

UNIVERSIDAD DE CUENCA



FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

“ENFOQUE ENERGÉTICO A LA MODELIZACIÓN DE FRACTURA NO LINEAL UNIDIMENSIONAL”

UNIVERSIDAD DE CUENCA  
desde 1867

Tesis previa a la obtención  
del título de Ingeniero Civil

Autor 1:  
Patricio Santiago Rodríguez Cedillo.

Autor 2:  
Jacinto Israel Ulloa Vanegas.

Director:  
Ing. Esteban Samaniego, PhD.

Cuenca - Ecuador  
2015

---

## Resumen

---

**Palabras clave:** modelización de materiales, materiales disipativos, plasticidad, daño, formulación clásica, formulación energética.

La presencia de altas sollicitaciones de esfuerzos y deformaciones en ingeniería ocasiona fenómenos disipativos en los materiales, por lo que es de gran interés estudiar su comportamiento a través de modelos computacionales. En este trabajo se propone la implementación de dos modelos numéricos unidimensionales para el análisis de materiales dúctiles con ablandamiento a través del método de elementos finitos. Se utilizan dos enfoques: clásico y energético. El primero se basa en la aplicación de un modelo local de plasticidad derivado de la teoría de materiales estándar acoplado a un modelo de daño no local. Debido a que el problema resultante carece de unicidad de solución, se emplea una regularización con viscoplasticidad. Por otra parte, la formulación energética utiliza herramientas variacionales para construir el modelo sobre tres bloques: condición de estabilidad, balance de energía y condición de irreversibilidad. Luego, se define la evolución del sistema a través de la minimización de un funcional de energía convexo con respecto a las variables de estado. Esto permite obtener la solución global de manera estable desde el punto de vista numérico, sin necesidad de emplear una regularización. El algoritmo clásico con viscoplasticidad es dependiente de la velocidad de carga, lo cual resulta en un comportamiento diferente al obtenido en la formulación energética; sin embargo, se demuestra numéricamente que conforme la velocidad de carga tiende a cero, los modelos se vuelven equivalentes. Como resultado final, se presenta la evolución de cada modelo y un análisis comparativo.

Patricio Rodríguez, Jacinto Ulloa

---

## Abstract

---

**Keywords:** material modeling, dissipative materials, plasticity, damage, classical approach, energetic approach.

As a result of highly demanding stresses and strains, dissipative phenomena are observed in engineering materials. Therefore, it is of great interest to study the evolution of these materials by means of computational models. In this thesis, the implementation of two finite element one-dimensional models is proposed for the analysis of ductile materials with softening behavior. Two formulations are explored: the classical approach and the energetic approach. The former is based on the application of a local plasticity model derived from the generalized standard materials theory, coupled to a non-local damage model. Because the resulting problem's solution lacks uniqueness, regularization through viscoplasticity is applied. On the other hand, the energetic approach uses variational tools to develop the model on three fundamental concepts: stability condition, energy balance and irreversibility condition. Then, the evolution of the system is obtained by the minimization of a convex energy functional with respect to the state variables. This allows for the global solution to be obtained with numerical stability, avoiding the need for regularization. The classical algorithm with viscoplasticity is a rate-dependent problem, resulting in a different evolution from the response obtained through the energetic approach. However, it is shown numerically that as the loading rate tends to zero, the models converge. As a final result, the material evolution generated with both models is presented, as well as a comparative analysis.

Patricio Rodríguez, Jacinto Ulloa

---

# Índice general

---

Resumen . . . . .	2
Abstract . . . . .	3
Índice general . . . . .	4
Índice de figuras. . . . .	6
Índice de tablas. . . . .	9
<b>1. Introducción</b>	<b>16</b>
1.1. Introducción . . . . .	16
1.2. Motivación . . . . .	16
1.3. Objetivos . . . . .	21
1.4. Metodología . . . . .	22
1.5. Resumen del contenido . . . . .	23
<b>2. Conceptos de Modelización de Materiales Disipati- vos</b>	<b>25</b>
2.1. Componentes básicos de la mecánica de medios con- tinuos . . . . .	25
2.1.1. Principios cinemáticos . . . . .	26
2.1.2. Ecuaciones de balance . . . . .	26
2.1.3. Conceptos termodinámicos . . . . .	28
2.2. Materiales estándar generalizados . . . . .	30
2.2.1. Potenciales termodinámicos . . . . .	30
2.3. Modelización clásica . . . . .	32
2.3.1. Ecuaciones constitutivas . . . . .	32
2.3.2. Leyes de evolución . . . . .	33
2.3.3. Modelización de plasticidad . . . . .	35
2.3.4. Modelización de daño . . . . .	35
2.4. Formulación energética . . . . .	37



2.4.1.	Condición de estabilidad . . . . .	38
2.4.2.	Balance de energía . . . . .	40
2.4.3.	Irreversibilidad . . . . .	40
<b>3.</b>	<b>Formulación Clásica</b>	<b>42</b>
3.1.	Modelización clásica de plasticidad . . . . .	42
3.1.1.	Modelización constitutiva de plasticidad . . . . .	43
3.1.2.	Modelización de viscoplasticidad . . . . .	56
3.2.	El problema de valores de contorno . . . . .	63
3.2.1.	Forma fuerte del problema de valores de con- torno . . . . .	63
3.2.2.	Forma débil del problema de valores de contorno	64
3.2.3.	Solución mediante elementos finitos unidimen- sionales . . . . .	65
3.3.	Acoplamiento de daño no local a plasticidad . . . . .	71
3.3.1.	Ecuaciones constitutivas . . . . .	71
3.3.2.	Criterio de daño no local . . . . .	72
3.3.3.	Solución mediante elementos finitos unidimen- sionales . . . . .	73
3.4.	Implementación computacional . . . . .	75
<b>4.</b>	<b>Formulación Energética</b>	<b>77</b>
4.1.	Modelo variacional de daño y plasticidad . . . . .	77
4.1.1.	Potenciales energéticos y funciones constitutivas	77
4.1.2.	Condición de estabilidad . . . . .	80
4.1.3.	Balance de energía . . . . .	85
4.2.	Funcional de energía y minimización . . . . .	87
4.3.	Implementación computacional . . . . .	90
<b>5.</b>	<b>Resultados y Análisis Comparativo</b>	<b>92</b>
5.1.	Modelo clásico . . . . .	92
5.2.	Modelo energético . . . . .	97
5.3.	Análisis comparativo . . . . .	102
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>110</b>
	<b>Bibliografía.</b>	<b>113</b>

---

## Índice de figuras.

---

1.1.	Ejemplos de fallas estructurales debidas a fractura . . .	17
1.2.	Curvas esfuerzo-deformación de carga y descarga re- sultado de la implementación de los modelos locales de [33] . . . . .	19
1.3.	Definición del problema unidimensional . . . . .	22
3.1.	Prototipo de plasticidad perfecta . . . . .	44
3.2.	Prototipo de plasticidad con endurecimiento isotrópico	49
3.3.	Descripción gráfica del <i>algoritmo de mapeo</i> . . . . .	58
3.4.	Modelo reológico de viscoplasticidad con endureci- miento isotrópico . . . . .	59
5.1.	Solución obtenida con el modelo de plasticidad per- fecta en el algoritmo de Newton Raphson . . . . .	93
5.2.	Gráfica esfuerzo-desplazamiento de las fases de plas- ticidad y plasticidad-daño en el modelo clásico . . . . .	94
5.3.	Evolución del perfil de deformaciones plásticas en el modelo clásico . . . . .	95
5.4.	Evolución del campo de desplazamientos en en el mo- delo clásico . . . . .	96
5.5.	Evolución del perfil de daño en el modelo clásico . . .	96
5.6.	Gráfica esfuerzo-desplazamiento con variación del núme- ro de elementos en el modelo clásico . . . . .	97
5.7.	Evolución del perfil de deformaciones plásticas con variación del número de elementos en el modelo clásico	98
5.8.	Evolución del campo de desplazamientos con varia- ción del número de elementos en el modelo clásico . .	98



5.9. Evolución del perfil de daño con variación del número de elementos en el modelo clásico . . . . .	99
5.10. Gráfica esfuerzo-desplazamiento de las fases de plasticidad y plasticidad-daño en el modelo energético . .	100
5.11. Evolución del perfil de deformaciones plásticas en el modelo energético . . . . .	100
5.12. Evolución del campo de desplazamientos en en el modelo energético . . . . .	101
5.13. Evolución del perfil de daño en el modelo energético .	101
5.14. Gráfica esfuerzo-desplazamiento con variación del número de elementos en el modelo energético . . . . .	102
5.15. Evolución del perfil de deformaciones plásticas con variación del número de elementos en el modelo energético . . . . .	103
5.16. Evolución del campo de desplazamientos con variación del número de elementos en el modelo energético	103
5.17. Evolución del perfil de daño con variación del número de elementos en el modelo energético . . . . .	104
5.18. Comparación entre las gráficas esfuerzo-desplazamiento del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético . . . . .	105
5.19. Comparación entre los perfiles de deformaciones plásticas del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético . . . . .	105
5.20. Comparación entre los perfiles de desplazamiento del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético . . . . .	106
5.21. Comparación entre los perfiles de daño del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético . . . . .	106
5.22. Gráfica esfuerzo-desplazamiento con perturbación en el elemento central . . . . .	107
5.23. Perfiles de deformaciones plásticas con perturbación en el elemento central . . . . .	107
5.24. Perfiles de desplazamientos con perturbación en el elemento central . . . . .	108



## 5.25. Perfil de daño con perturbación en el elemento central 108



UNIVERSIDAD DE CUENCA  
desde 1867

---

## Índice de tablas.

---

2.1. Variables de estado empleadas en el potencial de Helmholtz [18] . . . . .	32
5.1. Valores constitutivos del material y desplazamientos de plasticidad y daño . . . . .	92

Yo, *Patricio Santiago Rodríguez Cedillo*, autor de la tesis *Enfoque Energético a la Modelización de Fractura No Lineal Unidimensional*, certifico que todas las ideas, opiniones, y contenidos expuestos en la presente investigación, son de exclusiva responsabilidad de sus autores.

Cuenca, Junio 2015.



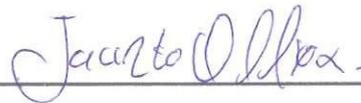
---

Patricio Santiago Rodríguez Cedillo

C.I. 0104893672

Yo, *Jacinto Israel Ulloa Vanegas*, autor de la tesis *Enfoque Energético a la Modelización de Fractura No Lineal Unidimensional*, certifico que todas las ideas, opiniones, y contenidos expuestos en la presente investigación, son de exclusiva responsabilidad de sus autores.

Cuenca, Junio 2014.



---

Jacinto Israel Ulloa Vanegas

C.I. 0103889705

Yo, *Patricio Santiago Rodríguez Cedillo*, autor de la tesis *Enfoque Energético a la Modelización de Fractura No Lineal Unidimensional*, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de *Ingeniero Civil*. El uso que la Universidad de Cuenca hiciera de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, Junio 2015.



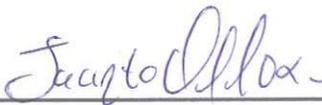
---

Patricio Santiago Rodríguez Cedillo

C.I. 0104893672

Yo, *Jacinto Israel Ulloa Vanegas*, autor de la tesis *Enfoque Energético a la Modelización de Fractura No Lineal Unidimensional*, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de *Ingeniero Civil*. El uso que la Universidad de Cuenca hiciera de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, Junio 2015.



---

Jacinto Israel Ulloa Vanegas

C.I. 0103889705

## CERTIFICO

Que el presente proyecto de tesis: Enfoque Energético a la Modelización de Fractura No Lineal Unidimensional fue dirigido por mi persona.



---

Ing. Esteban Samaniego, PhD.  
Director de Tesis

---

## Agradecimientos

---

A nuestras familias, que han sido los pilares fundamentales a lo largo de nuestra formación.

A nuestro director de tesis, Dr. Esteban Samaniego, por su brillante dirección y por ser una fuente interminable conocimientos y apoyo durante el desarrollo de este proyecto.

A los profesores de la facultad y todos nuestros compañeros y amigos que han sido parte de nuestro desarrollo académico.

UNIVERSIDAD DE CUENCA  
desde 1867

## Capítulo 1

---

# Introducción

---

### 1.1. Introducción

### 1.2. Motivación

Con frecuencia, tanto estructuras como mecanismos experimentan altas sollicitaciones de esfuerzos y deformaciones, generando en muchos casos fenómenos de plasticidad, daño y fractura en los materiales constituyentes. Con la evolución del conocimiento del comportamiento de los materiales y el avance en paralelo de la tecnología, se diseñan estructuras sujetas a esfuerzos cada vez más cercanos a su última resistencia. Estos casos se pueden evidenciar, entre otros ejemplos, en el comportamiento de estructuras sujetas a cargas sísmicas, donde se generan ciertos mecanismos de disipación de energía por medio de plasticidad y daño permanente. Es precisamente en estas condiciones de falla en las que dichos fenómenos se vuelven importantes y su análisis es crucial para la eficiencia y seguridad estructural [1]. La toma racional de decisiones en este tipo de situaciones exige un conocimiento profundo de los fenómenos observados y sus causas. Para esto, es necesario recurrir a teorías bien fundamentadas, sobre las cuales se puedan construir herramientas computacionales robustas y fiables. Especialmente relevante es la consideración de teorías de comportamiento de materiales con ablandamiento, lo cual permite describir los procesos de fallo más allá de los límites elásticos hasta el colapso final de la estructura.

La fractura es el final, o el principio del final de la vida útil de un componente estructural. En una investigación realizada por la *National Bureau of Standards* (la actual *National Institute for Science and Technology*) y el *Batelle Memorial Institute*, se ha estimado un costo total de 119 billones de dólares por año debido a fallas por fractura en los Estados Unidos en 1982 [32]. Además del costo, se

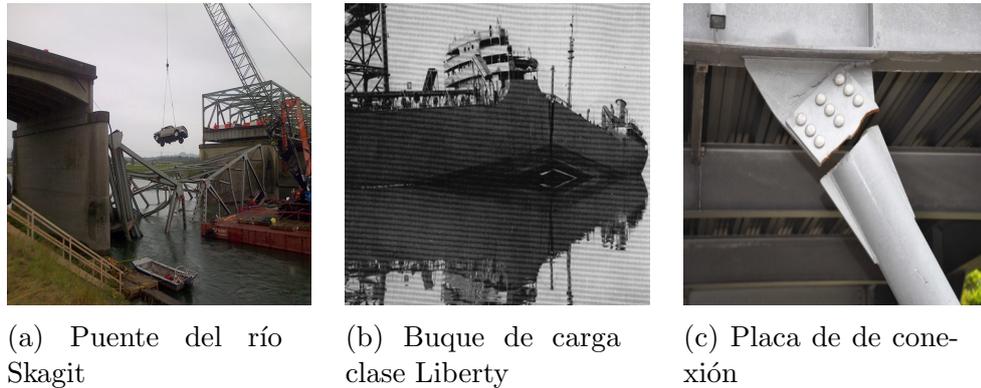


Figura 1.1: Ejemplos de fallas estructurales debidas a fractura

En la Figura 1.1a, se observa el colapso de un puente sobre el río Skagit en el estado de Washington (E.E.U.U.). Es uno de los puentes considerados como *fracture critical*; esto es, en riesgo de colapso por la fractura de un solo componente [21]. En la Figura 1.1b, se observa la fractura frágil de un buque de carga clase Liberty durante la segunda guerra mundial. Fue causada principalmente por el comportamiento frágil del material a una determinada temperatura [37]. En la Figura 1.1c se observa la fractura de una placa de conexión de una riostra luego del terremoto de 2011 de Tohoku en Japón [35].

debe tomar en cuenta el riesgo que esto implica en potenciales pérdidas de vidas y lesiones en los ocupantes de estructuras sujetas a dichos riesgos, por lo que el estudio de este fenómeno es de gran interés en la comunidad científica. En la Figura 1.1, se pueden apreciar ejemplos de fallos estructurales por fractura.

