

UNIVERSIDAD DE CUENCA



FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

“CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES METÁLICOS Y FRICCIONANTES EN
ESTADO TRI-AXIAL”

Tesis previa a la obtención
del título de Ingeniero Civil

Autor:

José Alberto Gallardo Briones

Director:

Ing. Juan Fernando Zalamea León PhD.

Cuenca-Ecuador

2015



RESUMEN

En el último siglo se han realizado diversas investigaciones con respecto al comportamiento mecánico tanto de materiales metálicos como de materiales friccionantes. El interés de esta investigación radica en representar el comportamiento real de materiales como el acero y el hormigón: primero se realizará en estado uni-axial y posteriormente en estado tri-axial.

Dado a la complejidad del tema, en la literatura de medios continuos se ha desarrollado distintos modelos constitutivos para predecir dicho comportamiento, tales como: modelos de plasticidad, modelos de visco-plasticidad, modelos de daño, etc. los cuales deben cumplir además las ecuaciones de la termodinámica.

Para la formulación de estas ecuaciones constitutivas que representan el comportamiento de un material, se debe establecer un estado límite o de falla, lo cual se realiza a través de la superficie de fluencia. A partir de dicha superficie, el comportamiento del material deja de ser elástico, y pasa a ser inelástico, para ello se utiliza variables internas, las cuales representan distintos parámetros de la evolución del comportamiento del material, tales como: degradación de rigidez, deformación plástica, variación del umbral de falla, entre otros.

Debido a lo complejo del tema, primero se construye modelos constitutivos para caracterizar materiales en estado uni-axial; esto es: plasticidad, viscosidad, visco-plasticidad y daño. Y a continuación se formula dichos modelos para estado tri-axial.

Palabras claves: Modelos constitutivos, Plasticidad, Visco-plasticidad, Daño, Caracterización de materiales.



ABSTRACT

In the last century there have been several inquiries regarding the mechanical behavior of frictioning materials and metallic materials. The interest of this research lies in representing the real behavior of materials such as steel and concrete: first will be held in uni-axial state and later in tri-axial state.

Given the complexity of the issue, in the literature of continuous media has developed different constitutive models to predict the behavior, such as models of plasticity, visco-plasticity models, damage models, etc. which must also satisfy the equations of thermodynamics.

For the preparation of these constitutive equations representing the behavior of a material, it must establish a limit or fault condition, which is done through the yield surface. From the surface, the material behavior ceases to be elastic, and becomes inelastic, for it, internal variables are used, representing various parameters of the evolution of the behavior of the material, such as degradation of rigidity, plastic deformation, variation threshold failure, among others.

Due to the complexity of the issue, first, constitutive models are built to characterize materials in uni-axial state; that is, plasticity, viscosity, visco-plasticity and damage. And then the models for tri-axial been formulated.

Keywords: Constitutive models, Plasticity, Visco-plasticity, Damage, Materials characterization.



ÍNDICE

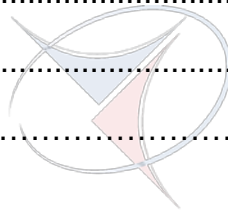
RESUMEN	2
ABSTRACT	3
Introducción.....	10
1.1 Motivación	10
1.2 Objetivos	12
Objetivo general.....	12
Objetivos específicos.....	13
1.3 Resumen de contenidos.....	13
Conceptos de mecánica de medios continuos.....	15
2.1 Esfuerzo	15
2.2 Deformación.....	17
2.3 Elasticidad lineal	20
Ley de Hooke.....	20
Ley generalizada de Hooke	20
2.4 Superficie de fluencia.....	22
Criterio de Rankine	23
Criterio de Tresca	23
Criterio de von Mises	24
Criterio de Drucker-Prager.....	25
Caracterización de materiales.....	27
3.1 Tipos idealizados de comportamiento.....	28
3.2 Potenciales de energía.....	29
3.3 Plasticidad.....	32
Conceptualización de plasticidad.....	32



Modelos reológicos	33
Fundamentos de la ecuación constitutiva de plasticidad	42
Caracterización uni-axial de la plasticidad	46
Caracterización tri-axial de la plasticidad.....	50
3.4 Visco-plasticidad	52
Introducción	52
Caracterización uni-axial de la visco-plasticidad.....	52
3.5 Teoría de daño.....	56
Introducción	56
Conceptos básicos y definición de daño.....	57
Bases del modelo de daño o degradación.....	59
Modelo de plasticidad y daño asociados.....	63
Modelos de visco-plasticidad y <u>daño asociados</u>	63
Algoritmos	64
4.1 Estado uni-axial.....	65
4.1.1 Plasticidad	65
4.1.2 Visco-plasticidad.....	71
4.1.3 Daño	75
4.2 Estado tri-axial	81
4.2.1 Plasticidad	81
4.2.2 Visco-plasticidad.....	86
4.2.3 Daño	89
Resultados	96
5.1 Modelos en estado uni-axial.....	97
Algoritmo 1.- Plasticidad; con endurecimiento cinemático e isotrópico.....	97



Algoritmo 2.- Visco-plasticidad; con endurecimiento cinemático e isotrópico	103
Algoritmo 3.- Plasticidad y daño asociados	107
Algoritmo 4.- Visco-plasticidad y daño asociados.....	112
5.2 Modelos en estado tri-axial	114
Algoritmo 5.- Plasticidad en estado tri-axial.....	114
Algoritmo 6.- Plasticidad y daño asociado	117
Algoritmo 7.- Visco-plasticidad en estado tri-axial	119
Algoritmo 8.- Visco-plasticidad y daño en estado tri-axial.....	121
Conclusiones	123
Bibliografía	126
Anexos	128





Yo, *José Alberto Gallardo Briones*, autor de la tesis "*Caracterización de materiales metálicos y friccionantes en estado tri-axial*", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, Noviembre 2015

UNIVERSIDAD DE CUENCA

José Alberto Gallardo Briones

C.I: 140122753-1



Yo, *José Alberto Gallardo Briones*, autor de la tesis "*Caracterización de materiales metálicos y friccionantes en estado tri-axial*", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de *Ingeniero Civil*. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, Noviembre 2015

José Alberto Gallardo Briones

C.I: 140122753-1



Agradecimientos

Agradezco a mi familia que me ha apoyado en toda mi carrera estudiantil.

Al ing. Fernando Zalamea, quien con paciencia me ha guiado en el desarrollo del presente trabajo.

A mis compañeros quienes han sido parte en todos estos años de estudio.



Capítulo 1

Introducción



1.1 Motivación

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Hoy en día, con el avance tecnológico y del conocimiento del comportamiento de materiales se diseñan estructuras para que soporten esfuerzos cada vez más cercanos a su resistencia máxima sin sufrir daños catastróficos. Para que estas estructuras trabajen de manera eficiente y segura es necesario basarse en teorías bien fundamentadas, de tal manera que los modelos de análisis sean lo más aproximado posibles al comportamiento real.

El estudio de materiales busca representar la respuesta de los mismos cuando son sometidos a fuerzas externas. Las dos principales respuestas observables (macroscópicas) del material son la deformación y la fractura; la deformación puede ser elástica, visco-elástica, plástica o visco-plástica, y la fractura puede ser en la primera aplicación de carga, o tras repetidas aplicaciones de ella, pero ambos, deformación y fractura son sensibles a defectos del material.



Cuando un material se deforma dentro de un rango de deformaciones, la deformación es elástica, en este caso, el material recupera su forma original al retirar la carga, esto ocurre siempre y cuando no se haya llegado a cierto límite, el cual representa el punto donde se pierde el comportamiento elástico. En la mayoría de los casos, la deformación elástica se recupera inmediatamente, sin embargo, ciertos materiales tienen un cierto tiempo de recuperación, a este comportamiento se lo denomina anelasticidad o visco-elasticidad.

A partir de este límite, bajo condiciones de carga, el material puede tener diferentes comportamientos dependiendo de su microestructura, antes de llegar a la falla o fractura del mismo.

Siendo una característica general la aparición de deformaciones permanentes. Algunos materiales, como los metales, soportan deformaciones inelásticas importantes antes de llegar a la falla, a estos materiales se los conoce como materiales dúctiles, y se los caracteriza mediante la teoría de la plasticidad. En el caso en que las deformaciones permanentes dependan también del tiempo de aplicación de la carga, al comportamiento inelástico se lo denomina viscoplasticidad.

Si se produce la fractura o falla del material justo después de llegar al límite elástico, o con poca deformación inelástica, al material se lo denomina frágil.

Los primeros pasos en la caracterización de materiales se remonta al año de 1676, cuando Robert Hooke publica su libro “La verdadera teoría de la elasticidad”, donde establece la proporcionalidad entre fuerza y alargamiento, posteriormente, en el año de 1807 Thomas Young establece la relación entre esfuerzos y alargamiento mediante la constante de rigidez longitudinal (E). Naturalmente, en esta época ya se conocía que la relación $\sigma = E * \varepsilon$ era solo aplicable hasta cierto límite.

Desde 1850 hasta la fecha, varios autores han propuesto diferentes criterios y teorías para establecer la superficie de falla (o estado límite) del material. Entre estos tenemos: criterio de Rankine (1853), criterio de Tresca (1866), criterio de Beltrami (1885), criterio de von Mises (1913).



La primera teoría elasto-plástica la presenta Prandtl 1924 para problemas bidimensionales, y Reuss es quien la extiende a problemas tridimensionales en 1930. Teoría que está direccionada a representar el comportamiento de materiales dúctiles. En los años siguientes se desarrolla la teoría de plasticidad perfecta, líneas de fluencia, etc, y en 1950 Rodney Hill publica su libro “The mathematical Theory of plasticity” [13]. Posteriormente se desarrolla nuevas teorías como la de visco-plasticidad, como ejemplo se tienen los artículos de Moreau [15], y las monografías de Duvaut [16] y Lions.

La teoría de daño y fractura se inicia con el trabajo de Griffin en 1920, a partir de 1960 varios autores acogen y fortalecen la teoría de daño a través de sus contribuciones, y lo aplican a materiales frágiles.

Actualmente, la caracterización de materiales se realiza a partir de lo que se denomina una ecuación constitutiva, cuya formulación busca respetar las leyes de la termodinámica, que establecen que en un sistema (material) siempre se mantiene o se disipa la energía.

UNIVERSIDAD DE CUENCA

En este trabajo se ha investigado sobre estas distintas formulaciones para caracterizar materiales en estado tri-axial. Dirigidas a la representación de materiales utilizados en la ingeniería, como lo son los materiales dúctiles como los metales, y materiales frágiles como el hormigón, donde se observan fenómenos de viscosidad, plasticidad, daño.

1.2 Objetivos

Objetivo general

El objetivo principal del presente trabajo es recopilar información acerca de la conceptualización y formulación matemática de la caracterización de materiales metálicos y materiales friccionantes en estado uni-axial y tri-axial.



Objetivos específicos

- Establecer la conceptualización de las ecuaciones constitutivas
- Formulación de modelos de: plasticidad, visco-plasticidad, daño, plasticidad con daño asociado, visco-plasticidad con daño asociado.
- Implementación de ecuaciones constitutivas para materiales metálicos: en estado uni-axial y tri-axial.
- Implementación de ecuaciones constitutivas para materiales friccionantes: en estado uni-axial y tri-axial.

1.3 Resumen de contenidos

Capítulo 1.- Se expone una breve introducción al tema del presente trabajo. Se muestra un resumen de los hitos históricos en el avance de la caracterización de materiales. Se plantea los objetivos y se realiza una descripción del contenido de los diferentes capítulos.

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Capítulo 2.- Se encuentra diferentes definiciones y conceptos de la mecánica de medios continuos. Primero se definen términos como esfuerzo y deformación. Posteriormente se expone de manera resumida la ley de Hooke y la teoría de superficies de fluencia

Capítulo 3.- Se expone un breve resumen teórico con respecto a la caracterización de materiales. Primero se muestra de manera general los comportamientos típicos de materiales disipativos. Luego se va introduciendo las teorías de plasticidad, visco-plasticidad y daño, al mismo tiempo que se define la función y la importancia de las distintas variables internas que intervienen en los distintos modelos.

Capítulo 4.- Se formulan los algoritmos de los distintos modelos de comportamiento de materiales. Se parte de modelos que consideran un estado uni-axial y con un mínimo número de variables internas, a continuación se va



aumentando el número de variables. Finalmente se construyen los algoritmos de comportamiento tri-axial para los distintos modelos.

Capítulo 5.- Se muestran los resultados obtenidos de la implementación de los algoritmos del capítulo anterior. Se dividen los resultados en dos partes: estado uni-axial y estado tri-axial. Para cada algoritmo se varía los valores de los distintos parámetros que representan las variables internas para obtener y entender la verdadera función de cada variable en el comportamiento de los materiales.



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



Capítulo 2

Conceptos de mecánica de medios continuos



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

2.1 Esfuerzo

El esfuerzo, σ , se define como la intensidad de fuerza que actúa en un área, siendo esta área cada vez más pequeña, hasta llegar a un punto:

$$\sigma = \lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial A}$$

Si se considera la fuerza como constante sobre toda la superficie:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Un *esfuerzo normal* (compresión o tensión) es cuando la fuerza es perpendicular al área donde actúa. El *esfuerzo cortante* es cuando la fuerza es paralela al área donde actúa. En estado tri-axial el estado tensional está definido por esfuerzos que actúan en una partícula (prácticamente un punto). De forma



idealizada, esta puede ser representada convenientemente como un cubo, cuyas caras son normales al sistema coordenado.

Utilizando notación indicial los esfuerzos pueden representarse como se indican en la siguiente figura. Mayor detalle se puede encontrar en [1].

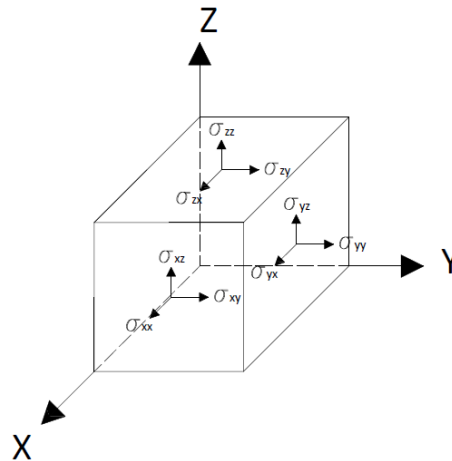


Fig. 1.- Nueve componentes del esfuerzo actuando en un elemento infinitesimal.

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

En la mecánica de medios continuos, el estado tensional de una partícula se representa como un tensor de segundo orden [1], como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Donde σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} son los esfuerzos normales, y el resto de esfuerzos son los cortantes. Se puede demostrar además, que este tensor es simétrico, por tanto:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



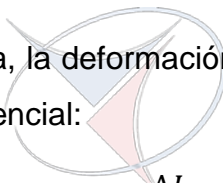
Para facilitar las operaciones y su implementación a través de algoritmos computacionales, muchas veces se prefiere representar el estado tensional mediante un vector, a esto se lo conoce como notación ingenieril [1]:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{\sigma z} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Donde σ_x , σ_y y σ_z son los esfuerzos normales.

2.2 Deformación

De una manera simplificada, la deformación lineal se define como el cambio de longitud de un elemento diferencial:



$$\epsilon = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{L}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Donde:

L longitud inicial

ΔL alargamiento

Para el caso tri-axial, donde existen deformaciones lineales en las tres direcciones es necesario cambiar de notación:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Siendo:

∂u la variación de longitud en la dirección del eje X

∂x la longitud inicial del elemento en la dirección del eje X

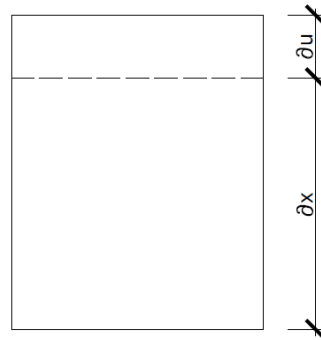


Fig. 2.- Deformación longitudinal

Entonces:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Además de un cambio de longitud en los distintos ejes, un elemento diferencial puede sufrir distorsiones, a estas deformaciones se les denomina deformaciones cortantes.

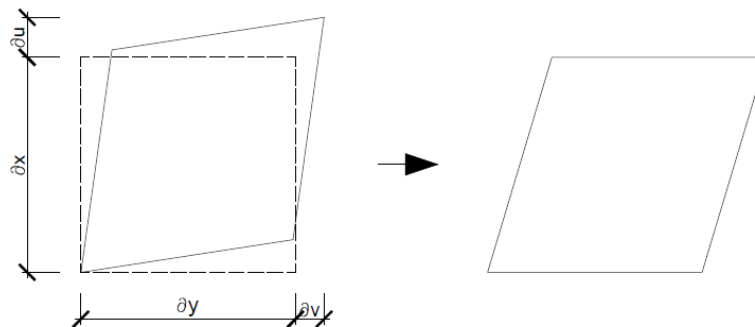


Fig. 3.- Deformación cortante

Se las define como:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$



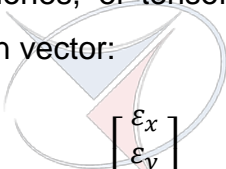
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Por lo tanto, el tensor de deformaciones es:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Al igual que el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones en notación ingenieril se expresa mediante un vector:


$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1547

2.3 Elasticidad lineal

Ley de Hooke

Para la resolución de problemas en una dimensión, la Ley de Hooke muestra la proporcionalidad entre la deformación (ε) y el esfuerzo (σ) a través de una constante de proporcionalidad denominada módulo elástico o módulo de Young (E)

$$\sigma = E * \varepsilon$$

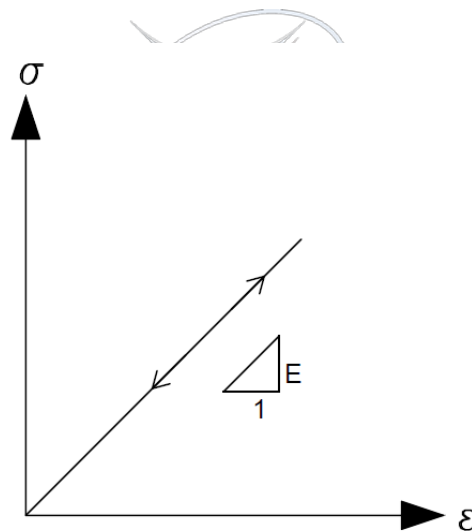


Fig. 4.- Ley de Hooke

Ley generalizada de Hooke

Para la generalización de esta ley a un estado tri-axial se expresa cada componente del elemento esfuerzo (σ) como una función lineal de los componentes del elemento deformación (ε):

$$\sigma = C : \varepsilon$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon_{kl}$$

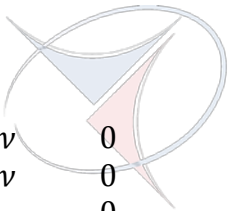


Donde a C se le denomina tensor de constantes elásticas (tensor de cuarto orden), el cual está compuesto por 81 componentes, los cuales por simetrías se reducen a 21 constantes. Si el material es isótropo las 21 constantes se reducen a 2.

Una de estas dos constantes es módulo de Young (E) y la otra constante es el módulo de Poisson, el cual relaciona la deformación lateral de un elemento sometido a una carga longitudinal:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Siendo así, para comportamiento tri-axial de un material elástico e isótropo, la ley generalizada de Hooke establece:



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} * \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1-\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1-\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{\sigma z} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

Y para encontrar la relación inversa es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{\sigma z} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

2.4 Superficie de fluencia

Como se conoce, el material se comporta, de forma idealizada, elásticamente hasta cierto límite, a partir del cual, el material se comporta inelásticamente hasta su fractura.

En estado tri-axial, dicho límite puede ser representado mediante una superficie en el espacio de esfuerzos principales. A ésta superficie se la denomina superficie de falla o superficie de fluencia.

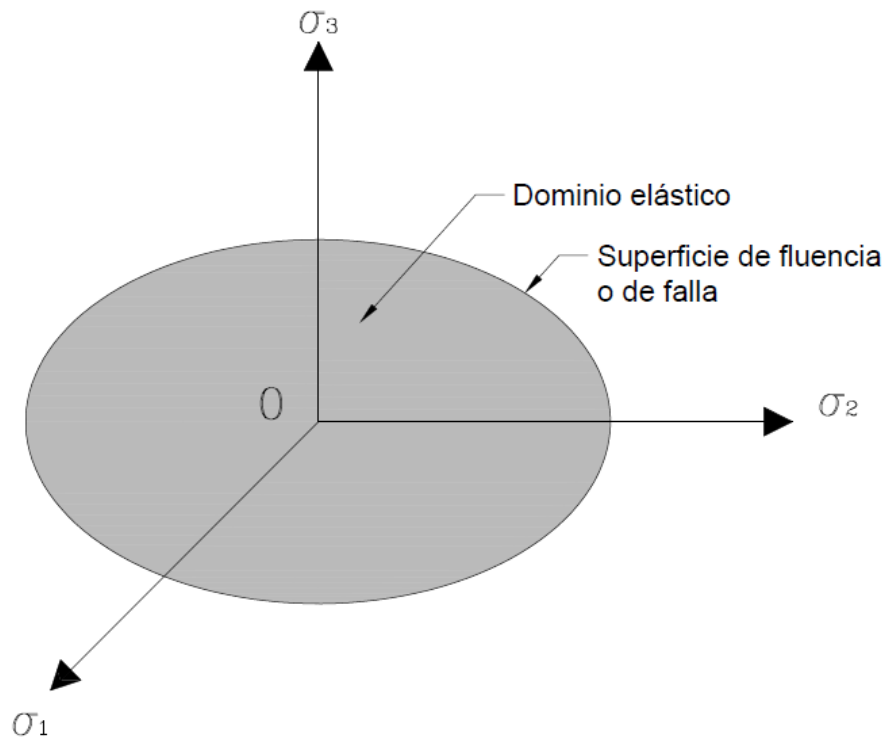


Fig. 5.- Superficie de fluencia

Por lo tanto, cuando los esfuerzos principales están dentro de la superficie de fluencia, el material se comporta de manera elástica. Cuando llega a la superficie, el material se comporta inelásticamente. Todos los puntos fuera de la superficie son estados tensionales inadmisibles para el material.

Criterio de Rankine

Ésta es la primera superficie de fluencia propuesta. Rankine establece que el material falla cuando uno de los esfuerzos principales llega al límite o umbral de falla. Considerando:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Entonces, el material tiene un comportamiento elástico sí:

$$\sigma_1 < \text{límite}$$

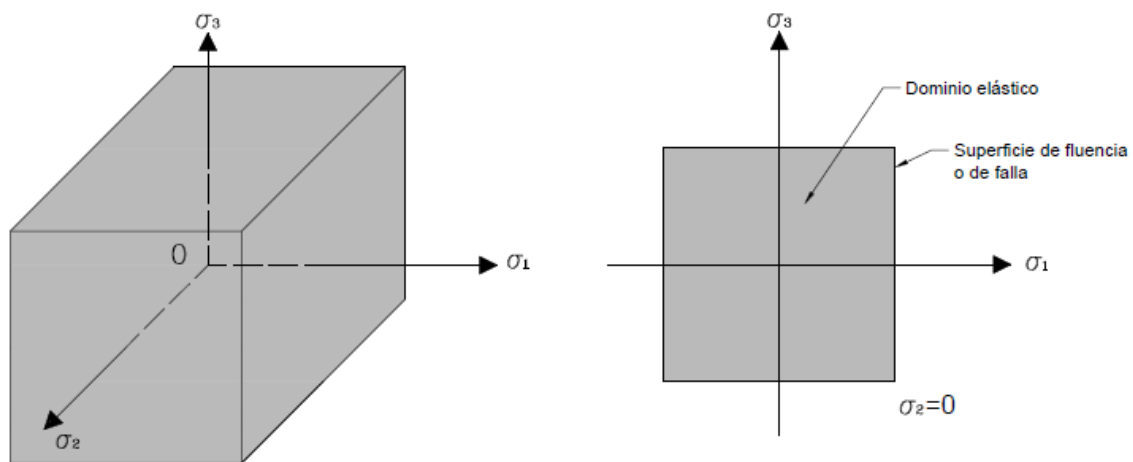


Fig. 6.- Superficie de fluencia de Rankine

Criterio de Tresca

El criterio de Tresca, también llamado *criterio de máxima tensión cortante*, establece que el dominio elástico finaliza cuando la máxima tensión tangencial actuante sobre cualquiera de los planos alcanza la mitad del límite elástico uniaxial (σ_e):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_e$$

Siendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

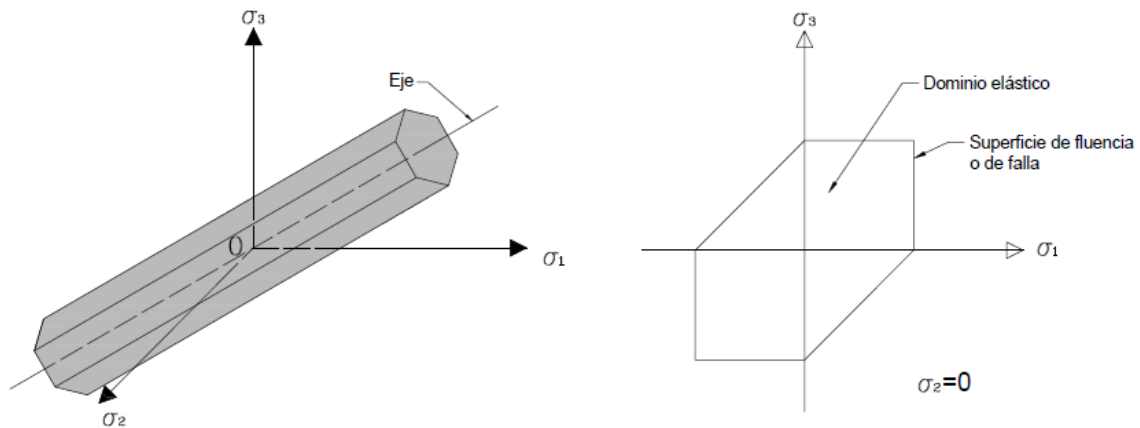


Fig. 7.- Superficie de fluencia de Tresca

Criterio de von Mises

El criterio de von Mises es adecuado como criterio de fluencia o de falla para materiales metálicos, considerando los esfuerzos principales se expresa:

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2}$$

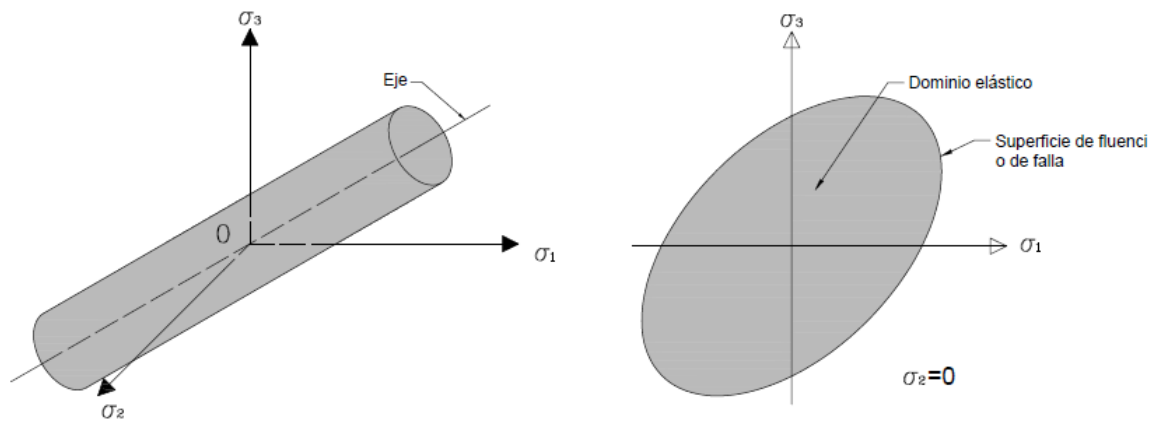


Fig. 8.- Superficie de fluencia de von Mises

En el espacio de Wastergaard, o de esfuerzos principales, esta función define un cilindro cuyo eje es el eje de esfuerzos hidrostáticos, cuyo radio es igual a

$\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_f(\alpha)$. A este radio se denomina *radio octahédrico*.



