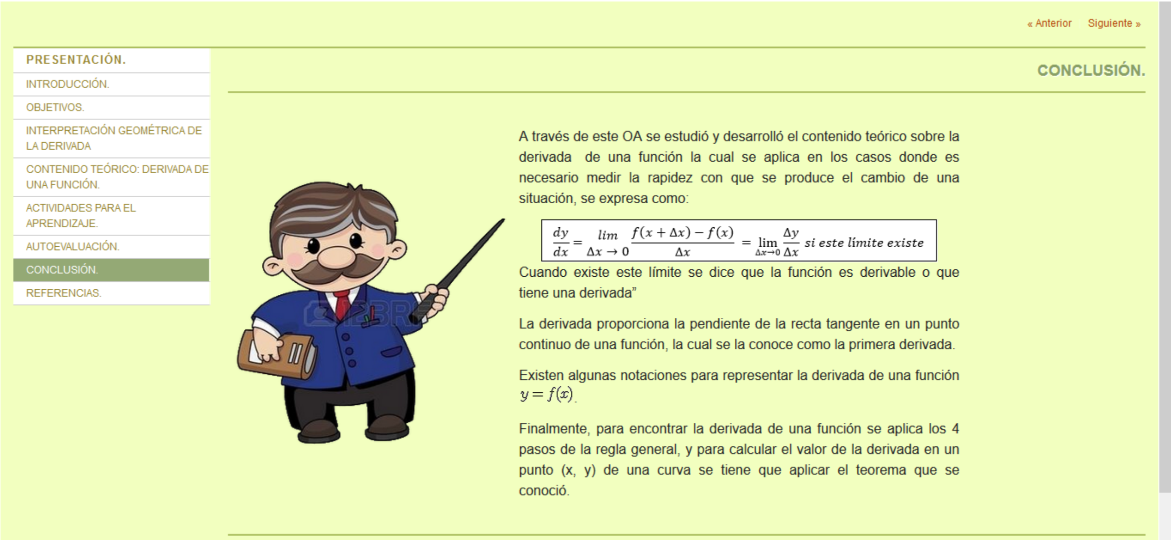


Ilustración 7: Componente "CONCLUSIÓN" del OA: Derivada de una Función.

h. REFERENCIA.

Sección compuesta por la referencia bibliográfica que se citó para elaborar el contenido teórico de cada uno de los temas tratados en cada OA.

Ilustración 8: Componente "REFERENCIAS" del OA: Valores máximos y mínimos de una función.

3.4 RECURSOS MULTIMEDIA EMPLEADOS.

A diferencia de los Objetos de Aprendizaje que contienen la parte teórica, el OA5: Aplicaciones de la derivada: resolución de problemas prácticos de máximos y mínimos, se enfoca en el desarrollo de ejercicios modelos los mismos que se muestran resueltos textualmente y/o por medio de videos.

Para la elaboración de los videos, se utilizó el recurso multimedia: “Pizarra Digital Interactiva” (PDI) la misma que posee la carrera de Matemáticas y Física en su laboratorio de Matemáticas, se la define como “un sistema integrado por un ordenador, un proyector, una sección con dispositivo de control de puntero y el software adecuado para la PDI” (Ferrer 3). Convirtiéndose este medio en una herramienta importante para crear y exponer contenidos temáticos de un currículo escolar debido a que permite generar materiales propios en entornos amigables para al usuario.

El tipo de PDI que posee el laboratorio es la pizarra digital “Mimio” con su software “Mimio studio 11.5” dentro del mismo existe un notebook el cual permitió crear varias páginas con diferentes objetos, entre estos, insertar textos manuscritos y mecanografiados, imágenes, sonidos, vídeos, etc.

Por otra parte, este software posee una “Barra de Herramientas Mimio” muy versátil las mismas que permiten diseñar y crear a través de sus diferentes accesorios un contenido educativo con diferentes gamas de colores, con un marcador de resalto, etc. Está barra cuenta además, con otras opciones como “Grabadora” la cual permite grabar todos los movimientos que se realiza en la PDI para posteriormente convertirlos en un archivo de vídeo, para este caso permitió el desarrollo de ejercicios modelo simulando la explicación del docente en un aula de clases.

Estos videos se encuentran insertados en formato “MP4” para algunas secciones de diferentes OA.
Entre los otros recursos multimedia que se utilizaron en cada OA se tiene: avatares animados, actividades online, gifs e imágenes animadas.

3.5 CALIDAD EN LOS OBJETOS DE APRENDIZAJE.

Las guías didácticas que se presentan en el siguiente contenido, son las que garantizan y dan a conocer los criterios con los que se construyó cada OA.

Entre los criterios que determinan la calidad y los que deben tener los OA están los de: Contenido, Estructura, Lenguaje y Utilidad

El aporte de Gonzalo en su artículo denominado: *Calidad en los objetos de aprendizaje,* menciona en este escrito, que desde la perspectiva del producto como lo es el OA, su “calidad puede medirse - directa o indirectamente-, a través de un conjunto de características deseables. Por ejemplo, puede referirse a la calidad en el **contenido** mismo (imágenes, video, diapositivas, etc.) como también de su **estructura** interna (secuenciación de contenidos)” (3); y además los criterios restantes del **lenguaje** (ser el adecuado) y la **utilidad** (para un proceso educativo) son también aspectos que proporcionan la calidad que deben adquirir los OA, cada uno de estos criterios pueden apreciarse en la elaboración de cada guía didáctica.

3.6 GUÍAS DIDÁCTICAS DE OBJETOS DE APRENDIZAJE.

El capítulo II realizado sirvió de basa para realizar el contenido de estas guías. Los componentes internos de cada uno de los OA se encuentran más detallados en cada una de las siguientes guías didácticas que se presentan a continuación.

“Objeto de Aprendizaje Como Recurso Educativo En La Enseñanza De Aplicaciones De La Derivada A La Resolución De Problemas De Máximos Y Mínimos”

GUÍA DIDÁCTICA 1

“CONOCIMIENTOS PREVIOS: PENDIENTE DE UNA RECTA Y LÍMITE DE UNA FUNCIÓN”

Versión:	8.0
Fecha creación:	12 de Enero de 2016
Última actualización:	15 de Enero de 2016
Estado del Documento:	Aprobado
Cliente:	Universidad de Cuenca
Elaborado por:	Christian Tenesaca
Revisado por:	Ing. Lourdes Illescas

Registro de Cambios del Documento

Fecha	Autor	Versión	* Estado	Cambios realizados
12 de Enero	Christian Tenesaca	V8.0	Borrador	Elaboración del documento
13 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de contenidos
14 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Definición de Actividades y Autoevaluación
15 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de Actividades
15 de Enero	Christian Tenesaca		Validado	Definición de la Conclusión y Referencia

* Estado se refiere al estado del documento y puede ser: Borrador / Propuesta / Validado / Aprobado.

Revisor(a):

Nombre	Versión Aprobada	Cargo/Rol en la producción del OA	Fecha
Ing. Lourdes Illescas	V8.0	Directora	13/01/2015
Ing. Lourdes Illescas		Directora	15/01/2015

TABLA DE CONTENIDOS.

1. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD

1.1 DESARROLLO DE CONTENIDOS

OA1-P01 PRESENTACIÓN

OA1-P02 INTRODUCCIÓN

OA1-P03 OBJETIVO GENERAL

OA1-P04 CONTENIDO TEÓRICO

1.2 ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE

OA1-P05 BIENVENIDA

OA1-P06 ACTIVIDADES A DESARROLLAR

OA1-P07 JUEGO INTERACTIVO

1.3 AUTOEVALUACIÓN

OA1-P08 BIENVENIDA

OA1-P09 AUTOEVALUACIÓN A DESARROLLAR

1.4 SÍNTESIS

OA1-P10 CONCLUSIÓN

1.5 REFERENCIAS

OA1-P11 BIBLIOGRAFÍA

1.6 METADATOS

1 ESTRUCTURA DE LA UNIDAD

1.1. DESARROLLO DE CONTENIDOS.

A continuación se presenta el detalle realizado en cada uno de los componentes internos que forman parte de las secciones de este objeto de aprendizaje, para el correcto manejo del documento se debe utilizar de forma simultánea la Guía de distribución de pantallas.

OA1-P01[3]: PRESENTACIÓN.

En esta sección se muestra los datos principales de este objeto de aprendizaje.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un logo que representa al tema del trabajo de titulación y en la parte superior central se ubicó al escudo de la Institución. Los datos de este OA son:

- Institución: Universidad de Cuenca.
- Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.

[3] "OA1-P01" se refiere a "Objeto de Aprendizaje 1-Presentación 01"

- Especialidad: Matemáticas y Física.
- Título del Objeto de Aprendizaje: CONOCIMIENTOS PREVIOS: PENDIENTE DE UNA RECTA Y LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.
- Contenidista y Diseñador Instruccional: Christian Tenesaca.
- Coordinador: Ing. Lourdes Illescas.

OA1-P02: INTRODUCCIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve introducción sobre los temas: “Pendiente de una recta y Límite de una Función” junto con sus respectivas imágenes representativas para cada tema colocadas en la parte inferior de esta sección.

La pendiente de una recta y el límite de una función como conocimientos previos son temas muy importantes que sirven de base para el estudio del Cálculo Diferencial al momento de tratar en los contenidos sobre la recta tangente a una curva y la derivada de una función.

OA1-P03: OBJETIVO GENERAL.

En esta sección se muestra los objetivos claros y precisos que se pretende alcanzar al concluir con la aplicación de este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un avatar animado el mismo que narra los siguientes objetivos:

- Comprender la definición y la expresión de los temas de pendiente de una recta y el límite de una función.
- Resolver las actividades propuestas y una autoevaluación.

OA1-P04: CONTENIDO TEÓRICO.

En esta sección se muestra realizada la parte teórica general sobre los temas de este OA.

En la parte superior derecha de esta sección se colocó una imagen representativa para el contenido teórico.

Pendiente de una recta y Límite de una función.

PENDIENTE DE UNA RECTA.

Por geometría analítica se conoce que la pendiente de una recta que se denota con la letra "m", para dos puntos de la recta es definida como la diferencia de cambio en "y" dividida por la diferencia de cambio en "x",

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_2 \neq x_1$$

que en otras palabras determina el grado de inclinación de una recta con el eje x.

La pendiente de una recta puede ser positiva, negativa y en otros casos que no exista, dependerá del ángulo "α" de inclinación de la recta $\boldsymbol{l}$.

Para determinar el ángulo de inclinación se utiliza la siguiente relación:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

La definición de límite como conocimiento previo, sirve de base para el estudio de la asignatura del Cálculo Diferencial por la razón a que interviene en dos de las tres condiciones para saber si una función es continua, y además porque permite definir a la derivada de una función.

La definición de límite es, "el límite de una función $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a *L*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se dice que los valores de $f(x)$ se acercan mas y mas a *L*, cuando x se acerca más al número a ya sea por cualquiera de sus lados teniendo en cuenta que $x \neq a$" (Stewart 840).

Para hallar el límite de una función, se puede emplear uno de los siguientes **métodos**:

- Calcular algunos valores de $f(x)$ para x cercana a L.
- Bosquejar la gráfica de la función $y = f(x)$.
- Utilizar procesos algebraicos.

Sumado a lo anterior, el estudiante debe conocer que existen límites laterales, unilaterales, infinitos, entre otros.

La aplicación de las propiedades de los límites permiten facilitar su cálculo, se las puede emplear para cualquier tipo de función.

1.2. ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE.

OA1–P05: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar las actividades propuestas.

En la parte derecha de esta sección se colocó una imagen animada representativa para las actividades.

“PONGAMOS EN PRÁCTICA LO APRENDIDO”

OA1–P06: ACTIVIDADES A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra realizada un conjunto de actividades propuestas para que desarrolle el estudiante.

1. Lea el siguiente enunciado que aparece abajo y rellene con las palabras que faltan.

   La pendiente de una recta determina el _______ de inclinación de una ______ con el eje *x.*

   Las palabras que faltan son: grado – recta.

2. Ordenar objetos.

   Ordene correctamente el desarrollo que se debe seguir para hallar: $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$.

   a. $\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5} =$

   b. $\frac{1}{10}$

   c. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25} =$

   d. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x+5)(x-5)} =$

   La orden correcto es: c, d, a y b.

3. Seleccione la respuesta correcta.

   ¿Cuál es el valor de la pendiente de una recta que pasa por los puntos A (-3, -3) y B (2, 4)?

   ○ $m = -7/5$

   ○ $m = 5/7$

   ○ $m = 7/5$

   ○ $m = -5/7$

La respuesta es: la opción 3.

Al encontrar el valor de la pendiente de una recta "***l*** ", este valor puede ser:

- ○ Solo positivo.
- ○ Positivo, negativo y no existe.
- ○ Solo negativo.

La respuesta es: la opción 2.

OA1-P07 ACTIVIDAD. JUEGO INTERACTIVO. ORDENAR PALABRAS.

En el juego que se presenta en esta sección la actividad que se requiere desarrollar es: ordenar las palabras correctamente para formar la definición del límite de una función.

El límite de una función $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a *L*

1.3. AUTOEVALUACIÓN.

OA1–P08: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar la autoevaluación propuesta para el estudiante.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un gif animado representativo para la autoevaluación.

"VAMOS DESARROLLEMOS LA AUTOEVALUACIÓN PROPUESTA"

OA1–P09: AUTOEVALUACIÓN A DESARROLLAR.

1. Marque Verdadero o Falso al siguiente enunciado.

   La pendiente de una recta es definida como la diferencia de cambio en "x" dividida por la diferencia de cambio en "y".

   ○ Verdadero

   ○ Falso

   La respuesta es: Falso.

2. Señale la respuesta correcta.

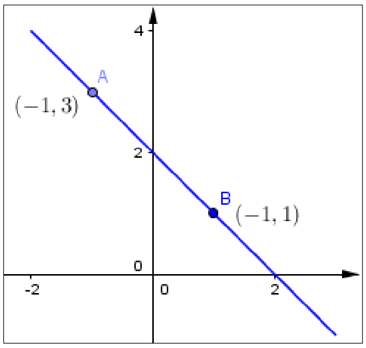
   ¿Cuál es el valor del límite que se presenta a continuación?

   $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=$$

- - 4
- 4
- 2
- 0

La respuesta es: la opción 2.

De acuerdo a la siguiente gráfica que se muestra a continuación:



La pendiente de la recta y su ecuación es:

- $m = 1$; ecuación: $y = -x + 2$
- $m = -1$; ecuación: $y = x + 2$
- $m = -1$; ecuación: $y = -x + 2$
- $m = 1$; ecuación: $y = x + 2$

La respuesta es: la tercera opción.