A lo largo de los años, se han desarrollado avances fructíferos en la investigación de la mecánica de fractura. Inicialmente, se estudió el concepto de fractura frágil, el cual representa el tipo de fractura más simple de analizar. Esto se debe a que el material se comporta de manera elástica hasta la fractura, por lo que se aplica la teoría elástica lineal en su descripción. Las primeras teorías se basaron en el concepto del esfuerzo crítico, mediante el cual se plantea conocer el límite del material. Este enfoque resultó poco riguroso; pues no emplea principios energéticos y aplica la teoría elástica lineal a un fenómeno que sucede a nivel atómico. Estos defectos fueron sorteados por Griffith en 1920 [14], cuando desarrolló su teoría de fractura frágil partiendo de principios termodinámicos. Posteriormente, Irwin continuó esta teoría presentando de una manera más formal la equivalencia entre los principios energéticos y la tensión de fractura [15].

Las teorías anteriores explican de manera adecuada la propagación, pero no tratan el tema de la iniciación de fractura; por lo que su análisis se limita a zonas alejadas de la punta (el inicio) de una fisura. Al analizar estas zonas de iniciación, las teorías lineales resultan en una singularidad, con la energía de superficie ten-

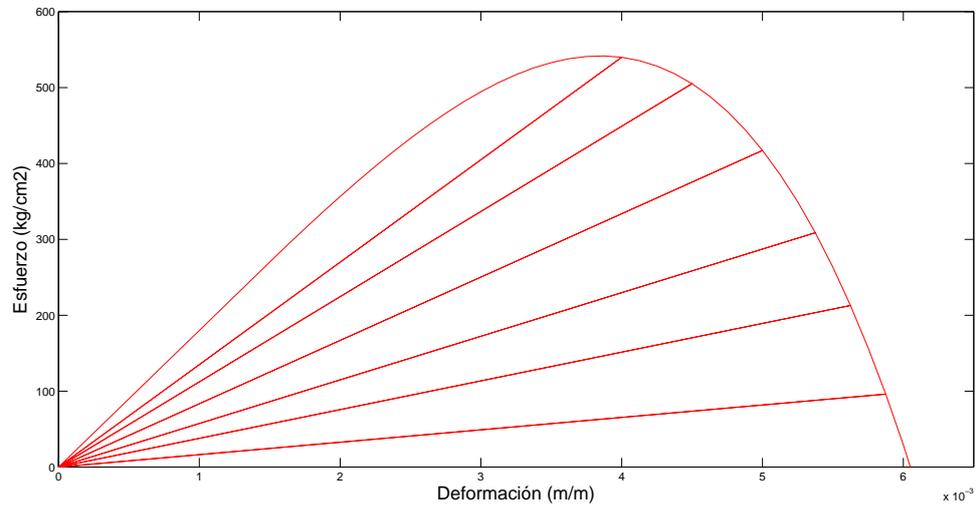


diendo a infinito. Esto se debe principalmente a la aplicación de la ley de Hooke en la punta de la fisura, con lo que se obtienen esfuerzos infinitos. Las limitaciones del comportamiento idealizado de fractura lineal fueron tratadas en el modelo de Barenblatt. En 1962, se desarrolló este modelo que permite la existencia de tensiones cohesivas no lineales en el plano de fisura, dando origen a la modelización de fractura dúctil [3]. Este tratamiento permite resolver la singularidad de los modelos lineales y analizar el problema de iniciación de fractura. Tanto el modelo de Griffith como el de Barenblatt han tenido un gran desarrollo y presentan contribuciones importantes. En [8] y [20] se comparan ambos enfoques, demostrando que el modelo de Barenblatt es asintóticamente equivalente al modelo de Griffith.

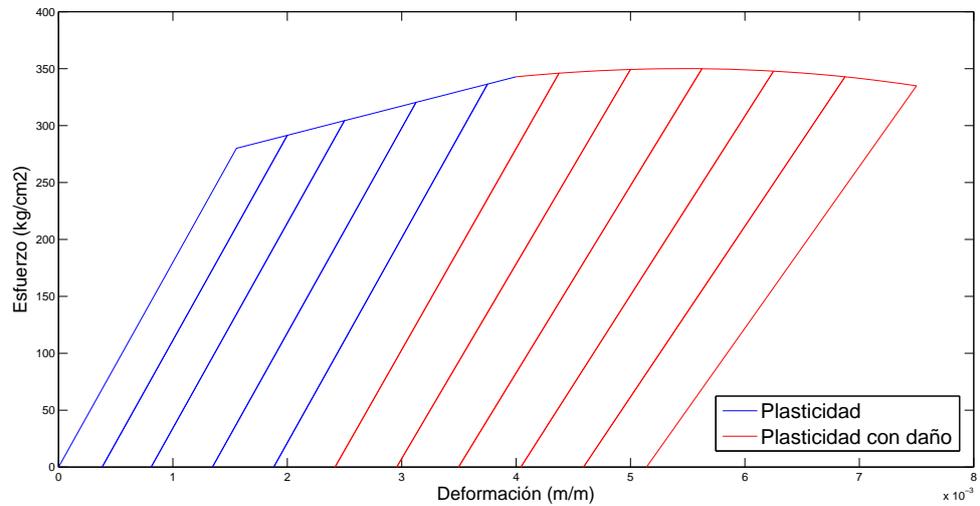
Las teorías mencionadas hasta ahora se basan en el estudio de fisuras existentes. Este análisis puede resultar ineficaz para prevenir fallas estructurales ya que en el momento de la aparición de fisuras, la falla es casi inminente. Por esto, el estudio de los estados precursores a la fractura se volvió esencial, tratándose fenómenos invisibles de disipación de energía; precisamente, la plasticidad y el daño [18]. En una curva esfuerzo-deformación, se puede verificar la existencia de estos fenómenos en las curvas de descarga, como se puede observar en la Figura 1.2.

La teoría de plasticidad es, posiblemente, la más utilizada e influyente en la modelización de materiales en la ingeniería [33], pues describe el comportamiento de una gran variedad de materiales. En general, la plasticidad se caracteriza por deformaciones irreversibles, las cuales generan disipación de energía. El análisis de estas deformaciones es de gran interés para la ingeniería, con un rango de aplicaciones que incluyen desde el desempeño de estructuras ante cargas sísmicas hasta la simulación de procesos tectónicos en rocas para estudios geológicos [4]. Dependiendo del material, se explica la plasticidad mediante distintos mecanismos disipativos. Estos materiales son generalmente cohesivos y experimentan fractura dúctil. Los mecanismos disipativos para diferentes materiales incluyen [18]:

- Metales y aleaciones: deslizamientos irreversibles a lo largo de planos cristalográficos.
- Polímeros: cambios en la disposición de las moléculas.
- Cerámicas: fracturas en la microestructura.
- Concreto: deslizamientos sobre las superficies de microfractura.
- Madera: cambios en la disposición de las células.



(a) Curvas de descarga de daño



(b) Curvas de descarga de plasticidad y daño

Figura 1.2: Curvas esfuerzo-deformación de carga y descarga resultado de la implementación de los modelos locales de [33]

En la Figura 1.2a, se observan las descargas características de un material frágil, sin deformaciones plásticas permanentes. En la Figura 1.2b, se observa en azul la evolución plástica con descargas elásticas y en rojo la evolución en la fase de daño, con una reducción en las pendientes de descarga. Se aprecian las deformaciones plásticas permanentes, así como la reducción de rigidez en la fase de daño.



Por otro lado, el daño representa la última etapa de disipación de energía previa a la fractura. Los avances en la mecánica de daño se desarrollaron en la década de 1970, casi diez años después de los principales avances en la mecánica de fractura. El fenómeno de daño se caracteriza por la degradación interna irreversible del material. Esta degradación resulta en pérdida de rigidez, lo cual se analiza mediante la introducción de una variable interna. Este análisis permite un estudio más profundo de la fractura, donde, en lugar de considerar un proceso de ocurrencia, se tiene un análisis de la evolución microscópica previa a la aparición de la fisura macroscópica [18]. Matemáticamente, esta evolución resulta en un salto en el campo de desplazamientos, característico de la fractura. El daño se explica, según el material, mediante distintos mecanismos de disipación [33]:

- Metales y aleaciones: nucleación de microfracturas y microcavidades.
- Polímeros: separación de enlaces entre cadenas moleculares.
- Concreto: separación entre agregados o refuerzo metálico y material cementante.
- Madera: degradación en las paredes celulares.

Pese a las diferentes estructuras físicas de estos materiales, se puede considerar que presentan comportamientos mecánicos similares. Todos presentan, en diferentes rangos, comportamiento elástico, fluencia o deformaciones irreversibles, daño y fracturas macroscópicas [18]. Incluso, se ha demostrado experimentalmente que la fractura del vidrio presenta, en cierto grado, deformaciones plásticas [10]. Por estos motivos, se puede analizar el comportamiento de los materiales de manera general, tomando en cuenta los comportamientos mecánicos y la termodinámica de procesos irreversibles [18].

Se puede hablar de dos enfoques principales en la modelización del comportamiento de materiales: formulaciones clásicas y formulaciones variacionales. Las formulaciones clásicas se basan en la teoría de materiales estándar, donde se obtiene la evolución del material de manera local, ver [33], [4], [34]. Por otro lado, el punto de partida del tratamiento variacional basado en una formulación energética son los trabajos de [11], donde se retoma la teoría de Griffith para fractura frágil mediante una minimización de energía global. El enfoque variacional se formaliza en [23] y se aplica a la mecánica de fractura en [6].

Otro punto principal que se debe resaltar es el enfoque con el que se afronta el problema de daño. Los modelos de daño locales presentan resultados significativos en la modelización de endurecimiento; sin embargo, no resultan fiables en



materiales con ablandamiento [30]. Para resolver esto, es común emplear modelos de daño no locales. En [24], se puede apreciar la aplicación de estos modelos en la modelización de concreto.

En este trabajo, se resaltan las contribuciones de los modelos no locales de gradiente de daño, mediante los cuales se introduce un término de longitud interna correspondiente a la zona de localización. El modelo de gradiente de daño que se adopta tiene sus inicios en [28] y [29], donde se analiza el comportamiento de materiales frágiles en un tratamiento variacional. La principal limitación de este modelo consiste en que no se consideran deformaciones plásticas, por lo que no se describe el comportamiento de materiales dúctiles. Este problema se resuelve en [1], donde se retoma el modelo mencionado, realizando el acoplamiento de daño a plasticidad. Esto permite que aparezcan discontinuidades en el campo de desplazamientos antes de alcanzar el estado de fractura, con lo que se puede representar de manera adecuada la formación de grietas en materiales dúctiles.

Este es el punto de partida para este trabajo. Se plantea la implementación del modelo de [1] en un marco de formulación energética mediante la minimización de un funcional de energía global. En principio, este tratamiento presenta ventajas sobre las formulaciones clásicas al momento de realizar la implementación computacional. Para evidenciar esto, se realiza la implementación de un modelo adicional mediante una formulación clásica basada en el desarrollo de [34], pero realizando el acoplamiento del modelo de gradiente de daño. La idea principal es analizar la capacidad de cada planteamiento para representar el comportamiento dúctil *a la* Barenblatt, con localización de deformaciones, y a la vez resaltar las contribuciones propias que presenta cada uno.

## 1.3. Objetivos

### Objetivo general

El objetivo principal de esta tesis es implementar el modelo energético propuesto por [1] para el análisis de plasticidad, daño y fractura unidimensional, y realizar un análisis comparativo con un modelo desarrollado en un marco de formulación clásica.

### Objetivos específicos

- Implementar el modelo computacional de la formulación energética para el análisis de fractura unidimensional.

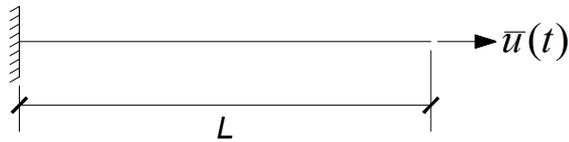


Figura 1.3: Definición del problema unidimensional

- Implementar el modelo computacional de la formulación clásica para el análisis de fractura unidimensional.
- Realizar simulaciones numéricas en ambos modelos y desarrollar un análisis comparativo de los resultados.

## 1.4. Metodología

Con el objetivo de dar simetría a los enfoques clásico y energético, se desarrollan ambas teorías de forma paralela. En el marco de cada formulación, se plantea el problema de describir la evolución una barra de longitud  $L$ , sujeta a un proceso de carga cuasiestático en el que se controlan desplazamientos. El esquema de la barra y las condiciones de carga a las que es sometida se pueden observar en la Figura 1.3. Esta prueba a tensión para un material dúctil resalta los principales conceptos de modelización de la fractura dúctil de materiales [1]. Por simplicidad, se asume un material sin deformaciones plásticas ni daño al inicio de las simulaciones.

La metodología general utilizada para el desarrollo de este trabajo se detalla a continuación:

- Definición de los componentes y principios sobre los que se desarrolla cada formulación.
- Descripción de los modelos matemáticos.
- Discretización de los modelos matemáticos para la obtención de modelos numéricos.
- Implementación computacional de algoritmos numéricos basados en la aplicación de cada formulación en el software MATLAB.



- Verificación de los algoritmos implementados.
- Análisis comparativo con el fin de evidenciar las posibles ventajas y desventajas de la aplicación de un *algoritmo de minimización alterna* sobre los algoritmos basados en una formulación clásica de plasticidad y daño.

## 1.5. Resumen del contenido

**Capítulo 2** Se exploran los conceptos básicos para la modelización de materiales disipativos y se da una breve descripción de los principios utilizados en el desarrollo de cada formulación. Primero, se presentan las leyes fundamentales de la mecánica de medios continuos, en las que se incluyen tanto ecuaciones de balance mecánicas como principios termodinámicos. Luego, se explora la teoría de materiales estándar generalizados y la teoría de variables internas (termodinámicas) sobre las que se desarrollan los enfoques clásico y energético. Por último, se desarrollan de manera general los dos enfoques de modelización empleados en esta tesis: la formulación clásica y la formulación variacional.