Criterio de Drucker-Prager

El criterio de Drucker-Prager establece un desplazamiento del eje de la superficie de fluencia, de esta manera, establece que la resistencia a tracción es menor a la resistencia a compresión. Este comportamiento es característico de materiales cohesivos-friccionantes, tales como el hormigón, rocas y suelo.

Este criterio define el umbral de falla como:

$$F(\sigma) = \alpha \sigma_m + \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} - \beta = 0$$

Siendo:

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}(\phi))} \quad ; \quad \beta = \frac{6(c) \cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen}(\phi))} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Donde:

c Cohesión del material

ϕ ángulo de fricción interna del material

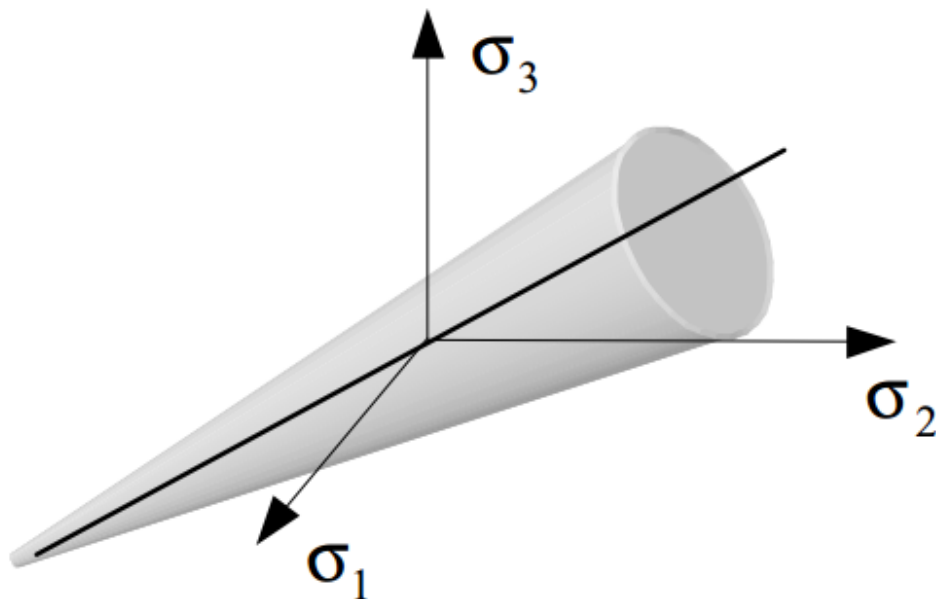


Fig. 9.- Superficie de fluencia de Drucker-Praga



Si $\phi = 0$ y $c = \sigma_e/2$ en este criterio se retorna al criterio de von Mises.

Nota: Existe muchos otros criterios de superficie de fluencia, tales como: criterio de Tresca, criterio de Mohr-Coulomb, Criterio de Beltrami



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



Capítulo 3

Caracterización de materiales



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

En éste trabajo se busca caracterizar diferentes materiales utilizados en ingeniería, como lo son: materiales dúctiles y materiales frágiles o friccionantes.

Materiales dúctiles:

- Presentan igual resistencia a tracción y a compresión
- Presentan deformaciones permanentes cuando se sobrepasa cierto límite
- Se asocian a modelos de plasticidad

Materiales frágiles:

- Presentan diferente resistencia a tracción y a compresión, observándose que bajo esfuerzos de compresión su resistencia es mayor, por lo que también se conoce como materiales friccionantes.
- En estos materiales se ha observado disminución de rigidez, lo cual se representa con modelos de daño.

3.1 Tipos idealizados de comportamiento

Los materiales se diferencian entre sí por la respuesta de los mismos ante las sollicitaciones que actúan sobre el mismo, estos comportamientos pueden ser:

- Elástico lineal
- Inelástico (no lineal)
 - Plástico (generación de deformaciones permanentes)
 - Daño (reducción de la rigidez del material)
 - Viscoso (depende de la velocidad de carga)
 - Visco-plástico
 - Visco-daño
 - Visco-plasticidad con daño asociado

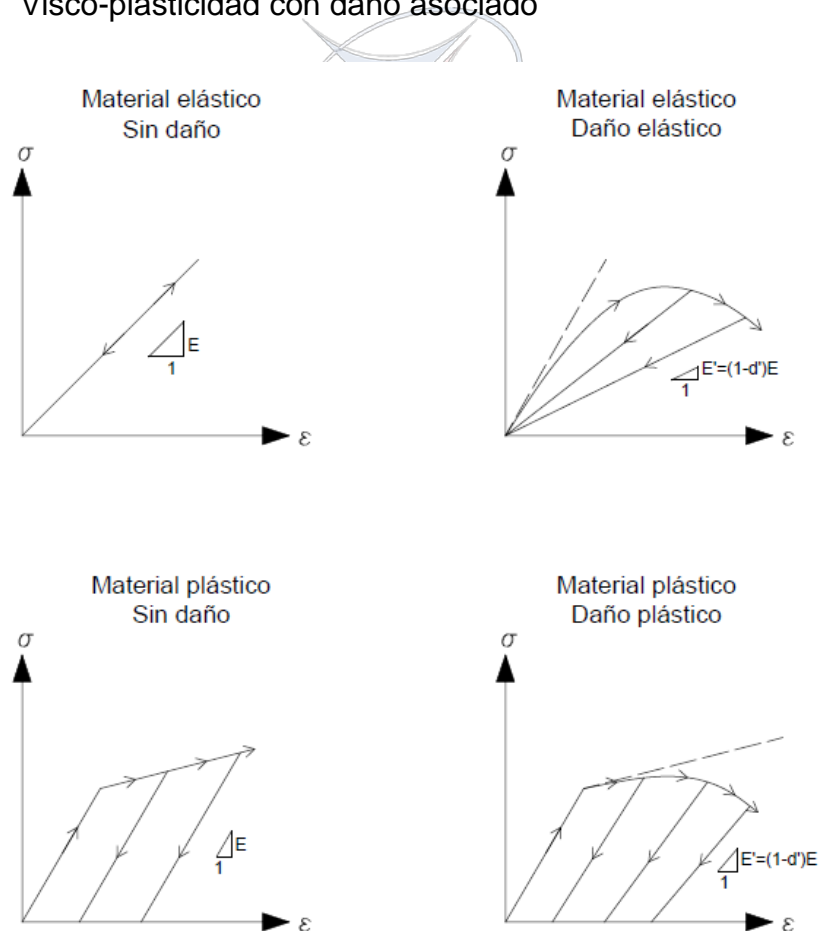


Fig. 10.- Comportamientos idealizados de los materiales

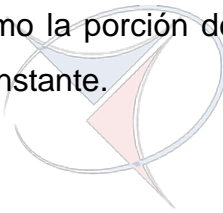


3.2 Potenciales de energía

Los potenciales de energía [2] dependen de las variables de estado del material y comúnmente se definen cuatro:

- a) Energía interna e
- b) Energía libre de Helmholtz ψ
- c) Entalpía h
- d) Energía libre de Gibbs G

Para el caso de isotermia es conveniente utilizar la energía libre de Helmholtz, debido a que ésta se define como la porción de energía interna disponible para realizar trabajo a temperatura constante.



De esta manera, la energía libre de Helmholtz es:

$$\Psi = W + \mathcal{H}$$

Donde:

W potencial elástico

\mathcal{H} potencial de endurecimiento

La formulación del comportamiento del material debe cumplir las leyes físicas, entre ellas las leyes de la termodinámica, éstas establecen que la energía se mantiene o se reduce. Por lo tanto, la formulación del material tiene que disipar energía, y es por esto que se los conoce como *materiales disipativos*. Asumiendo que el material tiene un potencial de energía, dicho potencial puede definirse en función de distintas variables del sistema, las cuales son: variables dependientes, variables independientes y variables internas.



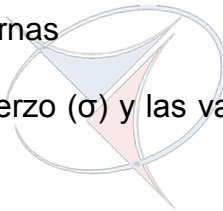
Estas variables internas representan distintos procesos de la microestructura del material, los cuales son irreversibles, por ejemplo: deformación plástica, variación del umbral de fallo, daño, entre otros.

La formulación se puede realizar considerando como variable libre la deformación y las variables internas; en dicho caso el esfuerzo es la variable dependiente. También se puede considerar a la tensión como variable independiente y la deformación como variable dependiente.

Se define a la *energía libre por unidad de volumen* (energía libre de Helmholtz) como $\Psi(\epsilon, k_\alpha)$, donde:

ϵ Deformación

k_α Conjunto de variables internas



Se puede calcular el esfuerzo (σ) y las variables asociadas a las variables internas (k_α), como:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}, \quad \kappa_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Psi}{\partial k_\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

Por ende, conociendo los valores de ϵ y k_α se puede calcular los valores de las variables dependientes σ y κ_α . En este caso, puesto que la variable libre es la deformación (ϵ) al proceso se lo denomina controlado por las deformaciones.

Una respuesta elástica del material se obtiene cuando k_α no interviene en Ψ , por lo que $\Psi(\epsilon)$ representa la energía de deformación. Para este caso el material es no disipativo.

Respuesta de un material disipativo no viscoso (Plasticidad o daño)

Si un material es no viscoso, la respuesta de éste en un proceso de carga es independiente de la velocidad de carga, y se define como:

$$\dot{k}_\alpha = f_\alpha^\epsilon(\epsilon, k_\alpha) \dot{\epsilon}$$



Donde f_{α}^{ϵ} es la función que delimita el estado del material. Para este caso la respuesta del material es incrementalmente lineal. Un ejemplo son los modelos de plasticidad que se tratarán posteriormente.

Respuesta de un material disipativo viscoso

A este caso también se lo denomina como *dependiente de la velocidad de carga*, y se define como:

$$\dot{k}_{\alpha} = f_{\alpha}(\epsilon, k_{\alpha})$$

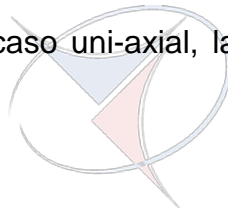
Siendo f_{α} la función que delimita el estado del material. Un ejemplo de este comportamiento es representado en los modelos visco-plásticos, los cuales serán tratados posteriormente.

Si en algún momento durante el proceso de carga la variación de la deformación es muy rápida (alta velocidad de carga) la variación de k_{α} será casi imperceptible, lo que significa que el material tendrá una respuesta elástica.



3.3 Plasticidad

Los modelos de plasticidad buscan caracterizar aquellos materiales que presentan un comportamiento dúctil, como lo son los metales. Estos materiales están caracterizados por tener igual resistencia a tracción que a compresión, disponen de un rango de esfuerzos o deformaciones elásticos cuyo comportamiento en estado tri-axial, y de forma idealizada, puede ser caracterizado por la ley generalizada de Hooke. Para el problema uni-axial el esfuerzo de fluencia (positivo o negativo) establece el límite del comportamiento elástico; a partir del cual, el material tiene comportamiento inelástico, el cual se controla a través de la evolución de las variables internas. En el problema tri-axial, el límite del comportamiento elástico se establece mediante una superficie de fluencia. A igual que en el caso uni-axial, las variables internas controlan el comportamiento no lineal.



UNIVERSIDAD DE CUENCA
1867

Conceptualización de plasticidad

La teoría de la plasticidad se basa en la descomposición de la deformación total (ε) en deformación elástica (ε_e) y deformación plástica (ε_p), representa el comportamiento lineal y no lineal de ciertos materiales como los metales. Bajo cierto estado tensional provocado por fuerzas externas, el material muestra un comportamiento que presenta una relación esfuerzo-deformación lineal (directamente proporcional) hasta alcanzar el umbral de falla, a partir del mismo dicha relación cambia drásticamente, generándose comportamientos como: plasticidad perfecta, endurecimiento o ablandamiento. Simultáneamente se empieza a observar lo que se llama deformación plástica o permanente, lo que significa que una vez que se retire la carga del elemento, este ya no regresará a su posición o forma original.

Modelos reológicos

Para introducir la formulación de la plasticidad se ha visto conveniente utilizar modelos reológicos, los cuales idealizan el comportamiento mecánico de un material sometido a cargas externas, de tal manera que se modela comportamientos complejos a partir de modelos más simples. Los comportamientos reológicos son 2:

a) Comportamiento elástico

Un elemento representativo de comportamiento elástico es un muelle (resorte). El modelo radica en la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación, siendo E la constante de proporcionalidad. Al retirar la carga o esfuerzo al elemento, este regresa a su posición o forma original.

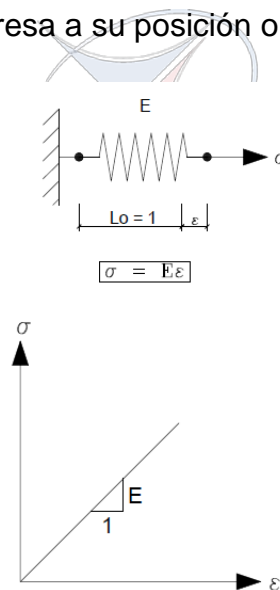


Fig. 11.- Relación esfuerzo-deformación de un elemento elástico

b) Comportamiento friccional

Para poder representar un comportamiento friccional tendremos en cuenta un elemento rectangular situado sobre una superficie rugosa, de la siguiente manera:

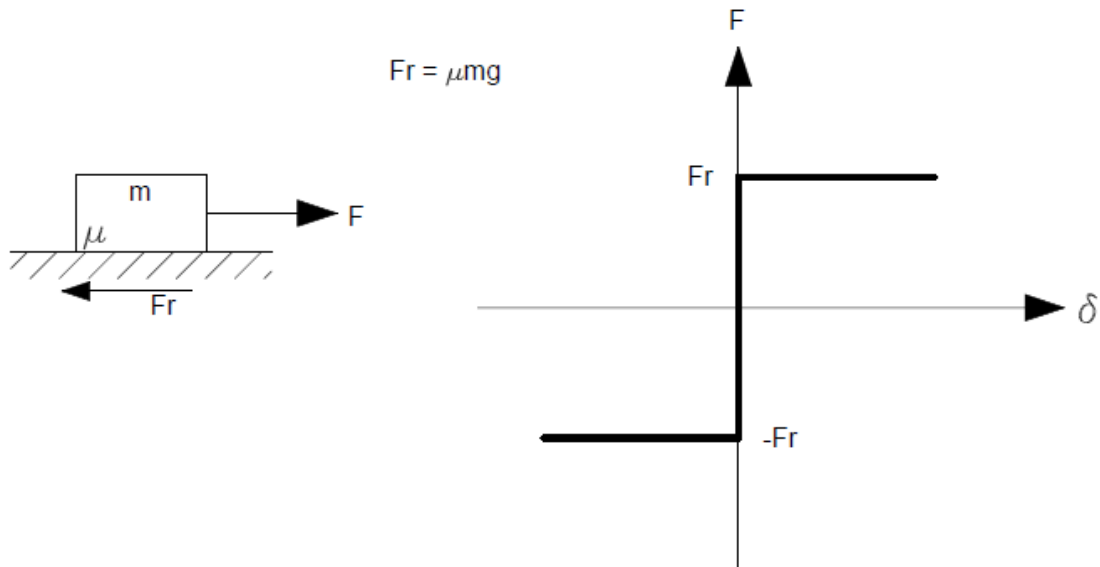


Fig. 12.- Ley de fricción de Coulomb

En el gráfico anterior, según la ley de Coulomb, mientras el módulo de la fuerza F sea menor a Fr el bloque no se desplazará. Si alcanzamos el valor de Fr con nuestra fuerza F , el bloque se moverá muy lentamente, en un punto de cuasi-equilibrio, es decir, se considera un sistema cuasi-estático, donde no hay aceleración, y para evitar la salida del sistema cuasi-estático, no podemos exceder el valor de Fr con nuestra fuerza F .

Ahora con analogía a un elemento friccional se lo define de la siguiente manera:

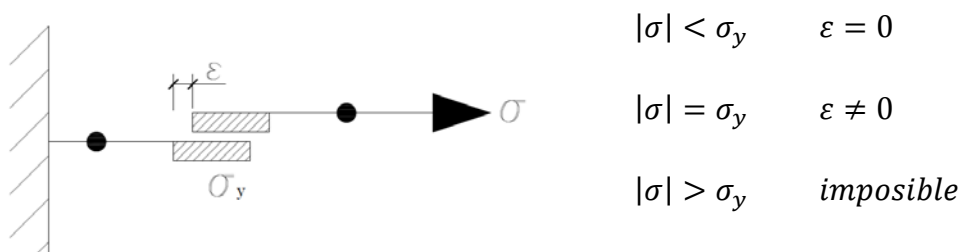


Fig. 13.- Comportamiento friccional



Ahora obtendremos la curva esfuerzo-deformación de este modelo tras un ciclo de carga-descarga-carga:

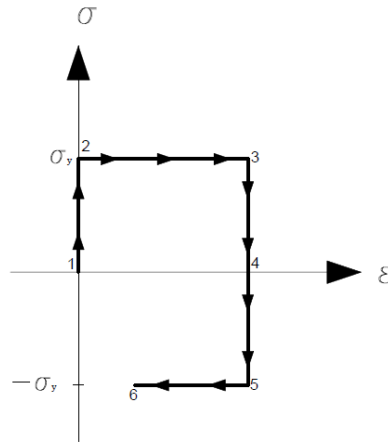
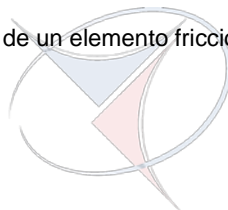


Fig. 14.- Curva esfuerzo-deformación de un elemento friccional con un ciclo carga-descarga-carga

Modelo elástico-friccional



UNIVERSIDAD DE CUENCA

El modelo elástico-friccional es una combinación de los comportamientos friccional y elástico en serie (uno a continuación del otro).

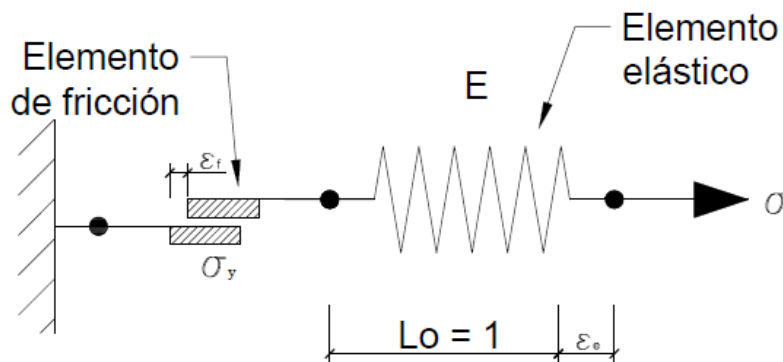


Fig. 15.- Elemento elástico friccional



Este modelo está en función del parámetro σ_y , el cuál sería el límite elástico, y el parámetro E, que es la constante del elemento elástico. Al estar colocados en un sistema en serie podemos descomponer la deformación en dos parámetros, la deformación en el elemento friccional (ε_f), y la deformación del elemento elástico (ε_e). A pesar de que las deformaciones difieren entre el elemento elástico y friccional, el esfuerzo en los elementos es el mismo.

$$\sigma = \sigma_f = \sigma_e$$

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_e$$

En base a los parámetros de los elementos que componen este modelo se puede determinar 3 posibilidades:

1. $|\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \Delta\varepsilon_f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e$

Como $|\sigma| < \sigma_y$ el elemento friccional no presenta deformaciones, por lo tanto, toda la deformación es elástica.

2. $|\sigma| = \sigma_y \Rightarrow \Delta\varepsilon_f \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_f$

Como $|\sigma| = \sigma_y$ el elemento friccional presenta deformaciones, en este punto, toda la deformación será en el elemento friccional, esto sin aumentar el valor del esfuerzo.

3. $|\sigma| > \sigma_y$

Esta situación no se puede dar debido a la naturaleza del elemento friccional.

Por ende, la curva esfuerzo-deformación del modelo elástico-friccional con un ciclo de carga-descarga-carga es:

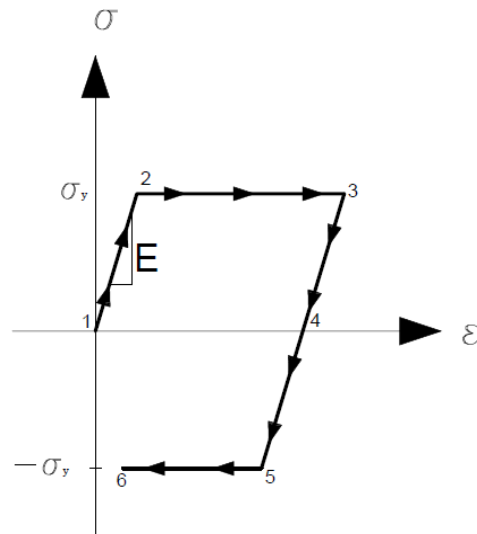


Fig. 16.- Curva esfuerzo-deformación del modelo elástico-friccional con un ciclo carga-descarga-carga

Modelo friccional con endurecimiento

El modelo friccional con endurecimiento, al igual que el modelo elástico-friccional, se conforma por un elemento friccional y un elemento elástico, con la diferencia de que esta vez el sistema se coloca en paralelo (los dos al mismo tiempo):

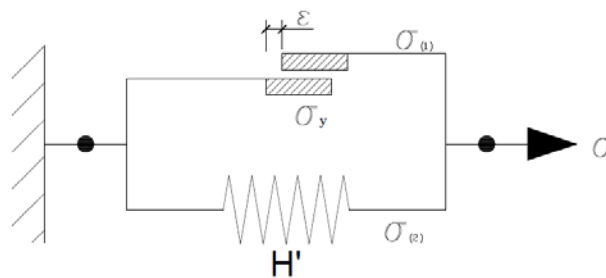


Fig. 17.- Modelo friccional con endurecimiento

Este modelo se encuentra en función de los parámetros σ_y del elemento friccional y H' del elemento elástico. Para este caso, el valor de H' lo denominaremos *constante de endurecimiento*. Debido a la disposición en



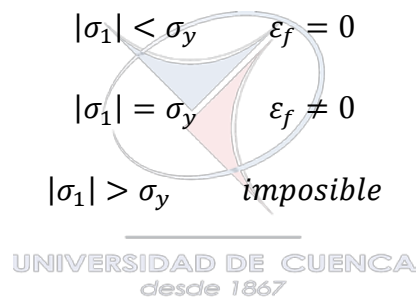
paralelo, la deformación en los dos modelos será la misma, pero se puede descomponer el esfuerzo en dos partes: esfuerzo friccional (σ_1), y esfuerzo del elemento elástico (σ_2).