1.4. SÍNTESIS.

OA1–P10: CONCLUSIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve conclusión sobre el tema tratados en este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó una imagen representativa para la conclusión.

A través de este OA se estudió el tema de pendiente de una recta que se denota con la letra “m”, para dos puntos de la recta es definida como la diferencia de cambio “y” dividida por la diferencia de cambio en “x”.

En otras palabras determina el grado de inclinación de una recta con el eje x.

La pendiente de una recta puede ser positiva, negativa y en otros casos que no exista. Además se conoció y trato el tema:

Límite de una Función.

Su definición es: “el límite de una función $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a *L*”

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se indica que los valores de $f(x)$ se acercan más y más a *L*, cuando x se acerca mas al numero a ya sea por cualquiera de sus lados teniendo en cuenta que $x \neq a$”.

Se puede emplear algunos **métodos o propiedades** para hallar o calcular el límite de una función.

1.5. REFERENCIAS.

OA1–P11: BIBLIOGRAFÍA.

En esta sección se muestra la bibliografía que se utilizó para tratar el tema: Pendiente de una recta y Límite de una Función.

Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson. *Precálculo Matemáticas para el Cálculo*. sexta. México DF: Cengage Learning, 2012.

ADR Formación. Educaplay: plataforma que permite crear una gran variedad de actividades educativas multimedia. http://www.educaplay.com/

1.6. METADATOS.

Título	Pendiente de una Recta y Límite de una Función.
Creador	Christian Tenesaca
Descripción	Este OA contiene el desarrollo de los temas “pendiente de una recta y límite de una función”, muestra además un conjunto de actividades y una autoevaluación para el aprendizaje.
Asunto	Aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos.
Origen	Proyecto de Aplicación: Educación.

Idioma	Español
Cobertura	Estudiantes de Tercero de BGU y de los primeros ciclos de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.
Relación	
Derechos	Universidad de Cuenca
Tipo	TIC's aplicadas a la educación
Fecha	Mayo, 2016
Formato	Scorm y Html.
Identificador	
Contribuyente	Universidad de Cuenca

"Objeto De Aprendizaje Como Recurso Educativo En La Enseñanza De Aplicaciones De La Derivada A La Resolución De Problemas De Máximos Y Mínimos"

GUÍA DIDÁCTICA 2

"DERIVADA DE UNA FUNCIÓN"

Versión:	8.0
Fecha creación:	16 de Enero de 2016
Última actualización:	19 de Enero de 2016
Estado del Documento:	Aprobado
Cliente:	Universidad de Cuenca
Elaborado por:	Christian Tenesaca
Revisado por:	Ing. Lourdes Illescas

Registro de Cambios del Documento

Fecha	Autor	Versión	Estado	Cambios realizados
16 de Enero	Christian Tenesaca	V8.0	Propuesta	Elaboración del documento
16 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de contenidos
17 de enero	Christian Tenesaca		Propuesta	Elaboración de un video para ejemplo.
17 de Enero	Christian Tenesaca		Borrador	Definición de Actividades y Autoevaluación
18 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de Actividades/ Video
18 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Definición de Conclusión
19 de Enero	Christian Tenesaca		Validado	Definición de Referencia

* Estado se refiere al estado del documento y puede ser: Borrador / Propuesta / Validado / Aprobado.

Revisor(a):

Nombre	Versión Aprobada	Cargo/Rol en la producción del OA	Fecha
Ing. Lourdes Illescas	V8.0	Directora	20/01/2016
Ing. Lourdes Illescas		Directora	22/01/2016

TABLA DE CONTENIDOS.

1 ESTRUCTURA DE LA UNIDAD.

1.1. DESARROLLO DE CONTENIDOS.

A continuación se presenta el detalle realizado en cada uno de los componentes internos que forman parte de las secciones de este objeto de aprendizaje, para el correcto manejo del documento se debe utilizar de forma simultánea la Guía de distribución de pantallas.

OA2-P01: PRESENTACIÓN.

En esta sección se muestra los datos principales de este objeto de aprendizaje.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un logo que representa al tema del trabajo de titulación y en la parte superior central se ubicó al escudo de la Institución.

Los datos de este OA son:

- Institución: Universidad de Cuenca
- Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.
- Especialidad: Matemáticas y Física.
- Título del Objeto de Aprendizaje: DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.
- Contenidista y Diseñador Instruccional: Christian Tenesaca.
- Coordinador: Ing. Lourdes Illescas.

OA2-P02: INTRODUCCIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve introducción sobre el tema: "Derivada de una Función" junto con su respectiva imagen representativa para este tema colocada en la parte inferior de esta sección.

La definición de la derivada de una función es fundamental debido a que se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación.

Su definición es importante para tratarla dentro de ciertos temas en el estudio de la asignatura del Cálculo Diferencial y también porque tiene aplicación en áreas como la Física, Química, Medicina, Biología, entre otros.

Las aportaciones que realizaron Newton y Leibniz dieron paso para resolver el problema de encontrar la tangente a una curva en un punto de la misma.

OA2-P03: OBJETIVO GENERAL.

En esta sección se muestra los objetivos generales que se pretende alcanzar con este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un avatar animado el mismo que narra los siguientes objetivos:

- Comprender la definición de la derivada de una función.
- Determinar la derivada de una función aplicando su definición.
- Desarrollar las actividades propuestas y una autoevaluación.

OA2-P04: INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.

Esta sección contiene una simulación que presenta la "interpretación geométrica de la derivada" la misma que es importante conocerla con el propósito de saber de dónde surge la definición de la derivada.

OA2-P05: CONTENIDO TEÓRICO.

En esta sección se muestra realizada la parte teórica sobre el tema de este OA.

En la parte superior derecha de esta sección se colocó una imagen que representa al contenido teórico.

Derivada de una Función.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

"La derivada de una función $f(x)$ es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero, se expresa como:

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \; si\ este\ límite\ existe.$$

Cuando existe este límite se dice que la función es derivable o que tiene una derivada" (Granville 27), prácticamente da una nueva función siendo esta la "derivada de $\boldsymbol{y}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$".

Está función derivable $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$, proporciona la pendiente de la recta tangente en un punto continuo de una función, la cual se la conoce como la **primera derivada**.

Existen algunas notaciones para la derivada de una función $\boldsymbol{y = f(x)}$, siendo estas:

$$\frac{dy}{dx} \; ; \; f'(x) \; ; \; y' \; ; \; \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) \; ; \; D_x(y)$$

Es importante tener en cuenta lo siguiente:

- Una función es derivable en x si su derivada en x existe.

- Se llama derivación al proceso de calcular la derivada de una función.
- En un intervalo (a, b), la función es derivable en todos y cada uno de estos puntos de este intervalo.

OA2-P06: REGLA GENERAL PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

En esta sección se muestra desarrollado los pasos de la regla general para encontrar la derivada de una función.

Esta regla consiste en seguir ordenadamente los siguientes cuatro pasos.

Sea $y = f(x) \qquad (a)$

1er. Paso: Se incrementa las variables x y y de cada miembro, lo cual resulta:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad (b)$$

2do. Paso: Se resta (b) de (a), lo cual resulta:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3er. Paso: Se divide a cada miembro por Δx, lo cual resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4to. Paso: Se halla el límite de este cociente cuando Δx tiende a 0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El límite así hallado es la derivada buscada.

OA2-P07: EJEMPLO 1. REGLA GENERAL.

En esta sección se muestra desarrollado un ejemplo en el cual se aplicó los pasos de la regla general.

Encuentre la derivada de $f(x) = 12x^3$.

Al aplicar los cuatro pasos de la regla general se tiene:

1er. Paso: Se incrementa las variables x y y de cada miembro, lo cual resulta:

$$y + \Delta y = 12(x + \Delta x)^3$$

2do. Paso: Se resta la función incrementada menos la función original, lo cual resulta:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= 12(x + \Delta x)^3 \\ -y &= -(12x^3) \\ \hline \Delta y &= 12(x + \Delta x)^3 - 12x^3 \end{aligned}$$

3er. Paso: Se divide a cada miembro por Δx, lo cual resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{12(x+\Delta x)^3-12x^3}{\Delta x}$$
$$=\frac{12[x^3+3x^2.\Delta x+3x.(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]-12x^3}{\Delta x}$$
$$=\frac{12x^3+36x^2\Delta x+36x.\Delta x^2+12(\Delta x)^3-12x^3}{\Delta x}$$
$$=\frac{36x^2\Delta x+36x.\Delta x^2+12(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\frac{12\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x}$$
$$=12(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$$

4to. Paso: Se halla el límite de este cociente cuando Δx tiende a 0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[12(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)]$$

Al hallar el límite aplicando las respectivas propiedades al segundo miembro, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=36x^2 \quad \text{o} \quad f'(12x^3)=36x^2 \;\; Derivada\ encontrada.$$

OA2-P08: TERОREMA Y EJEMPLO 2.

En esta sección se muestra planteado un teorema que tiene relación con la definición de la derivada de una función.

Para encontrar el valor de la derivada en cualquier punto de una curva, Granville propone el siguiente teorema.

Teorema. “El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto” (33).

A continuación se presenta la resolución del siguiente ejemplo:

Encuentre la derivada de $f(x) =\ 1+2x^2$ en $x=2$.

$$\frac{dy}{dx}=\begin{matrix} lim \\ \Delta x\to 0\end{matrix}\frac{[1+2(\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x})^2]-(1+2x^2)}{\Delta x} \quad Según\ la\ definición\ de\ Derivada$$
$$=\begin{matrix} lim \\ \Delta x\to 0\end{matrix}\frac{[1+2(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}\Delta\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}^2)]-1-2x^2}{\Delta x}$$
$$=\begin{matrix} lim \\ \Delta x\to 0\end{matrix}\frac{1+2\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}\Delta\mathrm{x}+2\Delta\mathrm{x}^2-1-2x^2}{\Delta x}$$
$$=\begin{matrix} lim \\ \Delta x\to 0\end{matrix}\frac{4\mathrm{x}\Delta\mathrm{x}+2\Delta\mathrm{x}^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta\text{x}(2\text{x} + \Delta\text{x})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2(2\text{x} + \Delta\text{x})$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4\text{x} + 2\Delta\text{x})$$

$$= 4\text{x}$$

Por lo tanto $\frac{d}{dx}(1 + 2x^2) = f'(1 + 2x^2) = 4x$, es la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de la curva, como $x = 2$ y al reemplazar este valor en la derivada encontrada de $f(x)$ resulta:

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x^2) = 4x = 4(2) = 8 = m\text{: } Pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

OA2-P09: EJEMPLO 3 (VIDEO). APLICACIÓN DEL TEOREMA.

En esta sección se muestra un ejemplo resuelto en el cual se aplicó la definición de la derivada conjuntamente con el teorema conocido.

Este ejercicio fue resuelto por medio de un video el mismo que se muestra en fragmentos.

Parte1: Muestra la presentación y aplicación de la definición de la derivada de una función en el ejercicio.

Parte 2: Muestra el desarrollo de la reducción de términos semejantes, factor común y propiedades de los límites.

Parte 3: Muestra el desarrollo del límite de términos, aplicación del teorema y la conclusión del ejercicio.

1.2. ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE.

OA2-P10: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar las actividades propuestas.

En la parte derecha de esta sección se colocó una imagen que representa a las actividades.

“PONGAMOS EN PRÁCTICA LO APRENDIDO”

OA2–P11: ACTIVIDADES A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra realizada un conjunto de actividades propuestas para que desarrolle el estudiante.

1. Rellenar espacios en blanco.

   Lea el párrafo que aparece debajo y complete con las palabras que faltan.

   La derivada de una función $f(x)$ es el límite de la razón del incremento de la _______ al incremento de la variable _____________ cuando éste tiende a ____.

   Las palabras que faltan son: función, independiente, cero.

2. ¿Cuál es el orden correcto?

   Ordene correctamente los pasos de la regla general que se debe seguir para encontrar la derivada de una función.

   Sea $y = f(x)$

   a) Se incrementa las variables x y y de cada miembro, lo cual resulta:

      $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

   b) Se halla el límite de este cociente cuando Δx tiende a 0.

      $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

   c) Se resta la función original menos la función incrementada, lo cual resulta:

      $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

   d) Se divide cada miembro por Δx, lo cual resulta:

      $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

   El orden correcto es: a, c, d y b

3. Pregunta de elección múltiple.

   ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = 2x$?

   Se debe tener en cuenta la definición de la derivada.

   ○ $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{2(x-\Delta x)-(2x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{2x-2\Delta x-2x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} -2 = -2$

   ○ $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{2(x+\Delta x)-(2x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} 2 = 2$

   ○ $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{(x+\Delta x)-(x)}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{lim} 1 = 1$

   La respuesta correcta es: la segunda opción.

1.3. AUTOEVALUACIÓN.

OA2-P12: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar la autoevaluación propuesta para el estudiante.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un gif animado representativo para la autoevaluación.

"VAMOS DESARROLLEMOS LA AUTOEVALUACIÓN PROPUESTA"

OA2–P13: AUTOEVALUACIÓN A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra el planteamiento de la autoevaluación.

1. Marque Verdadero o Falso.

   En un intervalo (a, b), la función es derivable en todos y cada uno de estos puntos de este intervalo.

   - Verdadero
   - Falso

   La respuesta es: Verdadero.

   En base al ejercicio resuelto por medio de videos. ¿La derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ encontrada al aplicar su definición fue $6x^2$?

   - Verdadero
   - Falso

   La respuesta es: Falso.

2. Seleccione la respuesta correcta.

   La derivada de una función se la conoce también como:

   - La pendiente de una recta secante.
   - La pendiente de una recta tangente.
   - Ninguna de las anteriores.

   La respuesta es: la segunda opción.

   En base al ejercicio resuelto por medio de videos.

   ¿Cuál fue el valor de la pendiente de la recta tangente de $f(x) = 3x^2 + 1$ en el punto $x = 3$?

   - -18.

- 18.
- 0.

La respuesta es: la segunda opción.

1.4. SÍNTESIS.

OA2–P14: CONCLUSIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve conclusión sobre el tema que fue tratado en este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó una imagen animada representativa para la conclusión.

A través de este OA se estudió y desarrolló el contenido teórico sobre la derivada de una función la cual se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación, se expresa como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lim}{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ si\ este\ límite\ existe$$

Cuando existe este límite se dice que la función es derivable o que tiene una derivada. La derivada proporciona la pendiente de la recta tangente en un punto continuo de una función, la cual se la conoce como la primera derivada.

Existen algunas notaciones para representar la derivada de una función $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Finalmente, para encontrar la derivada de una función se debe aplicar los 4 pasos de la regla general, y para calcular el valor de la derivada en un punto (x, y) de una curva se tiene que aplicar el teorema que se conoció.