**Capítulo 3** En este capítulo se presenta el enfoque clásico al modelo de [1]. Primero, se desarrollan los modelos de plasticidad perfecta, plasticidad con endurecimiento y viscoplasticidad con base en los trabajos de [34], [4] y [33], con lo que se obtienen *algoritmos de mapeo* para describir la evolución elasto-plástica a nivel local. La solución global al problema de la plasticidad se resuelve utilizando el método de los elementos finitos en el balance de momento lineal, como se muestra en [34]. Por último, se incorpora el daño en la evolución elasto-plástica utilizando un modelo de daño no local, con lo que se obtiene un algoritmo capaz de analizar el fenómeno de la fractura para sistemas unidimensionales.

**Capítulo 4** Se desarrolla la formulación energética para el modelo de plasticidad y daño propuesto en [1]. Se introducen las ecuaciones constitutivas de plasticidad y daño en los funcionales de energía y disipación establecidos en el Capítulo 2 y se explora la forma que toman la condición de estabilidad y el balance de energía para el modelo analizado. Luego, a partir de la minimización de un funcional de energía apropiado, se plantea un algoritmo para calcular la evolución global del sistema.



**Capítulo 5** Se presentan los resultados obtenidos con la implementación de cada formulación por medio de simulaciones numéricas. Se divide en tres partes: resultados del enfoque clásico, resultados del enfoque energético y análisis comparativo. En cada caso, se varían parámetros pertinentes de manera que se obtengan resultados representativos, resaltando las principales características de cada formulación. Por último, se comparan los resultados obtenidos observando sus ventajas y desventajas, analizando las características de convergencia, el esfuerzo computacional, y la capacidad de cada uno para representar el fenómeno físico estudiado.



## Capítulo 2

---

# Conceptos de Modelización de Materiales Disipativos

---

En este capítulo se resumen las leyes fundamentales y ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los materiales disipativos analizados en este trabajo. Específicamente, se hace referencia a la teoría de materiales estándar generalizados, mediante la cual se describe a los materiales por medio de potenciales energéticos, los cuales incluyen energía elástica almacenada y disipación de energía [23]. El comportamiento de estos materiales sujetos a esfuerzos está determinado por una serie de variables de estado, tanto observables como no observables.

Primero, se describen las leyes fundamentales de la mecánica de medios continuos, las cuales incluyen principios termodinámicos. Cualquier sistema que se desee modelar debe cumplir con dichas leyes; caso contrario, éste no tendrá sentido físico. Luego, se resume la teoría de materiales estándar generalizados y la teoría de variables internas, mediante la cual se obtienen ecuaciones constitutivas verificando el cumplimiento de las leyes de la termodinámica.

Posteriormente, se describe de manera general la modelización de materiales disipativos mediante dos enfoques: la formulación clásica y la formulación energética. Se hace referencia a los principales ingredientes de cada formulación, planteando los principios en los cuales se basan las ecuaciones de gobierno.

### 2.1. Componentes básicos de la mecánica de medios continuos

La mecánica de medios continuos se define mediante tres componentes básicos: la cinemática, ecuaciones de balance y ecuaciones constitutivas. Las primeras dos, al ser leyes fundamentales, se deben verificar para cualquier sistema físico;



mientras que las últimas son específicas para cada material. Aun así, éstas deben cumplir con los principios físicos que establecen las ecuaciones termodinámicas. En las siguientes secciones, se resumen las leyes fundamentales de la mecánica de medios continuos y se analiza brevemente la obtención de ecuaciones constitutivas físicamente consistentes.

### 2.1.1. Principios cinemáticos

La parte cinemática analiza el movimiento y deformación de un cuerpo continuo sin considerar la causa de dichos efectos [19]. Consideremos una región continua de estudio  $\Omega_o$  ocupando algún lugar en el espacio, con una superficie de contorno  $\partial\Omega_o$  en un tiempo  $t_o$  como la configuración de referencia. Luego de sufrir una deformación, la configuración actual del cuerpo está determinada por el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , donde  $\mathbf{x}$  define la nueva posición de algún punto del dominio. Esta nueva configuración  $\Omega_t$  con superficie de contorno  $\partial\Omega_t$  describe esencialmente, con respecto a la configuración de referencia, el movimiento del cuerpo a través del espacio [12].

En este trabajo, se asumen los principios de la teoría de deformaciones infinitesimales. De esta manera, la deformación y el gradiente de deformación se mantienen pequeños durante la evolución, por lo que se desprecia la diferencia entre la configuración de referencia y la configuración actual; esto es:  $\Omega_o = \Omega_t$ . Luego, se acepta la siguiente relación entre la deformación y el desplazamiento:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \quad (2.1)$$

Las hipótesis anteriores permiten el uso del tensor de deformación infinitesimal  $\boldsymbol{\epsilon}$ , el cual se puede considerar que actúa en la configuración actual.

### 2.1.2. Ecuaciones de balance

Las leyes fundamentales de la mecánica de medios continuos que debe cumplir cualquier modelo son el balance de masa, balance de momento lineal, balance de momento angular y balance de energía. La última incluye el cumplimiento de la primera de la termodinámica y se explora en la siguiente sección.

La ecuación que rige el balance de masa indica que la masa total de un cuerpo continuo no puede variar con el tiempo al experimentar una perturbación. De



esta manera, se expresa:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\frac{dm}{dt}$  es la derivada material de la masa con respecto al tiempo,  $\Omega$  es un cuerpo continuo y  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad unitaria. El balance de masa se cumple siempre en el problema tratado, ya que se considera un sistema cerrado en el que no hay intercambio de masa con el exterior. Además, la variación de la densidad del material debido a los fenómenos de daño y plasticidad es despreciable [18], por lo que se considera a la densidad del cuerpo  $\rho$  constante.

La siguiente ecuación de balance que debe cumplir el modelo es la conservación de momento lineal. Esta ecuación, junto con ciertas condiciones de frontera, representa la forma fuerte del problema de valores de contorno con el que se aborda la formulación clásica del modelo, como se observará más adelante. Además, forma parte de la definición de la forma local de la primera ley de la termodinámica. Esta ecuación de balance se define con la siguiente variación de momento lineal:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{v}(x, t)$  es el vector de velocidad. Aplicando el teorema de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  representa la aceleración espacial. Por la segunda ley de movimiento de Newton, la última expresión se puede igualar a la sumatoria de fuerzas que actúa en el cuerpo. Éstas incluyen fuerzas de masa  $\mathbf{b}_f$  y fuerzas de superficie  $\mathbf{t}$ . De esta manera, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Omega} \mathbf{b}_f dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS \quad (2.5)$$

Luego de utilizar el teorema de la divergencia de Gauss e introducir el tensor de esfuerzos de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , utilizando la relación  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  en la última expresión, se



obtiene en forma local:

$$\rho \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{b}_f - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.6)$$

Debido al planteamiento axial del modelo unidimensional que se desarrolla en este trabajo, el significado del balance de momento angular es algo trivial. Esta ecuación de balance resulta en:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.7)$$

### 2.1.3. Conceptos termodinámicos

Una vez introducidas las ecuaciones de balance, se debe verificar el cumplimiento de las ecuaciones termodinámicas. Éste es un medio para obtener ecuaciones constitutivas con validez física, conocidas como las ecuaciones de Coleman. Las ecuaciones constitutivas son necesarias para la obtención de las incógnitas en la evolución del sistema y la termodinámica de medios continuos permite imponer las restricciones necesarias para la obtención de estas ecuaciones [13]. Para ello, se deben introducir las leyes de la termodinámica que deben cumplirse en cualquier sistema que se desee modelar y se debe definir el concepto de termodinámica con variables internas, basándose en los trabajos de [9].

#### 2.1.3.1. Primera ley de la termodinámica

La primera ley de la termodinámica se basa en el balance de energía. Establece que la tasa de cambio con respecto al tiempo de la energía total es igual a la suma de la tasa del trabajo realizado por las fuerzas externas y la tasa a la que se agrega energía térmica por medio de flujo de calor en el contorno  $\mathbf{q}$  y una fuente de calor por unidad de masa  $R$ . Se escribe, en forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho \bar{e} \right) dV = \int_{\Omega} (\mathbf{b}_f \cdot \mathbf{v} + \rho R) dV + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.8)$$

donde  $\bar{e}$  es la energía interna por unidad de masa. La dependencia de las variables con respecto a  $\mathbf{x}$  y  $t$  se ha omitido en ésta y en las ecuaciones de aquí en adelante para simplificar la notación. Luego de introducir el tensor de esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}$ , se aplica



el teorema de transporte de Reynolds y el teorema de la divergencia para obtener:

$$\int_{\Omega} (\rho \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}_f - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV + \int_{\Omega} \rho \dot{\bar{e}} dV = \int_{\Omega} (\rho R + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \nabla \cdot \mathbf{q}) dV \quad (2.9)$$

El primer término representa el balance de momento lineal, por lo que se elimina. Con esto, se obtiene en forma local:

$$\rho \dot{\bar{e}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho R \quad (2.10)$$

### 2.1.3.2. Segunda ley de la termodinámica

La segunda ley de la termodinámica se basa en el principio de entropía. En la mecánica de medios continuos, se define mediante la desigualdad de Clausius-Duhem de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho s dV \geq \int_{\Omega} \frac{\rho R}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \quad (2.11)$$

donde  $T$  es la temperatura y  $s$  es la entropía por unidad de masa. Aplicando el teorema de transporte de Reynolds y el teorema de la divergencia, se obtiene en forma local:

$$\rho \dot{s} \geq \frac{\rho R}{T} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \quad (2.12)$$

El concepto de entropía no se puede definir fácilmente; es necesaria la aplicación de métodos de mecánica estadística para obtener una aproximación de esta cantidad. Además, la desigualdad se aplica al universo; en este caso, el universo se reduce al cuerpo continuo en estudio. Por esto, la forma local de la ecuación no está netamente justificada, pues se debería enfrentar el problema de representar la entropía mediante una muestra representativa [12]. Obviando estas dificultades y asumiendo una función continua escalar para la entropía, se acepta la forma local y se verifica su cumplimiento en las siguientes secciones.

### 2.1.3.3. Termodinámica con variables internas

Antes de la aplicación de la termodinámica de medios continuos al problema tratado en este trabajo, se definen conceptos fundamentales. Se puede definir a una cantidad de materia ocupando una posición específica en el espacio como un



sistema; por otro lado, existe una serie de variables que determinan su estado [1]. A éstas se les denomina variables de estado, y su identificación no es ni trivial ni única, pues depende del sistema que se desee analizar [22]. En este trabajo, el sistema está definido por un cuerpo deformable unidimensional, sin intercambio de materia en su contorno.

El uso de variables internas en la mecánica de medios continuos se basa en caracterizar el estado de un sistema mediante variables de estado, tanto externas (observables) como internas (no observables) [9]. Las variables de respuesta dependientes, tales como el potencial energía, dependen de ambos tipos.

El siguiente paso para la modelización es la obtención de ecuaciones constitutivas y leyes de evolución. Para ello, se recurre a la teoría de materiales estándar generalizados que se explora en la siguiente sección. Hasta este punto, se han planteado las ecuaciones de balance y las leyes de la termodinámica en su forma tridimensional. Puesto que el objetivo de este trabajo es modelar un sistema unidimensional sometido a esfuerzos de tracción, la formulación en lo que sigue de este trabajo se simplifica definiendo el problema únicamente con funciones escalares.

## 2.2. Materiales estándar generalizados

En esta sección se explora la modelización de materiales mediante un potencial de energía y un potencial de disipación. El potencial de energía depende de las variables de estado, tanto externas como internas, y el potencial de disipación depende de fuerzas disipativas, que son variables duales asociadas a las variables de estado [25].

### 2.2.1. Potenciales termodinámicos

Es común definir cuatro potenciales de energía [19]:

1. La energía interna  $e$ , definida como la suma de energía potencial y energía cinética de las partículas del material.
2. La energía libre de Helmholtz  $\Psi$ , definida como la porción de energía interna disponible para realizar trabajo a temperatura constante.
3. La entalpía  $h$ , definida como la porción de energía interna que puede ser liberada como calor debido a la aplicación de esfuerzos constantes.



4. La energía libre de Gibbs  $G$ , definida como la porción de la entalpía disponible para realizar trabajo a temperatura constante.

La elección del potencial adecuado depende de varios factores. Tanto la energía interna como la entalpía son funciones de la entropía, por lo que su uso es poco común [19]. Por otro lado, es más común el uso del potencial de Helmholtz y la energía libre de Gibbs, ambas relacionadas respectivamente a la energía interna y a la entalpía mediante la transformada de Legendre. Además, se debe tomar en cuenta la variable de estado que se desea controlar. Tanto la entalpía como la energía libre de Gibbs dependen del esfuerzo, mientras que la energía interna y la energía libre de Helmholtz dependen de la deformación.

En este trabajo, se plantea el problema mediante control de deformaciones, por lo que se aplica la energía libre de Helmholtz. Para su definición, se parte de la definición de la energía libre por unidad de masa como función de la entropía y un conjunto de variables de estado  $\chi$ :

$$\bar{e} = \bar{e}(\chi, s) \quad (2.13)$$

Aplicando la transformada de Legendre, se obtiene la energía libre de Helmholtz por unidad de masa:

$$\bar{\Psi}(\chi, T) = \bar{e}(\chi, s) - sT \quad (2.14)$$

Introduciendo este potencial en (2.14) y haciendo uso de (2.10), se obtiene la siguiente forma de la desigualdad de Clausius-Duhem:

$$\sigma : \dot{\epsilon} - \rho \dot{\bar{\Psi}} - \rho \dot{T} s \geq 0 \quad (2.15)$$

Las variables de estado incluidas en el conjunto  $\chi$  dependen de los modelos constitutivos que se introduzcan para la descripción de las propiedades del material. En el caso de los modelos explorados en este trabajo, se utilizan las variables de plasticidad y daño descritas en la Tabla 2.1. Una de las características más importantes que se logra representar a través del modelo de plasticidad es el desarrollo de deformaciones permanentes en el material, para lo cual, se asume la descomposición aditiva de la deformación total de la siguiente manera:

$$\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_p \quad (2.16)$$



Variable de estado	Descripción	Tipo	Variable asociada
$T$	temperatura	observable	$s$
$\epsilon$	deformación total	observable	$\sigma$
$\epsilon_p$	deformación plástica	interna	$-\sigma$
$\kappa$	variable de endurecimiento	interna	$k$
$p$	deformación plástica acumulada	interna	$k$
$\alpha$	variable de daño	interna	$a$

Tabla 2.1: Variables de estado empleadas en el potencial de Helmholtz [18]

donde  $\epsilon_{el}$  es la deformación elástica reversible y  $\epsilon_p$  es la deformación plástica permanente. Luego, se define al potencial de Helmholtz por unidad de masa como:

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\epsilon, \epsilon_p, p, T, \alpha, \kappa) = \bar{\Psi}(\epsilon - \epsilon_p, p, T, \alpha, \kappa) \quad (2.17)$$

## 2.3. Modelización clásica

Una vez planteada la energía libre de Helmholtz, la formulación clásica permite la obtención directa de las ecuaciones constitutivas. Esto se realiza mediante la desigualdad de Clausius–Duhem (2.15), con lo que se verifica el cumplimiento de principios termodinámicos. Por otro lado, las leyes de evolución de las variables internas se obtienen mediante un potencial de disipación, el cual depende del modelo empleado.