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_e$$

Para poder entender el funcionamiento del sistema, se analiza el comportamiento por separado:

Elemento Friccional



Elemento elástico

$$\sigma_2 = H' * \varepsilon_e = H' * \varepsilon$$

Combinación de los elementos

$$\sigma_1 = \sigma - \sigma_2 = \sigma - H' * \varepsilon$$

Con esto se puede determinar dos posibles situaciones:

1. $|\sigma_1| < \sigma_y$

En este caso, toda el esfuerzo pasará directamente al elemento friccional, de tal manera que no existe deformación.

$$\sigma - H' * \varepsilon < \sigma_y \Rightarrow \varepsilon = 0$$



$$2. |\sigma_1| = \sigma_y$$

A partir de este punto todo aumento en el esfuerzo pasará al elemento elástico

$$\sigma_1 = \sigma_y$$

$$\sigma_2 = \sigma - \sigma_y$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_2}{H'}$$

Al aplicar un ciclo de Carga-descarga-carga sobre el sistema friccional con endurecimiento se obtiene la siguiente curva esfuerzo-deformación:

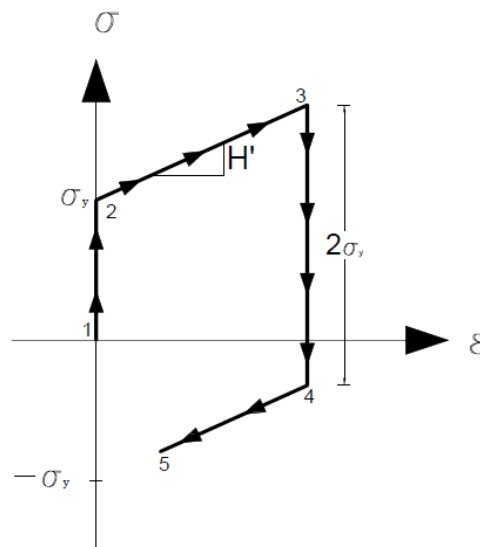


Fig. 18.- Curva esfuerzo-deformación del modelo friccional con endurecimiento con un ciclo carga-descarga-carga

Modelo elástico-friccional con endurecimiento

Para formar el modelo elástico-friccional con endurecimiento colocamos en serie un elemento elástico con el modelo friccional con endurecimiento, de esta manera obtenemos:

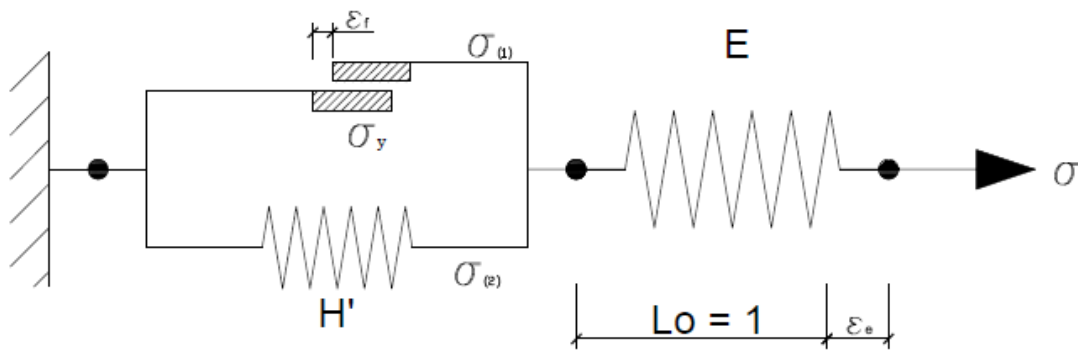


Fig. 19.- Modelo elástico-friccional con endurecimiento

En este modelo se pueden identificar tres variables importantes, la constante del elemento elástico en serie o módulo elástico (E), la constante del elemento elástico en paralelo o coeficiente de endurecimiento (H') y la constante del elemento friccional o límite elástico (σ_y).

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Tomando en cuenta las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos y la compatibilidad de deformaciones, obtenemos:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_f$$

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_f$$

Siendo:

ε_e .- deformación del elemento elástico

ε_f .- deformación del modelo friccional con endurecimiento

σ_e .- esfuerzo en el elemento elástico

σ_f .- esfuerzo en el modelo friccional con endurecimiento

Si combinamos el comportamiento en serie del modelo friccional con endurecimiento y el elemento elástico encontramos el comportamiento para el modelo propuesto:



- $|\sigma - H'\varepsilon_f| < \sigma_y$

En este caso el modelo de fricción con endurecimiento no sufre deformación, por lo cual, el aumento en la deformación será únicamente la deformación del elemento elástico. A esta condición se le denomina proceso elástico.

$$\varepsilon_f = 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e$$

$$\Delta\sigma = E * \Delta\varepsilon$$

- $|\sigma - H'\varepsilon_f| = \sigma_y$

En este caso existen dos posibilidades:

- a) σ y $\Delta\sigma$ de signos iguales

Todo el aumento en la deformación se da en el modelo friccional con endurecimiento. La relación entre el incremento del esfuerzo y el incremento de la deformación se denomina módulo de deformación elástico-friccional (E_{ef}), en esta situación tenemos un caso de carga inelástica.

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_f = \frac{1}{E}\Delta\sigma + \frac{1}{H'}\Delta\varepsilon = \frac{E + H'}{EH'}\Delta\varepsilon$$

$$\Delta\varepsilon = E_{ef}\Delta\sigma$$

$$E_{ef} = E \frac{H'}{E + H'}$$

- b) σ y $\Delta\sigma$ de signos opuestos

En este caso, toda variación en la deformación es debido al elemento elástico. A esta situación se le denomina descarga inelástica.

$$\Delta\sigma = E * \Delta\varepsilon$$

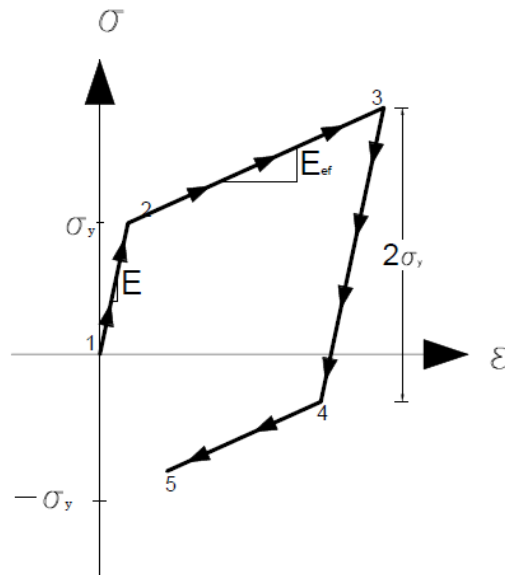


Fig. 20.- Curva esfuerzo-deformación del modelo elástico-friccional con endurecimiento con un ciclo carga-descarga-carga

Fundamentos de la ecuación constitutiva de plasticidad

Estos fundamentos están escritos para estado tri-axial de una partícula de material, sin embargo, también son válidos para el caso uni-axial. Se parte de las siguientes consideraciones:

1) Descomposición aditiva de las deformaciones.- se considera que la deformación total está formada por una parte elástica y otra inelástica o plástica:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Donde ε es la deformación total, ε_e es la deformación elástica y ε_p es la deformación plástica. Observe que tanto ε , ε_e , ε_p están conformadas por 6 valores, 3 de los cuales son deformaciones axiales y los otros 3 restantes son las deformaciones cortantes.

En este caso ε es la variable independiente y la evolución de ε_p se define a través de la regla de flujo, la cual se presenta más adelante.



2) Relación esfuerzo-deformación.- esta debe ser capaz de describir el comportamiento elástico del material. De esta manera, el tensor de tensiones σ se relaciona con la deformación elástica ε_e mediante la *energía libre* Ψ de acuerdo con la siguiente relación:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_e}$$

Siendo

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_e : \mathbf{C} : \varepsilon_e$$

Donde \mathbf{C} Es el tensor constitutivo elástico (ver página 19), el cual se considera constante. Entonces:

$$\sigma = \mathbf{C}(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

3) Condición de fluencia y espacio de tensiones.- se define una función f , la cual representa la *superficie de fluencia*, esta limita el estado del material (σ, α) a un espacio de tensiones admisibles \mathbb{E}_σ , definido como:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, \alpha) \leq 0\}$$

De donde, si el estado (σ, α) se encuentra en el interior de esta superficie, se considera que no hay cambio en las variables internas:

$$\dot{\varepsilon}_p = 0 \quad y \quad \dot{q} = 0 \quad si \quad f(\sigma, \alpha) < 0$$

Es decir, la respuesta es elástica:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} \dot{\varepsilon}$$

Por lo tanto, el *rango elástico* es un espacio abierto (no incluye el contorno) que se describe de la siguiente manera:

$$int(\mathbb{E}_\sigma) = \{(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, \alpha) < 0\}$$

Y la *superficie de fluencia* es el contorno del espacio de tensiones, que se define como:



$$\partial \mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, \alpha) = 0\}$$

De esta manera

$$\mathbb{E}_\sigma = \text{int}(\mathbb{E}_\sigma) + \partial \mathbb{E}_\sigma$$

4) Regla de flujo y ley de endurecimiento.- dan lugar a la irreversibilidad del flujo plástico. Se considera un cambio sobre $\dot{\epsilon}_p$ y $\dot{\alpha}$ únicamente cuando $f(\sigma, \alpha) = 0$, dicho cambio se describe como:

$$\dot{\epsilon}_p = \gamma \mathbf{r}(\sigma, \alpha)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \mathbf{h}(\sigma, \alpha)$$

Siendo \mathbf{r} y \mathbf{h} funciones que definen la dirección del flujo y el tipo de endurecimiento. El parámetro $\gamma \geq 0$ es una función no negativa denominada *parámetro de consistencia*, y obedece a las *condiciones de Kuhn-Tucker* que se definen a continuación.

5) Condiciones de Kuhn-Tucker o condiciones de carga-descarga.- puesto que el estado (σ, α) tiene que ser admisible, y al mismo tiempo que γ es no negativo, se tiene:

$$\gamma \geq 0$$

$$f(\sigma, \alpha) \leq 0$$

Si (σ, α) cae dentro del espacio $\text{int}(\mathbb{E}_\sigma)$ no existe variación en la deformación plástica, lo que implica que:

$$\dot{\epsilon}_p = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma, \alpha) < 0$$

$$\therefore \gamma = 0$$

Lo que nos da la siguiente condición:

$$\gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

Esta condición expresa los requerimientos físicos necesarios para que el estado tensional sea admisible, y que en el caso de que la variación de la deformación plástica sea diferente de cero, solo se dé cuando el esfuerzo se



encuentra en la superficie de fluencia. Esta condición está en el contexto de la literatura de implementación de modelos constitutivos, y toma el nombre de *condiciones de Kuhn-Tucker* [3].

6) Condición de consistencia.- se debe cumplir que $\gamma \geq 0$ en cualquier tiempo dado (t). Considerando que el esfuerzo se encuentra en la superficie de fluencia, se tiene que $f = 0$ para el tiempo t . Entonces, es fácil mostrar que $\dot{f}(t) \leq 0$ y $\dot{f}(t + \Delta t) \leq 0$. Como ya se especificó anteriormente se tiene que $\gamma > 0$ solo si $\dot{f}(t) = 0$, y $\gamma = 0$ si $\dot{f}(t) < 0$, se puede simplificar:

$$\begin{aligned} \gamma > 0 & \text{ si } \dot{f} = 0 \\ \dot{f} < 0 & \text{ si } \gamma = 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene la condición adicional:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$

A esta condición también se le denomina *condición de persistencia*, y corresponde al requerimiento físico de que para que la variación de la deformación plástica sea distinta de cero, el valor del esfuerzo debe persistir en la superficie de fluencia.



Caracterización uni-axial de la plasticidad

Uno de los modelos menos complejos dentro de la teoría de la plasticidad es el modelo con endurecimiento isotrópico, el cual es semejante al modelo reológico elástico-friccional con endurecimiento. El modelo consiste en que el material se comporta de manera elástica hasta llegar al umbral de esfuerzos, una vez llegado a este punto, la relación entre el esfuerzo y la deformación deja de ser lineal y la pendiente de la curva cambia, produciéndose la fluencia del material, además de la superficie de fluencia va creciendo.

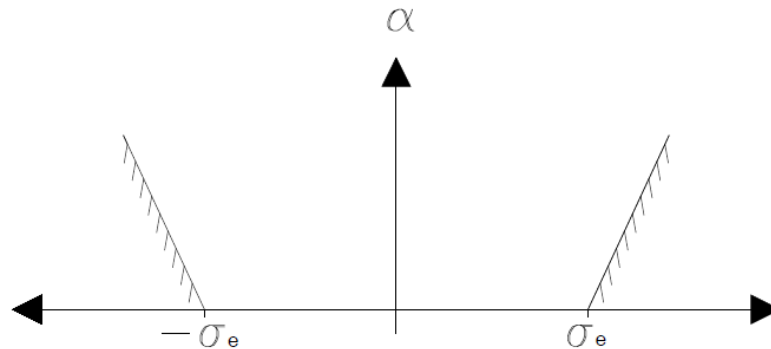


Fig. 21.- Crecimiento de la superficie de fluencia del modelo con endurecimiento isotrópico

Por otra parte, tenemos el denominado endurecimiento cinemático, el cual se lo define fenomenológicamente como efecto Bauschinger, y se representa como el desplazamiento del centro de la superficie de fluencia en dirección de la deformación plástica.

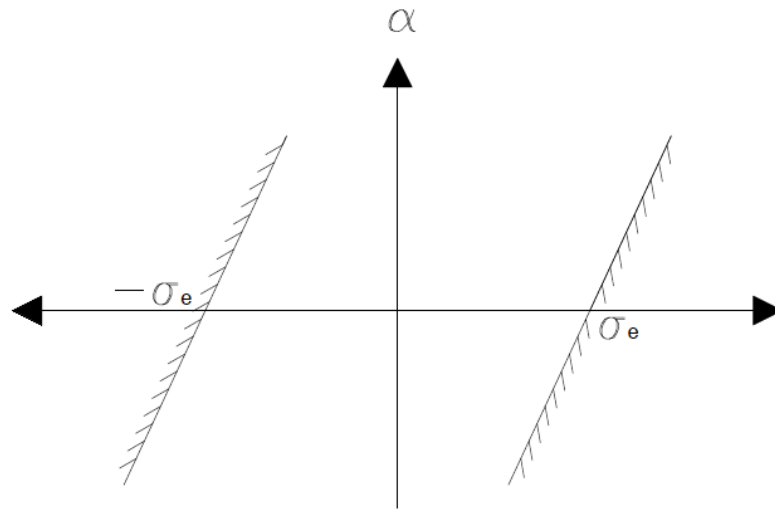


Fig. 22.- Desplazamiento de la superficie de fluencia del modelo con endurecimiento cinemático

Finalmente, tras la combinación del modelo de endurecimiento isotrópico y endurecimiento cinemático se obtiene el modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico.

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Relación constitutiva

Para este modelo la *densidad de energía libre* se expresa como:

$$\Psi = \frac{1}{2} E \varepsilon_e^2 + \frac{1}{2} K \alpha^2 + \frac{1}{2} H \beta^2$$

$$H \beta = q \quad \text{Esfuerzo residual}$$

De donde se obtiene:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E \varepsilon_e$$



Modelo

Relación esfuerzo-deformación.- Para la formulación del modelo debemos establecer en un primer paso la relación entre el esfuerzo y la deformación.

$$\sigma = E \varepsilon_e$$

A la deformación (ε) la podemos descomponer en dos componentes, uno elástico y otro inelástico o permanente:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\sigma = E \varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

Superficie de fluencia.- Este modelo queda determinada por:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0$$

Donde:

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$f(\sigma, q, \alpha)$ Umbral de falla o fluencia

q Esfuerzo residual

$\sigma_y > 0$ Límite elástico inicial.

K Módulo de endurecimiento plástico.

$K > 0$ Endurecimiento

$K = 0$ Plasticidad perfecta

$K < 0$ Reblandecimiento

α Variable de endurecimiento interno. No negativa. Considerando que: $\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}_p|$

$K\alpha$ Frecuentemente se denomina este valor como esfuerzo de arrastre.

Donde el valor del *esfuerzo residual* se calcula mediante la regla de Ziegler:



$$q = H\dot{\epsilon}_p = \gamma H \text{signo}(\sigma - q)$$

Siendo H el valor del módulo cinemático de endurecimiento.

Regla de flujo.- Se considerará como regla de flujo que:

$$\dot{\epsilon}_p = \gamma \text{signo}(\sigma)$$

Siendo

γ La velocidad de fluencia

$\text{signo}(\sigma)$ La dirección de fluencia

La velocidad de fluencia se determina con la ecuación:

$$\gamma = \frac{\text{signo}(\sigma - q)E\dot{\epsilon}}{E + [K + H]}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Condiciones complementarias.- por último es necesario introducir condiciones complementarias, las cuales son

- a) Condición de Kuhn-tucker o condiciones de carga-descarga

$$\gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

- b) Condición de consistencia o condición de persistencia

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$



Caracterización tri-axial de la plasticidad

Toda la teoría de la plasticidad planteada en una dimensión puede generalizarse a estado tri-axial utilizando el mismo procedimiento

1. Relación esfuerzo-deformación

Teniendo en cuenta que la *energía libre* Ψ se define de la misma manera que en el caso uni-axial, la relación esfuerzo deformación se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad \therefore \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$$

Donde ahora $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ son tensores del esfuerzo y deformación respectivamente, mientras que \mathbf{C} es la matriz de constantes elásticas

2. Superficie de fluencia

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

La función de fluencia se define como:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q, \alpha) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}) - q - \sigma_f(\alpha)$$

Siendo $\Phi(\boldsymbol{\sigma})$ la tensión uni-axial equivalente, q el esfuerzo residual y $\sigma_f(\alpha)$ es la función de fluencia:

$$\sigma_f(\alpha) = \sigma_y + K\alpha$$

Donde K es el coeficiente de endurecimiento isotrópico del material.

3. Regla de flujo

La regla de flujo no varía con respecto al caso uni-axial, es decir:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\text{signo}(\Phi(\boldsymbol{\sigma}) - q)E\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{E + [K + H]}$$



4. Condiciones complementarias

Para el caso de la condición de Kuhn-Tucker o condición de carga-descarga se tiene:

$$\gamma \geq 0 ; f(\sigma, \alpha) \leq 0 ; \gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

Y la condición de consistencia o condición de persistencia se define:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



3.4 Visco-plasticidad

Introducción

La teoría de visco-plasticidad se fundamenta en que una vez superado el límite elástico en ciertos materiales, estos no se comportan como lo muestran los modelos de plasticidad. Pasado este límite, la deformación inelástica depende de una variable más, el tiempo.

Un punto importante en la teoría de la visco-plasticidad es la teoría de Newton, donde se considera que la deformación no es proporcional al esfuerzo, sino que la velocidad de deformación es directamente proporcional al esfuerzo.

A los modelos de comportamiento visco-plástico se los puede considerar como una extensión de los modelos plásticos, con la diferencia que en los modelos visco-plásticos aparece el concepto de tiempo de relajación. Este tiempo denominado tiempo de relajación, es una medida de tiempo en el cual el material se relaja, es decir, el esfuerzo pasa a ser directamente proporcional a la deformación.

Caracterización uni-axial de la visco-plasticidad

Relación constitutiva

En este caso la *densidad de energía libre* se define como:

$$\Psi = \frac{1}{2} E \varepsilon_e^2 + \frac{1}{2} K \alpha^2 + \frac{1}{2} H \beta^2$$

$$H \beta = q \quad \text{Esfuerzo residual}$$



De donde se obtiene:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E \varepsilon_e$$

Modelo

Para la formulación del modelo se parte de la relación entre el esfuerzo y la deformación:

$$\sigma = E \varepsilon_e$$

De donde se puede descomponer la deformación de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{vp}$$

ε_e . – deformación elástica

ε_{vp} . – deformación visco-plástica

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Como para determinar el esfuerzo σ únicamente se utiliza la deformación elástica podemos expresar la relación esfuerzo-deformación de la siguiente manera:

$$\sigma = E \varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_{vp})$$

Posteriormente se define una superficie de fluencia, que en este caso se utiliza la misma que para el modelo con endurecimiento cinemático e isotrópico para plasticidad:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0$$

En la literatura sobre visco-plasticidad existen dos teorías ampliamente difundidas sobre la formulación de la regla de flujo:



a) Formulación de Perzyna

Esta teoría se basa en el denominado *esfuerzo adicional* (σ_{ex}), cuyo valor se representa la diferencia entre esfuerzo que soporta el elemento y el límite admisible:

$$\sigma_{ex} = \begin{cases} \sigma - q - (\sigma_y + K\alpha) & \text{si } \sigma - q \geq (\sigma_y + K\alpha) \\ \sigma - q + (\sigma_y + K\alpha) & \text{si } \sigma - q \leq -(\sigma_y + K\alpha) \end{cases}$$

$$= (|\sigma - q| - (\sigma_y + K\alpha)) \text{signo}(\sigma)$$

De esta manera, utilizando la ecuación de la ley de Hooke se encuentra el valor del esfuerzo adicional como:

$$\sigma_{ex} = \eta \dot{\epsilon}_{vp}$$

Donde η es la constante visco-plástica. Si ahora se despeja la deformación visco-plástica y se sustituye el esfuerzo adicional con la ecuación anterior obtenemos:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{1}{\eta} (|\sigma - q| - (\sigma_y + K\alpha)) \text{signo}(\sigma)$$

Si a esta ecuación introducimos la superficie de fluencia se tiene:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{1}{\eta} f(\sigma, \alpha) \text{signo}(\sigma)$$

Como la deformación visco-plástica únicamente se produce cuando $f(\sigma, \alpha) > 0$ es necesario introducir una nueva función que en el caso de que no se cumpla esta condición el valor sea 0:

$$\langle f(\sigma, \alpha) \rangle = \frac{(f(\sigma, \alpha) + |f(\sigma, \alpha)|)}{2}$$

De esta manera obtenemos la regla de flujo:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{1}{\eta} \langle f(\sigma, \alpha) \rangle \text{signo}(\sigma)$$

[4][5][6]



b) Formulación de Duvaut-Lions

Para esta teoría es importante introducir una variable en función del tiempo, la cual se define como:

$$\tau := \frac{\eta}{E + K}$$

Donde τ es llamado coeficiente de relajación, de esta manera podemos definir la deformación visco-plástica como:

$$\varepsilon_{vp} = \frac{E^{-1}}{\tau} [|\sigma| \text{signo}(\sigma) - \sigma_y \text{signo}(\sigma)] = \frac{E^{-1}}{\tau} [\sigma - \sigma_y \text{signo}(\sigma)]$$

Al igual que en los modelos de plasticidad es necesario introducir una regularización, una de las cuales es la regularización de Yoshida (Pazy, 2012).

De la formulación de Perzyna se obtiene que:

$$\gamma = \frac{\langle f(\sigma, \alpha) \rangle}{\eta}$$

De esta manera la deformación visco-plástica queda expresada:

$$\varepsilon_{vp} = \gamma \text{signo}(\sigma)$$

Y

$$\dot{\alpha} = \gamma$$

Finalmente se reemplaza estas ecuaciones en las condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker y en la condición de consistencia.

[6][7]

NOTA.- Esta formulación también es válida para el modelo tri-axial

3.5 Teoría de daño

Introducción

La teoría de daño representa el deterioro gradual y continuo de un material sometido a diferentes esfuerzos, que se caracteriza por ser un proceso físico progresivo, acumulativo e irreversible. El daño puede aumentar hasta llegar a la fractura (falla), y dependiendo del comportamiento del material se puede diferenciar claramente dos tipos de fallas: dúctil y frágil.

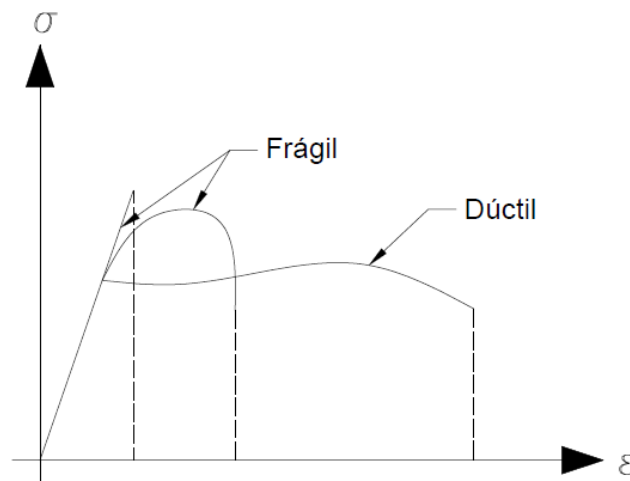


Fig. 23.- Tipos de falla

La existencia de estos tipos de falla es debido a la diferente naturaleza de los distintos materiales. El elemento empieza a fallar por los distintos puntos defectuosos del material, debido a la concentración de esfuerzos en dichos puntos. A nivel macroscópico se puede visualizar esas fallas a través de las fisuras que se presentan en el material, en este punto el material ya ha fallado.

Se puede diferenciar principalmente 2 modelos de daño, el primero se basa en la deformación total (daño elástico), y el segundo en la deformación inelástica (daño plástico y visco-plástico). A continuación se muestra un esquema de los tipos de daño tras varios ciclos de carga y descarga.