1.5. REFERENCIAS.

OA1–P15: BIBLIOGRAFÍA.

En esta sección se muestra la bibliografía que se utilizó para tratar el tema: Derivada de una Función.

Granville, William. *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa, 1998.

Castro, Luis. *GEOGEBRA: "Interpretación geométrica de la derivada"*. 11 de Noviembre de 2014. http://www.geogebra.org/m/HwQEu6HX?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Finterpretacion%2Fmaterials%2F. Acceso: 17 de Enero de 2016.

1.6. METADATOS.

Título	La Derivada de una Función
Creador	Christian Tenesaca
Descripción	Este OA contiene el desarrollo general del tema de la derivada de una función, a la vez posee un conjunto de actividades y una autoevaluación para el aprendizaje.
Asunto	Aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos.
Origen	Proyecto de Aplicación: Educación.
Idioma	Español
Cobertura	Estudiantes de Tercero de BGU y de los primeros ciclos de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.
Relación	
Derechos	Universidad de Cuenca
Tipo	TIC's aplicadas a la educación
Fecha	Mayo, 2016
Formato	Scorm y Html
Identificador	
Contribuyente	Universidad de Cuenca

“Objeto De Aprendizaje Como Recurso Educativo En La Enseñanza De Aplicaciones De La Derivada A La Resolución De Problemas De Máximos Y Mínimos”

GUÍA DIDÁCTICA 3

“REGLAS PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN”

Versión:	8.0
Fecha creación:	20 de Enero de 2016
Última actualización:	23 de Enero de 2016
Estado del Documento:	Aprobado
Cliente:	Universidad de Cuenca
Elaborado por:	Christian Tenesaca
Revisado por:	Ing. Lourdes Illescas

Registro de Cambios del Documento

Fecha	Autor	Versión	Estado	Cambios realizados
20 de Enero	Christian Tenesaca	V8.0	Propuesta	Edición del documento
20 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de contenidos
21 de Enero	Christian Tenesaca		Propuesta	Definición de Actividades
22 de Enero	Christian Tenesaca		Validado	Definición de Autoevaluación y Conclusión
23 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de Actividades.

* Estado se refiere al estado del documento y puede ser: Borrador / Propuesta / Validado / Aprobado.

Revisor(a):

Nombre	Versión Aprobada	Cargo/Rol en la producción del OA	Fecha
Ing. Lourdes Illescas		Directora	27/01/2016
Ing. Lourdes Illescas		Directora	29/01/2016

TABLA DE CONTENIDOS

1. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD.

1.1. DESARROLLO DE CONTENIDOS.

A continuación se presenta el detalle realizado en cada uno de los componentes internos que forman parte de las secciones de este objeto de aprendizaje, para el correcto manejo del documento se debe utilizar de forma simultánea la Guía de distribución de pantallas.

OA3-P01: PRESENTACIÓN.

En esta sección se muestra los datos principales de este objeto de aprendizaje. En la parte izquierda de esta sección se colocó un logo que representa al tema del trabajo de titulación y en la parte superior central se ubicó al escudo de la Institución. Los datos de este OA son:

- Institución: Universidad de Cuenca
- Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.
- Especialidad: Matemáticas y Física.

- Título del Objeto de Aprendizaje: REGLAS PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.
- Contenidista y Diseñador Instruccional: Christian Tenesaca.
- Coordinador: Ing. Lourdes Illescas.

OA3-P02: INTRODUCCIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve introducción sobre el tema: "Reglas para encontrar la derivada de una función" junto con su respectiva imagen representativa para este tema colocada en la parte inferior de esta sección.

Las reglas de derivación al igual que la definición de la derivada se las utiliza para encontrar la pendiente de la recta tangente de una función.

El estudio de estas reglas será de gran importancia para el estudiante al momento que resuelva los problemas sobre maximizar o minimizar una función debido a que no tendrá inconvenientes para derivar una función.

Se conocerá y estudiará en este objeto de aprendizaje las reglas elementales de derivación, cada una de ellas con su respectivo enunciado y ejemplo.

OA3-P03: OBJETIVO GENERAL

En esta sección se muestra los objetivos claros y precisos que se pretende alcanzar al concluir con este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un avatar animado el mismo que narra los siguientes objetivos:

- Conocer cada una de las reglas elementales de derivación.
- Comprender el enunciado de cada una de las reglas elementales de derivación.
- Desarrollar las actividades propuestas y una autoevaluación. Conozca

OA3-P04: CONTENIDO TEÓRICO.

En esta sección se muestra desarrollada las reglas de derivación con su respectivo enunciado.

En la parte superior derecha de esta sección se colocó una imagen representativa par el contenido teórico.

Reglas para encontrar la Derivada de una Función.

Para encontrar la derivada de una función hacer uso de la definición de la derivada se vuelve un trabajo muy largo y tedioso, existen **Reglas de Derivación** que ahorran tiempo y agilitan dicho trabajo mencionado.

En estas reglas "las variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, representan funciones derivables de la función $\boldsymbol{f}$ donde: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$" (Granville 36).

Conforme se avance en el estudio y planteamiento de las reglas de derivación, se notará que en los ejercicios para el o los términos que posea una función se combinan dichas reglas.

Entre las reglas elementales de derivación se tiene las siguientes:

1. **Regla de una constante.**

   Si $\boldsymbol{c}$ es una constante y si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$, entonces:

   $$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

   La derivada de una función constante es siempre igual a cero.

2. **Regla para la Potencia.**

   Si $\boldsymbol{n}$ es un número racional y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{n}}$ entonces:

   $$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$$

   La derivada de la potencia de una función con exponente entero es igual al producto entre el exponente por la función elevada al mismo exponente menos uno y por la derivada de dicha función.

3. **Regla de la Función Identidad.**

   Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ **,** entonces:

   $$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}$$

   La derivada de una variable para sí misma es igual a la unidad.

4. **Regla del producto de una constante por una función.**

   Si $\boldsymbol{c}$ es una constante y si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cv}$, entonces:

   $$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{cv}) = \boldsymbol{c}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}$$

   La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de esa función.

5. **Regla para la Suma y la Diferencia.**

Sea $f(x) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} + \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} - \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dx}}$$

La derivada de una suma o diferencia es igual a la suma o diferencia de sus derivadas.

Estas reglas se amplían a cualquier número finito de términos.

6. Regla para el Producto.

Sea $f(x) = \boldsymbol{u.v}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{u.v}) = \boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} + \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

La derivada de un producto es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más la segunda función por la derivada de la primera función.

La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores.

Por ejemplo si $f(x) = \boldsymbol{u.v.w}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{u.v.w}) = \boldsymbol{u.v}\frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dx}} + \boldsymbol{u.w}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}} + \boldsymbol{v.w}\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

7. Regla para el Cociente.

Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ con $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right) = \frac{\boldsymbol{v}.\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}} - \boldsymbol{u}.\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}}{\boldsymbol{v}^2}$$

“La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador” (Granville 42).

OA3-P05: EJEMPLOS DE REGLAS DE DERIVACIÓN.

Esta sección muestra realizada ejemplos del tema tratado en este OA.

A continuación se presenta ejemplos resueltos de cada una de las reglas elementales de derivación.

<table>
<tr><th>REGLAS</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>1. Regla de una constante</td><td>Encuentre la derivada de $\boldsymbol{f(x)=5}$.
Si $\boldsymbol{c}=5$, entonces:
$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{5})=0$$</td></tr>
<tr><td>2. Regla para la Potencia.</td><td>Encuentre la derivada de $\boldsymbol{f(x)=x^4}$.
Si $\boldsymbol{n}=4$ y $\boldsymbol{v}=x$, entonces:
$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x^4})&=4x^{4-1}(1)\\&=4x^3\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>3. Regla de la Función Identidad</td><td>Encuentre la derivada de $\boldsymbol{f(x)=x}$.
Si $f(x)=x$, entonces:
$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\boldsymbol{f(x)}]=\boldsymbol{1}$$</td></tr>
<tr><td>4. Regla del producto de una constante por una función</td><td>Encuentre la derivada de $\boldsymbol{f(x)=12x^5}$.
Si $c=12$ y $v=x^5$, entonces:
$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{12x^5})&=12.\frac{d}{dx}(x^5)\\&=12.5x^{5-1}(1)\\&=60x^4\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>5. Regla para la Suma y la Diferencia</td><td>Encuentre la derivada de $\boldsymbol{f(x)=3x^3+5x^2-4x+1}$.
Si $u=3x^3, v=x^2, w=4x$ y $z=1$, entonces:
$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{3x^3+5x^2-4x+1})$$
$$\begin{aligned}&=\frac{d}{dx}(3x^3)+\frac{d}{dx}(5x^2)-\frac{d}{dx}(4x)+\frac{d}{dx}(1)\\&=3\frac{d}{dx}(x^3)+5\frac{d}{dx}(x^2)-4.\frac{d}{dx}(x)+0\\&=3.3x^{3-1}(1)+5.2x^{2-1}(1)-4.1\\&=9x^2+10x-4\end{aligned}$$</td></tr>
</table>

6. Regla para el Producto	Encuentre la derivada de $\boldsymbol{f(x)=3x^3(6x-1)}$. Si $u=3x^3$ y $v=(6x-1)$, entonces: $\boldsymbol{\frac{d}{dx}[3x^3(6x-1)]}$ $=(3x^3).\frac{d}{dx}(6x-1)+(6x-1).\frac{d}{dx}(3x^3)$ $=(3x^3).\left[\frac{d}{dx}(6x)-\frac{d}{dx}(1)\right]+(6x-1).3\frac{d}{dx}(x^3)$ $=(3x^3)\left[6\frac{d}{dx}(x)-0\right]+(6x-1).3.3x^{3-1}(1)$ $=(3x^3)[6(1)]+(6x-1).9x^2$ $=3x^3(6)+54x^3-9x^2$ $=18x^3+54x^3-9x^2$ $=72x^3-9x^2$ $=9x^2(8x-1)$
7. Regla para el Cociente	Encuentre la derivada de $\boldsymbol{f(x)=\frac{5x^3-2}{x^2}}$. Si $u=5x^3-2$ y $v=x^2$, entonces: $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^3-2}{x^2}\right)}$ $=\frac{(x^2).\frac{d}{dx}(5x^3-2)-(5x^3-2).\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$ $=\frac{x^2\left[\frac{d}{dx}(5x^3)-\frac{d}{dx}(2)\right]-(5x^3-2).(2x^{2-1})(1)}{x^4}$ $=\frac{x^2\left[5.\frac{d}{dx}(x^3)-0\right]-(5x^3-2).(2x)}{x^4}$ $=\frac{x^2(5.3x^{3-1})-(10x^4-4x)}{x^4}$ $=\frac{x^2(15x^2)-10x^4+4x}{x^4}$ $=\frac{15x^4-10x^4+4x}{x^4}$ $=\frac{5x^4+4x}{x^4}$ $=\frac{x(5x^3+4)}{x^4}$ $=\frac{5x^3+4}{x^3}$

1.2. ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE.

OA3-P06: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar las actividades propuestas.

En la parte derecha de esta sección se colocó una imagen animada representativa para las actividades.

"PONGAMOS EN PRÁCTICA LO APRENDIDO"

OA3–P07: ACTIVIDADES A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra realizada un conjunto de actividades propuestas para que desarrolle el estudiante.

1. Rellenar espacios en blanco.

   De acuerdo al enunciado de la *regla de la potencia*. Lea el párrafo que aparece debajo y complete con las palabras que aparecen en el recuadro.

uno - producto - función

   La derivada de la potencia de una función con exponente entero es igual al ______ entre el exponente por la ______ elevada al mismo exponente menos ___ y por la derivada de dicha función.

   El orden de las palabras es: producto – función – uno.

2. Señale la respuesta correcta.

   De las siguientes reglas de derivación, señale cuál de estas es la incorrecta.

   ○ $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}}$

   ○ $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}}$

   ○ $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}$

   La respuesta correcta es: la opción 3.

OA3-P08: JUEGO INTERACTIVO. RELACIONAR COLUMNAS.

En esta sección se muestra un juego en base al tema visto anteriormente.

La actividad que se plantea en el juego es relacionar correctamente la función $f(x)$ con su respectiva derivada.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = 12x^5$
4. $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

( ) $f'(x) = 4x^3$

( ) $f'(x) = 9x^2 + 10x - 4$

( ) $f'(x) = 0$

( ) $f'(x) = 60x^4$

La respuesta es:

1 con 3 de la columna izquierda.

2 con 1 de la columna izquierda.

3 con 4 de la columna izquierda.

4 con 2 de la columna izquierda.

1.3. AUTOEVALUACIÓN.

OA3-P09: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar la autoevaluación propuesta para el estudiante.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un gif animado representativo para la autoevaluación.

"VAMOS DESARROLLEMOS LA AUTOEVALUACIÓN PROPUESTA"

OA3–P10: AUTOEVALUACIÓN A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra el planteamiento de la autoevaluación.

1. Marque Verdadero o Falso.

La derivada de una función constante es igual a uno.

- Verdadero
- Falso

La respuesta es: Falso.

En la regla del cociente su denominador queda elevado al cuadrado.

- Verdadero
- Falso

La respuesta es: Verdadero.

Las reglas de derivación agilitan el tiempo para calcular la derivada de una función.

- Verdadero
- Falso

La respuesta es: Verdadero.

2. Seleccione la respuesta correcta.

¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 1$?

- ○ $f'(x) = 2x^2 + 1 = 2x^3 + 1$
- ○ $f'(x) = 2.2x^{2-1} = 4x$
- ○ $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$
- ○ $f'(x) = 2.\,2x^{2+1} = 4x^3$

La respuesta es: la opción 2.

1.4. SÍNTESIS.

OA3–P11: CONCLUSIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve conclusión sobre el tema que fue tratado en este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó una imagen animada representativa para la conclusión.

- A través de este objeto de aprendizaje se estudió y conoció las reglas elementales de derivación para la suma, resta, producto, entre otros. Cada regla cuenta con su respectivo enunciado a seguir para hallar la derivada de una función.
- Las reglas de diferenciación se combinan entre las operaciones básicas sin importar el número de términos que contenga una función.
- Las reglas de diferencian simplifican el proceso para hallar la derivada de una función evitando el uso y aplicación de la definición de la derivada.

1.5. REFERENCIAS.

OA1–P12: BIBLIOGRAFÍA.

En esta sección se muestra la bibliografía que se utilizó para tratar el tema: Reglas para encontrar la derivada de una función.

Granville, William. *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa, 1998.

ADR Formación. Educaplay: plataforma que permite crear una gran variedad de actividades educativas multimedia. http://www.educaplay.com/

1.6. METADATOS.

Título	Reglas para encontrar la Derivada de una Función.
Creador	Christian Tenesaca.