### 2.3.1. Ecuaciones constitutivas

Tomando la variación de la energía libre de Helmholtz, se tiene:

$$\dot{\bar{\Psi}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_p} \dot{\epsilon}_p + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial T} \dot{T} \quad (2.18)$$

Sustituyendo en (2.15), se obtiene:

$$\sigma : \dot{\epsilon} - \rho \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_p} \dot{\epsilon}_p + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial T} \dot{T} \right) - \rho s \dot{T} \geq 0 \quad (2.19)$$

Congelando las variables de manera que sólo se permita la variación de  $\dot{T}$ , se



obtiene la siguiente relación:

$$s = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial T} \quad (2.20)$$

Siguiendo un procedimiento análogo y permitiendo variar a las variables correspondientes, se obtienen las ecuaciones constitutivas restantes:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon}, \quad \sigma = -\rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_p} \quad (2.21)$$

Por último, se definen las variables duales asociadas a las variables internas  $\alpha$  y  $\kappa$ , correspondientes a sus fuerzas disipativas:

$$a = -\rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha}, \quad k = -\rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa} \quad (2.22)$$

### 2.3.2. Leyes de evolución

Una vez establecidas las ecuaciones constitutivas, se deben definir las leyes de evolución según los conceptos descritos en [1]. Llámese  $\chi$  al conjunto de variables de estado y  $\mathbf{X}$  al conjunto de variables duales correspondientes. El problema radica en encontrar medios para obtener las leyes de evolución de las variables de estado por medio de un potencial de disipación. Para esto, se exploran dos enfoques: la ecuación de Biot y la función de fluencia.

#### 2.3.2.1. Ecuación de Biot

Esta formulación es un resultado directo de la teoría de materiales estándar generalizados, ya que se define mediante el potencial de energía y un potencial de disipación  $\Phi$ . Este potencial es una función convexa con respecto al flujo  $\dot{\chi}$  de las variables internas, y depende del estado actual  $\chi$  [1]. Se define el potencial de disipación como:

$$\Phi = \Phi(\chi, \dot{\chi}) \quad (2.23)$$

Se obtiene la evolución de las variables de estado mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\chi}} = 0 \quad (2.24)$$



donde  $\Psi = \rho\bar{\Psi}$  es la energía libre de Helmholtz por unidad de volumen. A esta ecuación diferencial se le conoce como la ecuación de Biot.

### 2.3.2.2. Función de fluencia

Una formulación equivalente para obtener la evolución de las variables de estado es la superficie de fluencia y las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Se define una función de fluencia  $f$ , la cual depende de las variables duales  $\mathbf{X}$  y del estado actual  $\boldsymbol{\chi}$ . Luego, se define una región elástica  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}$  y una superficie de fluencia  $\partial\mathbb{E}_{\mathbf{X}}$  como:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{X}) < 0\}, \quad \partial\mathbb{E}_{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{X}) = 0\} \quad (2.25)$$

Se define la regla de flujo de manera que si  $f(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{X}) < 0$ , la evolución se encuentra en la región elástica, por lo que  $\dot{\boldsymbol{\chi}} = 0$ . Caso contrario, la función de fluencia se encuentra en la superficie y se tiene:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{X}), \quad \lambda \geq 0 \quad (2.26)$$

A ésta se le conoce como la regla de flujo asociada. Como se puede observar, la función de fluencia es análoga al potencial de disipación. De esta forma, se pueden obtener condiciones que determinen la evolución de las variables de estado de la siguiente forma:

$$\lambda \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \lambda f = 0 \quad (2.27)$$

A estas condiciones se les conoce como condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Se deben cumplir para satisfacer las restricciones impuestas en la función de fluencia y definen la evolución del material. Son fundamentales en la formulación clásica de plasticidad, como se observará en la siguiente sección.

Cabe recalcar que las condiciones KKT se pueden obtener mediante un enfoque energético, de manera que la regla de flujo se obtenga mediante un problema de optimización. Esto será evidente en el desarrollo de la formulación energética.



### 2.3.3. Modelización de plasticidad

La modelización clásica de plasticidad se basa en el uso de la superficie de fluencia, la cual, para el caso unidimensional, se define como:

$$f(\sigma, k) = |\sigma| - \sigma_y + k \leq 0 \quad (2.28)$$

donde  $\sigma_y$  es el esfuerzo de fluencia y  $k$  es la variable asociada que incorpora efectos de endurecimiento. Por otro lado, se define el potencial de energía como la energía almacenada en función de la energía libre como:

$$\mathcal{E} = \int_0^L \Psi(\epsilon, \epsilon_p, \kappa) dx = \int_0^L \frac{1}{2} E (\epsilon - \epsilon_p)^2 dx + \int_0^L K(\epsilon_p, \kappa) dx \quad (2.29)$$

donde  $E$  es el módulo elástico y el término  $K(\epsilon_p, \kappa)$  corresponde a efectos de endurecimiento o ablandamiento.

Existe una extensa bibliografía en la modelización de plasticidad, de lo cual se destaca los trabajos de [34], [4] y [33].

### 2.3.4. Modelización de daño

La modelización local clásica de daño hace uso de la *hipótesis de deformaciones equivalentes*, la cual se describe a detalle en [33] y [18]. Considérese una sección de un material sujeto a un esfuerzo nominal  $\sigma$ , con una parte de su sección sin daño y una parte completamente degradada (y por lo tanto incapaz de soportar carga). Según la *hipótesis de deformaciones equivalentes*, la deformación, considerando sólo la parte sin daño bajo un esfuerzo nominal  $\sigma$ , es equivalente a la deformación considerando toda la sección del material bajo un esfuerzo efectivo  $\hat{\sigma}$  [33].

Se define una variable interna de daño  $\alpha \in [0, 1]$ , donde  $\alpha = 0$  corresponde a un estado sin daño y  $\alpha = 1$  corresponde a un estado completamente dañado (en su defecto, un estado de fractura). Esta variable es creciente en el tiempo; pues el material modelado es incapaz de recuperar su integridad. Esto es  $\alpha(t_1) \leq \alpha(t_2) \quad \forall t_1 < t_2$  en cada punto de la barra. Luego, se tiene el esfuerzo efectivo



en función de la variable de daño:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - \alpha)^\gamma} \quad (2.30)$$

donde  $\gamma$  es un parámetro que varía según el modelo que se desee plantear. Una consecuencia importante de esta teoría es que las ecuaciones constitutivas de un material sin daño son las mismas para un material con daño siempre que se reemplace el esfuerzo nominal por el esfuerzo efectivo. Luego, se puede definir una superficie de daño acoplado a plasticidad de la siguiente manera:

$$f_d(\sigma, k, a) = a(\hat{\sigma}) - g(\alpha, \epsilon_p, \kappa) \leq 0 \quad (2.31)$$

donde  $g(\alpha, \epsilon_p, \kappa)$  es una función de las variables internas, la cual puede permitir el acoplamiento del daño a la plasticidad. Por otro lado, la energía almacenada está definida por:

$$\mathcal{E} = \int_0^L \Psi(\epsilon, \epsilon_p, \kappa, \alpha) dx = \int_0^L \frac{1}{2} E(\alpha) (\epsilon - \epsilon_p)^2 dx + \int_0^L K(\epsilon_p, \kappa, \alpha) dx \quad (2.32)$$

donde se puede apreciar que  $E(\alpha)$  representa la pérdida de rigidez característica del daño.

Los modelos locales no son los más eficaces para obtener la respuesta global; pues generalmente presentan dificultades para captar las localizaciones de manera adecuada. Por esto, se opta por emplear un modelo no local de daño en este trabajo, el cual resulta del enfoque energético desarrollado en el Capítulo 4. La modelización de daño debe captar de manera adecuada el ablandamiento del material, lo cual resulta en un problema matemático mal planteado. Los modelos locales generalmente resultan defectuosos al no converger hacia la solución adecuada. Además, la introducción al espacio de elementos finitos presenta dependencia del tamaño de la malla [27]. Por estos motivos, se requiere emplear una regularización. Esto se puede lograr mediante la aplicación de un modelo de daño no local, incorporando un término de gradiente de daño y un término de longitud interna de manera que la evolución genere un perfil de daño y se capten localizaciones de deformación. Esto se evidencia en el modelo que se plantea en este trabajo en los capítulos 3 y 4.



## 2.4. Formulación energética

En esta sección se definen los elementos de la formulación energética y se exploran los principios en los que se basa su desarrollo. Primero, de acuerdo a lo establecido en la teoría de materiales estándar, se definen la energía potencial del sistema y la energía disipada durante el proceso de evolución. Sobre la base de éstos, se presentan los dos principios sobre los que se desarrolla la formulación energética: la condición de estabilidad y el balance de energía. Además, se plantea la irreversibilidad del sistema como una condición adicional a las anteriores con el objetivo de simplificar la definición del potencial de disipación. El contenido de esta sección se basa en los trabajos de [23] y [1].

El objetivo en la formulación energética es plantear un funcional que, sujeto a las restricciones impuestas por las condiciones de estabilidad y balance de energía, describa la evolución de un sistema mecánico a través de un principio variacional. El planteamiento variacional del problema en la formulación energética admite soluciones más flexibles en comparación con la formulación clásica puesto que, en las leyes de evolución para las variables de estado, no hay derivadas con respecto al tiempo. Esto permite que el problema admita soluciones con saltos, como se espera en sistemas independientes de la velocidad de evolución.

Análogo al planteamiento realizado en la formulación clásica, es necesario definir dos potenciales de energía: la energía potencial del sistema y la distancia de disipación. La energía potencial es la suma de la energía elástica almacenada en el material y el trabajo de las cargas que actúan sobre el sistema, en función de las fuerzas de masa  $b_f$  y las fuerzas aplicadas en la superficie del sistema  $f_a$ :

$$\mathcal{E}(t, \boldsymbol{\chi}) = \int_0^L \Psi(\boldsymbol{\chi}) dx \quad (2.33)$$

$$\mathcal{L}(t, u) = \int_0^L b_f \cdot u dx + (f \cdot u) \Big|_0^L \quad (2.34)$$

$$\mathcal{P}(t, u, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{E} - \mathcal{L} \quad (2.35)$$

La distancia de disipación entre los estados  $\boldsymbol{\chi}_0$  y  $\boldsymbol{\chi}_1$  se define en función del



potencial de disipación  $\Phi$  como:

$$d(\boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{\chi}_1) = \inf \left\{ \int_0^1 \Phi(\boldsymbol{\beta}(s), \dot{\boldsymbol{\beta}}(s)) ds : \boldsymbol{\beta} \in C^1, \boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{\beta}(1) = \boldsymbol{\chi}_1 \right\} \quad (2.36)$$

Luego de integrar (2.36) sobre el dominio  $[0, L]$ , la distancia de disipación entre los estados  $\boldsymbol{\chi}_0$  y  $\boldsymbol{\chi}_1$  es:

$$D(\boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{\chi}_1) = \int_0^L d(\boldsymbol{\chi}_0, \boldsymbol{\chi}_1) dx \quad (2.37)$$

Definidos los potenciales de energía, se formulan los principios en los que se basa la formulación energética: la condición de estabilidad y el balance de energía.

### 2.4.1. Condición de estabilidad

La estabilidad es una propiedad de los sistemas mecánicos en equilibrio. Un sistema mecánico se encuentra equilibrio estable si, bajo la aplicación de una pequeña perturbación, aparecen fuerzas estabilizadoras que devuelven al sistema su estado de equilibrio [31]. Esta propiedad puede describirse a partir de un criterio energético [7] como se muestra a continuación.

Dependiendo de la topología y derivabilidad de la energía potencial y de la distancia de disipación, la condición de estabilidad puede escribirse de las siguientes maneras:

- condición de estabilidad global
- condición de estabilidad local
- condición de estabilidad diferencial

#### 2.4.1.1. Condición de estabilidad global

El criterio energético para describir la estabilidad global de un sistema establece que, en un sistema en equilibrio estable, el trabajo de las fuerzas externas durante la transición del estado actual  $(u, \boldsymbol{\chi})$  a un estado cinemáticamente admisible  $(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$ , no es mayor al trabajo realizado por las fuerzas internas [16].



Utilizando (2.35) y (2.37) se tiene:

$$\mathcal{P}(u, \boldsymbol{\chi}) \leq \mathcal{P}(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}(\boldsymbol{\chi}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) \text{ admisible} \quad (2.38)$$

#### 2.4.1.2. Condición de estabilidad local

La estabilidad local es un requerimiento más fuerte que la estabilidad global, puesto que su definición requiere establecer una topología en la que un estado en la vecindad del estado actual pueda definirse. Se introduce el parámetro  $h$  que determina la distancia entre el estado actual y el nuevo estado en la dirección de  $(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$ . Basándose en (2.38), puede definirse el criterio de estabilidad local como:

$$\mathcal{P}(u, \boldsymbol{\chi}) \leq \mathcal{P}(u + h\tilde{u}, \boldsymbol{\chi} + h\tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\chi} + h\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) \text{ admisible} \quad (2.39)$$

#### 2.4.1.3. Condición de estabilidad diferencial

En el caso de que  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  tengan segunda derivada de Gâteaux continua en  $(u, \boldsymbol{\chi})$ , una condición equivalente a (2.38) puede obtenerse desarrollando (2.39) en series de Taylor para valores  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u + h\tilde{u}, \boldsymbol{\chi} + h\tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\chi} + h\tilde{\boldsymbol{\chi}}) = & \mathcal{P}(u, \boldsymbol{\chi}) + h (\mathcal{P}'(u, \boldsymbol{\chi})(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}'(\boldsymbol{\chi})(\tilde{\boldsymbol{\chi}})) + \\ & \frac{h^2}{2} (\mathcal{P}''(u, \boldsymbol{\chi})(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}''(\boldsymbol{\chi})(\tilde{\boldsymbol{\chi}})) + w(h^2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $\mathcal{P}'$  y  $\mathcal{D}'$  son las derivadas de Gâteaux de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  en la dirección  $(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}})$ . Introduciendo (2.40) en (2.38):

$$\begin{aligned} 0 \leq & h (\mathcal{P}'(u, \boldsymbol{\chi})(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}'(\boldsymbol{\chi})(\tilde{\boldsymbol{\chi}})) + \\ & \frac{h^2}{2} (\mathcal{P}''(u, \boldsymbol{\chi})(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}''(\boldsymbol{\chi})(\tilde{\boldsymbol{\chi}})) + w(h^2) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para valores pequeños de  $h$ , la condición de estabilidad diferencial de primer orden se expresa como:

$$\mathcal{P}'(u, \boldsymbol{\chi})(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}'(\boldsymbol{\chi})(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \leq 0 \quad (2.42)$$

En el caso de  $\mathcal{P}' + \mathcal{D}' = 0$ , se debe explorar los términos de segundo orden en



(2.40):

$$\mathcal{P}''(u, \boldsymbol{\chi})(\tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \mathcal{D}''(\boldsymbol{\chi})(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \leq 0 \quad (2.43)$$

A la última expresión se le conoce como la condición de estabilidad diferencial de segundo orden.