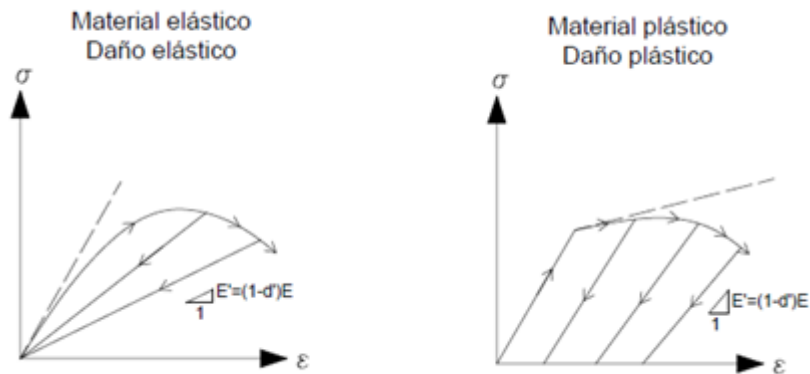
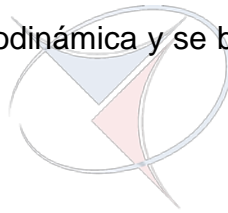


Fig. 24.- Tipos de daño

A ese comportamiento también se lo denomina degradación, el cual cumple con las leyes de la termodinámica y se basa en la modificación del *tensor constitutivo*.



Conceptos básicos y definición de daño

UNCA
desde 1867

Si se considera un material de área igual a la unidad, donde la parte del área dañada denominada d no puede soportar ningún esfuerzo, por ende cuando el valor de d es igual a 1 significa que el elemento está completamente roto.

Principio de deformación equivalente.- si el material consta de fibras paralelas, las cuales están sujetas a la misma deformación y la porción d es la dañada como ya se dijo anteriormente, el valor del área no dañada es $1-d$. El esfuerzo nominal (σ) que se aplica sobre el área parece reducirse, pero el esfuerzo real en el área no dañada aumenta. Éste esfuerzo real que soporta el área no dañada se denomina *esfuerzo efectivo*, el cual se expresa:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d}$$

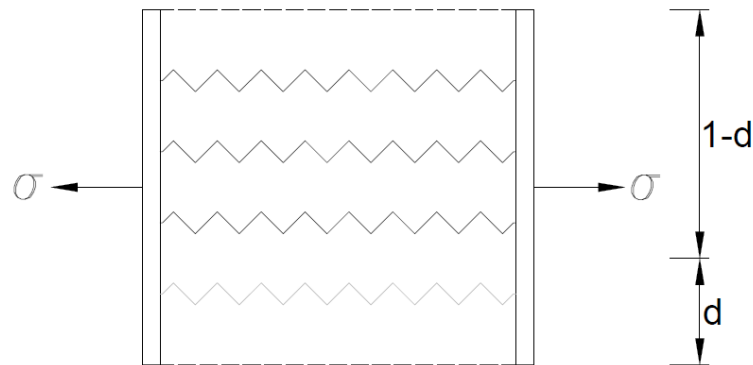
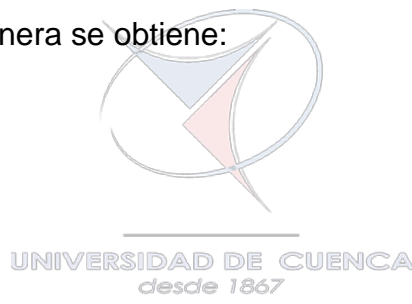


Fig. 25.- Modelo de daño elástico según el principio de deformación equivalente

Para generalizar el concepto anterior sustituimos el área igual a la unidad por un valor s , de esta manera se obtiene:

- S Área total
- Sd Área dañada
- \hat{S} Área efectiva
- σ Esfuerzo aparente
- $\hat{\sigma}$ Esfuerzo efectivo



Con las ecuaciones de equilibrio se tiene que:

$$\sigma * s = \hat{\sigma} * \hat{S} = F$$

Donde F es la fuerza aplicada sobre el área

$$\sigma = \frac{\hat{S}}{s} \hat{\sigma} = \frac{(s - sd)}{s} \hat{\sigma} = \left(1 - \frac{sd}{s}\right) \hat{\sigma}$$

Siendo $\frac{sd}{s} = d$, con d la variable de daño o degradación se tiene:

Si $sd = 0 \Rightarrow d = 0$

Si $sd = s \Rightarrow d = 1$



Por lo que el rango de d queda definido:

$$0 \leq d \leq 1$$

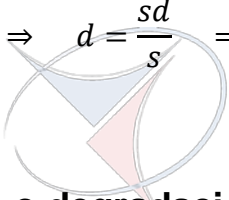
Tomando en consideración la ley de Hooke se obtiene que:

$$\hat{\sigma} = E\varepsilon$$

$$\sigma = (1 - d)\hat{\sigma} = (1 - d)E\varepsilon$$

$$\hat{E} = (1 - d)E = (1 - d_{(\varepsilon)})E = \widehat{E}_{(\varepsilon)}$$

Cabe recalcar que la superficie dañada no puede disminuir, ya que como se dijo anteriormente el daño es un proceso físico progresivo.

$$sd \geq 0 \Rightarrow d = \frac{sd}{s} \Rightarrow d \geq 0$$


Bases del modelo de daño o degradación

Existen diferentes formulaciones para caracterizar el daño o degradación de un material, entre estos, los modelos isotrópicos son ampliamente aceptados y relativamente sencillos para los materiales objeto del presente estudio.

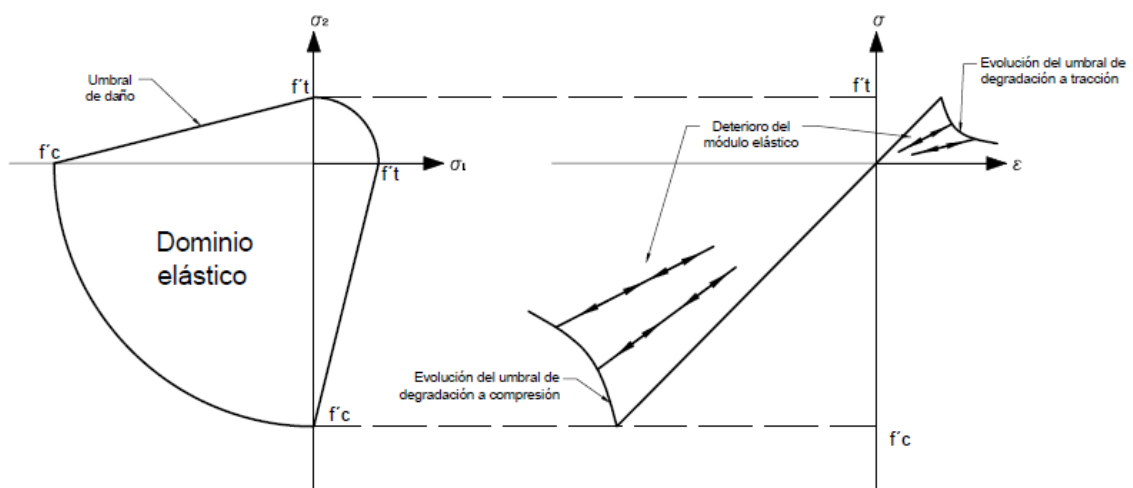


Fig. 26.- Umbral de daño o superficie de falla para un material con distinta resistencia a compresión y tracción



Al iniciar el proceso de carga se considera que el material es elástico, isótropo y se encuentra en perfecto estado. Al incrementar la carga, el material se acerca al umbral de falla, el cual marca el inicio de la degradación o daño, al sobrepasar este límite, el material se degrada, perdiendo rigidez. Para lograr este comportamiento se utiliza una variable interna escalar d denominada de *daño* o *degradación*, la cual representa la pérdida de rigidez y varía entre 0 o 1 como ya se mencionó anteriormente. La ecuación del modelo de daño isótropo se define como:

$$\sigma = (1 - d)\mathbf{C}:\varepsilon$$

Donde σ y ε son los tensores de esfuerzos y deformaciones respectivamente, d es la variable de daño y \mathbf{C} es el tensor constitutivo inicial. Como consecuencia de esta ecuación se tiene que:

- 1) Debido a que la rigidez únicamente es afectada por un escalar la isotropía del material se mantiene.
- 2) Se puede integrar de manera explícita la ecuación constitutiva, ya que solo intervienen valores actuales de esfuerzo y deformación.
- 3) La ecuación constitutiva cae dentro de los modelos estándar de descomposición de deformaciones.

Este modelo se define por completo si se determina el valor de la variable interna d en cada instante del proceso de deformación.

1) Norma en el espacio de tensiones.- se define una norma Γ del tensor de deformaciones, a la cual también se le denomina *deformación equivalente*. Esta norma se utiliza para comparar diferentes estados del material, de esta manera es posible distinguir procesos de carga y descarga

Para el caso de un modelo elástico simétrico la norma se define en función de la *energía elástica* Ψ_0 . Este dominio elástico se representa mediante un elipsoide centrado en el origen del espacio de deformaciones:

$$\Gamma = \sqrt{2\Psi_0} = \sqrt{\varepsilon:\mathbf{C}:\varepsilon} = \sqrt{\sigma:\varepsilon}$$



2) Criterio de daño.- se formula una función (F) que divide el espacio de tensiones admisibles en un dominio elástico ($F > 0$) y un dominio de daño ($F = 0$). Este espacio tensional está en función de la norma Γ y de un valor r el cual representa el umbral de daño:

$$F(\Gamma, r) = G(\Gamma) - G(r) \leq 0$$

Donde $G(\bullet)$ es una función monótona creciente. Además $\dot{r} > 0$, y si r crece, la superficie de fluencia crece.

3) Ley de evolución.- la evolución del umbral de daño y la variable de degradación se definen como:

$$\dot{r} = \mu$$

$$\dot{d} = \mu \frac{\partial F(\Gamma, r)}{\partial \Gamma} = \mu \frac{dF(\Gamma)}{d\Gamma}$$

Donde μ es el parámetro de consistencia de las condiciones de Kuhn-Tucker

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

4) Condición de Kuhn-Tucker o de carga-descarga.- de acuerdo a las condiciones de Kuhn-Tucker se tiene que:

$$\mu \geq 0$$

$$F(\Gamma, r) \leq 0$$

$$\mu F(\Gamma, r) = 0$$

Donde a μ también se lo conoce como *multiplicador de daño*.

5) Condición de consistencia.- establece que para que la superficie de daño evolucione la función F en el instante siguiente se debe mantener en la superficie, de tal manera que:

$$\mu \geq 0$$

$$\dot{F}(\Gamma, r) \leq 0$$

$$\mu \dot{F}(\Gamma, r) = 0$$



Caracterización de modelos de daño

Para modelos con endurecimiento se utilizan dos diferentes tipos de caracterización para el modelo de daño.

Endurecimiento lineal

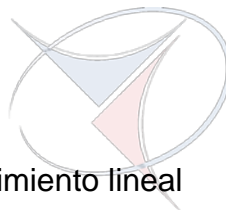
$$G(r) = \begin{cases} 0 & \rightarrow r \leq r_0 \\ \frac{1}{1+H} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) & \rightarrow r_0 \leq r \leq r_{max} \\ 1 & \rightarrow r > r_{max} \end{cases}$$

Donde

H es el parámetro de endurecimiento lineal

$$r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}}$$

$$r_{max} = \frac{1}{H} r_0 \quad (H < 0)$$



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Endurecimiento exponencial

$$G(r) = 1 - \frac{r_0}{r} e^{H\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}$$

$$G(r_0) = 0$$

$$r = \infty \quad G(r) = 1$$



Modelo de plasticidad y daño asociados

El modelo de daño acoplado a plasticidad es similar al modelo de plasticidad, con la adición del criterio de daño o degradación mediante la variable d , de esta manera, la relación esfuerzo-deformación se define:

$$\sigma = E \varepsilon_e$$

Se establece una superficie de fluencia, la cual va a delimitar el espacio de tensiones admisibles:

$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (1 - d)(\sigma_y + K\alpha) \leq 0$$

Siendo:

$$q = H \dot{\varepsilon}_p = \gamma H \text{signo}(\sigma - q)$$

Se establece una regla de flujo:

$$-\dot{\varepsilon}_p = \gamma \text{signo}(\sigma - q)$$

$$\gamma = \frac{\text{signo}(\sigma - q) E \dot{\varepsilon}}{E + [K + H]}$$

$$d = G(r)$$

Donde $G(r)$ representa el modelo de daño, y r la variable interna.

Y finalmente se establecen las condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker y la condición de consistencia, las cuales son las mismas que para los modelos plásticos.

Modelos de visco-plasticidad y daño asociados

El modelo de daño visco-plástico es similar al modelo plástico, con la diferencia que en la regla de flujo se utiliza lo visto en visco-plasticidad.

NOTA.- todo lo expuesto es válido para modelos en estado uni-axial y tri-axial.



Capítulo 4

Algoritmos

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Los algoritmos expuestos a continuación están dirigidos a la caracterización del comportamiento controlado por las deformaciones.

NOTA.- Los algoritmos presentados a continuación son un resumen de los implementados, tomando en consideración los más representativos, no se exponen todos debido al gran número de ellos. En el formato digital se agrega archivos de Excel con macros de cada uno de los algoritmos implementados para el presente trabajo.



4.1 Estado uni-axial

4.1.1 Plasticidad

Algoritmo de integración para plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico

Para el desarrollo del algoritmo se utiliza el método de regreso de Euler. Partiendo de este punto se obtiene:

$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)} + \Delta\gamma \operatorname{signo}(\sigma_{(n+1)})$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \Delta\gamma$$

$$q_{(n+1)} = q_n + \Delta\gamma H \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)})$$

$$\sigma_{(n+1)} = E(\varepsilon_{(n+1)} - \varepsilon_{p(n+1)})$$

$$\varepsilon_{(n+1)} = \varepsilon_{(n)} + \Delta\varepsilon_n$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Donde q representa el traslado del umbral del comportamiento no lineal. Además es necesario introducir una nueva variable, de manera que:

$$\xi := \sigma - q$$

Donde ξ representa el *esfuerzo relativo*.

Con esto la superficie de fluencia es:

$$f_{(n+1)} := |\xi_{(n+1)}| - (\sigma_y + K\alpha_{(n+1)}) \leq 0$$

Y las condiciones de carga/descarga se expresan:

$$\Delta\gamma \geq 0$$

$$\Delta\gamma f_{(n+1)} = 0$$

Donde se conocen los datos del instante n , o el punto anterior y el nuevo incremento de la deformación $\Delta\varepsilon_{(n)}$.



Estado elástico de prueba (trial)

Como primer punto se va a considerar un estado de prueba netamente elástico, es decir, no se considera plasticidad ni superficie de fluencia, de esta manera, las variables en el siguiente instante de carga se expresa con las fórmulas:

$$\sigma_{(n+1)}^{trial} = E(\varepsilon_{(n+1)} - \varepsilon_{p(n)})$$

$$\varepsilon_{p(n+1)}^{trial} = \varepsilon_{p(n)}$$

$$\xi_{(n+1)}^{trial} = \sigma_{(n+1)}^{trial} - q_{(n)}$$

$$q_{(n+1)}^{trial} = q_{(n)}$$

$$\alpha_{(n+1)}^{trial} = \alpha_{(n)}$$

$$f_{(n+1)}^{trial} = |\sigma_{(n+1)}| - (\sigma_y + K\alpha_{(n)})$$

Condiciones de carga

Si:

$$f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$$

El material se encuentra en el rango elástico, por lo tanto:

$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)}^{trial}$$

$$q_{(n+1)} = q_{(n)}$$

Satisfaciendo todas las condiciones impuestas:

- a) Relación esfuerzo-deformación
- b) Regla de flujo

$$\Delta\gamma = 0$$



$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)}$$

c) Condiciones de Kuhn-Tucker y condición de consistencia

$$f_{(n+1)} = f_{(n+1)}^{trial} \leq 0 \quad y \quad \Delta\gamma = 0$$

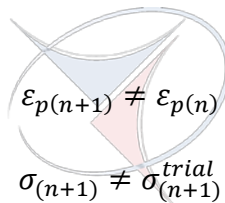
$$\Delta\gamma f_{(n+1)} = 0$$

$$\Delta\gamma \dot{f} = 0$$

En cambio, si $f_{(n+1)}^{trial} > 0$, el estado de prueba no es admisible, por lo que es necesario retornar a la superficie de falla. Entonces:

$$\Delta\gamma > 0$$

Por lo tanto:



$$f_{(n+1)} \neq f_{(n+1)}^{trial}, \quad \underline{f_{(n+1)} = 0} \quad y \quad \Delta\gamma > 0$$

El material se encuentra en estado inelástico.

Algoritmo de regreso a la superficie

Puesto que:

$$f_{(n+1)}^{trial} > 0 \quad \rightarrow \quad f_{(n+1)} = 0$$

Es necesario obtener los valores reales de $\varepsilon_{p(n+1)}, \alpha_{(n+1)}, q_{(n+1)}, \sigma_{(n+1)}, \Delta\gamma$. Se corrige el estado tensorial $\sigma_{(n+1)}$, observe que:

$$\sigma_{(n+1)} = E(\varepsilon_{(n+1)} - \varepsilon_{p(n+1)})$$

$$\sigma_{(n+1)} = E(\varepsilon_{(n+1)} - \varepsilon_{p(n)}) - E(\varepsilon_{p(n+1)} - \varepsilon_{p(n)})$$

$$\sigma_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)}^{trial} - E\Delta\gamma \text{signo}(\sigma_{(n+1)})$$



Y como $\Delta\gamma > 0$ se tiene que:

$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)} + \Delta\gamma \operatorname{signo}(\sigma_{(n+1)})$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \Delta\gamma$$

$$\xi_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)} - q_{(n+1)}$$

$$q_{(n+1)} = q_n + \Delta\gamma H \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)})$$

$$f_{(n+1)} := |\xi_{(n+1)}| - (\sigma_y + K\alpha_{(n+1)})$$

Colocando el *esfuerzo relativo* en función de los parámetros conocidos, se tiene:

$$\xi_{(n+1)} = (\sigma_{(n+1)}^{trial} - q_{(n)}) - \Delta\gamma(E + H) \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)})$$

$$\xi_{(n+1)} = (\xi_{(n+1)}^{trial}) - \Delta\gamma(E + H) \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)})$$

$$|\xi_{(n+1)}| \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}) = |\xi_{(n+1)}^{trial}| \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial}) - \Delta\gamma(E + H) \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)})$$

$$\left(|\xi_{(n+1)}| + \Delta\gamma(E + H) \right) \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}) = |\xi_{(n+1)}^{trial}| \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial})$$

Si se toma en consideración que $\Delta\gamma > 0$ y puesto que H como E son positivos, entonces:

$$\operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}) = \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial})$$

Por lo tanto:

$$|\xi_{(n+1)}| + \Delta\gamma(E + H) = |\xi_{(n+1)}^{trial}|$$

Ahora, basándose en la condición de consistencia se tiene:

$$f_{(n+1)} = |\xi_{(n+1)}^{trial}| - \Delta\gamma(E + H) - (\sigma_y + K\alpha_{(n+1)})$$

$$f_{(n+1)} = |\xi_{(n+1)}^{trial}| - \Delta\gamma(E + H) - (\sigma_y + K\alpha_{(n)}) - K[\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}]$$



$$f_{(n+1)} = f_{(n+1)}^{trial} - \Delta\gamma(E + H + K)$$

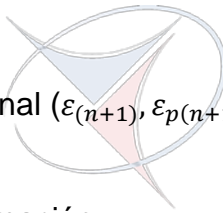
Por las condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker, puesto que $\Delta\gamma \neq 0$ entonces $f_{(n+1)} = 0$, Por lo tanto al resolver la ecuación se obtiene:

$$\Delta\gamma = \frac{f_{(n+1)}^{trial}}{E + (H + K)}$$

Algoritmo 1.- Algoritmo de plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico

Entrada.- incremento de la deformación ($\Delta\varepsilon_n$), parámetros del estado anterior ($\varepsilon_{(n)}, \varepsilon_{p(n)}, q_{(n)}, \alpha_{(n)}, \sigma_{(n)}$) y variables internas del material (E, K, H)

Salida.- parámetros del estado final ($\varepsilon_{(n+1)}, \varepsilon_{p(n+1)}, q_{(n+1)}, \alpha_{(n+1)}, \sigma_{(n+1)}$)



1. Cálculo de la nueva deformación

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$$\varepsilon_{(n+1)} = \varepsilon_{(n)} + \Delta\varepsilon_n$$

2. Cálculo del estado de prueba

$$\sigma_{(n+1)}^{trial} = E(\varepsilon_{(n+1)} - \varepsilon_{p(n+1)})$$

$$\xi_{(n+1)}^{trial} = \sigma_{(n+1)}^{trial} - q_{(n)}$$

$$f_{(n+1)}^{trial} = |\xi_{(n+1)}^{trial}| - (\sigma_y + K\alpha_{(n)})$$

3. Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)}$$



$$q_{(n+1)} = q_{(n)}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)}^{trial}$$

$$\Delta\gamma = 0$$

4. Caso contrario

$$\Delta\gamma = \frac{f_{(n+1)}^{trial}}{E + (K + H)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)}^{trial} - E\Delta\gamma \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial})$$

$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)} + \Delta\gamma \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial})$$

$$q_{(n+1)} = q_{(n)} + \Delta\gamma H \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial})$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \Delta\gamma$$

5. Fin



4.1.2 Visco-plasticidad

Algoritmo de integración para visco-plasticidad con endurecimiento isotrópico (Uni-axial).

Para la formulación del algoritmo para visco-plasticidad se debe establecer si la regla de flujo sigue la formulación de Duvaut-Lions o la de Perzyna, y las ecuaciones de evolución de comportamiento son:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{E^{-1}}{\tau} [\sigma - \sigma_p]$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{\tau} [\alpha - \alpha_p]$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{\tau} [q - q_p]$$

$$\tau = \frac{\eta}{E + (K + H)}$$

Donde σ_p , q_p y α_p son los valores del esfuerzo y la variable interna de endurecimiento del modelo de plasticidad, mientras que τ representa el tiempo de relajación. A partir de esto se tiene que:

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = E \dot{\epsilon} + \frac{\sigma_p}{\tau}$$

$$\dot{\alpha} + \frac{1}{\tau} \alpha = \frac{\alpha_p}{\tau}$$

$$\dot{q} + \frac{1}{\tau} q = \frac{q_p}{\tau}$$

Y utilizando el método de retorno de Euler se tiene:



$$\sigma_{(n+1)} \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau} \right] = E \Delta \varepsilon_{(n)} + \sigma_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} \sigma_p$$

$$\alpha_{(n+1)} \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau} \right] = \alpha_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} \alpha_p$$

$$q_{(n+1)} \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau} \right] = q_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} q_p$$

Si se tiene en cuenta que $\sigma_{(n+1)}^{trial} = \sigma_{(n)} + E \Delta \varepsilon$ la fórmula queda expresada de la siguiente manera:

$$\sigma_{(n+1)} = \frac{\sigma_{(n+1)}^{trial} + \frac{\Delta t}{\tau} \sigma_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \frac{\alpha_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} \alpha_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$$q_{(n+1)} = \frac{q_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} q_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

Algoritmo 2.- Algoritmo de visco-plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico

Entrada.- variación de la deformación ($\Delta \varepsilon_n$), parámetros del estado anterior ($\varepsilon_{(n)}, \varepsilon_{vp(n)}, q_{(n)}, \alpha_{(n)}, \sigma_{(n)}$) y variables internas del material (E, K, H, τ)

Salida.- parámetros del estado final ($\varepsilon_{(n+1)}, \varepsilon_{vp(n+1)}, q_{(n+1)}, \alpha_{(n+1)}, \sigma_{(n+1)}$)

1. Cálculo de la nueva deformación

$$\varepsilon_{(n+1)} = \varepsilon_{(n)} + \Delta \varepsilon_n$$



2. Cálculo de σ_p , q_p y α_p con el algoritmo 2

2.1 Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$\varepsilon_{vp(n+1)} = \varepsilon_{vp(n)}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)}$$

$$q_{(n+1)} = q_{(n)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)}^{trial}$$
$$\Delta\gamma = 0$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

2.2 Caso contrario

$$\tau = \frac{\eta}{E + (K + H)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \frac{\sigma_{(n+1)}^{trial} + \frac{\Delta t}{\tau} \sigma_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \frac{\alpha_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} \alpha_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$



$$q_{(n+1)} = \frac{q_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} q_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$\varepsilon_{vp(n+1)} = \varepsilon_{(n+1)} - E^{-1} \sigma_{(n+1)}$$

3. Fin

Cabe recalcar que si se utiliza el algoritmo 1 pero determinando la velocidad de flujo como:

$$\Delta \gamma = \frac{\frac{\Delta t}{\tau}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \Delta \gamma_\alpha$$

Donde $\Delta \gamma_\alpha$ es la velocidad de flujo que se obtiene con la fórmula para plasticidad según el algoritmo 1, se obtienen los mismos resultados que en el algoritmo 2.

desde 1867



4.1.3 Daño

Para la elaboración de un algoritmo de modelo de daño se tiene que:

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon$$

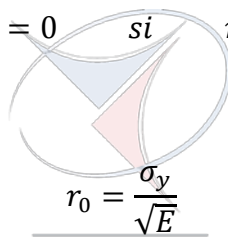
Siendo:

$$d = G(r)$$

Utilizando la ecuación de evolución de daño exponencial:

$$G(r) = 1 - \frac{r_0}{r} e^{H(1-\frac{r_0}{r})}$$

$$G(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq r_0$$



Donde:

$$r_{(n+1)} = r_{(n)} + \Delta\gamma\sqrt{E}$$

Para obtener un algoritmo de plasticidad con daño asociado se introduce este concepto en el algoritmo 1 se obtiene el algoritmo de plasticidad con endurecimiento cinemático, isotrópico y daño.