Descripción	Este OA contiene el desarrollo de las reglas elementales de derivación, las mismas que cuentan con sus respectivos enunciados y ejemplos. Este recurso posee además un conjunto de actividades y una autoevaluación dirigida al estudiante.
Asunto	Aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos
Origen	Proyecto de Aplicación: Educación.
Idioma	Español
Cobertura	Estudiantes de Tercero de BGU y de los primeros ciclos de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.
Relación	
Derechos	Universidad de Cuenca
Tipo	TIC's aplicadas a la educación
Fecha	Mayo, 2016
Formato	Scorm y Html.
Identificador	
Contribuyente	Universidad de Cuenca

“Objeto De Aprendizaje Como Recurso Educativo En La Enseñanza De Aplicaciones De La Derivada A La Resolución De Problemas De Máximos Y Mínimos”

GUÍA DIDÁCTICA 4

“VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN”

Versión:	8.0
Fecha creación:	24 de Enero de 2016
Última actualización:	28 de Enero de 2016
Estado del Documento:	Aprobado
Cliente:	Universidad de Cuenca
Elaborado por:	Christian Tenesaca
Revisado por:	Ing. Lourdes Illescas

Registro de Cambios del Documento

Fecha	Autor	Versión	Estado	Cambios realizados
24 de Enero	Christian Tenesaca	V8.0	Borrador	Elaboración del documento
24 de Enero	Christian Tenesaca		Propuesta	Definición de Contenidos
25 de Enero	Christian Tenesaca		Propuesta	Definición de Contenidos
25 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de contenidos
26 de Enero	Christian Tenesaca		Borrador	Definición de Actividades y Autoevaluación.
27 de Enero	Christian Tenesaca		Aprobado	Modificación de Actividades y Autoevaluación.
28 de Enero	Christian Tenesaca		Validado	Definición de la conclusión y referencia.

* Estado se refiere al estado del documento y puede ser: Borrador / Propuesta / Validado / Aprobado.

Revisor(a):

Nombre	Versión Aprobada	Cargo/Rol en la producción del OA	Fecha
Ing. Lourdes Illescas	V8.0	Directora	02/02/2016
Ing. Lourdes Illescas		Directora	05/02/2016

TABLA DE CONTENIDOS.

1. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD

1.1 DESARROLLO DE CONTENIDOS

OA1-P01 PRESENTACIÓN

OA1-P02 INTRODUCCIÓN

OA1-P03 OBJETIVO GENERAL

OA1-P04 CONTENIDO TEÓRICO

OA4-P05: EJEMPLO 1. DEFINICIÓN DE ESTREMOS RELATIVOS.

OA4-P06: PUNTOS CRÍTICOS.

OA4-P07: EJEMPLO 2. PUNTOS CRÍTICOS.

OA4-P08: VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS.

OA4-P09: TEOREMA DEL VALOR EXTREMO Y REGLA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS.

OA4-P10: EJEMPLO 1. APLICACIÓN DE LA REGLA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS.

OA4-P11: EJEMPLO 2. APLICACIÓN DE LA REGLA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS.

1.2 ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE

OA1-P12 BIENVENIDA

OA1-P13 ACTIVIDADES A DESARROLLAR

OA1-P14 JUEGO INTERACTIVO. CRUCIGRAMA

1.3 AUTOEVALUACIÓN

OA1-P15 BIENVENIDA

OA1-P16 AUTOEVALUACIÓN A DESARROLLAR

1.4 SÍNTESIS

OA1-P17 CONCLUSIÓN

1.5 REFERENCIAS

OA1-P18 BIBLIOGRAFÍA

1.6 METADATOS

1. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD.

1.1. DESARROLLO DE CONTENIDOS.

A continuación se presenta el detalle realizado en cada uno de los componentes internos que forman parte de las secciones de este objeto de aprendizaje, para el correcto manejo del documento se debe utilizar de forma simultánea la Guía de distribución de pantallas.

OA4-P01: PRESENTACIÓN.

En esta sección se muestra los datos principales de este objeto de aprendizaje.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un logo que representa al tema del trabajo de titulación y en la parte superior central se ubicó al escudo de la Institución. Los datos de este OA son:

- Institución: Universidad de Cuenca
- Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.
- Especialidad: Matemáticas y Física.
- Título del Objeto de Aprendizaje: VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN.
- Contenidista y Diseñador Instruccional: Christian Tenesaca.
- Coordinador: Ing. Lourdes Illescas.

OA4-P02: INTRODUCCIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve introducción sobre el tema: "Valores Máximos y Mínimos de una Función" junto con su respectiva imagen representativa para este tema colocada en la parte inferior de esta sección.

Los valores extremos de una función están orientados a funciones de una variable para saber cuándo posee y presenta un máximo o un mínimo sobre un conjunto específico de dicha función.

La aplicación de temas tales como la definición de la derivada y las reglas de derivación serán de gran utilidad para el estudio de los valores máximos y mínimos de una función.

Depende del tipo de función que se plantee para saber si la misma posee valores máximos y mínimos.

OA4-P03: OBJETIVO GENERAL.

En esta sección se muestra los objetivos claros y precisos que se pretende alcanzar al finalizar con este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un avatar animado el mismo que narra los siguientes objetivos:

- Comprender la definición de los valores extremos relativos y absolutos de una función.
- Determinar los valores extremos de una función en un intervalo.
- Desarrollar las actividades propuestas y una autoevaluación.

OA4-P04: CONTENIDO TEÓRICO.

Esta sección muestra realizada la parte teórica sobre el tema que se presenta en este OA.

En la parte superior derecha de esta sección se colocó una imagen representativa para el contenido teórico.

Valores Máximos y Mínimos de una Función.

1. DEFINICIÓN DE VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN.

Los máximos y mínimos de una función conocidos como valores extremos, son aquellos valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma una función ya sea en una región en particular o en su dominio total de la curva.

Una función puede alcanzar más de un valor, un solo valor o incluso no puede tener ninguno de los valores extremos.

2. DEFINICIÓN DE VALORES EXTREMOS RELATIVOS.

Sea $y = f(x)$ una función definida en el intervalo abierto (a, b) y que contiene al número **c**, entonces la función tiene:

$Un\ máximo\ relativo\ para\ el\ cual\ f(c)\ \geq f(x)\ para\ todo\ x\ en\ ese\ intervalo.$

$Un\ mínimo\ relativo\ para\ el\ cual\ f(c)\ \leq f(x)\ para\ todo\ x\ en\ ese\ intervalo.$

El teorema que a continuación se presenta, debe ser utilizado para determinar un número posible de un extremo relativo en una función.

TEOREMA 1: "Si $f(x)$ existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en **c**, donde $a < c < b$, y además $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$" (Leithold 198).

OA4-P05: EJEMPLO 1. DEFINICIÓN DE ESTREMOS RELATIVOS.

En esta sección se muestra realizado un ejemplo modelo.

Sea f la función definida por $f(x) = x^4 - 3x^3$ encuentre los valores extremos relativos.

Resolución:

Esta función es continua en el dominio $(-\infty, +\infty)$.

Al derivar $f(x)$, se tiene:

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$

Al hallar sus raíces al hacer $f'(x) = 0$, se obtiene:

$$4x^3 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 9) = 0 \quad por\ Factor\ Común.$$

$$x^2 = 0\, ; 4x - 9 = 0$$

$$x_1 = 0\, ;\ \ x_2 = \frac{9}{4}$$

Por lo tanto en estas raíces: 0 y $\frac{9}{4}$ la función puede presentar un extremo relativo.

Al analizar primero con $x_1 = 0,\ f'(0) = 0, f$ puede tener un extremo relativo en cero.

Sin embargo, como $f(0) = 0, y$

$$0 > f(x)\ cuando\ x > 0, y$$

$$0 < f(x)\ cuando\ x < 0.$$

Lo cual significa que en $x_1 = 0$ no se puede aplicar ninguna de las definiciones de valores extremos relativos. De modo que $f(x)$ no cuenta con un extremo relativo en 0.

Ahora, con $x_2 = \frac{9}{4},\ f'\left(\frac{9}{4}\right) = 0, f$ puede tener un extremo relativo en $\frac{9}{4}$.

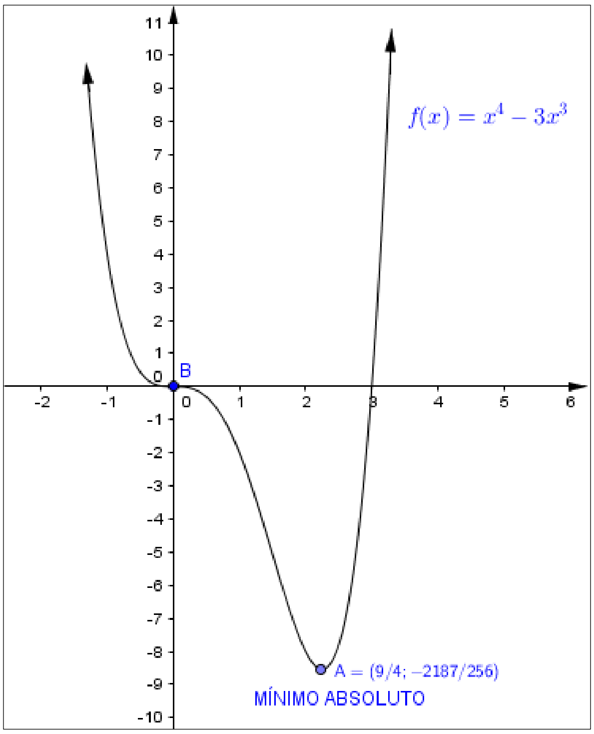
Sin embargo, como $f\left(\frac{9}{4}\right) \approx -8.54, y$

$$-8.54 < f(x)\ cuando\ x < \frac{9}{4}\ o\ x > \frac{9}{4}.$$

Lo cual cumple con la definición de un valor mínimo relativo.

En consecuencia, existe un valor mínimo relativo en -8.543, en el punto $x_2 = \frac{9}{4}$.

Gráficamente se tiene:



Gráfica 2.2: Representación de la función $f(x) = x^4 - 3x^3$ ***continua en*** $(-\infty, +\infty)$ ***con su valor mínimo relativo en el punto A.***

OA4-P06: PUNTOS CRÍTICOS.

En esta sección se muestra la continuidad de la parte teórica del tema "valores máximos y mínimos de una función".

Los valores extremos de una función se pueden presentar en los siguientes puntos, entre estos se tiene:

Puntos frontera o extremo: Son el o los puntos que se encuentran en los puntos finales de un Intervalo.

Punto estacionario: Es un punto ***c*** del intervalo I en donde su derivada es igual a cero y su recta tangente en ***c*** es paralela al eje x.

Las raíces encontradas de la función del ejemplo 1 son denominados puntos estacionarios de f.

Punto singular: Es un punto ***c*** del intervalo I en donde $f'(x)$ no existe y su recta tangente en ***c*** es paralela al eje y.

Estos tres tipos de puntos frontera, estacionario y singular conllevan a establecer la siguiente definición.

3. DEFINICIÓN DE UN PUNTO CRÍTICO.

Sea f definida en un intervalo *I* que contiene al punto ***c***. Si $f(c)$ es un valor extremo, entonces ***c*** debe ser un punto crítico; es decir, ***c*** es alguno de los siguientes:

"Un punto frontera de I;

Un punto estacionario de f; es decir, un punto donde $f'(c) = 0$; o

Un punto singular de f; esto es, un punto en donde $f'(c)$ no existe" (Purcell 152).

OA4-P07: EJEMPLO 2. PUNTOS CRÍTICOS.

En esta sección se muestra realizado un ejemplo en donde se encontró los puntos críticos de una función.

Encuentre los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ en el intervalo cerrado [-2, 3].

Resolución:

Puntos frontera o extremo:

Al estar $f(x)$ en un intervalo cerrado los puntos frontera son: -2 y 3.

Puntos estacionarios:

Al derivar $f(x)$ e igualar a cero, se tiene:

$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0$

$x(3x - 4) = 0$

de donde sus raíces son:

$x_1 = 0;\ \ 3x = 4$

$x_2 = 4/3$

Por lo tanto los puntos estacionarios son: 0 y 4/3.

Punto singular: no existe debido a que la derivada de $f(x)$ existe.

En consecuencia, los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ son: $\mathbf{-2, 3, 0}$ y $\mathbf{4/3}$.

OA4-P08: VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS.

En esta sección se muestra la continuidad de la parte teórica del tema que presenta este OA.

Con frecuencia se trata con funciones definidas en un intervalo de cualquier tipo, y se desea determinar el valor más grande o más pequeño en el intervalo de una función. Estos valores son denominados valores extremos absolutos, cuya definición se presenta a continuación.

4. DEFINICIÓN DE VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS.

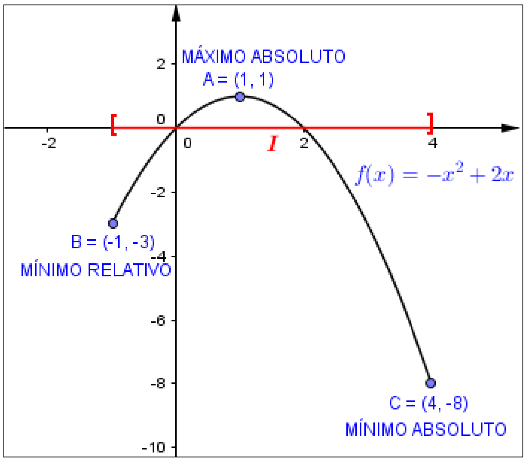
Sea $y = f(x)$ definida sobre un intervalo I el cual contiene al punto ***c***, entonces la función tiene:

$Un\ valor\ mínimo\ absoluto\ para\ el\ cual\ f(c)\ \leq\ f(x)\ para\ todo\ x\ en\ I.$

$Un\ valor\ máximo\ absoluto\ para\ el\ cual\ f(c)\ \geq\ f(x)\ para\ todo\ x\ en\ I.$

A continuación se presenta un ejemplo modelo en el cual se da una función y un intervalo I.

Ejemplo 1. Analice los valores extremos absolutos sí $f(x) = -x^2 + 2x$ es continua en el intervalo $[-1, 4]$ en la gráfica que se presenta a continuación.



En base a la gráfica, el valor máximo absoluto de $f(x)$ en [-1, 4] ocurre en 1, y $f(1) = 1$ es decir ocurre en un punto estacionario; el valor mínimo relativo de $f(x)$ en [-1, 4] ocurre en -1, y $f(-1) = -3$, es decir ocurre en el punto frontera izquierdo y el valor mínimo absoluto de $f(x)$ en [-1, 4] ocurre en 4, y $f(4) = -8$ es decir ocurre en el punto frontera derecho.