## 2.4.2. Balance de energía

Análogo a la condición de estabilidad, dependiendo de la diferenciabilidad de los potenciales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$ , el balance de energía puede escribirse de dos formas:

- balance de energía débil
- balance de energía regular

### 2.4.2.1. Balance de energía débil

Introduciendo la teoría de variables internas y los potenciales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$ , el balance de energía se puede escribir como:

$$\mathcal{P}(u, \boldsymbol{\chi}) + \mathcal{D}(\boldsymbol{\chi}, [t_0, t_n]) = \mathcal{P}(u_0, \boldsymbol{\chi}_0) + \int_{t_0}^{t_n} \partial_\tau \mathcal{P}(\tau, u) d\tau \quad (2.44)$$

donde

$$\int_{t_0}^{t_n} \partial_\tau \mathcal{P}(\tau, u) d\tau = \int_0^L \dot{b}(t) \cdot u \, dx + \dot{f}(t) \cdot u \Big|_{\partial\Omega_N} \quad (2.45)$$

### 2.4.2.2. Balance de energía regular

Suponiendo que (2.45) es lo suficientemente diferenciable con respecto al tiempo, se prefiere escribir el balance de energía como:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u} \cdot \dot{u} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} + \int_0^L \Phi(\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}) dx + \partial_t \mathcal{P} = 0 \quad (2.46)$$

## 2.4.3. Irreversibilidad

Para introducir la irreversibilidad en el modelo que se desarrolla en capítulos posteriores, se limita el espacio de estados admisibles para algunas de las variables



internas como se muestra a continuación:

$$\chi_k \in \mathcal{Z}_k \quad / \quad \chi_k(t_i) \leq \chi_k(t_j) \quad \forall \quad i \leq j \quad (2.47)$$

donde el conjunto de estados admisibles  $\mathcal{Z}_k$  depende de cada variable. La condición de irreversibilidad no se aplica a todas las variables internas, la elección dependerá de las hipótesis que se hagan acerca del comportamiento del material.



UNIVERSIDAD DE CUENCA  
desde 1867

## Capítulo 3

---

# Formulación Clásica

---

En este capítulo se desarrolla la formulación clásica unidimensional del modelo planteado en este estudio. Primero, se describen los métodos locales empleados en la modelización de plasticidad y daño que gobiernan el comportamiento de los materiales disipativos. Esto se realiza en un marco de formulación clásica, basada en los trabajos de [34], [4], [33]. Se exploran los modelos clásicos de plasticidad considerando un proceso independiente de la velocidad de carga. El tratamiento general de este trabajo cumple con esta hipótesis; sin embargo, se explora también la teoría de viscoplasticidad, la cual depende de la velocidad de carga. Esta teoría es influyente en la implementación numérica, como se observará más adelante. Luego, se desarrolla el acoplamiento de daño a plasticidad retomando los conceptos de la Sección 2.3, obteniéndose las ecuaciones constitutivas correspondientes.

Luego de describir el problema de forma local, se presenta la introducción del modelo investigado en este trabajo al espacio de elementos finitos y la implementación computacional. Esto se realiza basándose en el desarrollo de [34]. Específicamente, se parte del balance de momento lineal y se obtiene un problema de valores de contorno no lineal, mediante el cual se obtiene la evolución global. El desarrollo incluye el acoplamiento de daño no local a plasticidad, siguiendo un procedimiento similar a lo desarrollado en [2].

### 3.1. Modelización clásica de plasticidad

En esta sección se exploran modelos locales de plasticidad en un marco de formulación estándar, basándose en los trabajos de [34], [33], [4]. Para esto, se explora la modelización matemática de plasticidad basada en la superficie de fluencia y las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Esto se realiza para el modelo de plasticidad perfecta, y luego se generaliza para incorporar efectos de endure-

cimiento. Además, se desarrolla el modelo de viscoplasticidad, el cual incorpora el efecto de la velocidad de carga.

### 3.1.1. Modelización constitutiva de plasticidad

En esta sección se exploran los modelos locales de plasticidad perfecta y plasticidad con endurecimiento isotrópico, sin incorporar los efectos de la velocidad de carga.

#### 3.1.1.1. Plasticidad perfecta

La plasticidad perfecta constituye el modelo más simple de plasticidad, ya que incluye solo una variable interna correspondiente a la deformación plástica  $\epsilon_p$ . Sin embargo, la implementación numérica para obtener la respuesta global puede resultar en un problema difícil de enfrentar, como se muestra en el Capítulo 5.

En la Figura 3.1, se puede observar un mecanismo prototipo de plasticidad perfecta, así como una típica curva esfuerzo-deformación.

#### Criterio de fluencia y ecuaciones constitutivas

Se define la energía libre en función de la variable interna de plasticidad [33]:

$$\Psi(\epsilon, \epsilon_p) = \frac{1}{2}E(\epsilon - \epsilon_p)^2 \quad (3.1)$$

donde  $E$  es el módulo elástico. Utilizando los resultados obtenidos en la Sección 2.3, se obtienen las ecuaciones constitutivas:

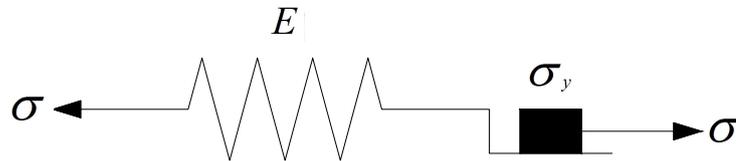
$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad \sigma_p = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_p} = E(\epsilon - \epsilon_p) \equiv \sigma \quad (3.2)$$

Por otro lado, se aplica el concepto clásico de la función de fluencia descrito en la Sección 2.3 para establecer las leyes de evolución. Se define la región elástica  $\mathbb{E}_\sigma$  con una superficie de fluencia  $\partial \mathbb{E}_\sigma$ :

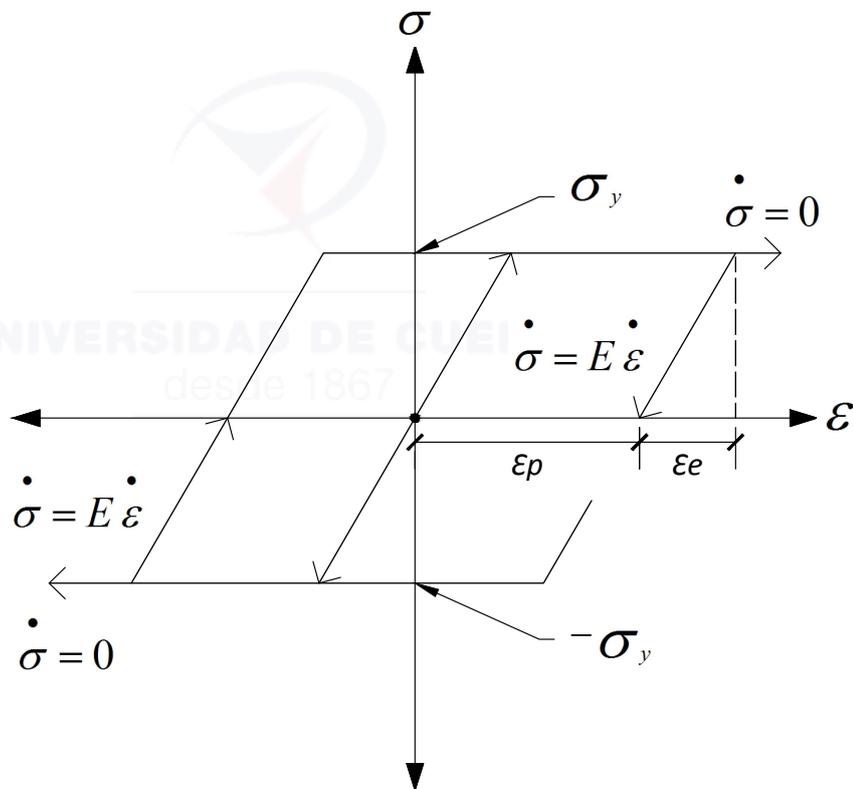
$$\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) \leq 0\}, \quad \partial \mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = 0\} \quad (3.3)$$

donde  $f$  es la función de fluencia definida por:

$$f(\epsilon, \epsilon_p) = f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (3.4)$$



(a) Modelo reológico



(b) Curva típica esfuerzo-deformación

Figura 3.1: Prototipo de plasticidad perfecta

El modelo reológico está compuesto por un resorte con rigidez  $E$  correspondiente a la deformación elástica y un dispositivo friccionante con límite de fluencia  $\sigma_y$ , el cual se activa una vez superado dicho esfuerzo, dando paso a deformaciones plásticas. Las fases correspondientes a cargas y descargas elásticas en la curva esfuerzo-deformación se atribuyen al funcionamiento del resorte únicamente, mientras que en la fase de carga inelástica, contribuye el mecanismo friccionante.

donde  $\sigma_y$  es el esfuerzo de fluencia. De la ecuación anterior, se observa que el módulo del esfuerzo es siempre igual o menor al esfuerzo de fluencia, por lo que el rango admisible de esfuerzos se encuentra en el intervalo cerrado  $[-\sigma_y, \sigma_y]$ . Se analizan los siguientes casos:

1. En el caso que el esfuerzo aplicado  $|\sigma|$  sea menor al esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ , no existe variación en la variable interna de plasticidad, por lo que se cumple:  $\dot{\epsilon}_p = 0 \Leftrightarrow f(\epsilon, \epsilon_p) < 0$ .
2. Por otro lado, si el valor de  $|\sigma|$  es igual al esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ , se define la tasa de variación de la deformación plástica  $|\dot{\epsilon}_p| = \lambda \Leftrightarrow f(\epsilon, \epsilon_p) = 0$ . A la constante  $\lambda \geq 0$  se le conoce como el multiplicador plástico.

### Regla de flujo y condiciones complementarias

Los dos casos descritos en la sección anterior resultan en la ley de evolución de la deformación plástica, conocida como la regla de flujo:

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma) = \lambda \text{sign}(\sigma) \quad (3.5)$$

donde se han utilizado los conceptos descritos en la Sección 2.3.2. Utilizando esta expresión en la ecuación constitutiva (3.2), se obtiene la siguiente ecuación diferencial del esfuerzo:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} - \lambda E \text{sign}(\sigma) \quad (3.6)$$

Se procede a definir condiciones complementarias. Primero, se observa que el esfuerzo debe encontrarse dentro del rango admisible. Además, el flujo plástico  $\dot{\epsilon}_p \neq 0$  puede ocurrir sólo en la superficie de fluencia. Luego, las condiciones KKT resultan en:

$$\lambda \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0, \quad \lambda f(\sigma) = 0 \quad (3.7)$$

Por otro lado, si se asume un esfuerzo impuesto en un tiempo  $t$  de manera que  $\sigma(t) \in \partial\mathbb{E} \Leftrightarrow f[\sigma(t)] = 0$ , se puede observar que  $\dot{f}[\sigma(t)] \leq 0$ . Esto se debe a que un  $\dot{f}[\sigma(t)]$  positivo implicaría un  $f[\sigma(t + \delta t)]$  positivo para un paso de tiempo, lo cual infringe la condición impuesta por la función de fluencia  $f(\sigma) \leq 0$ . Luego, se pueden establecer condiciones adicionales, mediante las cuales se puede

determinar el flujo plástico  $\lambda \geq 0$  en un tiempo  $t$  [34]:

$$\lambda \geq 0, \quad \dot{f}(\sigma) \leq 0, \quad \lambda \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (3.8)$$

A éstas se les conoce como las condiciones de consistencia y establecen que para que la deformación plástica pueda evolucionar, el esfuerzo debe persistir en la superficie de fluencia.

### Relación tangente elasto-plástica

Considérese un estado de carga  $\sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Leftrightarrow f(\sigma) < 0$ . Tomando en cuenta las condiciones KKT, se establece que  $\lambda = 0$ , definiendo una respuesta elástica. Luego, de (3.6), se plantea la relación entre la tasa de esfuerzo y tasa de deformación para una carga elástica:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad (3.9)$$

Por otro lado, considérese ahora un estado de carga  $\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma \Leftrightarrow f(\sigma) = 0$ . De las condiciones KKT, se tiene que  $\lambda \geq 0$ . Como ya se mencionó, las condiciones de consistencia permiten la obtención del multiplicador plástico  $\lambda$ , para lo que se define:

$$\dot{f}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma) \dot{\sigma} \leq 0 \quad (3.10)$$

Reemplazando (3.6) en la expresión anterior, se tiene:

$$\dot{f}(\sigma) = \text{sign}(\sigma) E \dot{\epsilon} - E \lambda \leq 0 \quad (3.11)$$

Dado que  $E\lambda$  es siempre mayor a cero, se describen dos casos admisibles:

1. En el caso que  $\dot{\epsilon}$  y  $\sigma$  tengan signo contrario, se requiere un  $\lambda = 0$  para el cumplimiento de la desigualdad. Esto define una descarga elástica, de manera que  $\dot{f}(\sigma) < 0$ . La evolución viene dada por la ecuación (3.9).
2. En el caso que  $\dot{\epsilon}$  y  $\sigma$  tengan el mismo signo, se requiere un  $\lambda > 0$  para el cumplimiento de la desigualdad. Esto define un estado de fluencia (plástico), de manera que, por las condiciones de consistencia,  $\dot{f}(\sigma) = 0$ . Ahora, es

posible despejar el multiplicador plástico de (3.11), obteniéndose:

$$\lambda = \text{sign}(\sigma)\dot{\epsilon} \Rightarrow \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_p \quad (3.12)$$

Reemplazando estos resultados en (3.6), se obtiene, para un estado de carga plástico:

$$\dot{\sigma} = 0 \Leftrightarrow \lambda > 0 \quad (3.13)$$

Este resultado es evidente en la gráfica esfuerzo-deformación característica de la plasticidad perfecta, como se puede apreciar en la Figura 3.1.

### Disipación de energía

En esta sección, se verifica el cumplimiento de los principios termodinámicos para el modelo planteado. En la termodinámica clásica, la desigualdad de disipación establece que la tasa de disipación mecánica  $D$  debe ser mayor o igual a cero, lo cual, para un proceso isotérmico, se tiene [4]:

$$D = \sigma\dot{\epsilon} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.14)$$

Es fácil ver que la expresión anterior resulta directamente de la desigualdad de Clausius-Duhem (2.15). Para este caso, la disipación de energía se atribuye a las dos variables de estado: la deformación total y la deformación plástica. Aplicando la regla de la cadena a la energía libre, se obtiene:

$$D = \sigma\dot{\epsilon} - \frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon}\dot{\epsilon} - \frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon_p}\dot{\epsilon}_p \geq 0 \quad (3.15)$$

Utilizando las ecuaciones constitutivas (3.2) y la regla de flujo (3.5), se define la desigualdad de disipación, la cual resulta en el potencial de disipación plástico  $\Phi$ :

$$D = \Phi = \sigma\dot{\epsilon}_p = \lambda\sigma \text{sign}(\sigma) \geq 0 \quad (3.16)$$

Se analizan los dos resultados posibles:

1. Para  $\dot{\epsilon}_p = 0$ , se tiene  $\Phi = 0$ , lo cual es un resultado conocido para un estado de carga elástica.