Nota.- si se desea obtener los resultados de un algoritmo únicamente de daño, simplemente se considera un valor de 0 en el coeficiente de endurecimiento cinemático y se utiliza de punto de partida el estado prueba del material.

Algoritmo 3.- Algoritmo de plasticidad y daño asociados; con endurecimiento cinemático e isotrópico.

Entrada.- incremento de la deformación ($\Delta\varepsilon_n$), parámetros del estado anterior ($\varepsilon_{(n)}, \varepsilon_{p(n)}, q_{(n)}, \alpha_{(n)}, \sigma_{(n)}, d_{(n)}$) y variables internas del material (E, K, H)

Salida.- parámetros del estado final ($\varepsilon_{(n+1)}, \varepsilon_{p(n+1)}, q_{(n+1)}, \alpha_{(n+1)}, \sigma_{(n+1)}, d_{(n+1)}$)



1. Cálculo de la nueva deformación

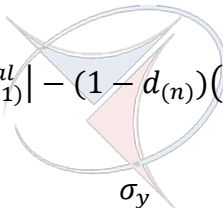
$$\varepsilon_{(n+1)} = \varepsilon_{(n)} + \Delta\varepsilon_n$$

2. Cálculo del estado de prueba

$$\sigma_{(n+1)}^{trial} = (1 - d_{(n)})E(\varepsilon_{(n+1)} - \varepsilon_{p(n+1)})$$

$$\xi_{(n+1)}^{trial} = \sigma_{(n+1)}^{trial} - q_{(n)}$$

$$f_{(n+1)}^{trial} = |\xi_{(n+1)}^{trial}| - (1 - d_{(n)})(\sigma_y + K\alpha_{(n)})$$



$$r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

3. Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)}$$

$$q_{(n+1)} = q_{(n)}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)}^{trial}$$

$$d_{(n+1)} = d_{(n)}$$

$$\Delta\gamma = 0$$



4. Caso contrario

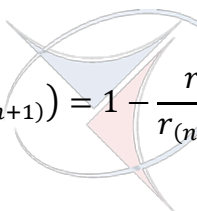
Si $r_{(n)} = 0$ entonces

$$r_{(n)} = r_0$$

Fin si

$$\Delta\gamma = \frac{f_{(n+1)}^{trial}}{E + (K + H)}$$

$$r_{(n+1)} = r_{(n)} + \Delta\gamma\sqrt{E}$$


$$d_{(n+1)} = G(r_{(n+1)}) = 1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}} e^{H\left(1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}}\right)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = (1 - d_{(n+1)}) (\sigma_{(n+1)}^{trial} - E\Delta\gamma \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial}))$$

$$\varepsilon_{p(n+1)} = \varepsilon_{p(n)} + \Delta\gamma \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial})$$

$$q_{(n+1)} = q_{(n)} + \Delta\gamma H \operatorname{signo}(\xi_{(n+1)}^{trial})$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \Delta\gamma$$

5. Fin



Algoritmos de integración para visco-plasticidad con daño.

Al igual que los algoritmos de plasticidad con daño, estos son semejantes a los de visco-plasticidad, sin embargo es necesario introducir el concepto de daño:

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon$$

Siendo d la variable de daño, y se calcula con la siguiente fórmula:

$$d = G(r) = 1 - \frac{r_0}{r} e^{H(1 - \frac{r_0}{r})}$$

Donde:

$$r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}}$$

$$r_{(n+1)} = \frac{r_n + \frac{\Delta t}{\tau} r_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Si esto se introduce al algoritmo 2 obtenemos al algoritmo para visco-plasticidad con endurecimiento cinemático, isotrópico y daño.

Algoritmo 4.- Algoritmo de visco-plasticidad y daño asociados; con endurecimiento cinemático e isotrópico

Entrada.- incremento de la deformación ($\Delta\varepsilon_n$), parámetros del estado anterior ($\varepsilon_{(n)}, \varepsilon_{vp(n)}, d_{(n)}, \alpha_{(n)}, \sigma_{(n)}$) y variables internas del material (E, K, H, τ)

Salida.- parámetros del estado final ($\varepsilon_{(n+1)}, \varepsilon_{vp(n+1)}, q_{(n+1)}, d_{(n+1)}, \alpha_{(n+1)}, \sigma_{(n+1)}$)

1. Cálculo de la nueva deformación

$$\varepsilon_{(n+1)} = \varepsilon_{(n)} + \Delta\varepsilon_n$$



2. Cálculo de σ_p , α_p , r_0 , r_p con el algoritmo 6

2.2 Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$\varepsilon_{vp(n+1)} = \varepsilon_{vp(n)}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)}$$

$$q_{(n+1)} = q_{(n)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = \sigma_{(n+1)}^{trial}$$

$$d_{(n+1)} = d_{(n)}$$

$$\Delta\gamma = 0$$

2.2 Caso contrario

Si $r_{(n)} = 0$ entonces

$$r_{(n)} = r_0$$

Fin si

$$\tau = \frac{\eta}{E + (K + H)}$$



$$r_{(n+1)} = \frac{r_n + \frac{\Delta t}{\tau} r_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$d_{(n+1)} = G(r_{(n+1)}) = 1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}} e^{H\left(1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}}\right)}$$

$$\sigma_{(n+1)} = (1 - d_{(n+1)}) \frac{\sigma_{(n+1)}^{trial} + \frac{\Delta t}{\tau} \sigma_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \frac{\alpha_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} \alpha_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$
$$q_{(n+1)} = \frac{q_{(n)} + \frac{\Delta t}{\tau} q_p}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$\varepsilon_{vp(n+1)} = \varepsilon_{(n+1)} - E^{-1} \sigma_{(n+1)}$$

3. Fin si

Nota.- si se desea obtener los resultados de un algoritmo únicamente de daño, simplemente se considera un valor de 0 en el coeficiente de endurecimiento Cinemático y se utiliza es estado de prueba del material. Lo mismo sucede en los algoritmos para estado tri-axial.

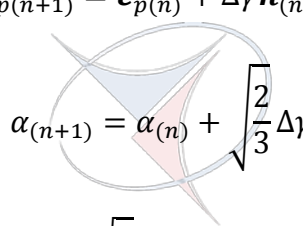


4.2 Estado tri-axial

Para simplificar, se trabaja en el espacio de las tensiones principales, en el cual las tensiones cortantes y deformaciones cortantes son nulas

4.2.1 Plasticidad

Para el desarrollo del algoritmo de plasticidad tri-axial se utiliza el criterio de superficie de fluencia de von Mises, y siguiendo el mismo proceso que para plasticidad uni-axial. Se parte de que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{p(n)} + \Delta\gamma \mathbf{n}_{(n+1)}$$


$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma$$

$$\boldsymbol{\beta}_{(n+1)} = \boldsymbol{\beta}_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} H (\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}) \mathbf{n}_{(n+1)}$$

Donde las variables con letra más oscura (negrita) representan vectores, y las demás representan escalares. El valor de H es el coeficiente de endurecimiento cinemático, $\boldsymbol{\beta}$ es el desplazamiento del centro de la superficie de fluencia, y \mathbf{n} es el vector normal a la superficie de fluencia. Por ende, se tiene que el esfuerzo relativo y el vector normal a la superficie se definen como:

$$\boldsymbol{\xi} := \text{desv}[\boldsymbol{\sigma}] - \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{n}_{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}}{\|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}\|}$$

Primero se obtienen los valores del estado elástico de prueba (trial):

$$\mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} = \mathbf{s}_{(n)} + 2\mu\Delta\mathbf{e}_{(n+1)}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial} = \mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{(n)}$$



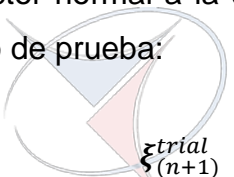
Siendo \mathbf{s} la desviación del esfuerzo ($desv[\boldsymbol{\sigma}]$), \mathbf{e} la desviación de la deformación ($desv[\boldsymbol{\varepsilon}]$) y μ el módulo de cortante (una de las constantes de Lamé), la cual se calcula con la expresión $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Otro parámetro que es importante introducir es κ , denominado *módulo de volumen* (bulk modulus) el cual se define

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Posteriormente se calcula el vector normal a la superficie de fluencia en función del esfuerzo relativo en el estado de prueba:



$$\mathbf{n}_{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}}{\|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

Teniendo en consideración que:

$$\boldsymbol{\xi}_{(n+1)} := \mathbf{s}_{(n+1)} - \boldsymbol{\beta}_{(n+1)}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(n+1)} := \boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial} - \left[2\mu\Delta\gamma + \sqrt{2/3} H(\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}) \right] \mathbf{n}_{(n+1)}$$

Y tras un par de operaciones matemáticas se obtiene el parámetro de consistencia

$$g(\Delta\gamma) = -\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + K\alpha_{(n+1)}) + \|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\| - \left[2\mu\Delta\gamma + \sqrt{\frac{2}{3}} H(\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}) \right] = 0$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{2/3} \Delta\gamma$$



Algoritmo 5 Algoritmo de plasticidad en estado tri-axial (endurecimiento cinemático e isótropo)

Entrada.- incremento de la deformación ($\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$), parámetros del estado anterior ($\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}$, $\mathbf{e}_{p(n)}$, $\boldsymbol{\beta}_{(n)}$, $\alpha_{(n)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$) y variables internas del material (E, ν , K, H)

Salida.- parámetros del estado final ($\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}$, $\mathbf{e}_{p(n+1)}$, $\boldsymbol{\beta}_{(n+1)}$, $\alpha_{(n+1)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}$)

1. Cálculo del estado elástico de prueba

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

$$\mathbf{e}_{(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} = 2\mu(\mathbf{e}_{(n+1)} - \mathbf{e}_{p(n)})$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$$\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial} = \mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{(n)}$$

2. Cálculo de la condición de superficie

$$f_{(n+1)}^{trial} = \|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\| - \sqrt{2/3} (\sigma_y + K\alpha_{(n)})$$

2.1 Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$(\bullet)_{(n+1)} = (\bullet)_{(n+1)}^{trial}$$

Salir

Fin si



3. Cálculo de $\mathbf{n}_{(n+1)}$ y $\Delta\gamma$

$$\mathbf{n}_{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}}{\|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|}$$

1) Inicializar

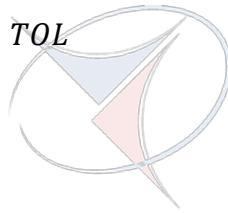
$$\Delta\gamma^{(0)} = 0$$

$$\alpha_{(n+1)}^{(0)} = \alpha_{(n)}$$

2) Iterar

Hacer hasta $|g(\Delta\gamma^{(k)})| < TOL$

$k = k + 1$



$$g(\Delta\gamma^{(k)}) := -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_y + K \alpha_{(n+1)}^{(k)} \right) + \|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|$$

$$-\left[2\mu\Delta\gamma^{(k)} + \sqrt{\frac{2}{3}} H(\alpha_{(n+1)}^{(k)} - \alpha_{(n)}) \right] = 0$$

$$Dg(\Delta\gamma^{(k)}) = -2\mu \left[1 + \frac{(H + K)\alpha_{(n+1)}^{(k)}}{3\mu} \right]$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{g(\Delta\gamma^{(k)})}{Dg(\Delta\gamma^{(k)})}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma$$



4. Cálculo de valores reales

$$\boldsymbol{\beta}_{(n+1)} = \boldsymbol{\beta}_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} H(\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}) \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\mathbf{e}_{p(n+1)} = \mathbf{e}_{p(n)} + \Delta\gamma \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)} = \kappa \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{(n+1)}^{\text{trial}} - 2\mu \Delta\gamma \mathbf{n}_{(n+1)}$$



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



4.2.2 Visco-plasticidad

El algoritmo es como una extensión del algoritmo de plasticidad, tomando en cuenta que ahora la ecuación de la velocidad de flujo se determina con la ecuación

$$\gamma = \frac{\langle f(\sigma, q) \rangle}{\eta}$$

Mediante el método de la regresión de Euler se parte de que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{vp(n)} + \frac{f_{(n+1)}}{\eta} \Delta t \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{f_{(n+1)}}{\eta} \Delta t$$

$$\boldsymbol{\beta}_{(n+1)} = \boldsymbol{\beta}_{(n)} + \frac{2}{3} H \frac{f_{(n+1)}}{\eta} \Delta t \mathbf{n}_{(n+1)}$$

Donde el vector perpendicular a la superficie de fluencia se calcula como:

$$\mathbf{n}_{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}}{\|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|}$$

Haciendo un análisis similar que en el caso de plasticidad se encuentra que

$$\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial} = \|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\| - \frac{2\mu\Delta t}{\eta} \langle f_{(n+1)} \rangle \left(1 + \frac{H}{3\mu}\right)$$

Para finalmente determinar la velocidad de flujo

$$\Delta \gamma_{(n+1)} := \langle f_{(n+1)} \rangle \frac{\Delta t}{\eta} = \frac{\frac{\langle f_{(n+1)}^{trial} \rangle}{2\mu}}{\frac{\tau}{\Delta t} + \left[1 + \frac{H}{3\mu}\right]}$$

$$\tau := \frac{\eta}{2\mu}$$

Siendo τ el llamado *tiempo de relajación*.



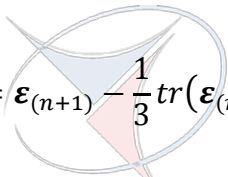
Algoritmo 6 Algoritmo de visco-plasticidad en estado tri-axial (endurecimiento cinemático e isotropo)

Entrada.- Incremento de la deformación ($\Delta\epsilon_n$), parámetros del estado anterior ($\epsilon_{(n)}, e_{vp(n)}, \beta_{(n)}, \alpha_{(n)}, \sigma_{(n)}$) y variables internas del material (E, ν , K, H)

Salida.- parámetros del estado final ($\epsilon_{(n+1)}, e_{vp(n+1)}, \beta_{(n+1)}, \alpha_{(n+1)}, \sigma_{(n+1)}$)

1. Cálculo del estado elástico de prueba

$$\epsilon_{(n+1)} = \epsilon_{(n)} + \Delta\epsilon_n$$

$$e_{(n+1)} = \epsilon_{(n+1)} - \frac{1}{3} \text{tr}(\epsilon_{(n+1)}) \mathbf{1}$$


$$s_{(n+1)}^{trial} = 2\mu(e_{(n+1)} - e_{vp(n)})$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$$\xi_{(n+1)}^{trial} = s_{(n+1)}^{trial} - \beta_{(n)}$$

2. Cálculo de la condición de superficie

$$f_{(n+1)}^{trial} = \|\xi_{(n+1)}^{trial}\| - \sqrt{2/3} (\sigma_y + K\alpha_{(n)})$$

2.1 Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$(\bullet)_{(n+1)} = (\bullet)_{(n+1)}^{trial}$$

Salir

Fin si



3. Cálculo de $\mathbf{n}_{(n+1)}$ y $\Delta\gamma$

$$\mathbf{n}_{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}}{\|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|}$$

$$\Delta\gamma_{(n+1)} = \frac{\frac{\langle f_{(n+1)}^{trial} \rangle}{2\mu}}{\frac{\eta}{2\mu\Delta t} + \left[1 + \frac{H}{3\mu}\right]}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma_{(n+1)}$$



4. Cálculo de valores reales

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$$\boldsymbol{\beta}_{(n+1)} = \boldsymbol{\beta}_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} H(\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}) \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\mathbf{e}_{p(n+1)} = \mathbf{e}_{p(n)} + \Delta\gamma \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)} = \kappa \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} - 2\mu \Delta\gamma_{(n+1)} \mathbf{n}_{(n+1)}$$



4.2.3 Daño

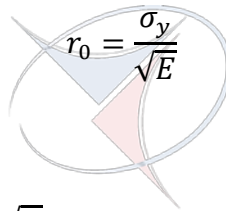
Para introducir la teoría de daño en los algoritmos anteriores, únicamente es necesario tomar en consideración que

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon$$

Donde el valor del parámetro d se calcula con la ecuación

$$d = G(r) = 1 - \frac{r_0}{r} e^{H(1 - \frac{r_0}{r})}$$

Siendo:



$$r_{(n+1)} = \begin{cases} r_{(n)} + \Delta\gamma\sqrt{E} & \text{(caso plástico)} \\ \frac{r_n + \frac{\Delta t}{\tau}(r_{(n)} + \Delta\gamma\sqrt{E})}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} & \text{(caso visco - plástico)} \end{cases}$$

Algoritmo 7 Algoritmo de plasticidad y daño asociados, en estado tri-axial



(endurecimiento cinemático e isótropo)

Entrada.- Incremento de la deformación ($\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$), parámetros del estado inicial ($\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}, \mathbf{e}_{p(n)}, \boldsymbol{\beta}_{(n)}, \alpha_{(n)}, d_{(n)}, \boldsymbol{\sigma}_{(n)}$) y variables internas del material (E, ν , K, H)

Salida.- parámetros del estado final ($\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}, \mathbf{e}_{p(n+1)}, \boldsymbol{\beta}_{(n+1)}, \alpha_{(n+1)}, d_{(n+1)}, \boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}$)

1. Cálculo del estado elástico de prueba

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

$$\mathbf{e}_{(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} = 2\mu(\mathbf{e}_{(n+1)} - \mathbf{e}_{p(n)})$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial} = \mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{(n)}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

2. Cálculo de la condición de superficie

$$f_{(n+1)}^{trial} = \|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\| - \sqrt{2/3} (\sigma_y + K\alpha_{(n)})$$

2.2 Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$(\bullet)_{(n+1)} = (\bullet)_{(n+1)}^{trial}$$

Salir

Fin si

3. Cálculo de $\mathbf{n}_{(n+1)}$ y $\Delta \gamma$



$$\mathbf{n}_{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}}{\|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|}$$

1) Inicializar

$$\Delta\gamma^{(0)} = 0$$

$$\alpha_{(n+1)}^{(0)} = \alpha_{(n)}$$

2) Iterar

Hacer hasta $|g(\Delta\gamma^{(k)})| < TOL$

k = k + 1



$$g(\Delta\gamma^{(k)}) := -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_y + K\alpha_{(n+1)}^{(k)} \right) + \|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|$$
$$- \left[2\mu\Delta\gamma^{(k)} + \sqrt{\frac{2}{3}} H(\alpha_{(n+1)}^{(k)} - \alpha_{(n)}) \right] = 0$$

$$Dg(\Delta\gamma^{(k)}) = -2\mu \left[1 + \frac{(H+K)\alpha_{(n+1)}^{(k)}}{3\mu} \right]$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{g(\Delta\gamma^{(k)})}{Dg(\Delta\gamma^{(k)})}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma$$

4. Cálculo de valores reales



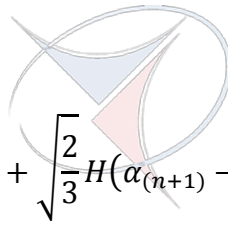
Si $r_{(n)} = 0$ entonces

$$r_{(n)} = r_0$$

Fin si

$$r_{(n+1)} = r_{(n)} + \Delta\gamma\sqrt{E}$$

$$d_{(n+1)} = G(r_{(n+1)}) = 1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}} e^{H\left(1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}}\right)}$$



$$\boldsymbol{\beta}_{(n+1)} = \boldsymbol{\beta}_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} H(\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}) \mathbf{n}_{(n+1)}$$

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$$\mathbf{e}_{p(n+1)} = \mathbf{e}_{p(n)} + \Delta\gamma \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)} = (1 - d_{(n+1)}) (\kappa \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} - 2\mu\Delta\gamma \mathbf{n}_{(n+1)})$$

Algoritmo 8 Algoritmo de visco-plasticidad y daño asociados, en estado tri-axial



(endurecimiento cinemático e isótropo) y daño.

Entrada.- incremento de la deformación ($\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$), parámetros del estado anterior ($\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}$, $\mathbf{e}_{vp(n)}$, $\boldsymbol{\beta}_{(n)}$, $\alpha_{(n)}$, $d_{(n)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{(n)}$) y variables internas del material (E, ν , K, H)

Salida.- parámetros del estado final ($\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}$, $\mathbf{e}_{vp(n+1)}$, $\boldsymbol{\beta}_{(n+1)}$, $\alpha_{(n+1)}$, $d_{(n+1)}$, $\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)}$)

1. Cálculo del estado elástico de prueba

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

$$\mathbf{e}_{(n+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} = 2\mu(\mathbf{e}_{(n+1)} - \mathbf{e}_{vp(n)})$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial} = \mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{(n)}$$

2. Cálculo de la condición de superficie

$$f_{(n+1)}^{trial} = \|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\| - \sqrt{2/3} (\sigma_y + K\alpha_{(n)})$$

2.2 Si $f_{(n+1)}^{trial} \leq 0$ entonces

$$(\bullet)_{(n+1)} = (\bullet)_{(n+1)}^{trial}$$

Salir

Fin si

3. Cálculo de $\mathbf{n}_{(n+1)}$ y $\Delta \gamma$



$$\mathbf{n}_{(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}}{\|\boldsymbol{\xi}_{(n+1)}^{trial}\|}$$

$$\Delta\gamma_{(n+1)} = \frac{\langle f_{(n+1)}^{trial} \rangle}{2\mu} \frac{\eta}{\frac{\eta}{2\mu\Delta t} + \left[1 + \frac{H}{3\mu}\right]}$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma_{(n+1)}$$

4. Cálculo de valores reales



Si $r_{(n)} = 0$ entonces

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

$$r_{(n)} = r_0$$

Fin si

$$\tau = \frac{\eta}{E + (K + H)}$$

$$r_{(n+1)} = \frac{r_n + \frac{\Delta t}{\tau} (r_{(n)} + \Delta\gamma_{(n+1)}\sqrt{E})}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}$$

$$d_{(n+1)} = G(r_{(n+1)}) = 1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}} e^{H\left(1 - \frac{r_0}{r_{(n+1)}}\right)}$$



$$\boldsymbol{\beta}_{(n+1)} = \boldsymbol{\beta}_{(n)} + \sqrt{\frac{2}{3}} H(\alpha_{(n+1)} - \alpha_{(n)}) \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\mathbf{e}_{p(n+1)} = \mathbf{e}_{p(n)} + \Delta\gamma_{(n+1)} \mathbf{n}_{(n+1)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n+1)} = (1 - d_{(n+1)}) (\kappa \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{(n+1)}^{trial} - 2\mu\Delta\gamma_{(n+1)} \mathbf{n}_{(n+1)})$$

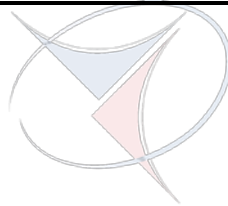


UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



Capítulo 5

Resultados



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la implementación de los algoritmos del capítulo anterior, los cuales representan el comportamiento de distintos materiales. Los modelos de plasticidad representan materiales metálicos, como el acero, mientras que los modelos de visco-plásticos y de daño se asemejan al comportamiento de materiales friccionantes, tales como el hormigón.

NOTA.- En el formato digital se agrega archivos en Excel con macros, donde se puede revisar las fórmulas y la programación. De la misma manera, en estos archivos se puede encontrar las tablas completas con los datos utilizados para la obtención de los distintos gráficos expuestos a continuación



5.1 Modelos en estado uni-axial

Algoritmo 1.- Plasticidad; con endurecimiento cinemático e isotrópico

Si al coeficiente de endurecimiento cinemático se le da un valor de 0, el modelo toma el nombre de plasticidad con endurecimiento isotrópico. De esta manera al implementar el *algoritmo 1* se puede notar que el material tiene un rango elástico al empezar a aumentar las deformaciones hasta llegar al esfuerzo límite inicial (σ_y), también llamado superficie de fluencia. A partir de este punto el material puede tomar tres distintos comportamientos como se puede notar en el *gráfico 1*:



- **K < 0.-** En este caso el material continúa deformándose, pero empieza a perder resistencia, a lo que se le denomina *ablandamiento*.
- **K = 0.-** El material continúa la deformación sin variar el esfuerzo, es decir, aunque el elemento continúe con la misma carga, este seguirá deformándose. A este comportamiento se lo denomina *plasticidad perfecta*.
- **K > 0.-** Sobrepasado el límite de fluencia inicial el material continúa deformándose, pero esta va ganando resistencia, o endurendose, y se denomina *endurecimiento*.

UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



Datos del gráfico 1					
σ_y	E	H	K		
4	10	0	-1	0	1

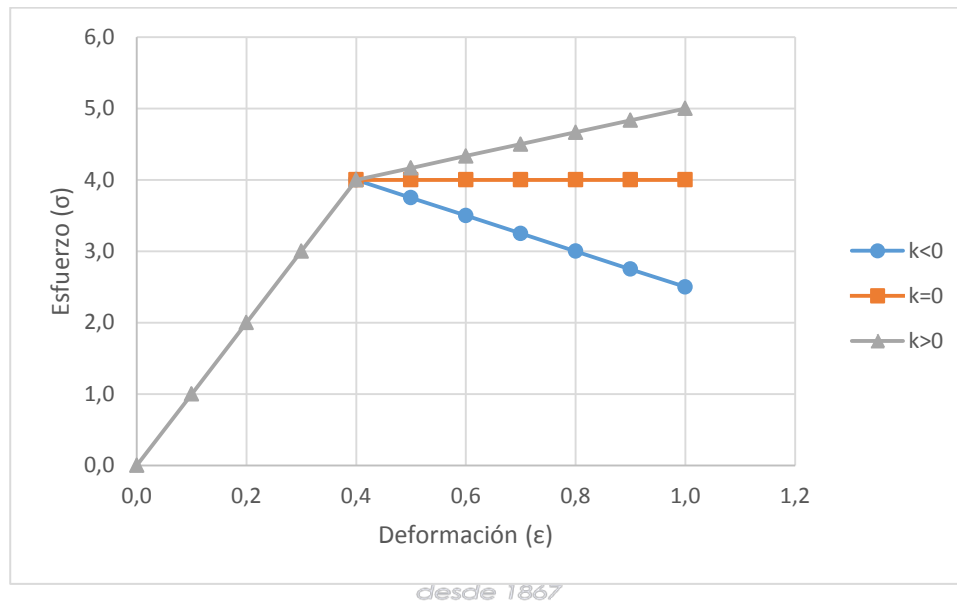


Gráfico1.- Tipos de endurecimiento isotrópico en modelo de plasticidad

En el *gráfico 2* se puede observar el crecimiento del límite de fluencia o superficie de falla. Inicialmente el material se encuentra descargado ($\epsilon = 0.0$ y $\sigma = 0.0$), a dicho material se le impone incrementos de la deformación de 0.1. El material tiene una respuesta elástica ante las deformaciones hasta llegar al límite plástico inicial (σ_y), se continúa dando deformaciones y empieza a aparecer deformaciones plásticas y endurecimiento, hasta llegar a un esfuerzo de ($\sigma_y = 4.545$) que es donde se empieza a descargar. Se puede observar que la curva de descarga tiene la misma pendiente que la curva de carga, es decir, el material presenta una recuperación elástica. Al descargar completamente ($\sigma = 0.0$), este material queda con una deformación plástica, como consecuencia de la fluencia.



Datos del gráfico 2			
σ_y	E	H	K
4	10	0	1

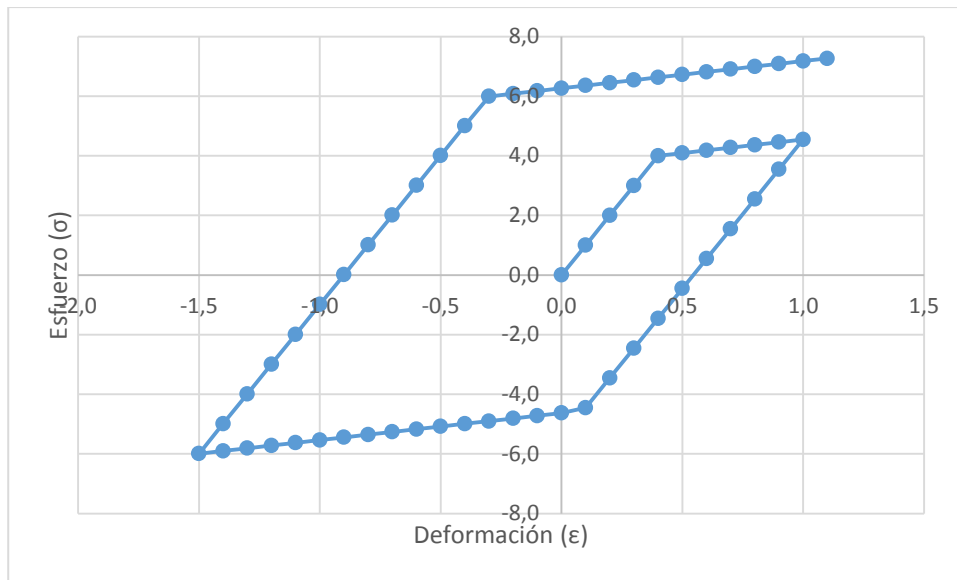


Gráfico 2.- Modelo de plasticidad con endurecimiento isotrópico sometido a varios procesos de carga y descarga.

Una vez sobrepasado el estado de esfuerzo cero, empieza otro ciclo de carga pero en dirección contraria, en otras palabras, si se estaba dando tracción al elemento, ahora se estará comprimiendo. Posteriormente se repite el proceso de forma cíclica.

Datos del gráfico 3			
σ_y	E	H	K
4	10	1	0

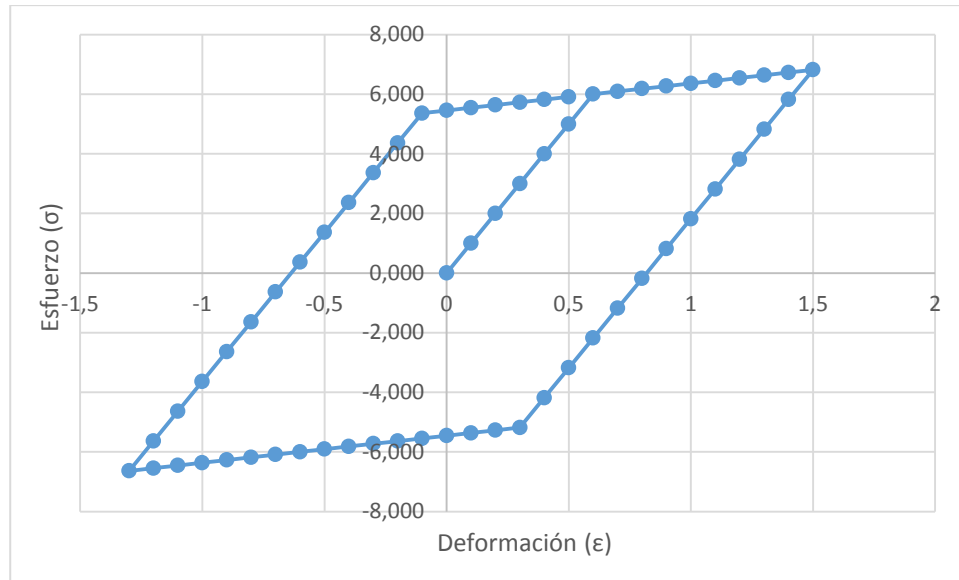


Gráfico 3.- Modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático sometido a varios procesos de carga
descarga

En el gráfico 3 se puede observar el efecto Bauschinger. Debido a que el coeficiente K tiene un valor de 0, el material no sufre endurecimiento, por lo tanto, la superficie de fluencia permanece del mismo tamaño. Al realizar el primer proceso de carga, aparentemente al sobrepasar el límite elástico inicial, el material empieza a endurecerse, sin embargo, se puede observar que tras 2 procesos de carga-descarga adicionales al material se le impone tener una misma deformación que en el primer proceso de carga, y es evidente que el esfuerzo es el mismo; esto da a entender que la superficie no crece (como en el modelo de plasticidad con endurecimiento isotrópico), la superficie únicamente se desplaza.

Datos del gráfico 4 y 5			
σ_y	E	H	K
6	10	1	1

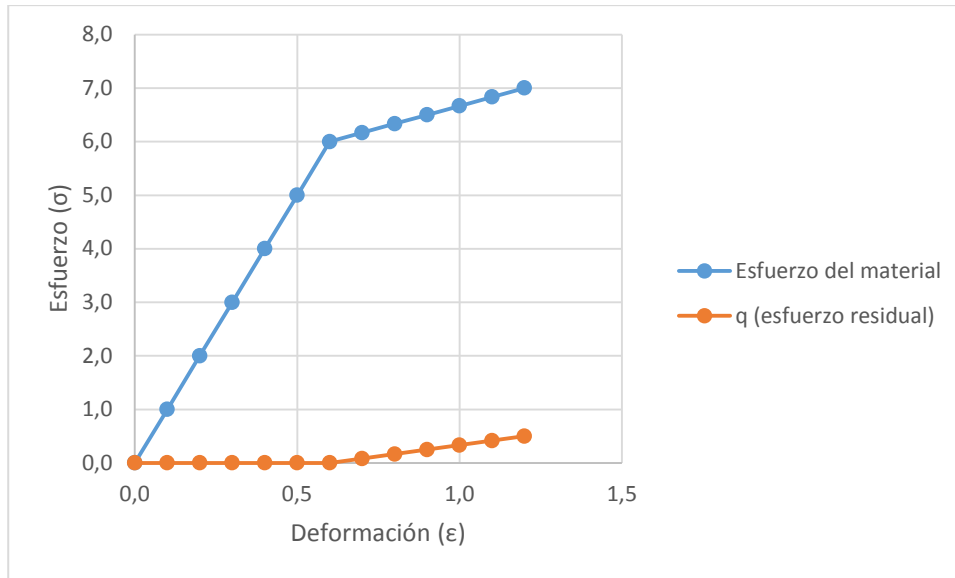


Gráfico 4.-Crecimiento del esfuerzo residual de un modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico (uni-axial)

En el gráfico 4 se observa el crecimiento del esfuerzo residual, lo cual también se entiende como el desplazamiento del centro de la superficie de fluencia. Al inicio del proceso de carga el material se encuentra sin ninguna deformación o esfuerzo inicial, y se le impone incrementos en la deformación de 0.1. Es evidente que en el rango elástico el esfuerzo residual es 0, pero una vez superado el límite de fluencia inicial (σ_y), el valor de q empieza a incrementarse en el mismo sentido que el esfuerzo al que está sometido el material.

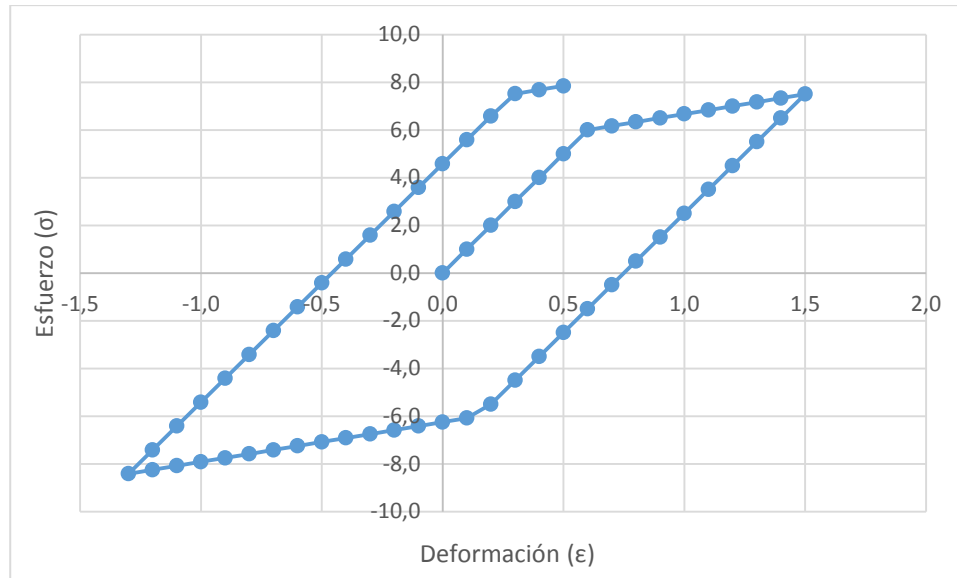


Gráfico 5.- Modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico sometido a varios procesos de carga y descarga

En el gráfico 5 se observa un material virgen sometido a varios procesos de carga y descarga. A dicho material se imponen incrementos de la deformación de 0.1. Se puede observar que al inicio del proceso de carga el material tiene un comportamiento elástico, una vez que el material llega al límite elástico (σ_y) este empieza a endurecerse y la superficie de fluencia se desplaza en la dirección del esfuerzo (σ). Una vez finalizado el proceso de carga se empieza a descargar, y la curva que se observa tiene la misma pendiente que en el proceso de carga, es decir, el material tiene un proceso de descarga elástica. Cuando el material se descarga completamente ($\sigma = 0.0$) empieza un nuevo proceso de carga en dirección contraria, en este caso se puede observar que el material no llega al mismo esfuerzo máximo alcanzado en el proceso de carga anterior con un comportamiento elástico, lo que si sucedía en el modelo de plasticidad con endurecimiento isótropo, esto se debe al desplazamiento de la superficie de fluencia. Posteriormente se observa varios procesos más de carga y descarga.



Algoritmo 2.- Visco-plasticidad; con endurecimiento cinemático e isotrópico

En los modelos de visco-plasticidad la velocidad de carga tiene un papel determinante, ya que la resistencia del material depende en gran medida de este parámetro.

NOTA: Para todos los casos el coeficiente de viscosidad es igual a 1.

Datos del gráfico 6			
σ_y	E	H	K
4	10	0	2
Tiempo de relajación (r)			0.8333

Tabla de de datos para un modelo de plasticidad						
$\Delta\epsilon$	σ (inf)	α (inf)	$\Delta\epsilon$ (plástico)	ϵ (elástico)	ϵ (plástico)	ϵ (total)
	0	0	0	0	0	0
0.1	1	0	0	0.1	0	0.1
0.1	2	0	0	0.2	0	0.2
0.1	3	0	0	0.3	0	0.3
0.1	4	0	0	0.4	0	0.4
0.1	4.1667	0.0833	0.0833	0.4167	0.0833	0.5

Tabla de esfuerzos del material dependientes del tiempo							
Δt	$\Delta t/r$	σ	α	$\Delta\epsilon$ (plástico)	ϵ (elástico)	ϵ (plástico)	t
		5	0	0	0.5	0	0
0.25	0.3	4.8077	0.0192	0.0192	0.4808	0.0192	0.25
0.5	0.6	4.5673	0.0433	0.0433	0.4567	0.0433	0.75
1	1.2	4.3488	0.0651	0.0651	0.4349	0.0651	1.75
2	2.4	4.2202	0.0780	0.0780	0.4220	0.0780	3.75
10	12	4.1708	0.0829	0.0829	0.4171	0.0829	13.75

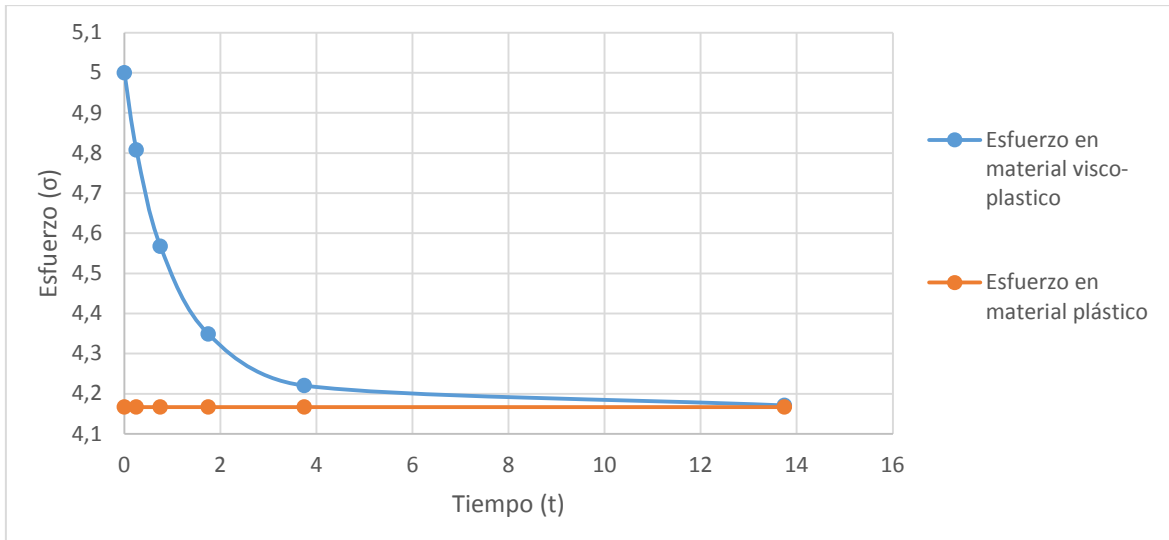


Gráfico 6.- Variación del esfuerzo en modelo de visco-plasticidad con respecto al tiempo

En el gráfico 6 se puede observar como el esfuerzo en el material va disminuyendo a la par con el paso del tiempo. En el instante del tiempo 0, el material resiste un esfuerzo similar a un modelo elástico, el cual va disminuyendo, acercándose cada vez más al esfuerzo de un modelo de plasticidad.

Datos del gráfico 7 y 8			
σ_y	E	H	K
4	10	0	1

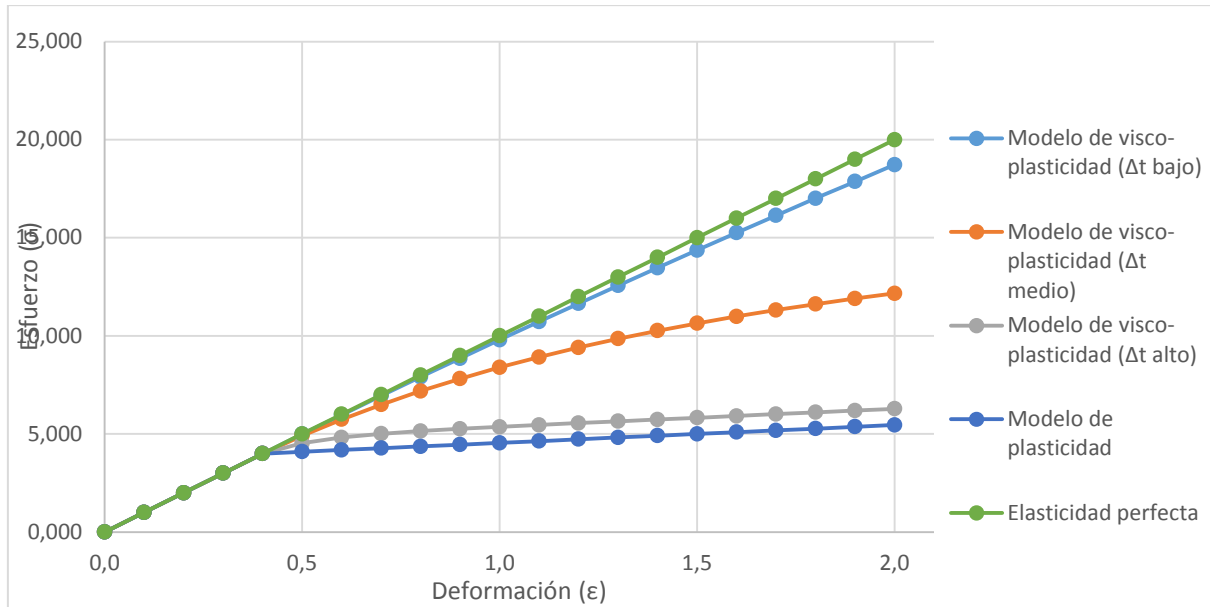


Gráfico 7.- Modelo de visco-plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico con diferentes velocidades de carga

En el gráfico 7 se puede observar el modelo de visco-plasticidad con diferentes velocidades de carga. En un inicio, el material tiene un comportamiento elástico hasta llegar al límite de fluencia inicial (σ_y), una vez cruzado el límite empieza a ver variación en los esfuerzos que soporta el material dependiendo de la velocidad de carga. Como referencia tomamos en consideración un modelo perfectamente elástico y un modelo de plasticidad, si al modelo de visco-plasticidad le damos una velocidad de carga muy rápida (Δt bajo) la curva se aproxima a la del modelo elástico, por otro lado, si le damos una velocidad de carga muy baja (Δt alto) la curva se acerca al modelo de plasticidad, pero si le damos una velocidad de carga media (Δt medio) la curva se ubica entre el modelo elástico y el modelo de plasticidad.

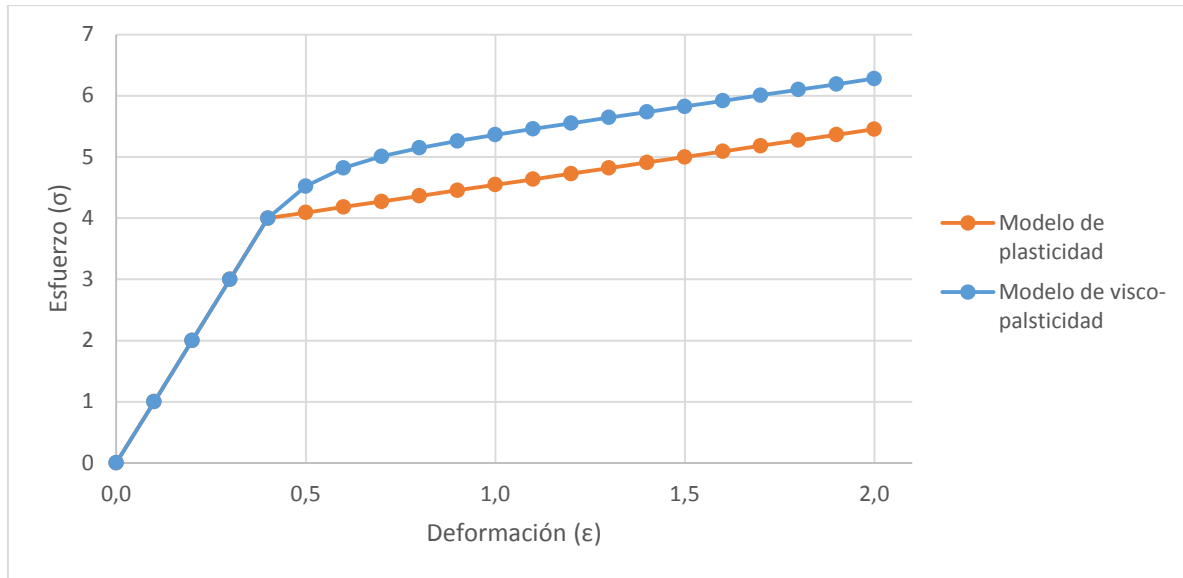


Gráfico 8.- Comparación entre modelo de plasticidad y modelo de visco-plasticidad

En el gráfico 8 se muestra la diferencia entre el modelo de plasticidad y el de visco plasticidad. En ambos casos los datos del material son los mismos; en el caso del modelo de visco-plasticidad se la da una velocidad de carga de 0.1, una vez sobrepasado el límite elástico inicial (σ_y), el modelo de visco-plasticidad empieza a mostrar esfuerzos superiores al modelo de visco-plasticidad, finalmente llega un punto en el que la diferencia de esfuerzos entre el modelo de plasticidad y visco-plasticidad se vuelve constante.

Datos del gráfico 9			
σ_y	E	H	K
4	10	1	1

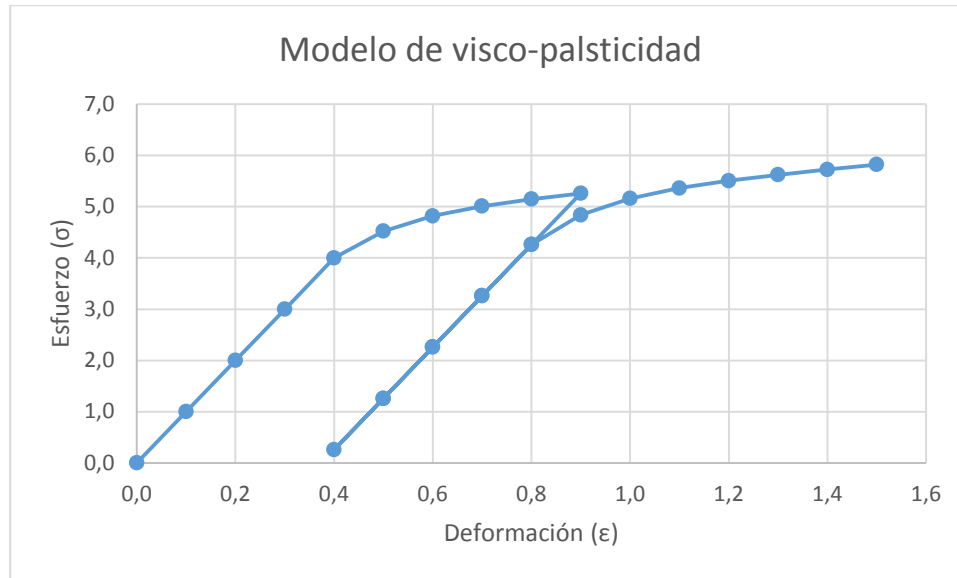


Gráfico 9.- Modelo de visco-plasticidad sometido a varios procesos de carga-descarga

En el gráfico 9 se observa el modelo de visco-plasticidad al cual se le ha impuesto dos procesos de carga-descarga con una velocidad de carga de 0.1. Tras el primer proceso de carga el material ha sufrido deformación plástica, al descargar la curva tiene la misma pendiente que el proceso elástico inicial, por lo que es un proceso de descarga elástica. En el segundo proceso de carga, el rango elástico no llega hasta el esfuerzo que obtuvo el material en el proceso de carga anterior, sino que el esfuerzo es menor, esto se debe a que un porcentaje del esfuerzo estaba siendo resistido por la viscosidad del material.

Algoritmo 3.- Plasticidad y daño asociados

Daño elástico es cuando el material sufre degradación de su rigidez pero no existe la presencia de deformaciones plásticas.