Este ejemplo también será realizado más adelante después de que se conozca el teorema del valor extremo y regla para calcular los valores extremos absolutos.

OA4-P09: TEOREMA DEL VALOR EXTREMO Y REGLA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS.

En esta sección se muestra la parte final de la parte teórica del tema tratado en este OA.

TEOREMA DEL VALOR EXTREMO. “Si f es continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo” (Larson 164).

Un extremo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado debe ser un extremo relativo, de modo que los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado [a, b] pueden determinarse empleando la siguiente regla.

REGLA PARA CALCULAR LOS VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN CONTINUA EN UN INTERVALO CERRADO.

Esta regla consiste en seguir ordenadamente los siguientes pasos:

Paso 1: Encontrar la primera derivada de $f(x)$.

Paso 2: Igualar la primera derivada a cero y hallar los valores de las raíces (puntos críticos) de la ecuación resultante.

Paso 3: Evaluar en $f(x)$ cada uno de estos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el valor más pequeño es el valor mínimo (Purcell 163).

OA4-P10: EJEMPLO 1. APLICACIÓN DE LA REGLA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS.

En esta sección se muestra realizado un ejemplo modelo en cual se aplica la regla para calcular los valores extremos absolutos de una función.

Calcular los valores extremos absolutos de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ continua en el intervalo $[-2, 3]$.

Al aplicar los pasos de la regla para calcular los valores extremos absolutos, se tiene:

Paso 1: Derivar $f(x)$.

Al emplear las respectivas reglas de derivación, resulta:

$$f'(x) = 6x - 2$$

Paso 2: Al igualar $f'(x)$ a cero y al hallar sus raíces, se obtiene:

$$6x - 2 = 0$$

$$6x = 2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto los puntos críticos de $f(x)$ son: $\mathbf{-2, \frac{1}{3}\ y\ 3.}$

Paso 3: Al evaluar cada uno de estos puntos críticos en $f(x)$, se tiene:

$$f(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = 12 + 4 + 1 = 17$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$f(3) = 3(3)^2 - 2(3) + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$$

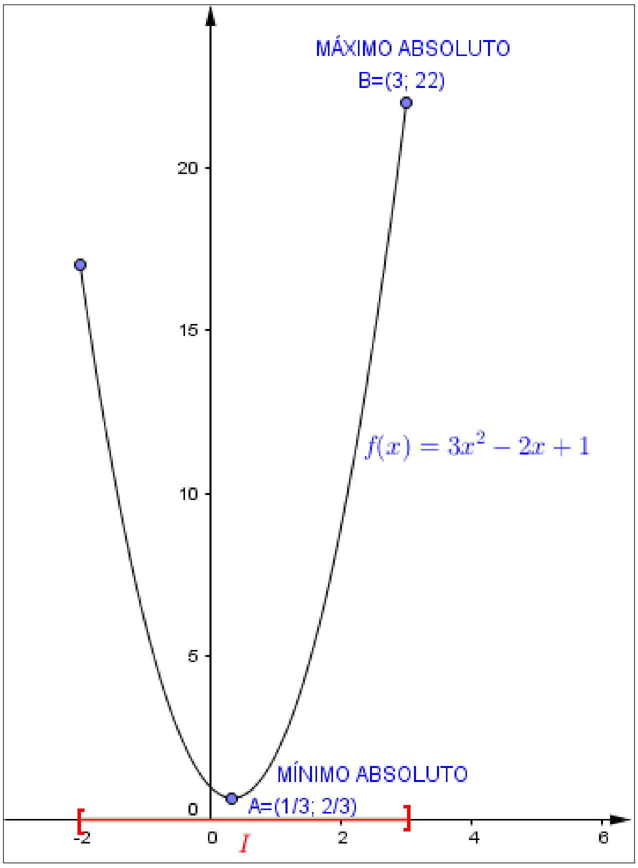
Se observa, que el mayor de estos valores es 22 y el valor más pequeño es $\frac{2}{3}$.

En consecuencia, existe un:

$$Máximo\ Absoluto\ de\ 22, en\ el\ punto\ x = 3.$$

$$Mínimo\ Absoluto\ de\ \frac{2}{3}, en\ el\ punto\ x = \frac{1}{3}.$$

Gráficamente se tiene:



Gráfica 4.2: Representación de la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ continua en [-2, 3] con sus valores extremos absolutos.

OA4-P11: EJEMPLO 2. APLICACIÓN DE LA REGLA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS.

En esta sección se muestra realizado un segundo ejemplo modelo en cual se aplicó la regla para calcular los valores extremos absolutos de una función.

Sea $f(x) = -x^2 + 2x$ continua en el intervalo $[-1, 4]$ encuentre los extremos absolutos de $f(x)$.

Este ejercicio fue resuelto anteriormente solo con el análisis de su gráfica, ahora se resuelve de forma analítica, es decir aplicando la regla que se conoció.

Paso 1: Derivar $f(x)$.

Al emplear las respectivas reglas de derivación, resulta:

$f'(x) = -2x + 2$

Paso 2: Al igualar $f'(x)$ a cero y al hallar sus raíces, se obtiene:

$$-2x + 2 = 0$$
$$-2(x - 1) = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Por lo tanto los puntos críticos de $f(x)$ son: $\mathbf{-1, 1}$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{4}$.

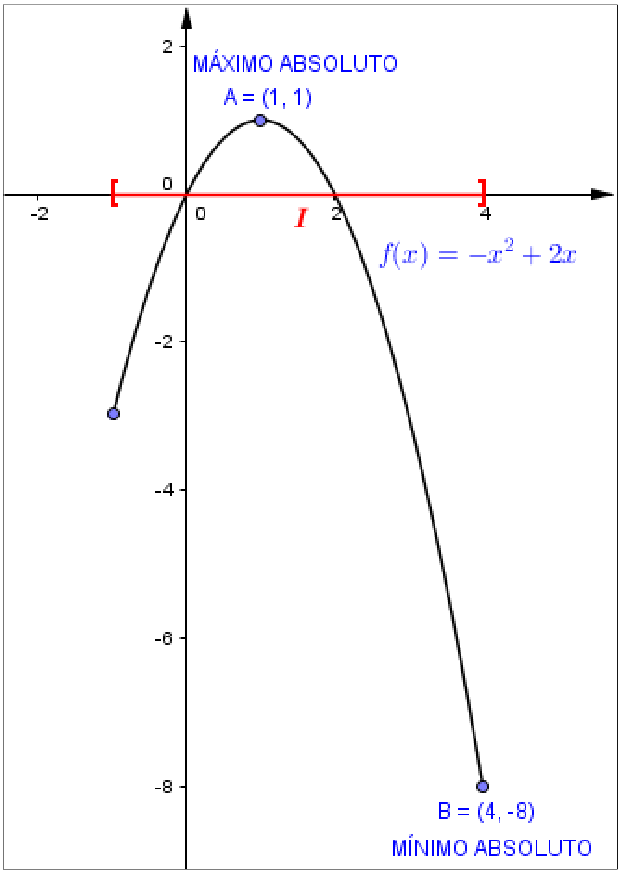
Paso 3: Al evaluar cada uno de estos puntos críticos en $f(x)$, se tiene:

$$f(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) = -1 - 2 = -3$$
$$f(1) = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1$$
$$f(4) = -(4)^2 + 2(4) = -16 + 8 = -8$$

Se observa, que el mayor de estos valores es 1 y el valor más pequeño es - 8. En consecuencia, existe un:

$$Máximo\ Absoluto\ de\ 1, en\ el\ punto\ x = 1.$$
$$Mínimo\ Absoluto\ de - 8, en\ el\ punto\ x = 4.$$

Gráficamente se tiene:



Gráfica 4.3: Representación de la función $f(x) = -x^2 + 2x$

continua en [-1, 4] con sus valores extremos absolutos.

1.2. ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE.

OA4-P12: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar las actividades propuestas.

En la parte derecha de esta sección se colocó una imagen animada representativa para las actividades.

“PONGAMOS EN PRÁCTICA LO APRENDIDO”

OA4–P13: ACTIVIDADES A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra realizada un conjunto de actividades propuestas para que desarrolle el estudiante.

1. Rellenar espacios en blanco.

   Lea el párrafo que aparece debajo y complete con las palabras que faltan.

   Los valores extremos de una función se pueden presentar en los siguientes puntos críticos de f, entre estos se tiene: un punto frontera, un punto _________ y un punto ______.

   Las palabras que faltan son: estacionario y singular

2. ¿Cuál es el orden correcto?

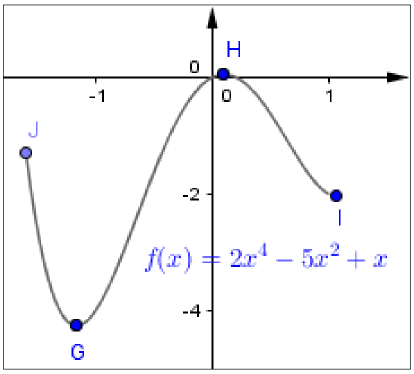
   Ordene correctamente los pasos que se debe seguir de la regla para calcular los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado.

   1. Encontrar la primera derivada de $f(x)$.
   2. Evaluar en $f(x)$ cada uno de estos puntos críticos. El mayor de estos valores es el valor máximo; el valor más pequeño es el valor mínimo
   3. Igualar la primera derivada a cero y hallar los valores de las raíces (puntos críticos) de la ecuación resultante.

   El orden correcto es: 1, 3 y 2

3. Señale la respuesta correcta.

   En la siguiente función $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x$ continua en el intervalo cerrado [-1.6, 1.06] que se presenta gráficamente.



¿Cuál de los planteamientos son correctos?

I. Los valores extremos absolutos son J e I.
II. Los valores extremos absolutos son H y G.
III. Los valores extremos relativos son H y G.
IV. Los valores extremos relativos son J e I.

- I y III
- II y IV.

La respuesta es: la opción 2.

OA4-P14: JUEGO INTERACTIVO. CRUCIGRAMA.

En este juego, la actividad que se requiere desarrollar en esta sección es: rellenar con palabras los campos del crucigrama en base a los conceptos que se ha tratado en la parte teórica de este OA.

1.3. AUTOEVALUACIÓN.

OA4-P15: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar la autoevaluación propuesta para el estudiante.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un gif animado representativo para la autoevaluación.

“VAMOS DESARROLLEMOS LA AUTOEVALUACIÓN PROPUESTA”

OA4–P16: AUTOEVALUACIÓN A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra el planteamiento de la autoevaluación.

1. Marque Verdadero o Falso.

Los máximos y mínimos de una función conocidos como valores extremos, son aquellos valores más grandes o más pequeños que toma una función solo en una región en particular.

- ○ Verdadero
- ○ Falso

La respuesta es: Falso.

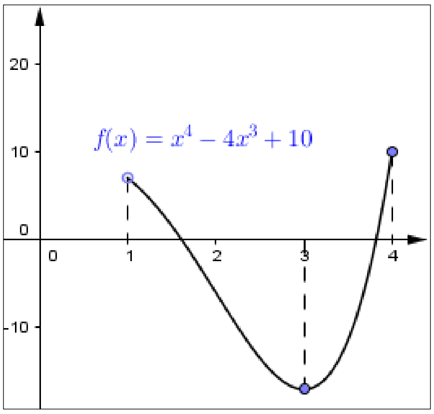
2. Seleccione la respuesta correcta.

Una función puede alcanzar:

- ○ Solo un valor extremo.
- ○ Más de un valor extremo.
- ○ Ningún valor extremo.
- ○ Todas las anteriores.

La respuesta es: la cuarta opción.

En base a la siguiente gráfica que se muestra a continuación.



Los puntos críticos de $f(x)$ son:

- ○ Punto Frontera en [1, 4] es 1 y 4, Punto Estacionario en $x = 4$ y Punto Singular no existe.
- ○ Punto Frontera en (1, 4] es 4, Punto Estacionario en $x = 3$ y Punto Singular no existe.
- ○ Punto Frontera en [1, 4) es 1, Punto Estacionario en $x = 3$ y Punto Singular no existe.

La respuesta es: la segunda opción.

1.4. SÍNTESIS.

OA4–P17: CONCLUSIÓN.

En esta sección se muestra realizada una breve conclusión sobre el tema tratado en este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó una imagen animada representativa para la conclusión.

A través de este OA, se estudió el tema de máximos y mínimos de una función, que se conoce como valores extremos y son aquellos valores más grandes o más pequeños que toma una función ya sea en una región en particular o en su dominio total de la curva.

Existen dos tipos de valores extremos:

Extremos relativos: ocurren en un intervalo abierto, y

Extremos absolutos: ocurre en un intervalo cerrado.

Los valores extremos pueden ocurrir en un punto frontera, un punto estacionario si $f'(x) = 0$ o en un punto singular cuando $f'(x)$ no existe. Estos puntos son denominados puntos críticos (raíces) de $f(x)$.

Finalmente, el teorema del valor extremo y la regla para calcular los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, fueron muy útiles para la resolución de los ejemplos modelos.

1.5. REFERENCIAS.

OA1–P18: BIBLIOGRAFÍA.

En esta sección se muestra la bibliografía que se utilizó para tratar el tema: Valores máximos y mínimos de una función.

Larson, Ron Robert Hostetler y Bruce Edwards. *Cálculo con geometría analítica*. Octava. Vol. 1. México DF: McGraw-Hill, 2006.

Leithold, Louis. *El Cálculo*. Séptima. México DF: Mapasa, 1998.

Purcell, Edwin, Dale Varbeng y Steven Rigdon. *Cálculo*. Novena. México DF: Pearson, 2007.