2. Para  $\dot{\epsilon}_p \neq 0$ , se tiene, de la definición de  $\lambda \geq 0$ , que siempre se cumple la desigualdad para el modelo de plasticidad perfecta.

### 3.1.1.2. Plasticidad con endurecimiento isotrópico

En esta sección se generaliza el modelo de plasticidad perfecta desarrollado en la sección anterior para incorporar efectos de endurecimiento. En el caso de plasticidad perfecta, la región elástica  $\mathbb{E}_\sigma$  no varía con la deformación plástica. Por otro lado, en el modelo de endurecimiento,  $\mathbb{E}_\sigma$  se expande conforme aumenta la deformación plástica  $\epsilon_p$ . Se toman las siguientes consideraciones en el modelo [34]:

- El endurecimiento es isotrópico. Esto es, el centro de  $\mathbb{E}_\sigma$  se mantiene en el origen durante toda la evolución.
- El endurecimiento es linealmente proporcional al flujo plástico  $|\dot{\epsilon}_p|$ . Se relacionan en función de una constante de endurecimiento  $H$ .

En la Figura 3.2, se puede apreciar un mecanismo prototipo que simula el comportamiento de plasticidad con endurecimiento, así como una típica curva esfuerzo-deformación.

### Criterio de fluencia y ecuaciones constitutivas

Se define la energía libre en función de la variable interna de plasticidad y una variable interna de endurecimiento isotrópico  $\kappa$  [33]:

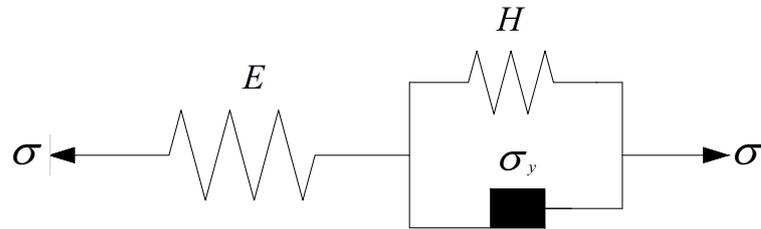
$$\Psi(\epsilon, \epsilon_p, \kappa) = \frac{1}{2}E(\epsilon - \epsilon_p)^2 + \frac{1}{2}H\kappa^2 \quad (3.17)$$

donde  $H$  es la constante de endurecimiento. Nuevamente, se obtienen las ecuaciones constitutivas:

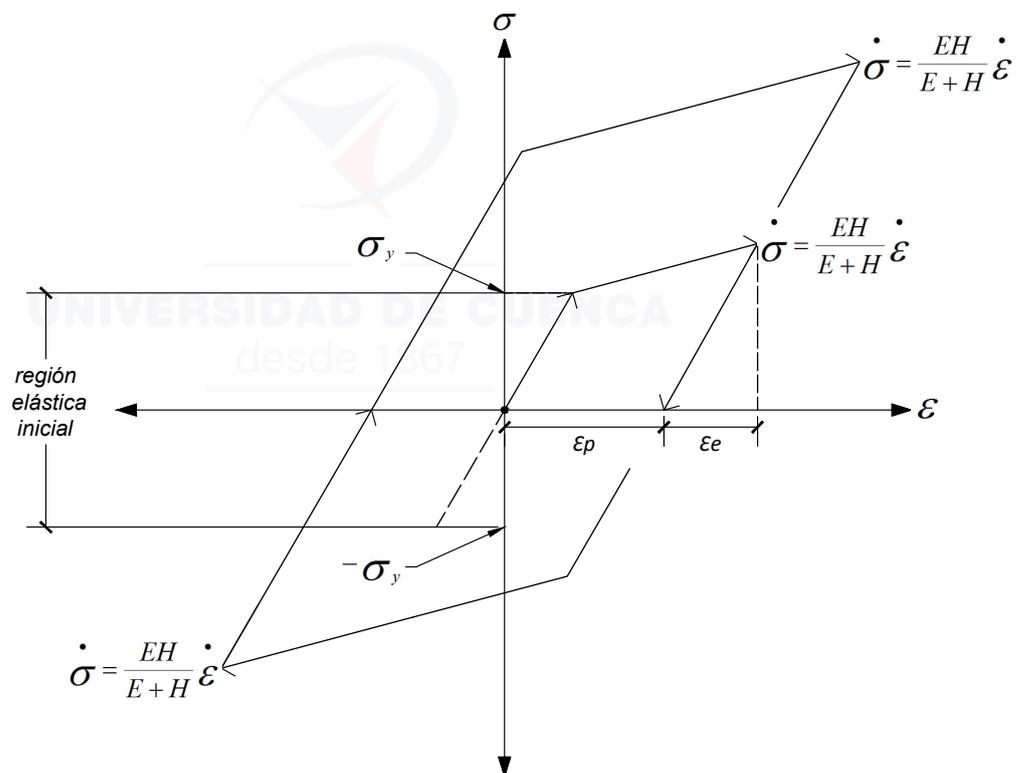
$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad \sigma = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_p} = E(\epsilon - \epsilon_p) \equiv \sigma \quad (3.18)$$

Adicionalmente, se define la fuerza disipativa  $k$  asociada a la variable interna  $\kappa$ :

$$k = -\frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} = -H\kappa \quad (3.19)$$



(a) Modelo reológico



(b) Curva típica esfuerzo-deformación

Figura 3.2: Prototipo de plasticidad con endurecimiento isotrópico

El modelo reológico está compuesto por un resorte con rigidez  $E$  correspondiente a la deformación elástica y un dispositivo friccionante con límite de fluencia  $\sigma_y$  funcionando en paralelo con un resorte de endurecimiento con módulo  $H$ . Como se puede observar en la Figura 3.2b, el esfuerzo inicial de fluencia (y por lo tanto la región elástica) cambia conforme evoluciona la plasticidad con endurecimiento, el cual, como se verá, está directamente relacionado a la deformación plástica.



Luego, la función de fluencia está definida por:

$$f(\sigma, \kappa) = |\sigma| - [\sigma_y + H\kappa] = |\sigma| - \sigma_y + k \leq 0 \quad (3.20)$$

Para poder definir la evolución del sistema, se debe definir la relación entre la plasticidad y el endurecimiento. Para esto, se considera la relación más simple, de manera que [34]:

$$\dot{\kappa} = |\dot{\epsilon}_p| \quad (3.21)$$

### Regla de flujo y condiciones complementarias

De manera análoga a lo desarrollado para plasticidad perfecta, se obtienen las reglas de flujo asociadas para la evolución de las variables internas:

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma, k) = \lambda \text{sign}(\sigma) \quad (3.22)$$

$$\dot{\kappa} = \lambda \frac{\partial}{\partial k} f(\sigma, k) = \lambda \quad (3.23)$$

donde nuevamente se han utilizado los conceptos descritos en la Sección 2.3.2. Ingresando la regla de flujo (3.22) en la ecuación constitutiva (3.18), se obtiene la misma ecuación diferencial del esfuerzo (3.6). Además, se aplica el mismo criterio de las condiciones KKT, las cuales ahora se definen de la siguiente manera:

$$\lambda \geq 0, \quad f(\sigma, k) \leq 0, \quad \lambda f(\sigma, k) = 0 \quad (3.24)$$

Asimismo, se tienen las condiciones de consistencia:

$$\lambda \geq 0, \quad \dot{f}(\sigma, k) \leq 0, \quad \lambda \dot{f}(\sigma, k) = 0 \quad (3.25)$$

Cabe recalcar que se pueden definir formulaciones alternativas para la evolución de  $\kappa$ . En este caso, la ecuación (3.21) establece la formulación conocida como *deformación plástica equivalente* [34].

### Relación tangente elasto-plástica

De manera similar a lo desarrollado para plasticidad perfecta, considérese un estado de carga elástica, de manera que  $f(\sigma, k) < 0$  y  $\lambda = 0$ . En este caso, la

evolución aún viene dada por la expresión (3.9).

Por otro lado, considérese un estado de carga plástica, de manera que  $f(\sigma, k) = 0$  y  $\lambda \geq 0$ . De las condiciones de consistencia, se tiene:

$$\dot{f}(\sigma, k) = \text{sign}(\sigma)E\dot{\epsilon} - E\lambda - H\dot{k} = \text{sign}(\sigma)E\dot{\epsilon} - \lambda(E + H) \leq 0 \quad (3.26)$$

Nuevamente, se deben definir los dos casos admisibles.

1. En el caso que  $\sigma$  y  $\dot{\epsilon}$  tengan signo contrario, se requiere un  $\lambda = 0$  para el cumplimiento de la desigualdad. Esto define una descarga elástica, por lo que  $\dot{f}(\sigma, k) < 0$ . La evolución viene dada por (3.9).
2. Por otro lado, si  $\sigma$  y  $\dot{\epsilon}$  tienen el mismo signo, se requiere un  $\lambda = 0$  para el cumplimiento de la desigualdad. Esto define un estado de endurecimiento, de manera que  $\dot{f}(\sigma, k) = 0$ . Despejando de (3.26), se obtiene el multiplicador plástico:

$$\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma)E\dot{\epsilon}}{E + H} \quad (3.27)$$

Reemplazando en (3.6), se obtiene la relación elasto-plástica para un estado de fluencia:

$$\dot{\sigma} \frac{EH}{E + H} \dot{\epsilon} \Leftrightarrow \lambda > 0 \quad (3.28)$$

A  $\frac{EH}{E + H}$  se le conoce como el módulo tangente elasto-plástico. Representa la pendiente de la curva esfuerzo-deformación en la fase de fluencia.

El concepto de endurecimiento y el modelo explorado se pueden generalizar para los siguientes casos [33]:

- Para  $H = 0$ , se recobra el modelo de plasticidad perfecta.
- Para un valor de  $H < 0$ , se obtiene un comportamiento de plasticidad con ablandamiento.
- Un  $H \approx \infty$  implicaría que el módulo elasto-plástico tienda a  $E$ , resultando en un comportamiento elástico.
- Un  $H = -E$  implicaría que el módulo elasto-plástico tienda a infinito en valor absoluto, resultando en un comportamiento infinitamente frágil.

### Disipación de energía

Retomando nuevamente la expresión (2.15), se establece la desigualdad de disipación en función de las tres variables de estado para el caso de endurecimiento:

$$D = \sigma \dot{\epsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_p} \dot{\epsilon}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \geq 0 \quad (3.29)$$

Utilizando las ecuaciones constitutivas (3.18) y la reglas de flujo asociadas (3.22) y (3.23), se define la desigualdad de disipación como el potencial de disipación de plasticidad con endurecimiento  $\Phi$ :

$$D = \Phi = \sigma \dot{\epsilon}_p + k \dot{\kappa} = \lambda [\sigma \text{sign}(\sigma) + k] \geq 0 \quad (3.30)$$

Se analizan los siguientes casos posibles:

1. Para  $\lambda = 0$ , se tiene, nuevamente  $\Phi = 0$ , definiendo un estado de carga elástica.
2. Para  $\lambda \neq 0$ , se tiene un estado de fluencia. De las condiciones KKT, se establece  $f(\sigma, k) = 0$ . Despejando de (3.20), se tiene que  $|\sigma| + k = \sigma_y$ . Ya que  $|\sigma| = \sigma \text{sign}(\sigma)$ , la desigualdad de disipación resulta en:

$$\Phi = \lambda \sigma_y \geq 0 \quad (3.31)$$

De las definiciones de  $\lambda$  y  $\sigma_y$ , se concluye que se cumple la desigualdad para el modelo de endurecimiento isotrópico.

#### 3.1.1.3. Algoritmo local para plasticidad

En esta sección se desarrolla un algoritmo para obtener la evolución local de plasticidad con endurecimiento isotrópico, siguiendo el procedimiento desarrollado en [34]. Para esto, se opta por el *método de Euler*, el cual permite la obtención de un *algoritmo de mapeo* estándar basado en la imposición de desplazamientos.

#### Estado de evolución

Considérese un estado admisible  $(\sigma, k) \in \mathbb{E}_\sigma$  dentro de la región elástica, en el cual se impone una tasa de deformación  $\dot{\epsilon}$ . Congelando el flujo plástico, se define



un nuevo *estado de prueba*:

$$\dot{\sigma}^{\text{Pr}} = E\dot{\epsilon}, \quad \dot{\kappa}^{\text{Pr}} = 0 \quad (3.32)$$

Ya que se ha congelado el flujo plástico, este estado representa una evolución elástica, la cual puede resultar en un estado ficticio. En este caso, se deberá verificar la solución y realizar la corrección adecuada. Reemplazando la expresión anterior en (3.6), se define el estado actualizado:

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{\text{Pr}} - \lambda E \text{sign}(\sigma), \quad \dot{\kappa} = \lambda \quad (3.33)$$

Queda por determinar el valor del multiplicador plástico  $\lambda \geq 0$ . Para esto, se recurre a la función de fluencia y a las condiciones complementarias. Primero, si  $f(\sigma, \kappa) < 0 \Rightarrow \lambda = 0$ , se concluye que el estado de prueba es el estado real, representando una respuesta elástica ante la deformación impuesta. Por otro lado, si  $f(\sigma, \kappa) = 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ , se debe recurrir a las condiciones de consistencia para encontrar el valor del multiplicador plástico. Para esto, se define la expresión (3.26) en términos del *estado de prueba*:

$$\dot{f}(\sigma, \kappa) = \text{sign}(\sigma)\dot{\sigma}^{\text{Pr}} - \lambda(E + H) \leq 0 \quad (3.34)$$

De lo anterior, se analizan dos casos posibles:

1. En el caso que  $\text{sign}(\sigma)\dot{\sigma}^{\text{Pr}} < 0$ , se requiere un  $\lambda = 0$  para el cumplimiento de la desigualdad. Esto implica que la respuesta es una descarga elástica, de manera que  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{\text{Pr}}$  y  $\dot{\kappa} = \dot{\kappa}^{\text{Pr}}$ .
2. Por otro lado, si  $\text{sign}(\sigma)\dot{\sigma}^{\text{Pr}} > 0$ , se requiere un  $\lambda > 0$  para el cumplimiento de la desigualdad. Esto implica una respuesta plástica y aplicando las condiciones de consistencia, se puede despejar el multiplicador plástico de (3.34):

$$\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma)\dot{\sigma}^{\text{Pr}}}{E + H} \quad (3.35)$$

La evolución ahora está definida al reemplazar esta expresión en (3.33), corrigiendo el *estado de prueba*.

Una vez establecidos estos conceptos, se debe definir un método algorítmico para la obtención de los parámetros que determinan el estado actualizado luego de la imposición de un desplazamiento.