Datos del gráfico 10			
σ_y	E	H	K
4	10	0	1

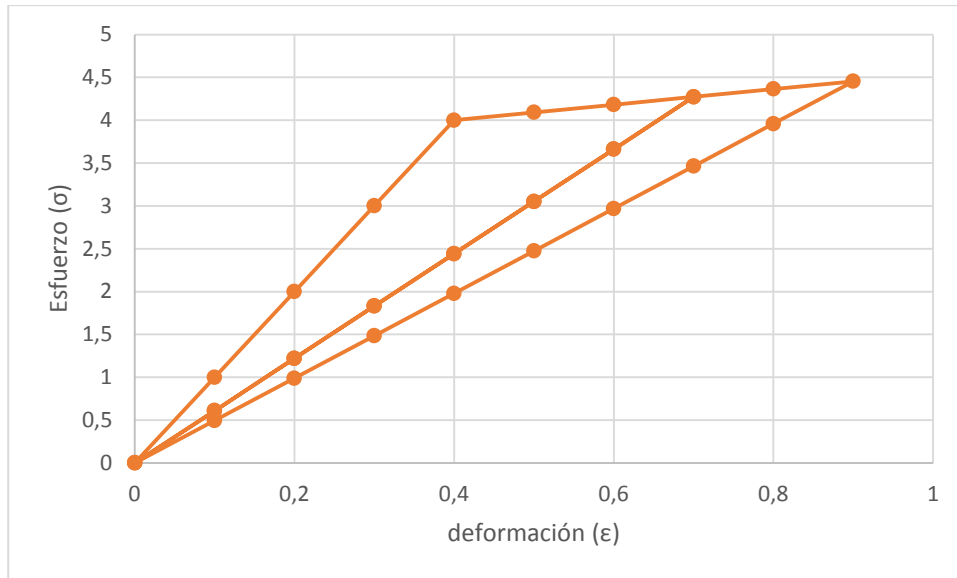


Gráfico 10.- Modelo de plasticidad con daño elástico

En el gráfico 10 se puede observar un modelo de plasticidad con endurecimiento isotrópico y daño elástico, en este caso el material no presenta deformaciones permanentes. Cuando el material ha sobrepasado el límite elástico inicial, el material empieza a endurecerse, y al mismo tiempo se genera degradación en el módulo elástico. En el proceso de descarga posterior al endurecimiento del material se puede observar claramente que la pendiente del rango elástico ha cambiado, y que cuando la deformación regresa a ser nula los esfuerzos desaparecen. Lo mismo ocurre para el modelo de visco-plasticidad con daño elástico.

Datos del gráfico 11			
σ_y	E	H	K
4	10	0	1

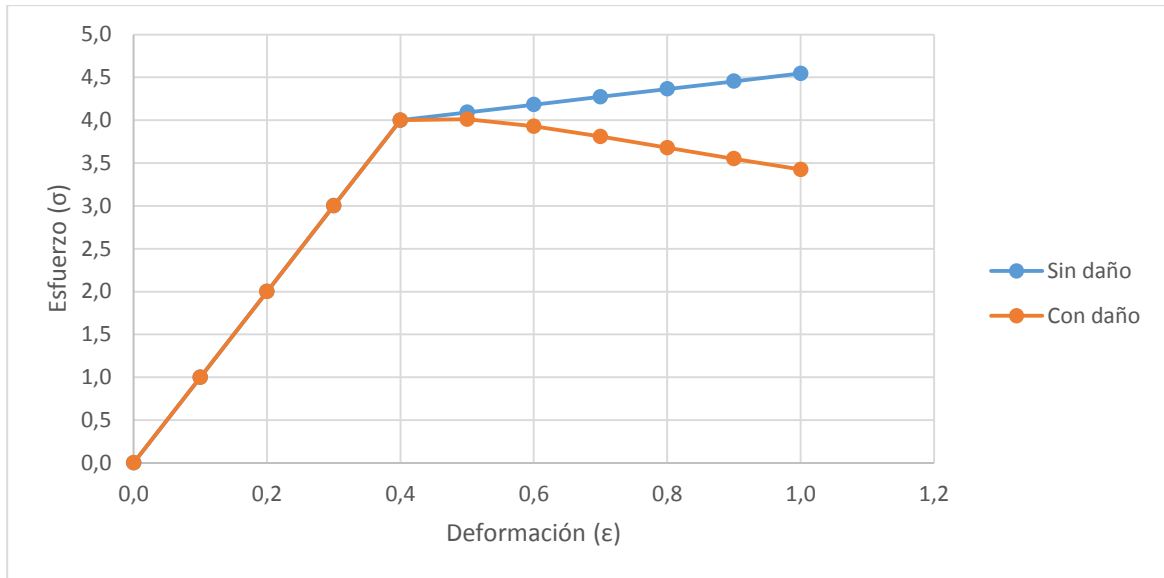


Gráfico 11.- Comparación entre modelo de plasticidad con endurecimiento isotrópico con daño y sin daño

Datos del gráfico 12			
σ_y	E	H	K
6	-10	1	1

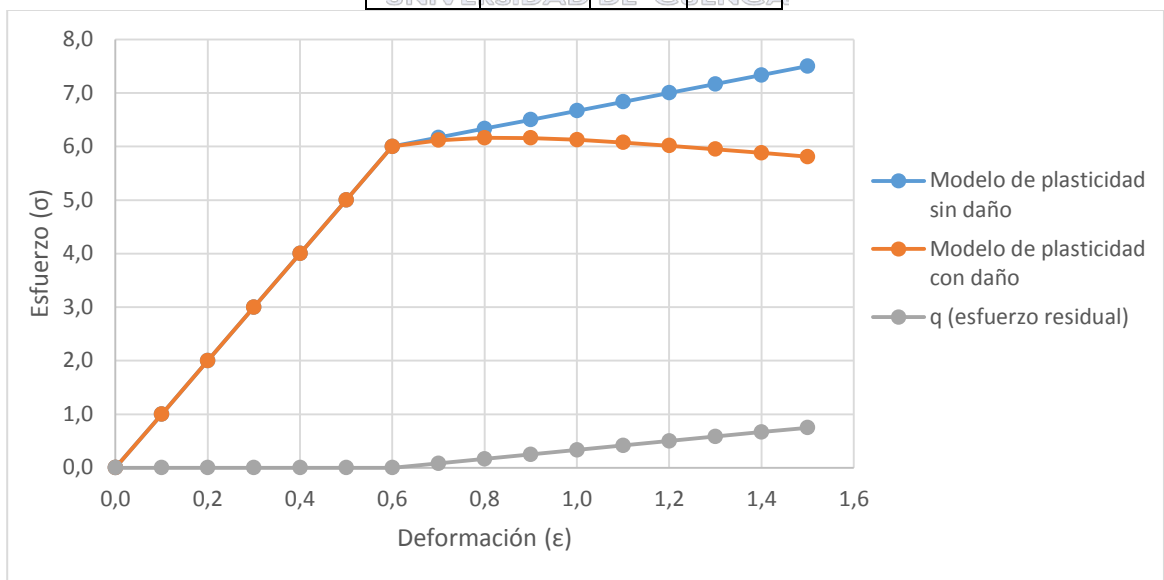


Gráfico 12.- Comparación entre modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico con daño y sin daño

En los gráficos 11 y 12 se puede observar la diferencia entre modelos de plasticidad con y sin daño, el primero se trata del modelos de plasticidad con



endurecimiento isotrópico y el segundo es el modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico. Es evidente que el material tiene un rango inicial elástico, el cual es similar para los modelos con daño y sin daño, esta igualdad se pierde al llegar al límite elástico (σ_y), ya que al pasar este punto los modelos sin daño se empiezan a endurecer, mientras que los modelos de daño además de empezarse a endurecer se empiezan a degradar, perdiendo resistencia. De esta manera el material irá perdiendo rigidez hasta llegar al punto de falla, es decir, hasta que el material ya no pueda resistir carga.

Datos del gráfico 13			
σ_y	E	H	K
4	10	1	1

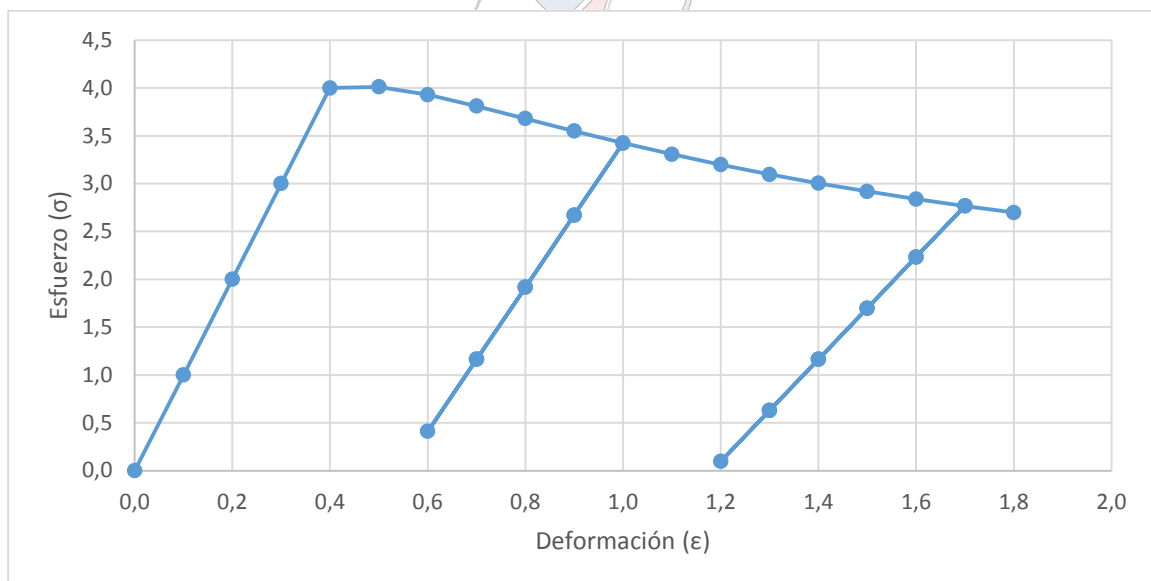


Gráfico 13.- Degradación de la rigidez en un modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático, isotrópico y daño

En el gráfico 13 se observa el modelo de plasticidad con endurecimiento cinemático, isotrópico y daño, sometido a varios procesos de carga-descarga. Se puede notar que en el primer proceso de carga se dan deformaciones plásticas, lo que genera degradación en el material, en el proceso de descarga siguiente es



evidente que la pendiente disminuye, es decir, la rigidez (módulo elástico) se ha degradado, lo mismo sucede en los subsecuentes procesos de carga-descarga.



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



Algoritmo 4.- Visco-plasticidad y daño asociados

En los materiales friccionantes, una característica importante es la existencia de diferente resistencia a compresión y a tracción. En todos los modelos presentados se ha utilizado el criterio de von Mises para representar la superficie de fluencia, sin embargo, éste considera igual resistencia a compresión y a tracción. El criterio de Drucker Praga se puede considerar una variación del criterio de von Mises, y es fácil de implementar a los algoritmos presentados, ya que únicamente añade un desplazamiento de la superficie de fluencia hacia la resistencia a compresión, lo que resulta en que el material tenga mayor resistencia a compresión que a tracción.

Datos del gráfico 14			
σ_y	E	H	K
4	20	0	-1

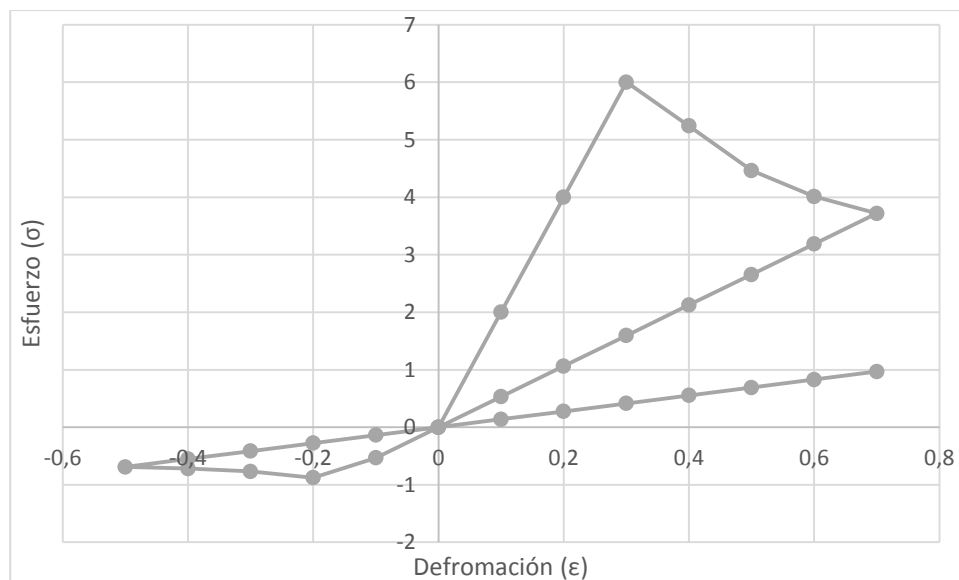


Gráfico 14.- Modelo de visco-plasticidad con daño en material con distinta resistencia a compresión y a tracción

En el gráfico 14 se puede observar la incorporación del criterio de Drucker-Praga al criterio de daño, de esta manera se puede apreciar la diferencia entre el límite elástico a compresión y a tracción (ver Fig. 26; pag. 58), de la misma forma



se observa la degradación de la rigidez y que al retirar la carga, el esfuerzo regresa a ser nulo

Datos del gráfico 15			
σ_y	E	H	K
4	10	1	1

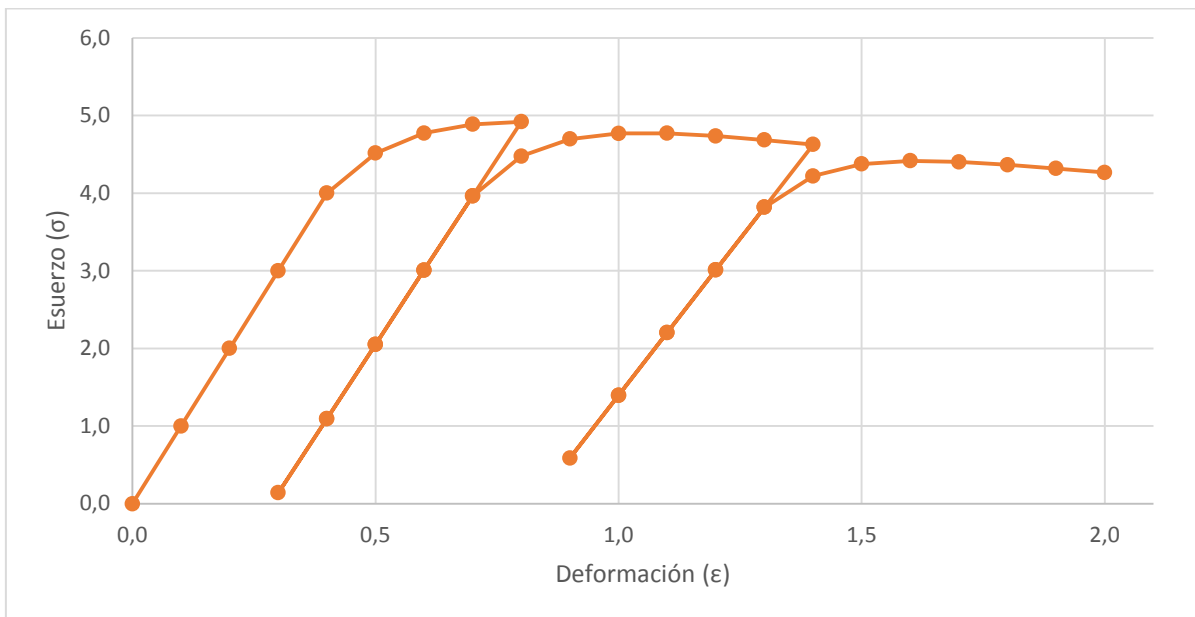


Gráfico 15.- Modelo de visco-plasticidad sometido a varios procesos de carga-descarga

En el gráfico 15 se puede observar el modelo de visco-plasticidad con daño. Es notable la degradación de la rigidez o cambio de pendiente del rango elástico después de que el material ha sufrido deformaciones plásticas, y con esto degradación.



5.2 Modelos en estado tri-axial

Algoritmo 5.- Plasticidad en estado tri-axial

Para los metales, el valor usual del coeficiente de Poisson es de 0.3, pero cuando el material entra en proceso de plasticidad, el valor cambia a 0.5. Esto es, porque se considera que en estado plástico el material se deforma conservando el volumen.

Poder mostrar gráficamente los resultados de la implementación de los algoritmos para estado tri-axial, primero se considera un material al cual se le impone deformaciones en una dirección y no se le impone restricciones en la otra dirección.

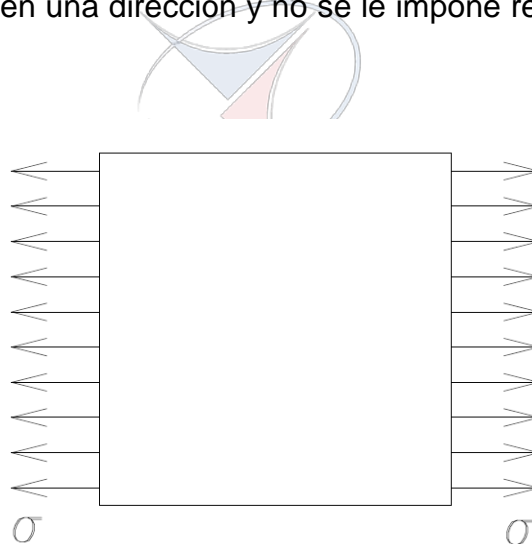


Fig. 24.- Elemento sometido a esfuerzo en una dirección y libre en las otras dos direcciones

Datos del gráfico 16 y 17				
σ_y	E	ν	K	H
6	15	0.3	1	1

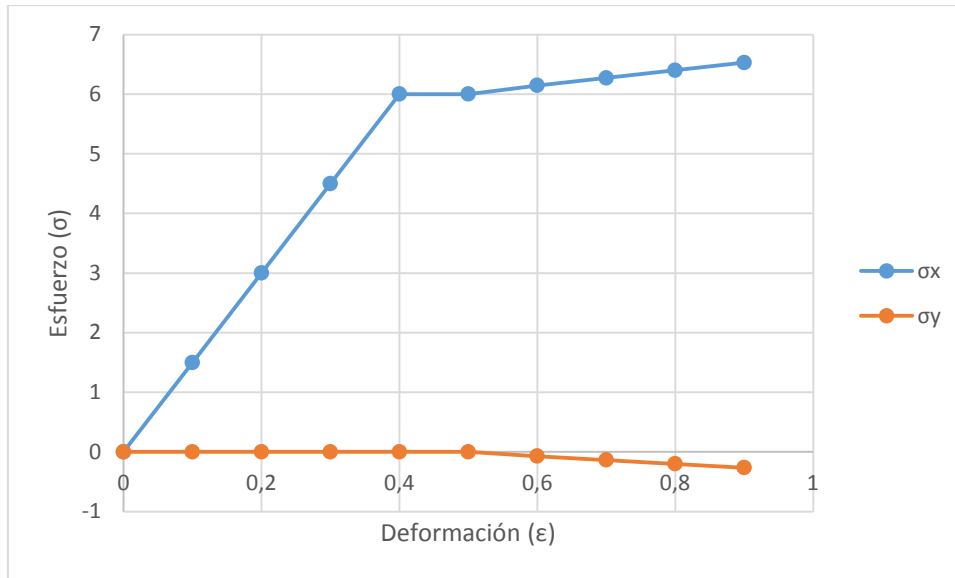


Gráfico 16.- Modelo de plasticidad tri-axial sin restricciones laterales

En el gráfico 16 se observa el resultado de un material al cual se le ha impuesto incrementos de deformación de 0.1 en el eje x, mientras que en los ejes y y z no existen restricciones. Los esfuerzos en el eje x van aumentando de manera similar al modelo uni-axial, es decir, al inicio existe un rango elástico, hasta llegar a la superficie de fluencia, una vez sobrepasado este límite el material empieza a sufrir deformaciones plásticas y a endurecerse. Por otro lado, en los ejes y y z a pesar de que existen deformaciones, no existen esfuerzos (en el gráfico se ven esfuerzos en los ejes y y z debido a errores numéricos en el algoritmo).

Posteriormente, al material se le da incrementos en la deformación en un eje, mientras que en los otros dos ejes se le restringe el movimiento.

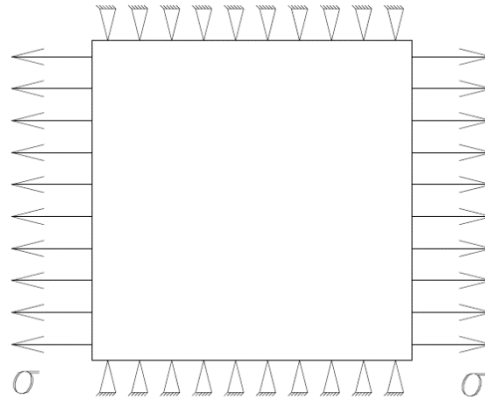


Fig. 25.- Elemento sometido a esfuerzo en una dirección con deformaciones restringidas en los otros dos ejes

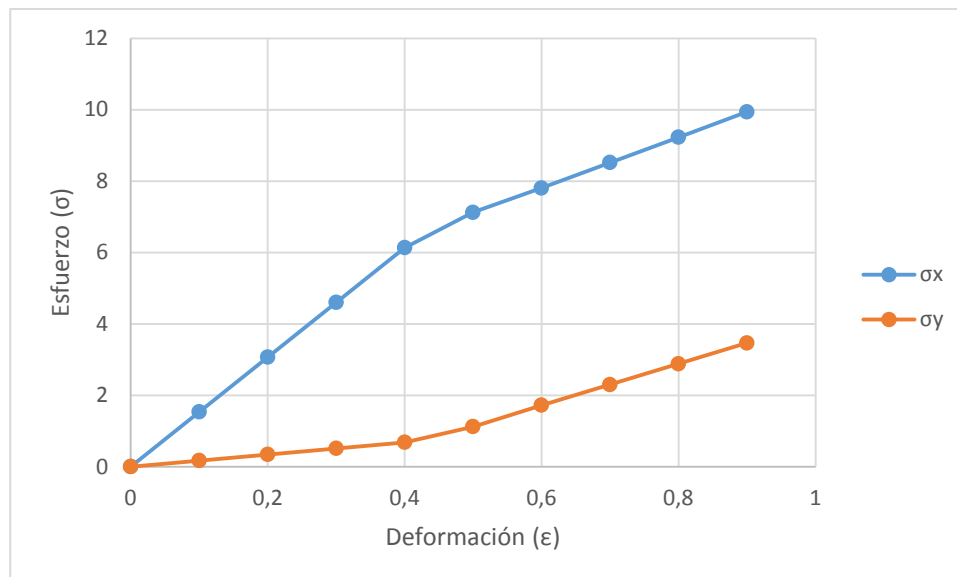


Gráfico 17.- Modelo de plasticidad tri-axial sin deformaciones transversales

En la figura 17, al material se le ha impuesto incrementos en la deformación de 0.1 en el eje x , mientras que se ha restringido las deformaciones en los otros dos ejes. Se puede observar que en el eje donde se le ha impuesto incrementos los esfuerzos varían de igual forma que en el caso anterior, sin embargo, en los otros dos ejes los esfuerzos ya no son 0, sino que aumentan linealmente hasta llegar al límite de fluencia, pasado este punto, el material se empieza a deformar plásticamente en todos los ejes.



Algoritmo 6.- Plasticidad y daño asociado

Datos del gráfico 18				
σ_y	E	ν	K	H
6	15	0.1	1	1

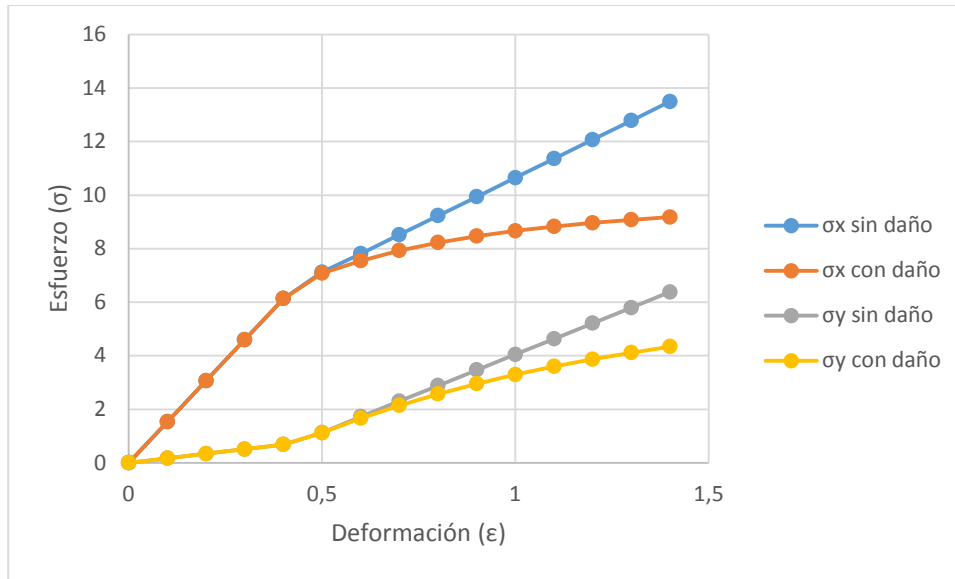


Gráfico 18.- Comparación entre el modelo de plasticidad sin daño y con daño.

En el gráfico 18 se observa la diferencia entre el modelo de plasticidad sin daño y con daño al someter al material a incrementos de deformación de 0.1 en un eje y restringir las deformaciones en los otros ejes. El material se comporta de la misma manera hasta llegar a la superficie de fluencia (rango elástico) pero una vez que se pasa este límite el material empieza a sufrir degradación y los esfuerzos empiezan a ser menores que en el modelo de plasticidad.