ADR Formación. Educaplay: plataforma que permite crear una gran variedad de actividades educativas multimedia. http://www.educaplay.com/

1.6. METADATOS.

Título	Valores Máximos y Mínimos de una Función.
Creador	Christian Tenesaca
Descripción	Este OA contiene el desarrollo general del tema “valores máximos y mínimos de una función”. Este recurso posee además un conjunto de actividades y una autoevaluación propuesta para el estudiante.
Asunto	Aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos.
Origen	Proyecto de Aplicación: Educación.
Idioma	Español
Cobertura	Estudiantes de Tercero de BGU y de los primeros ciclos de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.
Relación	
Derechos	Universidad de Cuenca
Tipo	TIC aplicadas a la educación
Fecha	
Formato	Scorm y Html.
Identificador	
Contribuyente	Universidad de Cuenca

“Objeto De Aprendizaje Como Recurso Educativo En La Enseñanza De Aplicaciones De La Derivada A La Resolución De Problemas De Máximos Y Mínimos”

GUÍA DIDÁCTICA 5

“APLICACIONES DE LA DERIVADA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PRÁCTICOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS”

Versión:	8.0
Fecha creación:	10 de Febrero de 2016
Última actualización:	15 de Mayo de 2016
Estado del Documento:	Aprobado
Cliente:	Universidad de Cuenca
Elaborado por:	Christian Tenesaca
Revisado por:	Ing. Lourdes Illescas

Registro de Cambios del Documento

Fecha	Autor	Versión	*Estado	Cambios realizados
10 de Febrero	Christian Tenesaca	V8.0	Borrador	Elaboración del documento
12 de Febrero			Propuesta	Edición del documento
18 de Febrero			Propuesta	Planteamiento de ejercicios
25 de Febrero			Propuesta	Modificación de ejercicios
02 de Marzo			Aprobado	Definición de ejercicios
12 de Marzo a 28 de Abril			Propuesta	Elaboración de videos para los ejercicios
02 de Mayo			Propuesta	Modificación de videos
06 de Mayo			Validado	Definición de videos
07 de Mayo			Borrador	Elaboración de actividades y autoevaluación
08 de Mayo			Aprobado	Modificación de actividades y autoevaluación.
15 de mayo			Validado	Definición de conclusión y referencias.

* Estado se refiere al estado del documento y puede ser: Borrador / Propuesta / Validado / Aprobado.

Revisor(a):

Nombre	Versión Aprobada	Cargo/Rol en la producción del OA	Fecha
Ing. Lourdes Illescas	V8.0	Directora	19/02/2016

Ing. Lourdes Illescas		Directora	26/02/2016
Ing. Lourdes Illescas		Directora	05/02/2016
Ing. Lourdes Illescas		Directora	17/02/2016

TABLA DE CONTENIDOS.

1. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD.

1.1 DESARROLLO DE CONTENIDOS.

A continuación se presenta el detalle realizado en cada uno de los componentes internos que forman parte de las secciones de este objeto de aprendizaje, para el correcto manejo del documento se debe utilizar de forma simultánea la Guía de distribución de pantallas.

OA5-P01: PRESENTACIÓN.

En esta sección se muestra los datos principales de este objeto de aprendizaje.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un logo que representa al tema del trabajo de titulación y en la parte superior central se ubicó al escudo de la Institución. Los datos de este OA son:

- Institución: Universidad de Cuenca.
- Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.
- Especialidad: Matemáticas y Física.
- Título del Objeto de Aprendizaje: APLICACIONES DE LA DERIVADA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PRÁCTICOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.
- Contenidista y Diseñador Instruccional: Christian Tenesaca.
- Coordinador: Ing. Lourdes Illescas.

OA5-P02: INTRODUCCIÓN.

*En esta sección se muestra realizada una breve introducción sobre el tema: "*Aplicaciones de la derivada: resolución de problemas prácticos de máximos y mínimos*" junto con su respectiva imagen representativa para este tema colocada en la parte izquierda de esta sección.*

Las aplicaciones de las derivadas son muy diversas, dentro de este objeto de aprendizaje se dedica al estudio de las aplicaciones a la resolución de problemas prácticos de máximos y mínimos.

Una vez que se ha conocido y estudiado los temas de la derivada de una función, las reglas de derivación y otros tratados en los OA anteriores, se continúa con la aplicación de estos temas en la parte práctica.

OA5-P03: OBJETIVO GENERAL.

En esta sección se muestra los objetivos claros y precisos que se pretende alcanzar al finalizar este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un avatar animado representativo el mismo que narra los siguientes objetivos:

- Resolver problemas prácticos de máximos y mínimos.
- Comprender el desarrollo que se debe seguir en cada ejercicio.

OA5-P04: CONTENIDO TEÓRICO.

En esta sección se muestra una breve parte teórica sobre el tema a ser tratado en este OA.

En la parte superior derecha de esta sección se colocó una imagen representativa para el contenido teórico.

Aplicaciones de la Derivada: resolución de problemas prácticos de Máximos y Mínimos.

En nuestra vida cotidiana, a menudo se nos presenta una gran variedad de problemas en la cual nos encontramos con la necesidad de encontrar la mejor forma de hacer algo. Por ejemplo en el ámbito económico desea maximizar ganancias o reducir costos de productos; en geometría por lo general se desea maximizar áreas o volúmenes; entre otras posibilidades, requieren que estos problemas se formulen de tal modo que conlleve a buscar maximizar o minimizar una función y encontrar donde se alcanzan estos valores de un conjunto específico (Purcell 151).

Es aquí que el estudio del Cálculo Diferencial se convierte en una herramienta importante para utilizar mecanismos y encontrar una respuesta al resolver este tipo de problemas.

OA5-P05: INSTRUCCIONES PARA LOS EJERCICIOS.

En esta sección se muestra el planteamiento de instrucciones para resolver los ejercicios prácticos de máximos y mínimos.

En los problemas que se presentan en las siguientes secciones se necesita encontrar simplemente el valor máximo o mínimo que la función posea, teniendo en cuenta el tipo de dominio que adquiera dicha función del ejercicio para saber si se trata de un valor extremo relativo o absoluto.

Durante la resolución de los ejercicios se debe tener presente las siguientes instrucciones que plantea Barrientos.

a) Escribir una ecuación que represente la cantidad que se desea maximizar o minimizar y hacer una gráfica (si es necesario) adecuada de la situación.
b) Si la ecuación contiene más de una variable se debe encontrar otra ecuación que relacione las variables, para expresar la ecuación en función de una única variable.
c) A la función resultante se le aplica la regla para calcular los valores extremos de una función teniendo en cuenta el tipo de dominio que posee la función.
d) Concluir cuál es el punto de máximo o mínimo y darle respuesta a la pregunta del problema (77).

OA5-P06: EJERCICIO MODELO 1.- ENUNCIADO.

En esta sección se muestra el enunciado del ejercicio a resolver.

Un granjero desea construir un caja sin tapa para poder colocar alimento para sus aves, para hacerlo posee de un pedazo de lámina metálica rectangular cuyas dimensiones tienen de ancho 25 cm y de largo 60 cm, para la altura de la caja a construir se recortará cuadrados idénticos de las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados cortados del material a utilizar de tal manera que se forme la caja. Encuentre las dimensiones de la caja con volumen máximo ¿Cuál es el valor de este volumen?

OA5-P07: DESARROLLO 1: DATOS E INCÓGNITA.

En esta sección se muestra la primera parte del desarrollo del ejercicio modelo 1.

DESARROLLO DEL EJERCICIO:

En este problema, los datos que se conoce son:

Largo de la lámina metálica rectangular = 60cm.

Ancho de la lámina metálica rectangular = 25 cm.

La incógnita designada para este ejercicio es:

x*: Representa la altura de la caja a construir y el ancho del cuadrado que se recortará.*

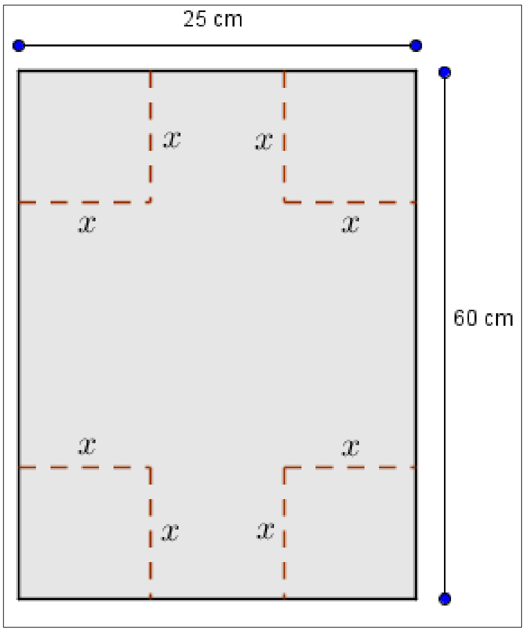


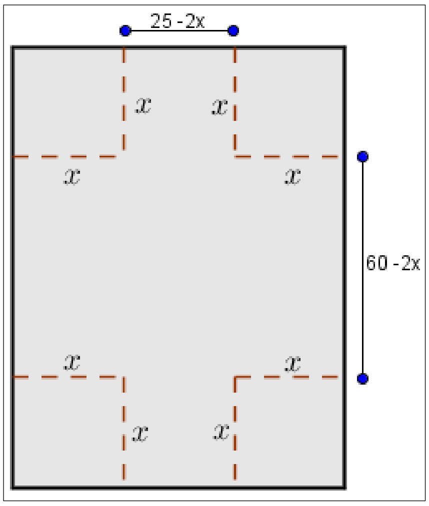
Figura 1: Representación de la lámina metálica rectangular con sus dimensiones y los cuadrados que se recortarán en cada esquina.

Para hallar el largo de la caja a construir se debe hacer lo siguiente:

Restar los 60 cm menos la suma de los dos lados de los cuadrados del largo de la lámina, es decir: $60-2x$.

Para hallar el ancho de la caja a construir se debe proceder de la misma manera.

Restar los 25 cm menos la suma de los dos lados de los cuadrados del ancho de la lámina, es decir: $25-2x$.



OA5-P08: DESARROLLO 2: DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN A MAXIMIZAR.

Esta sección muestra la segunda parte del desarrollo de este ejercicio modelo.

Al realizar una gráfica de acuerdo a la situación del ejercicio se tiene:

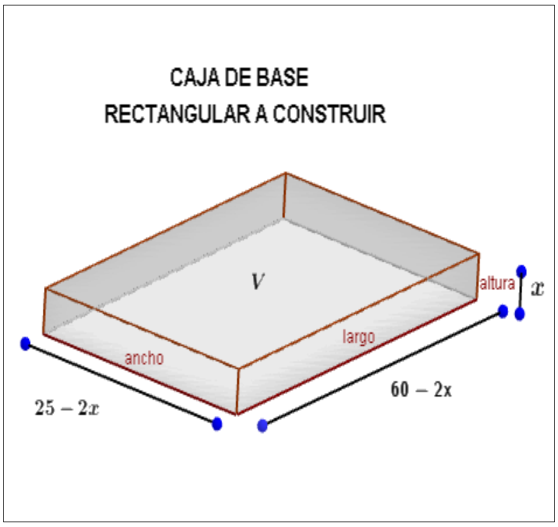


Figura 2: Representación de caja rectangular que se desea construir.

Por la figura 2 se puede observar que el volumen de esta caja es igual:

$$V = x(25-2x)(60-2x)$$

$$V = (25x-2x^2)(60-2x)$$

$$V = 1500x - 50x^2 - 120x^2 + 4x^3$$

$$V = 4x^3 - 170x^2 + 1500x$$

Por lo tanto: $V(x) = 4x^3 - 170x^2 + 1500x$ es la ecuación que se desea maximizar.

OA5-P09: DESARROLLO 3: REGLA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS.

En esta sección se muestra la tercera parte del desarrollo de este ejercicio modelo.

Ahora, x no puede ser menor a 0 ni mayor a 12.5 cm.

Por lo tanto: [0; 12.5] es el dominio de la ecuación a maximizar.

Como $V(x)$ es continua en este dominio, se sabe que por el teorema del valor extremo que en este intervalo V presenta un máximo absoluto.

Al aplicar los pasos de la Regla para calcular los valores extremos de una función, se tiene:

Paso 1: Derivar la función $V(x)$.

Al emplear la regla de una constante por una función a cada término, se obtiene:

$$\frac{dV}{dx} = V'(x) = 12x^2 - 340x + 1500$$

Paso 2: Al igualar $V'(x)$ a cero y al hallar sus raíces, se tiene:

$$12x^2 - 340x + 1500 = 0$$

$$4(3x^2 - 85x + 375) = 0$$

$$3x^2 - 85x + 375 = 0$$

$$x = \frac{-(-85) \pm \sqrt{(-85)^2 - 4(3)(375)}}{2(3)} = \frac{85 \pm \sqrt{7225 - 4500}}{6} = \frac{85 \pm \sqrt{2725}}{6}$$

Los puntos estacionarios de $V(x)$ son: $x_1 = \frac{85+\sqrt{2725}}{6} \approx 22.87$

$$x_2 = \frac{85 - \sqrt{2725}}{6} \approx 5.47$$

Se puede apreciar que $x_1 = 22.87$ no está en el intervalo [0; 12.5].

Se ve que existe solo tres puntos críticos: 0, 5.47 y 12.5.

Paso 3: Al evaluar estos puntos críticos en la función $V(x)$, se tiene:

$$V(5.47) = 4(5.47)^3 - 170(5.47)^2 + 1500(5.47) = 3773.12 \text{ cm}^3$$

$$V(0) = 4(0)^3 - 170(0)^2 + 1500(0) = 0 \text{ cm}^3$$

$$V(12.5) = 4(12.5)^3 - 170(12.5)^2 + 1500(12.5) = 0 \text{ cm}^3$$

Lo cual resulta que el mayor de estos valores es 3773.12.

Se observa que cuando $x = 0$ da un volumen igual a cero, esto se debe que cuando el ancho de las esquinas es cero no hay que doblar la lámina metálica hacia arriba, y; cuando $x = 12.5$ también da un volumen cero, esto se debe a que el pedazo de lámina se dobla a la mitad, de modo que no tiene base.

EN CONCLUSIÓN: La caja tiene un volumen máximo de 3773.12 cm^3 si $x = 5.47$, es decir, el granjero debe construir la caja con un ancho de 14.06 cm, un largo de 49.06 cm y una altura de 5.47 cm.

Los siguientes ejercicios modelos fueron resueltos por medio de videos los mismos que se muestran en fragmentos.

OA5-P10: EJERCICIO MODELO 2. ENUNCIADO.

En esta sección se muestra el primer fragmento del video.

A través de las reproducciones de cada fragmento del video se explica el desarrollo del ejercicio modelo 2.

Parte 1: Muestra la narración del enunciado del ejercicio modelo 2, los datos, y las gráficas de las figuras.

OA5-P11: DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN A MINIMIZAR.

En esta sección se muestra el segundo fragmento del video.

Parte 2: Muestra el desarrollo de las áreas de las figuras para poder determinar la función a minimizar, el dominio.

OA5-P12: APLICACIÓN DE LA REGLA PARA CALCULAR LOS VALORES EXTREMOS.

En esta sección se muestra el tercer fragmento del video.

Parte 3: Muestra la aplicación de los pasos 1 y 2 de la regla para calcular los valores extremos.

OA5-P13: CONCLUSIÓN DEL EJERCICIO.

En esta sección se muestra el último fragmento del video.

Parte 4: Muestra la aplicación del paso 3 de la regla para calcular valores extremos de una función y la conclusión del ejercicio.

OA5-P14: EJERCICIO MODELO 3.- ENUNCIADO.

En esta sección se muestra el primer fragmento del video.