### Discretización temporal

Se procede a resolver el modelo de forma numérica mediante una discretización temporal. Considérese un estado en un tiempo  $t_n$  completamente definido por  $\{\epsilon_n, \epsilon_{p_n}, \kappa_n\}$ . De las ecuaciones constitutivas, se conoce el esfuerzo  $\sigma_n$ :

$$\sigma_n = E[\epsilon_n - \epsilon_{p_n}] \quad (3.36)$$

En un incremento de tiempo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , se aplica un incremento de deformación  $\Delta \epsilon = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$ . El problema radica en actualizar las variables de estado para  $t_{n+1}$ , encontrando  $\{\epsilon_{n+1}, \epsilon_{p_{n+1}}, \kappa_{n+1}\}$ . Esto define el nuevo estado:

$$\sigma_{n+1} = E[\epsilon_{n+1} - \epsilon_{p_{n+1}}] \quad (3.37)$$

### Procedimiento incremental

Para obtener las variables de estado luego de un paso de tiempo, se plantea el problema de forma incremental. Se define el multiplicador plástico para el tiempo  $t_{n+1}$ :

$$\lambda_{n+1} = \frac{\epsilon_{p_{n+1}} - \epsilon_{p_n}}{\Delta t} \text{sign}(\sigma_{n+1}) = \frac{\kappa_{n+1} - \kappa_n}{\Delta t} \quad (3.38)$$

Luego, se define un multiplicador de Lagrange  $\Delta \lambda = \lambda_{n+1} \Delta t \geq 0$ . Reemplazando esto en la expresión anterior, se obtiene la actualización de las variables internas:

$$\epsilon_{p_{n+1}} = \epsilon_{p_n} + \Delta \lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}), \quad \kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta \lambda \quad (3.39)$$

El problema se reduce a encontrar  $\Delta \lambda$  de manera adecuada. Para esto, se recurre a la versión discreta de las condiciones KKT:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - [\sigma_y + H\kappa_{n+1}] \leq 0, \quad \Delta \lambda \geq 0, \quad \Delta \lambda f_{n+1} = 0 \quad (3.40)$$

Establecido esto, se retoma el concepto del estado de prueba. Congelando la

evolución de la deformación plástica, se tiene para el tiempo  $t_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1}^{\text{pr}} &= E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{p_n}) = \sigma_n + E\Delta\epsilon \\
 \epsilon_{p_{n+1}}^{\text{pr}} &= \epsilon_{p_n} \\
 \kappa_{n+1}^{\text{pr}} &= \kappa_n \\
 f_{n+1}^{\text{pr}} &= |\sigma_{n+1}^{\text{pr}}| - [\sigma_y + H\kappa_n]
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Nuevamente, esto representa un paso de carga elástica, por lo que puede ser una respuesta ficticia al incremento de deformación. Para determinar la respuesta correcta, se analizan los siguientes casos:

1. Si  $f_{n+1}^{\text{pr}} \leq 0$ , el estado de prueba es una solución admisible ya que satisface las condiciones KKT con  $\Delta\lambda = 0$ . Luego, la respuesta viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{p_{n+1}} &= \epsilon_{p_{n+1}}^{\text{pr}} \\
 \kappa_{n+1} &= \kappa_{n+1}^{\text{pr}} \\
 \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{pr}}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

2. Por otro lado, el caso  $f_{n+1}^{\text{pr}} > 0$  es inadmisibles ya que no cumple con la restricción unilateral impuesta por la función de fluencia. Evidentemente, el estado de prueba no es una solución válida y se debe corregir mediante  $\Delta\lambda > 0 \Rightarrow f_{n+1} = 0$ , representando una respuesta plástica. Se define el nuevo estado de carga en función del *estado de prueba*:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1} &= E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{p_{n+1}}) \\
 &= E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{p_n}) - E(\epsilon_{p_{n+1}} - \epsilon_{p_n}) \\
 &= \sigma_{\text{pr}}^{n+1} - E\Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1})
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Mientras que la evolución está definida por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{pr}} - E\Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\
 \epsilon_{p_{n+1}} &= \epsilon_{p_n} + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\
 \kappa_{n+1} &= \kappa_n + \Delta\lambda \\
 f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - [\sigma_y + H\kappa_{n+1}]
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Agrupando términos, la primera expresión de (3.44) resulta en:

$$[|\sigma_{n+1}| + \Delta\lambda E] \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{\text{pr}}| \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{pr}}) \tag{3.45}$$

Dado que  $[|\sigma_{n+1}| + \Delta\lambda E]$  es siempre positivo, se concluye que  $\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign} \sigma_{n+1}^{\text{pr}}$ . Entonces, se tiene que:

$$|\sigma_{n+1}| + \Delta\lambda E = |\sigma_{n+1}^{\text{pr}}| \quad (3.46)$$

Haciendo uso de la ecuación anterior y reemplazando en la cuarta expresión de (2.71), se define la función de fluencia como:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}^{\text{pr}}| - E\Delta\lambda - [\sigma_y + H\kappa_{n+1}] - H\kappa_n + H\kappa_n \\ &= |\sigma_{n+1}^{\text{pr}}| - E\Delta\lambda - [\sigma_y + H\kappa_n] - H[\kappa_{n+1} - \kappa_n] \\ &= f_{n+1}^{\text{pr}} - \Delta\lambda(E + H) = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

De la expresión anterior, se despeja el multiplicador de Lagrange:

$$\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{\text{pr}}}{E + H} \quad (3.48)$$

Finalmente, se obtiene la respuesta de manera explícita:

$$\begin{aligned} \epsilon_{p_{n+1}} &= \epsilon_{p_n} + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{pr}}) \\ \kappa_{n+1} &= \kappa_n + \Delta\lambda \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{pr}} - \Delta\lambda E \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{pr}}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como ya se mencionó, esta formulación resulta en un *algoritmo de mapeo* estándar. En el Algoritmo 1, se resume el procedimiento y se puede observar una interpretación gráfica en la Figura 3.3.

### 3.1.2. Modelización de viscoplasticidad

En esta sección se desarrolla la formulación clásica de viscoplasticidad, incorporando los efectos de la velocidad de carga a la respuesta elasto-plástica explorada en la sección anterior. Específicamente, se desarrolla el modelo de viscoplasticidad con endurecimiento isotrópico basándose en los trabajos de [34], [33]. La viscosidad funciona como regularizador de un problema mal planteado que resulta al obtener la respuesta global con plasticidad perfecta. Ya que de la plasticidad con endurecimiento se puede recobrar el modelo de plasticidad perfecta, se desarrolla esta sección para el caso más general.

A diferencia de los modelos de plasticidad explorados en secciones anteriores, la viscoplasticidad incorpora el concepto de sobrecarga. De esta manera, se per-



---

**Algoritmo 1** Algoritmo de mapeo para endurecimiento isotrópico

---

**Entrada:**  $\epsilon_n, \epsilon_{p_n}, \kappa_n, \Delta\epsilon$

**Salida:**  $\epsilon_{n+1}, \epsilon_{p_{n+1}}, \kappa_{n+1}, \sigma_{n+1}$

1: Calcular la deformación actualizada

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon$$

2: Calcular el estado de prueba

$$\sigma_{n+1}^{\text{pr}} = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{p_n}), \quad f_{n+1}^{\text{pr}} = |\sigma_{n+1}^{\text{pr}}| - [\sigma_y + H\kappa_n]$$

3: **if**  $f_{n+1}^{\text{pr}} \leq 0$  **then**

4:   **return** Paso de carga elástica

$$\epsilon_{p_{n+1}} = \epsilon_{p_{n+1}}^{\text{pr}}, \quad \kappa_{n+1} = \kappa_{n+1}^{\text{pr}}, \quad \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{pr}}$$

5: **else**

6:   Respuesta plástica, resolver el mapeo

$$\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{\text{pr}}}{E + H}$$

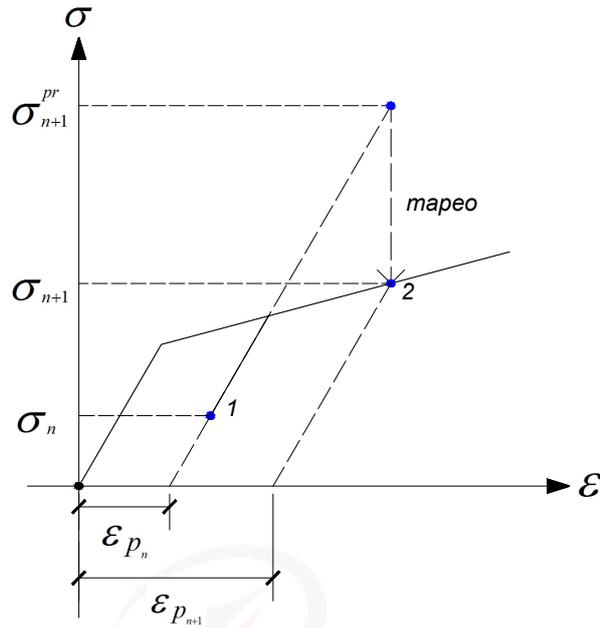
$$\epsilon_{p_{n+1}} = \epsilon_{p_n} + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{pr}})$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\lambda$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{pr}} - \Delta\lambda E \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{pr}})$$

7: **end if**

---


 Figura 3.3: Descripción gráfica del *algoritmo de mapeo*

Se realiza la corrección del esfuerzo de prueba elástico para llegar del punto 1 al punto 2 de manera adecuada, mediante el multiplicador plástico.

mite que el esfuerzo exceda la superficie de fluencia; pues este esfuerzo adicional se le atribuye a un mecanismo de disipación dependiente de la velocidad de carga. Un prototipo de un mecanismo de viscoplasticidad con endurecimiento isotrópico se puede apreciar en la Figura 3.4.

### 3.1.2.1. Modelo de viscoplasticidad con endurecimiento isotrópico

#### Criterio de fluencia y ecuaciones constitutivas

La energía libre aún está definida en función de la variable interna de plasticidad y la variable de endurecimiento, por lo que se escribe:

$$\Psi(\epsilon, \epsilon_p, \kappa) = \frac{1}{2}E(\epsilon - \epsilon_p)^2 + \frac{1}{2}H\kappa^2 \quad (3.50)$$

Consiguientemente, se mantienen las ecuaciones constitutivas:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad \sigma_p = -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_p} = E(\epsilon - \epsilon_p) \equiv \sigma \quad (3.51)$$

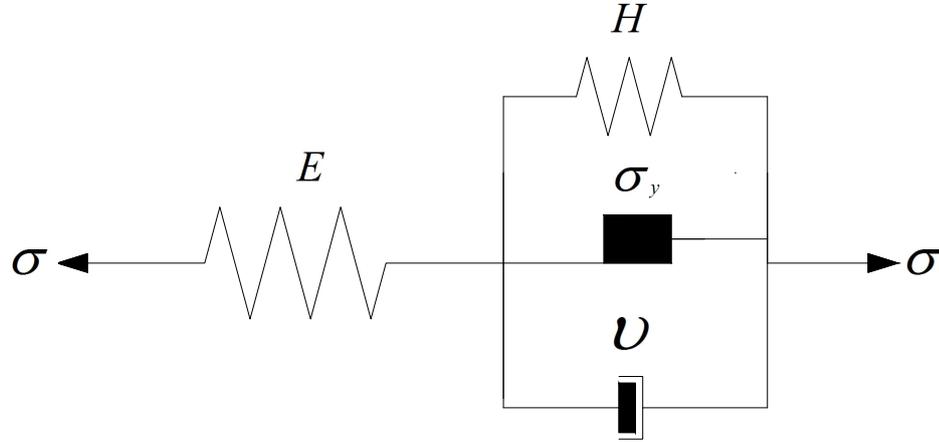


Figura 3.4: Modelo reológico de viscoplasticidad con endurecimiento isotrópico. Inicia con el funcionamiento de un resorte elástico con módulo  $E$ . Luego, se activan los mecanismos que funcionan en paralelo, los cuales consisten en un resorte de endurecimiento con módulo  $H$ , un mecanismo friccionante con límite de fluencia  $\sigma_y$  y un amortiguador viscoso con constante  $\nu$ . El amortiguador permite la aparición de una sobrecarga por encima de la superficie de fluencia de los mecanismos de plasticidad y endurecimiento.

De la misma forma, se mantiene la variable dual de endurecimiento:

$$k = -\frac{\Psi}{\kappa} = -H\kappa \quad (3.52)$$

mientras que se tiene la superficie de fluencia cuasiestática [33]:

$$f(\sigma, k) = |\sigma| - [\sigma_y + H\kappa] = |\sigma| - \sigma_y + k \quad (3.53)$$

En este caso, se define a  $\sigma_y \geq 0$  como el esfuerzo de fluencia cuasiestático [33]. A diferencia de la plasticidad, se permite al esfuerzo superar la superficie de fluencia  $\partial\mathbb{E}_\sigma$ , de manera que  $|\sigma| > \sigma_y + H\kappa$  es una solución admisible. Con esto, se tienen los siguientes casos:

1. Para  $f(\sigma, k) \leq 0$ , no existe evolución en las variables internas, de manera que  $\dot{\epsilon}_p = 0$ . Nótese que a diferencia del modelo de plasticidad, la respuesta elástica está definida por  $f(\sigma, k) \leq 0$  en lugar de  $f(\sigma, k) < 0$ .
2. Por otro lado, si  $f(\sigma, k) > 0$ , existe un esfuerzo adicional a  $\sigma_y + H\kappa$  deno-

minado sobrecarga  $\sigma_{ex}$ , definido por:

$$\sigma_{ex} = (|\sigma| - [\sigma_y + H\kappa]) \text{sign}(\sigma) = f(\sigma, k) \text{sign}(\sigma) \quad (3.54)$$

Además, evoluciona la variable de plasticidad, de manera que  $|\dot{\epsilon}_p| = \lambda > 0 \Leftrightarrow f(\sigma, k) > 0$ . Definiendo a  $v$  como la constante de viscosidad, se tiene la relación entre el esfuerzo y la tasa de deformación  $\sigma_{ex} = v\dot{\epsilon}_p$ . Usando (3.54), se despeja:

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{1}{v}\sigma_{ex} = \frac{1}{v}f(\sigma, k) \text{sign}(\sigma) \quad (3.55)$$

Haciendo uso de la función de rampa  $\langle f \rangle = \frac{f+|f|}{2}$  y de (3.55), se define la regla de flujo viscoplástica:

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\langle f(\sigma, k) \rangle}{v} \text{sign}(\sigma) \quad (3.56)$$

Nuevamente, se define la evolución de la variable de endurecimiento mediante la expresión de *deformación plástica equivalente*, de manera que:

$$\dot{\kappa} = |\dot{\epsilon}_p| \quad (3.57)$$

Lo anterior resulta de la formulación de Perzyna. En la siguiente sección, se explora un modelo equivalente que resulta útil para el análisis numérico [34].

### Proyección al punto más cercano

En esta sección se explora la formulación equivalente de Duvaut y Lions, siguiendo el procedimiento desarrollado en [34]. Primero, se introduce el concepto de tiempo de relajación definido por  $\tau = \frac{v}{E+H}$ . En [34], se describe a detalle su interpretación física. Con esto, se escribe (3.56) como:

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\sigma - [\sigma_y + H\kappa]}{E\tau} = \frac{\sigma - \mathbf{P}\sigma}{E\tau} \quad (3.58)$$

donde  $\mathbf{P}\sigma \in \mathbb{R} \rightarrow \partial E_\sigma$  es la proyección del esfuerzo al punto más cercano de la superficie de fluencia. Esta proyección representa la regularización definida por la viscoplasticidad.