Datos del gráfico 19				
σ_y	E	ν	K	H
6	20	0.3	1	1

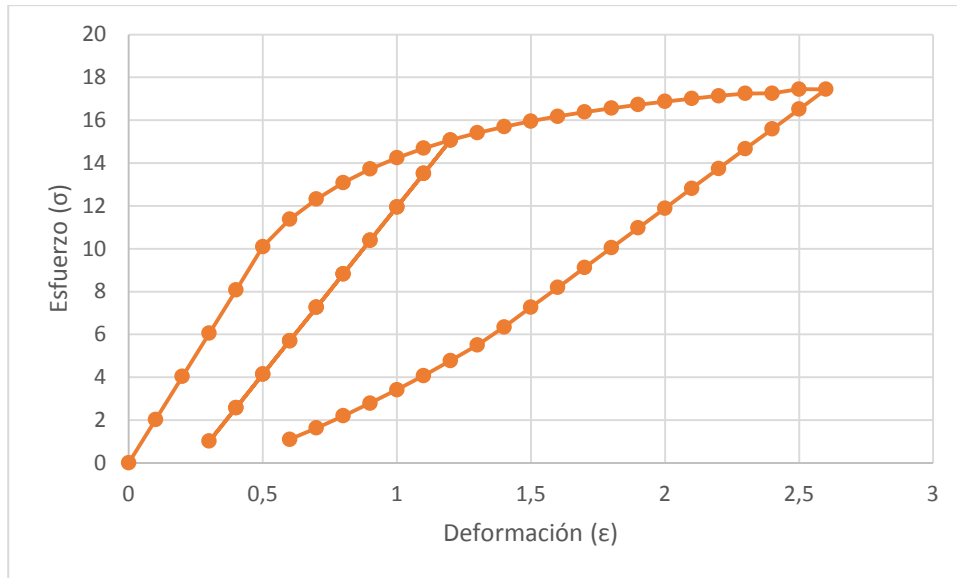


Gráfico 19.- Modelo de plasticidad con daño.

En el gráfico 19 se observa el modelo de plasticidad tri-axial sometido a varios ciclos de carga-descarga. Se puede observar que con el avance de la deformación plástica y con esta de la degradación del material en los ciclos de carga 2 y 3 la pendiente del rango elástico disminuye debido al daño del material.



Algoritmo 7.- Visco-plasticidad en estado tri-axial

Para poder entender mejor el comportamiento tri-axial del modelo de visco-plasticidad, se realiza las mismas consideraciones que para el modelo de plasticidad.

Datos del gráfico 20 y 21				
σ_y	E	ν	K	H
6	15	0.1	1	1
Coef. De viscosidad				1

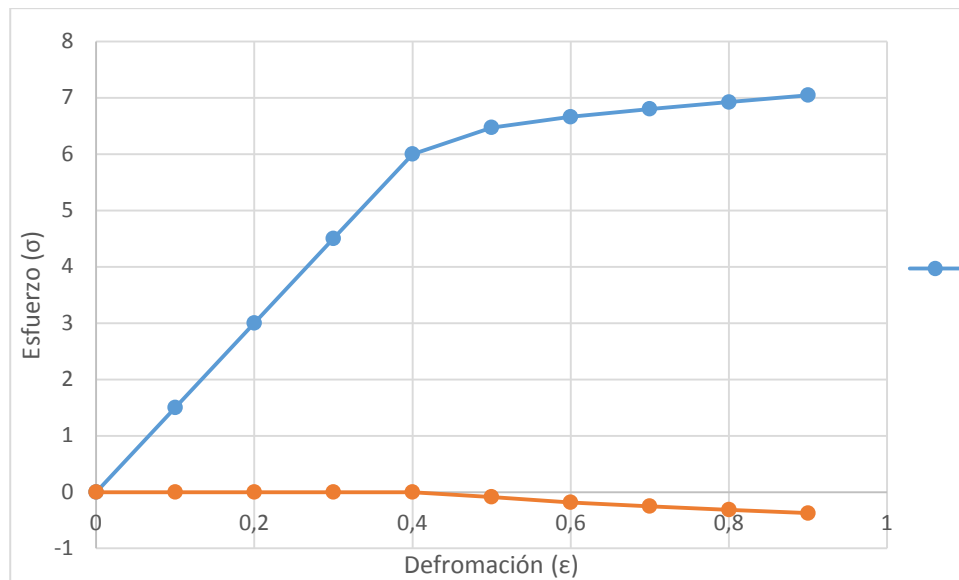


Gráfico 20.- Modelo de visco-plasticidad tri-axial sin restricciones laterales

El gráfico 20 muestra las relaciones de esfuerzo-deformación de un material sometido a incrementos de deformación de 0.1 en la dirección del eje x sin que haya ninguna restricción en las deformaciones de los otros ejes. Se puede apreciar que en el eje x el comportamiento del material es similar al modelo uni-axial, tiene un rango elástico hasta llegar a la superficie de fluencia, una vez que se sobrepasa este límite aparecen deformaciones plásticas. En los ejes y y z no se producen esfuerzos debido a que el material no tiene restricciones en estas direcciones.

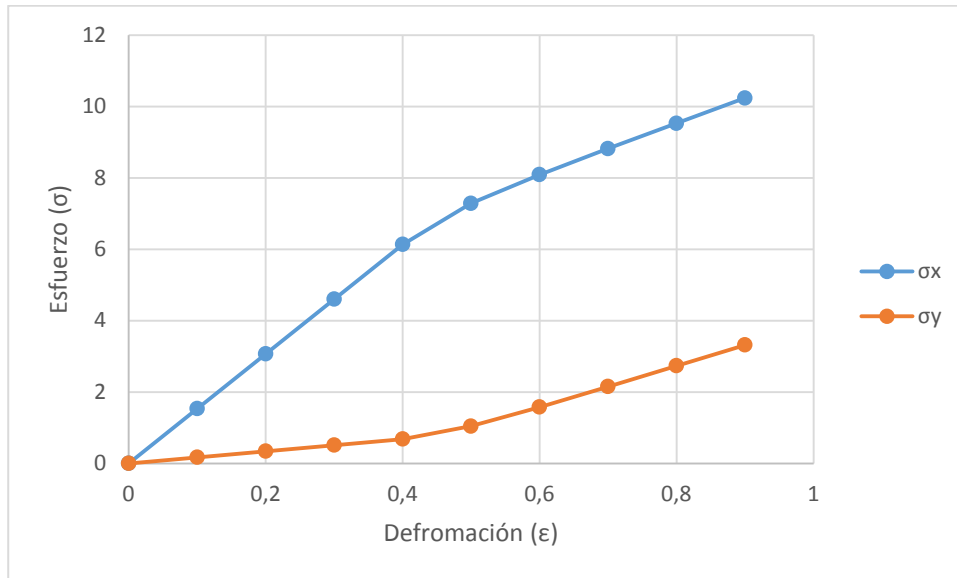


Gráfico 21.- Modelo de visco-plasticidad tri-axial sin deformaciones transversales

El gráfico 21 muestra un material sometido a incrementos de deformación de 0.1 en la dirección del eje x , y en las direcciones de los ejes y y z no se admiten deformaciones. En la dirección del eje x el material tiene un rango elástico hasta llegar al límite de fluencia, posteriormente el material empieza a presentar deformaciones plásticas, por otro lado, en los ejes y y z existe un pequeño esfuerzo elástico inicial, producido por la restricción de deformación, una vez que el material sobrepasa la superficie de fluencia también en estas dirección empieza a aparecer deformaciones plásticas.



Algoritmo 8.- Visco-plasticidad y daño en estado tri-axial

Datos del gráfico 22 y 23				
σ_y	E	ν	K	H
6	15	0.1	1	1
Coef. De viscosidad				1

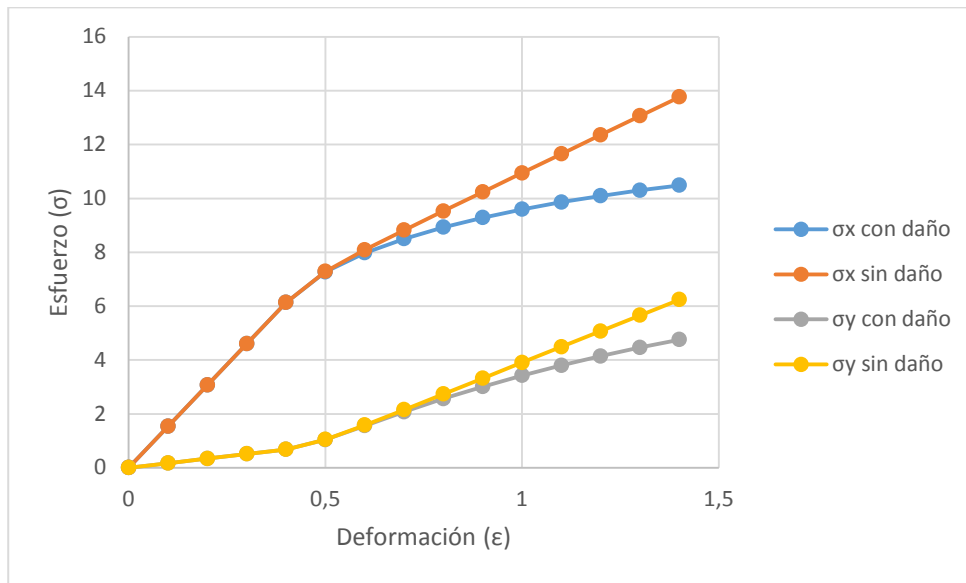


Gráfico 22.- Comparación entre el modelo de visco-plasticidad sin daño y con daño.

En el gráfico 22 se puede observar una comparación entre el modelo de visco-plasticidad con daño y visco-plasticidad sin daño. Se observa que en el rango elástico el comportamiento es el mismo, pero una vez que el material llega a la superficie de fluencia las curvas empiezan a diferenciarse. Para el caso del modelo con daño, en todas las direcciones se observa un esfuerzo menor al esfuerzo del modelo sin daño, debido a la degradación progresiva del material, la cual va acompañada de deformaciones plásticas.

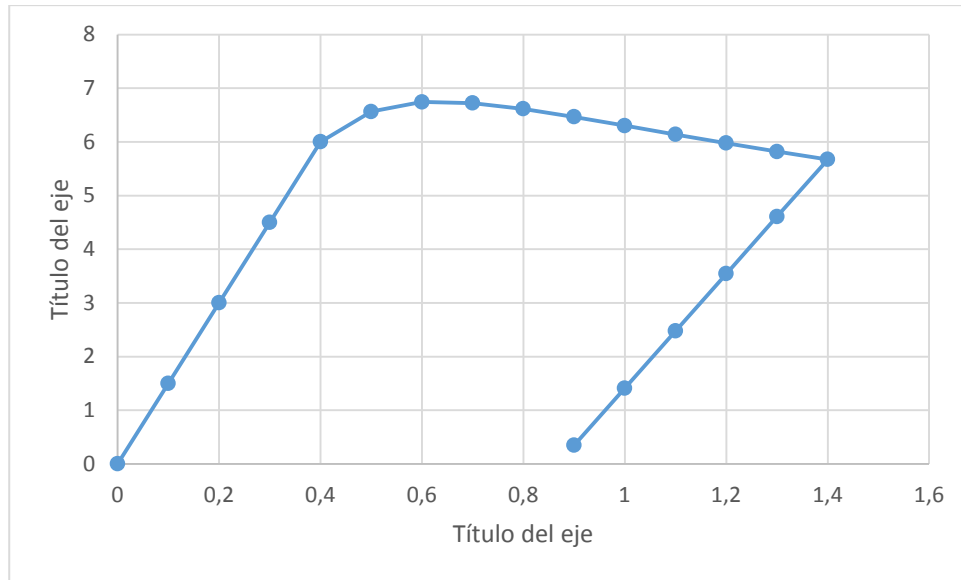


Gráfico 23.- Modelo de Visco-plasticidad con daño.

Mientras el modelo va evolucionando, también lo hace la degradación, en el gráfico 23 se observa un ciclo de carga-descarga del modelo visco-plástico con daño, se puede observar la curva la parte elástica inicia, y posteriormente la parte plástica. Se observa que la descarga es lineal, pero con una pendiente diferente a la de la carga inicial, esto se debe a la pérdida de rigidez que acompaña al aumento de la degradación del material.



Conclusiones



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

El objetivo general de este trabajo es recopilar información acerca de los modelos numéricos de caracterización de materiales a fin de representar el comportamiento de materiales dúctiles como los metales y materiales friccionantes como el hormigón.

Se encuentra que este tema de la caracterización de materiales por su complejidad ha sido estudiado por más de 200 años, en la que se ha ido mejorando cada vez más su conceptualización y formulación.

Este tema se recoge en el ámbito de la mecánica de medios continuos, que da un tratamiento matemático riguroso a las leyes físicas involucradas en el tema, como lo son: la conservación de la energía, conservación de la masa, el momentum, las leyes de la termodinámica, etc.

Sin entrar en el alto nivel de complejidad del tema se ha extraído de libros y artículos la parte esencial para caracterizar el comportamiento fenomenológico



de materiales y se ha procedido a su implementación a través de algoritmos matemáticos y programación en ordenador. Verificándose a través de los resultados el correcto funcionamiento de los modelos implementados.

El comportamiento elástico queda definido en estado uni-axial por la ley de Hooke, y en estado tri-axial por la ley generalizada de Hooke, en donde únicamente se requieren 2 constantes elásticas: el módulo de rigidez longitudinal E y el coeficiente de Poisson ν .

El comportamiento de los materiales dúctiles, por ejemplo los materiales metálicos, se caracterizan por modelos de plasticidad o de plasticidad y daño asociados. El criterio de von Mises para la superficie de fluencia es adecuado para estos modelos, ya que considera una misma resistencia a tracción y a compresión del material. Además de las 2 constantes elásticas es necesario de ciertas constantes del material (propiedades del material), las cuales son: coeficiente de endurecimiento cinemático, coeficiente de endurecimiento isotrópico. Adicionalmente a estos parámetros es necesario establecer las reglas de evolución de las diferentes variables internas asociadas a las constantes del material; en el caso de los modelos de daño también hay que regular la regla de evolución de la variable de daño.

El comportamiento de los materiales friccionales, por ejemplo el hormigón, el cual generalmente se caracteriza con el modelo de daño elástico por su simplicidad, queda mejor definido por los modelos de visco-plasticidad, visco plasticidad y daño asociados, debido al importante papel que juega la velocidad de carga en la resistencia del material, esto se comprueba fenomenológicamente en pruebas en laboratorio sobre probetas de hormigón donde se puede observar que a una mayor velocidad de carga, el material presenta mayores resistencias. Una característica típica de los materiales friccionantes es la distinta resistencia a compresión y a tracción, por lo que no es posible utilizar el mismo criterio de superficie de fluencia que para materiales dúctiles, en este caso el criterio Drucker-Praga representa satisfactoriamente esta característica, siendo al mismo tiempo de fácil implementación.



Es preciso destacar que las teorías de plasticidad y daño asociados, y la de visco-plasticidad y daño asociados ya han sido tratadas por diferentes autores, sin embargo en el presente trabajo se ha introducido la teoría clásica de daño a las teorías de plasticidad y visco-plasticidad obteniendo resultados favorables, por lo que se ha realizado una contribución a las teorías ya existentes.

Finalmente, es preciso mencionar posibles ampliaciones del presente trabajo:

- Realizar la implementación computacional mediante el método de elementos finitos.
- Implementar efectos de fractura.
- Determinar datos de materiales reales, realizar simulaciones numéricas y comparar con resultados experimentales.



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867



Bibliografía



UNIVERSIDAD DE CUENCA
desde 1867

- [1] Olivella, X. O., & de Saracíbar Bosch, C. A. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Univ. Politèc. de Catalunya.
- [2] Machado, L. G., & Lagoudas, D. C. (2008). Thermomechanical constitutive modeling of SMAs. In *Shape Memory Alloys*. Springer US.
- [3] Luenberger, D. G. (1997). *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons.
- [4] Perzyna, P. (1962). *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials* (No. TR76). BROWN UNIV PROVIDENCE RI DIV OF APPLIED MATHEMATICS.
- [5] Perzyna, P. (1966). Fundamental Problems in Viscoplasticity. *Advances in applied mechanics*, Vol. 9.



- [6] Wang, W. M., Sluys, L. J., & De Borst, R. (1997). Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [7] Ottosen, N. S., & Ristinmaa, M. (2005). *The mechanics of constitutive modeling*. Elsevier.
- [8] Oller, S. (1988). *Un modelo de daño continuo para materiales friccionales*. Ph. D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
- [9] Simo, J. C., & Hughes, T. J. (1998). Computational Inelasticity, volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*.
- [10] Runesson, K., Steinmann, P., Ekh, M., & Menzel, A. (2006). Constitutive modeling of engineering materials—theory and computation. *Volume I General Concepts and Inelasticity*.
- [11] Lemaitre, J., & Chaboche, J. L. (1994). *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press.
- [12] Hosford, W. F. (2010). *Mechanical behavior of materials*. Cambridge University Press.
- [13] Hill, R. (1998). *The mathematical theory of plasticity* (Vol. 11). Oxford university press.
- [14] Green, A. E., & Zerna, W. (1992). *Theoretical elasticity*. Courier Corporation.
- [15] Moreau, J. J. (1999). *Numerical aspects of the sweeping process*. *Computer methods in applied mechanics and engineering*.
- [16] Duvaut, G. (1998). *Mécanique des milieux continus*. Dunod.



Anexos

A continuación se muestra las tablas de tres de los gráficos presentados en el capítulo de resultados. Debido al gran tamaño y cantidad de tablas no se presenta las tablas de todos los gráficos. En el disco adjunto se puede encontrar las tablas completas en los archivos de Excel con macros de donde se han obtenido los datos para todos los gráficos, también se puede comprobar las fórmulas utilizadas.

Tabla del gráfico 1						
		K=-1				
$\Delta\varepsilon$	ε (total)	$\Delta\varepsilon$ (plástico)	ε (elástico)	ε (plástico)	α	σ
	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.1	0.000	0.100	0.000	0.000	1.000
0.1	0.2	0.000	0.200	0.000	0.000	2.000
0.1	0.3	0.000	0.300	0.000	0.000	3.000
0.1	0.4	0.000	0.400	0.000	0.000	4.000
0.1	0.5	0.111	0.389	0.111	0.111	3.889
0.1	0.6	0.111	0.378	0.222	0.222	3.778
0.1	0.7	0.111	0.367	0.333	0.333	3.667
0.1	0.8	0.111	0.356	0.444	0.444	3.556
0.1	0.9	0.111	0.344	0.556	0.556	3.444
0.1	1	0.111	0.333	0.667	0.667	3.333

Continuación de Tabla del gráfico 1									
K=0					K=1				
$\Delta\varepsilon$ (plástico)	ε (elástico)	ε (plástico)	α	σ	$\Delta\varepsilon$ (plástico)	ε (elástico)	ε (plástico)	α	σ
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.100	0.000	0.000	1.000	0.000	0.100	0.000	0.000	1.000
0.000	0.200	0.000	0.000	2.000	0.000	0.200	0.000	0.000	2.000
0.000	0.300	0.000	0.000	3.000	0.000	0.300	0.000	0.000	3.000
0.000	0.400	0.000	0.000	4.000	0.000	0.400	0.000	0.000	4.000
0.100	0.400	0.100	0.100	4.000	0.091	0.409	0.091	0.091	4.091
0.100	0.400	0.200	0.200	4.000	0.091	0.418	0.182	0.182	4.182
0.100	0.400	0.300	0.300	4.000	0.091	0.427	0.273	0.273	4.273
0.100	0.400	0.400	0.400	4.000	0.091	0.436	0.364	0.364	4.364
0.100	0.400	0.500	0.500	4.000	0.091	0.445	0.455	0.455	4.455
0.100	0.400	0.600	0.600	4.000	0.091	0.455	0.545	0.545	4.545



Tabla del gráfico 2

$\Delta\varepsilon$	σ	α	$\Delta\varepsilon$ (plástico)	ε (elástico)	ε (plástico)	ε (total)
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0
0.1	1.000	0.000	0.000	0.100	0.000	0.1
0.1	2.000	0.000	0.000	0.200	0.000	0.2
0.1	3.000	0.000	0.000	0.300	0.000	0.3
0.1	4.000	0.000	0.000	0.400	0.000	0.4
0.1	4.091	0.091	0.091	0.409	0.091	0.5
0.1	4.182	0.182	0.091	0.418	0.182	0.6
0.1	4.273	0.273	0.091	0.427	0.273	0.7
0.1	4.364	0.364	0.091	0.436	0.364	0.8
0.1	4.455	0.455	0.091	0.445	0.455	0.9
0.1	4.545	0.545	0.091	0.455	0.545	1
-0.1	3.545	0.545	0.000	0.355	0.545	0.9
-0.1	2.545	0.545	0.000	0.255	0.545	0.8
-0.1	1.545	0.545	0.000	0.155	0.545	0.7
-0.1	0.545	0.545	0.000	0.055	0.545	0.6
-0.1	-0.455	0.545	0.000	-0.045	0.545	0.5
-0.1	-1.455	0.545	0.000	-0.145	0.545	0.4
-0.1	-2.455	0.545	0.000	-0.245	0.545	0.3
-0.1	-3.455	0.545	0.000	-0.345	0.545	0.2
-0.1	-4.455	0.545	0.000	-0.445	0.545	0.1
-0.1	-4.628	0.628	-0.083	-0.463	0.463	0
-0.1	-4.719	0.719	-0.091	-0.472	0.372	-0.1
-0.1	-4.810	0.810	-0.091	-0.481	0.281	-0.2
-0.1	-4.901	0.901	-0.091	-0.490	0.190	-0.3
-0.1	-4.992	0.992	-0.091	-0.499	0.099	-0.4
-0.1	-5.083	1.083	-0.091	-0.508	0.008	-0.5
-0.1	-5.174	1.174	-0.091	-0.517	-0.083	-0.6
-0.1	-5.264	1.264	-0.091	-0.526	-0.174	-0.7
-0.1	-5.355	1.355	-0.091	-0.536	-0.264	-0.8
-0.1	-5.446	1.446	-0.091	-0.545	-0.355	-0.9
-0.1	-5.537	1.537	-0.091	-0.554	-0.446	-1
-0.1	-5.628	1.628	-0.091	-0.563	-0.537	-1.1
-0.1	-5.719	1.719	-0.091	-0.572	-0.628	-1.2
-0.1	-5.810	1.810	-0.091	-0.581	-0.719	-1.3
-0.1	-5.901	1.901	-0.091	-0.590	-0.810	-1.4
-0.1	-5.992	1.992	-0.091	-0.599	-0.901	-1.5
0.1	-4.992	1.992	0.000	-0.499	-0.901	-1.4
0.1	-3.992	1.992	0.000	-0.399	-0.901	-1.3
0.1	-2.992	1.992	0.000	-0.299	-0.901	-1.2
0.1	-1.992	1.992	0.000	-0.199	-0.901	-1.1



0.1	-0.992	1.992	0.000	-0.099	-0.901	-1
0.1	0.008	1.992	0.000	0.001	-0.901	-0.9
0.1	1.008	1.992	0.000	0.101	-0.901	-0.8
0.1	2.008	1.992	0.000	0.201	-0.901	-0.7
0.1	3.008	1.992	0.000	0.301	-0.901	-0.6
0.1	4.008	1.992	0.000	0.401	-0.901	-0.5
0.1	5.008	1.992	0.000	0.501	-0.901	-0.4
0.1	5.993	1.993	0.002	0.599	-0.899	-0.3
0.1	6.084	2.084	0.091	0.608	-0.808	-0.2
0.1	6.175	2.175	0.091	0.618	-0.718	-0.1
0.1	6.266	2.266	0.091	0.627	-0.627	0
0.1	6.357	2.357	0.091	0.636	-0.536	0.1
0.1	6.448	2.448	0.091	0.645	-0.445	0.2
0.1	6.539	2.539	0.091	0.654	-0.354	0.3
0.1	6.630	2.630	0.091	0.663	-0.263	0.4
0.1	6.721	2.721	0.091	0.672	-0.172	0.5
0.1	6.811	2.811	0.091	0.681	-0.081	0.6
0.1	6.902	2.902	0.091	0.690	0.010	0.7
0.1	6.993	2.993	0.091	0.699	0.101	0.8
0.1	7.084	3.084	0.091	0.708	0.192	0.9
0.1	7.175	3.175	0.091	0.718	0.282	1
0.1	7.266	3.266	0.091	0.727	0.373	1.1

Tabla del gráfico 4

$\Delta\varepsilon$	ε (total)	$\Delta\varepsilon$ (plástico)	ε (elástico)	ε (plástico)	α	q	σ
	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.1	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	1.000
0.1	0.2	0.000	0.200	0.000	0.000	0.000	2.000
0.1	0.3	0.000	0.300	0.000	0.000	0.000	3.000
0.1	0.4	0.000	0.400	0.000	0.000	0.000	4.000
0.1	0.5	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000	5.000
0.1	0.6	0.000	0.600	0.000	0.000	0.000	6.000
0.1	0.7	0.083	0.617	0.083	0.083	0.083	6.167
0.1	0.8	0.083	0.633	0.167	0.167	0.167	6.333
0.1	0.9	0.083	0.650	0.250	0.250	0.250	6.500
0.1	1	0.083	0.667	0.333	0.333	0.333	6.667
0.1	1.1	0.083	0.683	0.417	0.417	0.417	6.833
0.1	1.2	0.083	0.700	0.500	0.500	0.500	7.000