A través de las reproducciones de cada fragmento del video se explica el desarrollo del ejercicio modelo 3.

Parte 1: Muestra la narración del enunciado del ejercicio modelo 3, el dato, incógnita y las respectivas ecuaciones.

OA5-P15: DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN A MAXIMIZAR, APLICACIÓN DE LA REGLA.

En esta sección se muestra el tercer fragmento del video.

Parte 2: Muestra el desarrollo para determinar la función a maximizar, el dominio, la aplicación de los pasos 1 y 2 de la regla para calcular los valores extremos y los puntos críticos que posee la función.

OA5-P16: CONCLUSIÓN DEL EJERCICIO.

En esta sección se muestra el último fragmento del video.

Parte 3: Muestra la aplicación del paso 3 de la regla para calcular valores extremos de una función y la conclusión del ejercicio.

OA5-P17: EJERCICIO MODELO 4. ENUNCIADO Y DESARROLLO 1.

Se desea construir un marco para una ventana rectangular de 3 m^2 de superficie. El costo del material a utilizar cuesta 3 \$ el metro lineal de los tramos horizontales y 4\$ de los tramos verticales de la ventana. Encuentre las dimensiones de la ventana para que el costo del marco sea mínimo. ¿Cuál es este valor?

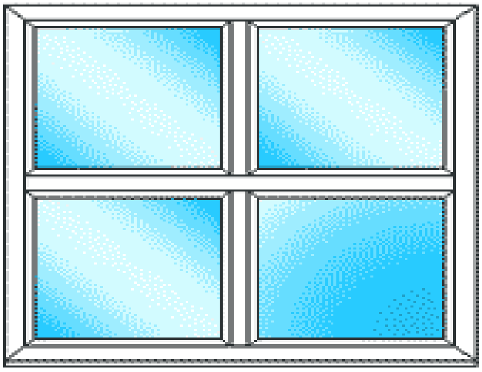


Figura 2.7.2.2: Modelo de la ventana
http://www.ferrodiver.pt/i/fixa2.gif

DESARROLLO DEL EJERCICIO.

Al realizar una gráfica de acuerdo a la situación del ejercicio, se tiene:

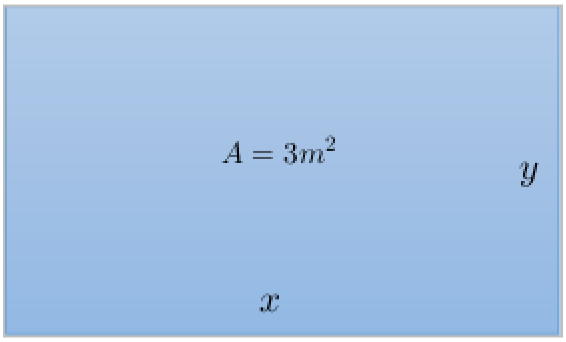


Figura 2.7.2.1: Representación del largo y ancho de la ventana rectangular.

En este problema el dato que se conoce es:

Área de la ventana = 3m^2.

Las incógnitas designadas para este ejercicio son:

x: Representa el largo de la ventana

y: Representa el ancho de la ventana

OA5-P18: DESARROLLO 2: ECUACIONES Y FUNCIÓN A MINIMIZAR.

En esta sección se muestra desarrollado la segunda parte del ejercicio.

Se sabe que el área de un rectángulo es igual a:

$$A = base \times altura$$

Por lo tanto, el área de esta ventana es:

$$A = x.y = 3 \qquad (1)$$

El perímetro de esta ventana es igual a la suma de todos los lados de la ventana:

$$P = x + x + y + y = 2x + 2y$$

El costo del marco de la ventana es igual al valor por cada metro lineal:

$$C = 3.2x + 4.2y$$

$$C = 6x + 8y \qquad (2)$$

Esta ecuación contiene más de una variable, se debe encontrar otra ecuación que relacione las variables para expresar la ecuación en función de una única variable.

Para esto se debe despejar y de (1) y sustituir en (2) lo que resulta:

$C(x) = 6x + 8\left(\frac{3}{x}\right) = 6x + \frac{24}{x}$, que es la ecuación que se desea minimizar.

Ahora, x no puede ser 0 porque no está definido en $C(x)$, y tampoco menor que 0 porque da un área negativa.

Por lo tanto, el dominio de esta función es $(0, \infty)$, al tener este tipo de intervalo abierto se sabe que se trata de un valor extremo relativo.

OA5-P19: DESARROLLO 3: DERIVADA DE LA FUNCIÓN Y CONCLUSIÓN DEL EJERCICIO.

En esta sección se muestra desarrollado la última parte del ejercicio.

Para continuar con el desarrollo del ejercicio se debe proceder a hacer lo siguiente:

Primero: Derivar la función $C(x)$.

Al emplear la regla de una constante por una función al primer término y la regla del cociente al segundo término, resulta:

$$\frac{dC}{dx} = C'(x) = 6(1) + \frac{x(0) - 24(1)}{x^2} = 6 - \frac{24}{x^2}$$

Segundo: Hallar las raíces de la función al igualar $C'(x)$ a cero, se tiene:

$$6 - \frac{24}{x^2} = 0$$

$$\frac{6x^2 - 24}{x^2} = 0$$

$$6x^2 - 24 = 0$$

$$6x^2 = 24$$

$$x^2 = \frac{24}{6}$$

$$x^2 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Por lo tanto en estas raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$, la función debe presentar el valor mínimo relativo, pero se observa que $x_2 = -2$ no es parte del intervalo $(0, \infty)$.

En consecuencia, existe un solo punto crítico en $x_1 = 2$.

Ahora este valor debe corresponder a un mínimo relativo.

Si $x_1 = 2, C'(2) = 0, C$ puede tener un extremo relativo en 2.

Sin embargo, como $C(2) = 24, y$

$24 < C(x)\ cuando\ x < 2\ o\ x > 2.$

Lo cual cumple con la definición de un valor mínimo relativo.

EN CONCLUSIÓN: El marco de la ventana tiene un costo mínimo de 24 $ si $x = 2$, es decir, las dimensiones de la ventana deben tener un ancho de 1.5 m y un largo de 2 m.

1.2. ACTIVIDADES PARA EL APRENDIZAJE.

OA5-P20: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar las actividades propuestas.

En la parte derecha de esta sección se colocó una imagen animada representativa para las actividades.

"PONGAMOS EN PRÁCTICA LO APRENDIDO"

OA5–P21: ACTIVIDADES A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra realizado un conjunto de actividades propuestas para que desarrolle el estudiante.

1. Rellenar espacios en blanco.

   Lea el siguiente enunciado que se encuentra debajo y rellene los espacios en blanco con las palabras que faltan.

   En base al desarrollo del ejercicio modelo 1.

   El granjero debe construir la caja con un _____ de 14.06 cm, un _______ de 49.06 cm y una _______ de 5.47 cm.

   Las palabras que faltan son: ancho-largo-altura

2. ¿Cuál es el orden correcto?

   Ordene correctamente las ecuaciones que se plantearon en el "DESARROLLO 2" del ejercicio modelo 4.

a) $A = x.y = 3$

b) $C = 6x + 24/x$

c) $P = 2x + 2y$

El orden correcto es: a, c y b.

3. Señale la respuesta correcta.

   En base al ejercicio modelo 3 que se presentó en videos. ¿Cuál es la derivada de la función que se obtuvo de $G(x) = 180x - 3x^2 - 1200$?

   - $G'(x) = 180 - 6x^2 - 1200$
   - $G'(x) = 180 - 6x^2 - 0$
   - $G'(x) = 180 - 3x - 0$

   La respuesta es: la segunda opción.

1.3. AUTOEVALUACIÓN.

OA5-P22: BIENVENIDA.

En esta sección se muestra una bienvenida para desarrollar la autoevaluación propuesta para el estudiante.

En la parte izquierda de esta sección se colocó un gif animado representativo para la autoevaluación.

“VAMOS DESARROLLEMOS LA AUTOEVALUACIÓN PROPUESTA”

OA5–P23: AUTOEVALUACIÓN A DESARROLLAR.

En esta sección se muestra el planteamiento de la autoevaluación.

1. Marque Verdadero o Falso al siguiente enunciado.

   ¿El dominio abierto (0, 16) fue el que se estableció en el desarrollo del ejercicio modelo 2?

   - Verdadero
   - Falso

   La respuesta es: Falso.

   En base al video (parte 2) del ejercicio modelo 3. ¿Al igualar $G'(x)$ a cero y al hallar su raíz este fue $x = 30$?

   - Verdadero
   - Falso

La respuesta es: Verdadero.

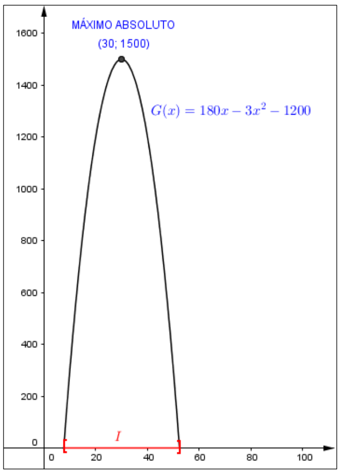
2. Seleccione la respuesta correcta.

   En base al desarrollo general del ejercicio modelo 4.- ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener la ventana rectangular?

- ○ Largo de 2 m y un ancho de 1.5 m.
- ○ Largo de 2 m y un ancho de 1 m.
- ○ Largo de 2.5 m y un ancho de 1 m.

La respuesta es: la primera opción.

¿A cuál de los ejercicios modelos desarrollados en este OA correspondería si es que existiría la siguiente gráfica?



- ○ Ejercicio modelo 1.
- ○ Ejercicio modelo 2.
- ○ Ejercicio modelo 3.
- ○ Ejercicio modelo 4.

La respuesta es: la opción 3.

OA5–P24: JUEGO INTERACTIVO. RELACIONAR ELEMENTOS.

En esta sección se muestra un juego en base a los ejercicios resueltos anteriormente.

En el siguiente juego, seleccione los elementos (Función a maximizar, dominio, etc.) que considere necesario para que correspondan a cada uno de los ejercicios modelos realizados en este OA.

1.4. SÍNTESIS

OA5–P25: CONCLUSIÓN.

En esta sección se muestra una breve conclusión sobre el tema que fue tratado en este OA.

En la parte izquierda de esta sección se colocó una imagen animada representativa para la conclusión.

A través de este OA, se conoció la importancia que tiene la aplicación del concepto de la derivada, tal fue para este caso a la resolución de problemas que trataron de maximizar o minimizar una función.

1.5. REFERENCIAS.

OA1–P26: BIBLIOGRAFÍA.

En esta sección se muestra la bibliografía que se utilizó para tratar el tema abordado en este OA.

Barrientos, Paula. «"Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11 (UN ENFOQUE GEOMÉTRICO)".» 2014. http://www.bdigital.unal.edu.co/12613/1/43263449.2014.pdf. Acceso: 05 de 01 de 2016.

Purcell, Edwin, Dale Varbeng y Steven Rigdon. *Cálculo*. Novena. México DF: Pearson, 2007.

ADR Formación. Educaplay: plataforma que permite crear una gran variedad de actividades educativas multimedia. http://www.educaplay.com/

1.6. METADATOS.

Título	Aplicaciones de la Derivada a la resolución de problemas prácticos de máximos y mínimos.
Creador	Christian Tenesaca
Descripción	Este OA contiene el desarrollo de ejercicios modelos sobre aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos, a la vez presenta un conjunto de actividades y una autoevaluación propuesta para el estudiante. Estos ejercicios fueron resueltos haciendo uso de

	la pizarra digital interactiva.
Asunto	Aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de máximos y mínimos.
Origen	Proyecto de Aplicación: Educación.
Idioma	Español
Cobertura	Estudiantes de Tercero de BGU y de los primeros ciclos de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca.
Relación	
Derechos	Universidad de Cuenca
Tipo	TIC’s aplicadas a la educación
Fecha	Mayo, 2016
Formato	Scorm y Html.
Identificador	
Contribuyente	Universidad de Cuenca

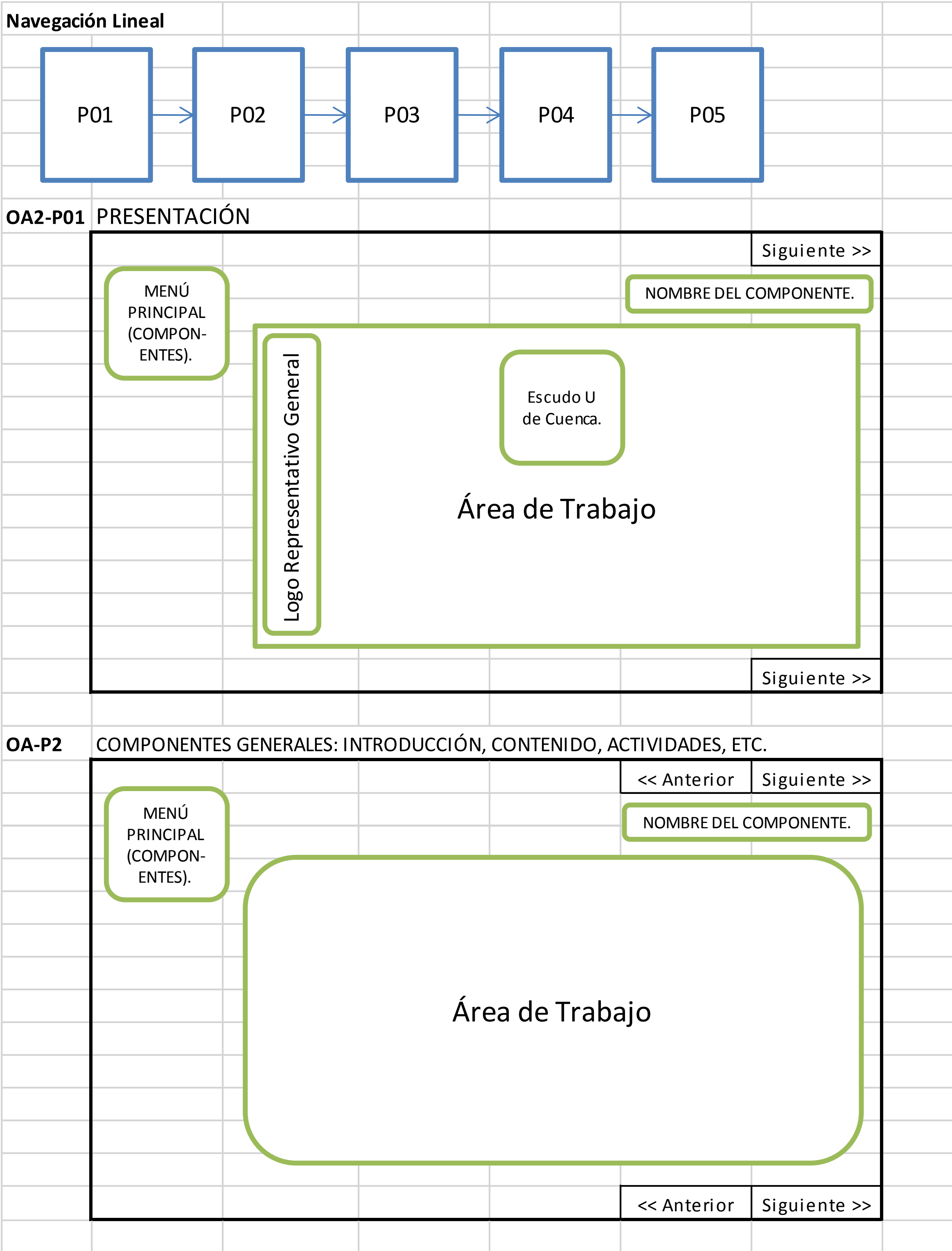
3.7 GUÍA DE DISTRIBUCIÓN DE PANTALLAS PARA OBJETOS DE APRENDIZAJE.

Las guías de pantallas se presentan de forma general por la razón que las mismas son similares en cada OA.

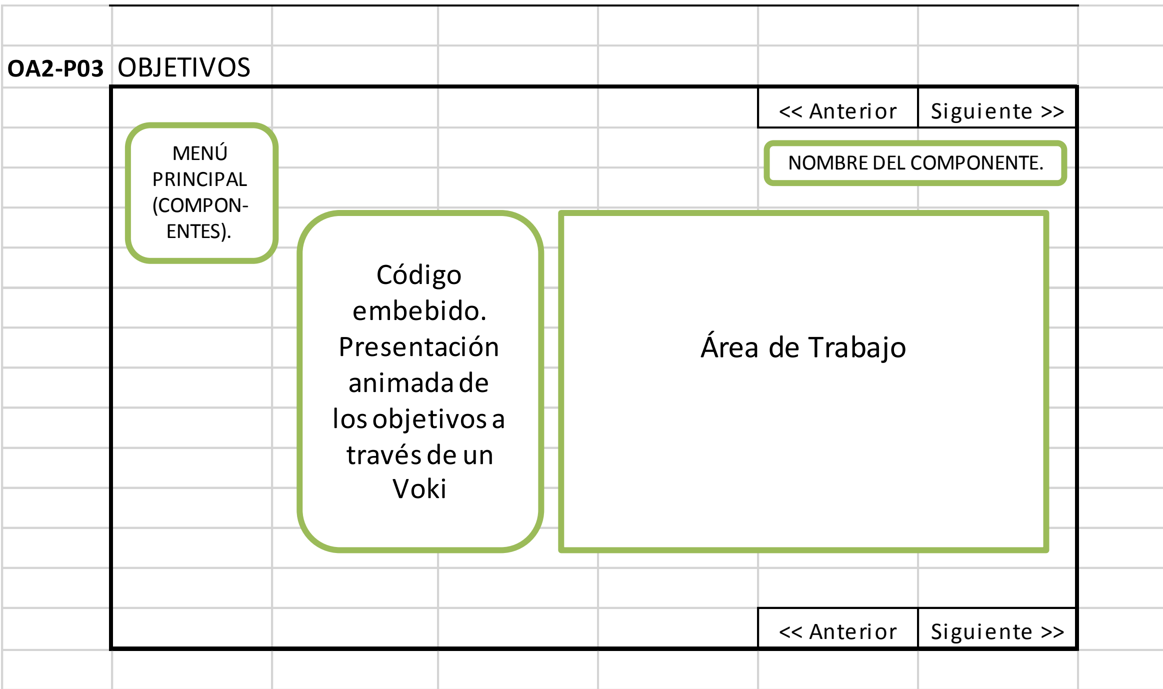
Dentro de cada guía se tiene:

- *Navegación Lineal:* aquella navegación que se realiza desde el comienzo hasta el final de cada sección que contiene cada OA.
- *Menú Principal:* aquel menú que contiene cada uno de los componentes del OA.
- *Nombre del Componente:* nombre que adopta cada sección, por ejemplo "PRESENTACIÓN".
- *Área de Trabajo:* espacio de la sección la que permite elaborar la unidad temática de cada OA, en esta área se puede insertar texto, imágenes, ejercicios, videos, entre otros elementos.
- *Avanzar / Siguiente:* permite adelantar o retroceder a cada sección.

Estos aspectos mencionados anteriormente se pueden apreciar en la siguiente guía de distribución de pantallas.



Navegación Lineal
P01
P02
P03
P04
P05
OA2-P01 PRESENTACIÓN
Siguiente >>
MENÚ PRINCIPAL (COMPON-ENTES).
NOMBRE DEL COMPONENTE.
Logo Representativo General
Escudo U de Cuenca.
Área de Trabajo
Siguiente >>
OA-P2 COMPONENTES GENERALES: INTRODUCCIÓN, CONTENIDO, ACTIVIDADES, ETC.
<< Anterior
Siguiente >>
MENÚ PRINCIPAL (COMPON-ENTES).
NOMBRE DEL COMPONENTE.
Área de Trabajo
<< Anterior
Siguiente >>


OA2-P03 OBJETIVOS
<< Anterior
Siguiente >>
MENÚ PRINCIPAL (COMPON-ENTES).
NOMBRE DEL COMPONENTE.
Código embebido. Presentación animada de los objetivos a través de un Voki
Área de Trabajo
<< Anterior
Siguiente >>

3.8 PRODUCTO FINAL: OBJETOS DE APRENDIZAJE.

Finalmente los OA se generaran en un formato SCORM que permite ser utilizado dentro de un entorno virtual de aprendizaje (EVEA) y en formato HTML, el mismo que permite ser reproducido desde cualquier navegador web.

La diferencia entre los dos, radica en que mediante un SCORM, el docente puede hacer un seguimiento del avance del alumno para registrar sus participaciones e interacción con el OA.

El formato HTML por otro lado, permite mayor libertad de difusión del material al ser publicable desde cualquier sitio web, pero no podrá ser monitoreado al avance del estudiante.

Se encuentran adjuntos al presente en un DVD conjuntamente los OA elaborados.

CONCLUSIONES.

Después de finalizar con este trabajo de titulación, cabe mencionar las siguientes conclusiones:

La construcción del recurso educativo elaborado para la enseñanza de las aplicaciones de la derivada ha requerido basarse en el empleo de la metodología de diseño de Objetos de Aprendizaje que ha sido evaluada y validada por expertos tal fue en el caso de la propuesta presentada por el proyecto de investigación DIUC: “Impacto de un proceso de inducción mediante OA a los alumnos de primer año de la Universidad de Cuenca”.

La revisión y consulta realizada de la bibliografía y de los recursos multimedia empleados en los OA permitieron detallar cada una de las guías didácticas para poder desarrollar y crear la temática tal como se requirió en el recurso. Dentro de estas guías el planteamiento de los objetivos, las actividades, y el resto de componentes de cada OA se los ha realizado con claridad para llegar a estructurar sistemáticamente el recurso educativo.

RECOMENDACIONES.

Debido a la importancia con la que cuenta este recurso, se considera necesario el planteamiento de las siguientes recomendaciones:

- Seguir elaborando Objetos de Aprendizaje para continuar con el desarrollo de más temáticas dentro del estudio del Cálculo Diferencial.
- Poner a disposición este recurso educativo tecnológico como material de consulta y refuerzo en las tareas que desempeñan los docentes y estudiantes.
- Evaluar este recurso por parte de los usuarios finales para aplicarlo mejoras en cuanto a sus contenidos y recursos que se emplearon en cada OA.
- Construir un propio repositorio institucional de Objetos de Aprendizaje para poder almacenar este tipo de recursos elaborados.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, David. «Significado y aprendizaje significativo: Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.» 1983. Digital. Acceso: 18 de Agosto de 2015. <http://www.arnaldomartinez.net/docencia_universitaria/ausubel02.pdf>.

ADR Formación. Educaplay: plataforma que permite crear una gran variedad de actividades educativas multimedia. http://www.educaplay.com/

Avello, Raidell y Ibrahim Martín. «El Software Libre en la educación a distancia. Selección de Herramientas.» 2007. Acceso: 12 de Marzo de 2016.

Barrientos, Paula. «"Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11 (UN ENFOQUE GEOMÉTRICO)".» 2014. Digital. Acceso: 05 de Enero de 2016. <http://www.bdigital.unal.edu.co/12613/1/43263449.2014.pdf>.

Castro, Citlali. «Análisis de los modelos educativos en la IES.» s.f. Digital. <http://sistemas2.dti.uaem.mx/evadocente/programa2/Psic002_14/documentos/Presentacion_Analisis_Modelos_Educativos.pdf>.

Castro, Luis. *GEOGEBRA: "Interpretación geométrica de la derivada"*. 11 de Noviembre de 2014. Digital. Acceso: 17 de Enero de 2016. <http://www.geogebra.org/m/HwQEu6HX?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Finterpretacion%2Fmaterials%2F>.

Comité de Estandarización de Tecnologías Educativas del IEEE. «Estándar para Metadatos de Objetos Educativos.» 2002. Digital. Acceso: 25 de Septiembre de 2015. <http://www-gist.det.uvigo.es/~lanido/LOMes/LOMv1_0_Spanish.pdf>.

«Concepción de Enseñanza/Aprendizaje.» s.f. Digital. <http://www.unter.org.ar/imagenes/10061.pdf>.

De Zubiría, Julián. *Trabajo de Pedagogía Conceptual: Los modelos pedagógicos.* Bogotá: Fundación Merani, 1994.

Ferrer, Santiago. «La Pizarra Digital.» s.f. Digital. Acceso: 20 de Marzo de 2016. <http://www.ardilladigital.com/DOCUMENTOS/TECNOLOGIA%20EDUCATIVA/TICs/T9%20PIZARRA%20DIGITAL/09%20LA%20PIZARRA%20DIGITAL.pdf>.

Flórez, Rafael. *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Bogotá: McGraw-Hill, 1994.

García, Lorenzo. «Objetos de Aprendizaje. Características y Repositorios.» BENED, 2005. Digital. Acceso: 20 de Septiembre de 2015. <https://1aa2f1c2-a-62cb3a1a-s-sites.googlegroups.com/site/mayanin33/Home/objetodeaprendizajeyrepositorio.pdf?attachauth=ANoY7cqWatl3cx53MUp9X2WeyB_bEBooT8UOjgzvv8CByFk7LlNW_YYvhP_BEK61fDwK5WPaHYD98ROaSkuXVBzKkfrbWJS75NWrE2oZdFqglezkWnns1E5QHtdasFvFOmUsWSd>.

Gómez, Manuela y Polanía Néstor. «ESTILOS DE ENSEÑANZA Y MODELOS PEDAGÓGICOS: Un estudio con profesores del Programa de Ingeniería Financiera de la Universidad Piloto de Colombia.» Bogotá, 24 de Abril de 2008. Tesis. <http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/handle/10185/1667/T85.08%20G586e.pdf;jsessionid=0242ACCC77F3A27F21FB60E7F04A735E?sequence=1>.

Gonzalo, Julio. «Calidad en los Objetos de Aprendizaje.» s.f. Digital. Acceso: 18 de Febrero de 2016. <http://ocw.unc.edu.ar/proed/objetos-de-aprendizaje-y-educacion-bfpromesas-o/actividades-y-materiales/modulo-5>.

Granville, William. *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa, 1998. Impreso.

Guerra Rodríguez, Matílde. «Innovación y Experiencias Educativas.» *Didáctica General* (2010). Digital. Acceso:25 de Julio de 2015. <http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_29/MATILDE_M_GUERRA_1.pdf>.

Jonassen, David. «El dideño de entornos constructivistas de aprendizaje.» *Diseño de la instrucción teorías y modelos. Un paradigma de la teoría de la instrucción.* Madrid: Santillana, 2010. Digital. Acceso: 12 de Agosto de 2015. <http://especializacion.una.edu.ve/teoriasaprendizaje/paginas/Lecturas/Unidad%203/jonassen.pdf>.

Larson, Ron Robert Hostetler y Bruce Edwards. *Cálculo con geometría analítica*. Octava. Vol. 1. México DF: McGraw-Hill, 2006.

Leithold, Louis. *El Cálculo*. Séptima. México DF: Mapasa, 1998.

Ley Orgánica de Educación Intercultural. Registro Oficial. Quito, 2011. Digital. <http://diccionario.administracionpublica.gob.ec/adjuntos/2loei.pdf>.

«Los objetos de aprendizaje como recurso para la docencia universitaria: criterios para su elaboración.» s.f. Digital. Acceso: 28 de Septiembre de 2015. <http://www.aqu.cat/doc/doc_22391979_1.pdf>.

Luengo Navas, Julián. «La educación como objeto de conocimiento. El concepto de educación.» *Teorías e instituciones contemporáneas de educación*. Madrid, 2004. Digital. Acceso: 20 de Julio de 2015. <http://www.ugr.es/~fjjrios/pce/media/1-EducacionConcepto.pdf>.

Mendoza Orellana, Enrique. *Temas básicos de Pedagogía*. Cuenca, 2009. Impreso.

Peñalosa, Eduardo y Patricia Landa. «OBJETOS DE APRENDIZAJE: UNA PROPUESTA DE CONCEPTUALIZACIÓN, TAXONOMÍA Y METODOLOGÍA.» *Psicología Iztacala* 11 (2008). Digital. <http://revistas.unam.mx/index.php/repi/article/viewFile/18559/17617>.

Pividori, Maria y Erica Buseghin. «Uso de las Tics en el Aula.» 2008. Digital. Acceso: 11 de octubre de 2015. <http://www.ispn4-santafe.edu.ar/Carreras/Administracion/Trabajo_Alumnos/Taller_Docencia_I/Uso_Tics_en_el_aula.pdf>.

Purcell, Edwin, Dale Varbeng y Steven Rigdon. *Cálculo*. Novena. México DF: Pearson, 2007.

Rodríguez Ruíz, Ana Bélen. «Evoluvión de la Educación.» 01 de Noviembre de 2010. Digital. Acceso: 18 de Julio de 2015. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3391388.pdf>.

Serrano, María de los Angeles. «Objetos de Aprendizaje.» *e-FORMADORES* (s.f.). Digital. Acceso: 23 de Octubre de 2015. <http://red.ilce.edu.mx/sitios/revista/e_formadores_oto_10/articulos/angeles_serrano_nov10.pdf>.

Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson. *Precálculo Matemáticas para el Cálculo*. sexta. México DF: Cengage Learning, 2012.

Wiley, David A. «Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy.» 2002. Impreso.