### 3.1.2.2. Algoritmo local para viscoplasticidad

En esta sección se resume el desarrollo del algoritmo local de regularización con viscoplasticidad de [34]. Se basa en la idea de que mientras la constante de viscosidad tiende a cero, también lo hace la sobrecarga y la solución se aproxima a la plasticidad sin viscosidad. El mismo efecto se obtiene conforme disminuye la velocidad de carga, o en su defecto, aumenta el intervalo de tiempo en el que se aplica. En resumen, mientras  $t/\tau \rightarrow \infty$ , se pierde el efecto de la viscosidad y la solución se vuelve independiente de la velocidad de carga.

Llámesese  $\{\sigma_\infty, \kappa_\infty\}$  a la solución de plasticidad no viscosa obtenida mediante el Algoritmo 1. Generalizando los conceptos de la sección anterior, se escriben las leyes de evolución como:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_p &= \frac{\sigma - \sigma_\infty}{E\tau} \\ \dot{\kappa} &= \frac{\kappa - \kappa_\infty}{\tau}\end{aligned}\tag{3.59}$$

Como se puede ver, la proyección  $\mathbf{P}\sigma$  está definida por el conjunto de variables conocidas  $\{\sigma_\infty, \kappa_\infty\}$ . Luego, de la ecuación constitutiva del esfuerzo y de (3.59), se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} &= E\dot{\epsilon} + \frac{\sigma_\infty}{\tau} \\ \dot{\kappa} + \frac{\kappa}{\tau} &= \frac{\kappa_\infty}{\tau}\end{aligned}\tag{3.60}$$

Dadas las ecuaciones diferenciales que determinan la evolución de las variables, se debe resolver el problema numéricamente mediante una discretización temporal. El problema se reduce a encontrar las incógnitas  $\{\sigma_{n+1}, \epsilon_{p_{n+1}}, \kappa_{n+1}\}$  para un tiempo  $t_{n+1}$ , conociendo las variables actuales  $\{\sigma_n, \epsilon_{p_n}, \kappa_n\}$  en el tiempo  $t_n$ . Nuevamente, se impone un incremento de deformación en  $\Delta\epsilon$ , de manera que la deformación en el tiempo  $t_{n+1}$  viene dada por  $\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon$ . Para esto, se aproximan las ecuaciones diferenciales mediante las siguientes expresiones discretas:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right) &= E\Delta\epsilon_n + \sigma_n + \frac{\Delta t}{\tau}\sigma_\infty \\ \kappa_{n+1}\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right) &= \kappa_n + \frac{\Delta t}{\tau}\kappa_\infty\end{aligned}\tag{3.61}$$

Recordando el concepto del *estado de prueba* y haciendo uso de la primera ex-

presión de (3.59), se tiene el estado actualizado:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \frac{\sigma_{n+1}^{\text{pr}} + \frac{\Delta t}{\tau} \sigma_{\infty}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \\ \kappa_{n+1} &= \frac{\kappa_n + \frac{\Delta t}{\tau} \kappa_{\infty}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}\end{aligned}\quad (3.62)$$

En el Algoritmo 2, se resume el procedimiento para la evolución del modelo de viscoplasticidad [34].

---

**Algoritmo 2** Algoritmo local de viscoplasticidad

---

**Entrada:**  $\epsilon_n, \epsilon_{p_n}, \kappa_n, \Delta\epsilon$

**Salida:**  $\epsilon_{n+1}, \epsilon_{p_{n+1}}, \kappa_{n+1}, \sigma_{n+1}$

- 1: Calcular la deformación actualizada

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon$$

- 2: Calcular la solución independiente de la velocidad de carga  $\{\sigma_{\infty}, \kappa_{\infty}\}$  y el estado de prueba  $\{\sigma_{n+1}^{\text{pr}}, f_{n+1}^{\text{pr}}\}$  mediante el Algoritmo 1.
- 3: **if**  $f_{n+1}^{\text{pr}} \leq 0$  **then**
- 4:     **return** Paso de carga elástica del Algoritmo 1
- 5: **else**
- 6:     Respuesta viscoplástica, resolver la regularización

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{v}{E + H} \\ \sigma_{n+1} &= \frac{\sigma_{n+1}^{\text{pr}} + \frac{\Delta t}{\tau} \sigma_{\infty}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \\ \kappa_{n+1} &= \frac{\kappa_n + \frac{\Delta t}{\tau} \kappa_{\infty}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \\ \epsilon_{p_{n+1}} &= \epsilon_{n+1} - \frac{\sigma_{n+1}}{E}\end{aligned}$$

- 7: **end if**
-

## 3.2. El problema de valores de contorno

En esta sección se describe la forma fuerte y la forma débil del problema de valores de contorno y se obtiene la respuesta elasto-plástica global mediante el método de elementos finitos. El punto de partida es el balance de momento lineal, el cual es independiente del modelo constitutivo adoptado; pues representa un principio físico general. Se obtiene la respuesta de manera local mediante uno de los algoritmos desarrollados en las secciones anteriores y se obtiene un problema no lineal, el cual se resuelve iterativamente mediante el método de Newton-Raphson. Esta sección está basada en el desarrollo de [34].

### 3.2.1. Forma fuerte del problema de valores de contorno

Considérese la barra unidimensional de la Figura 1.3 ocupando un espacio  $\Omega = [0, L]$ . Para definir el problema de valores de contorno, se establecen las condiciones de frontera. Al tratarse de un problema cuasiestático, basta con imponer condiciones en el campo de desplazamientos. Se imponen condiciones tipo Dirichlet en  $\partial\Omega$ , de manera que:<sup>1</sup>

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = \bar{u}(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.63)$$

donde  $\bar{u}(t)$  es el desplazamiento impuesto y  $t \in [0, T]$  es un tiempo determinado dentro del dominio de tiempo en el cual se imponen desplazamientos.

Recordando la ecuación de balance de momento lineal (2.6), se escribe, en una dimensión:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - b_f - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (3.64)$$

Junto con las condiciones de frontera, esta ecuación define la forma fuerte del problema de valores de contorno, donde el campo de esfuerzos está definido por el campo de desplazamientos mediante las deformaciones. Para un cuerpo elástico, se tiene la relación lineal  $\sigma(x, t) = E\epsilon(x, t)$ . Por otro lado, si la evolución

---

<sup>1</sup>Otra posibilidad sería imponer una condición tipo Neumann en un extremo o en ambos. Podría imponerse, por ejemplo,  $\sigma(L, t) = \bar{\sigma}(t)$ ; sin embargo, esto generaría dificultades al momento incorporar efectos de ablandamiento mediante el daño. El problema quedaría mal planteado y no tendría una solución definida; pues existiría más de un posible desplazamiento para un mismo esfuerzo.

de la barra corresponde a uno de los modelos constitutivos locales desarrollados en las secciones anteriores, el problema se vuelve no lineal, estando el esfuerzo definido por la deformación de manera implícita mediante tasas de variación. Además, el problema se encuentra sujeto a consideraciones adicionales, como son las condiciones de carga y descarga y la función de fluencia.

### 3.2.2. Forma débil del problema de valores de contorno

Para resolver el problema mediante el método de elementos finitos, se debe definir el problema de valores de contorno mediante el principio de trabajo virtual. Se define una función de pesos  $w$  (un desplazamiento virtual), por la cual se multiplica la ecuación (3.64). Integrando ambos lados, se tiene:

$$\int_0^L w \rho \frac{\partial v}{\partial t} dx - \int_0^L w b_f dx - \int_0^L w \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = 0 \quad \forall w \text{ admisible} \quad (3.65)$$

Nótese que la función de pesos tiene que ser admisible. Específicamente, debe cumplir con las condiciones de frontera empleadas en el problema de valores de contorno. Integrando por partes el tercer término, se escribe la ecuación anterior como:

$$\int_0^L w \rho \frac{\partial v}{\partial t} dx - \int_0^L w b_f dx + \int_0^L \sigma \frac{\partial w}{\partial x} dx - w \sigma \Big|_0^L = 0 \quad \forall w \text{ admisible} \quad (3.66)$$

Junto con las condiciones de frontera, la ecuación (3.66) representa la forma débil del problema de valores de contorno. Al tratarse de un problema cuasiestático, el término que contiene la derivada de la velocidad se elimina. Con esto, la forma débil resulta en la resta del trabajo realizado por las fuerzas internas y el trabajo realizado por las fuerzas externas:

$$\underbrace{\int_0^L \sigma \frac{\partial w}{\partial x} dx}_{\text{por fuerzas internas}} - \underbrace{\left( \int_0^L w b_f dx + w \sigma \Big|_0^L \right)}_{\text{por fuerzas externas}} = 0 \quad \forall w \text{ admisible} \quad (3.67)$$

Por otro lado, el problema se resuelve con la imposición de condiciones tipo



Dirichlet. Además, no se imponen fuerzas de cuerpo, por lo que el problema se reduce a:

$$\int_0^L \sigma \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0 \quad \forall w \text{ admisible} \quad (3.68)$$

La solución del problema se basa en dos discretizaciones. La discretización temporal se realiza al actualizar las variables de estado mediante los algoritmos locales. Por otro lado, la discretización espacial determina la solución global, y se resuelve mediante el método de elementos finitos como se describe en la siguiente sección.

### 3.2.3. Solución mediante elementos finitos unidimensionales

La solución mediante el método de elementos finitos radica en encontrar una aproximación numérica para  $u(x, t)$ . Con esto, se encuentra el esfuerzo  $\sigma(x, t)$  mediante uno de los modelos constitutivos descritos anteriormente.

#### 3.2.3.1. Funciones de aproximación

Se definen las siguientes funciones de aproximación:

$$w(x) \approx w^h(x) = \sum_{i=1}^n w_i N_i(x), \quad \sigma(x, t) \approx \sigma^h(x, t) \quad \forall w^h \text{ admisible} \quad (3.69)$$

donde  $N_i(x)$  son los valores de un vector de funciones de forma y  $w_i$  son los valores de un vector de constantes. No se emplea la misma aproximación para el esfuerzo ya que éste se calcula de manera local mediante uno de los modelos constitutivos. Con esto, se define el problema aproximado de la siguiente manera:

$$\int_0^L \sigma^h \frac{dw^h}{dx} dx = \int_0^L \sigma^h \sum_{i=1}^n w_i \frac{dN_i(x)}{dx} dx = 0 \quad \forall w \text{ admisible} \quad (3.70)$$

Se definen los siguientes vectores:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \dots & \frac{dN_n}{dx} \end{bmatrix}$$

Con estas definiciones, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathbf{w}^T \sigma^h \mathbf{B}^T dx &= \mathbf{w}^T \int_0^L \sigma^h \mathbf{B}^T dx = \mathbf{w}^T [\mathbf{F}^{int}] = 0 \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{R} \quad \forall \mathbf{w} \text{ admisible} \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde  $\mathbf{R}$  se define como el *residuo* del sistema de ecuaciones.<sup>2</sup> Si bien  $\mathbf{w}$  es arbitrario, debe cumplir con ciertas condiciones de contorno. Por otro lado, se tiene que el estado en el contorno es conocido; pues se han impuesto condiciones tipo Dirichlet en los extremos. Esto implica que el sistema que se debe resolver es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} w_2 & \cdot & \cdot & \cdot & w_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2^{int} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{n-1}^{int} \end{bmatrix} = 0$$

donde los vectores anteriores corresponden a las versiones reducidas de  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{F}^{int}$ . Ya que los elementos  $w_i$  del vector reducido no están sujetos a ninguna restricción, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{red}^{int} = 0 \quad (3.72)$$

<sup>2</sup>Dado que no existen fuerzas externas en el modelo planteado, el *residuo*  $\mathbf{R}$  es igual al vector de fuerzas internas  $\mathbf{F}^{int}$ . En el caso general, se tiene  $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext}$ , donde el último término corresponde el vector de fuerzas externas.

donde el subíndice *red* hace referencia al vector reducido. Por simplicidad de nomenclatura, se omitirá este subíndice de aquí en adelante.

### 3.2.3.2. Discretización espacial

Se procede a construir las funciones de discretización. Para ello, se define una secuencia de elementos con dominio  $\Omega_e = [x_e, x_{e+1}]$ , de manera que  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e$ . Definiendo  $h_e = x_{e+1} - x_e$  como el tamaño de la malla de discretización, se emplean las funciones de forma lineales:

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} N_e^1 & N_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{e+1} - x}{h_e} & \frac{x - x_e}{h_e} \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_e} & \frac{1}{h_e} \end{bmatrix}$$

Con esto, se puede definir el vector de fuerzas internas de manera elemental:

$$\mathbf{f}_e^{int} = \int_0^{h_e} \sigma^h \mathbf{B}_e^T dx \quad (3.73)$$

Mediante la cuadratura de Gauss, el integral anterior viene dado por:

$$\mathbf{f}_e^{int} = \sum_{l=1}^m \mathbf{B}_e^T \sigma^h(x, t) \Big|_{x=x_e^l} \frac{h_e}{2} w^l \quad (3.74)$$

donde  $x_e^l$  representa los puntos de cuadratura dentro del elemento,  $w^l$  el factor de cuadratura, y  $m$  el número de puntos empleados. Esto implica que el esfuerzo se requiere conocer en puntos discretos correspondientes a los puntos de cuadratura. Para resolver este problema, se usa un solo punto correspondiente al centro del elemento. Luego, el vector de fuerzas internas global viene dado por:

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{A} \mathbf{f}_e^{int} = 0 \quad (3.75)$$

donde  $\mathbf{A}$  es un operador de ensamblaje de vectores locales al vector global.



### 3.2.3.3. Solución incremental del sistema de ecuaciones

Del problema anterior, queda por encontrarse  $\sigma^h(x, t)$  de elemento en elemento. Para ello, se recurre a un procedimiento incremental iterativo, empleando el método de Newton-Raphson. Considérese un estado de equilibrio conocido en un tiempo  $t_n$ , de manera que  $\sigma_n^h$  cumpla con  $\mathbf{R} = 0$ . Se aplica un desplazamiento incremental en el extremo de la barra desde el tiempo  $t_n$  hasta un tiempo  $t_{n+1}$ , de manera que:

$$\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + \Delta\bar{u}_n \quad (3.76)$$

El problema consiste en actualizar el campo de desplazamientos  $u_{n+1}^h$ , las variables internas  $\{\epsilon_{p_{n+1}}, \kappa_{n+1}\}$ , y los esfuerzos  $\sigma_{n+1}^h$  de manera que  $\mathbf{R}_{n+1} = 0$ . Por simplicidad de nomenclatura, se omite el superíndice  $h$  de aquí en adelante.

### 3.2.3.4. Procedimiento iterativo

Considérese un estado del sistema en la iteración  $k$  durante el paso de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Se debe encontrar la solución en la iteración  $k + 1$ , de manera que se cumplan los requerimientos de convergencia. Se resume el procedimiento general en los siguientes pasos.

1. Se calculan los desplazamientos nodales en la iteración  $k$  mediante el incremento en desplazamientos nodales  $\Delta\mathbf{d}_{n+1}^k$ :

$$\mathbf{d}_{n+1}^k = \mathbf{d}_n + \Delta\mathbf{d}_{n+1}^k \quad (3.77)$$

Luego, las deformaciones de elemento en elemento vienen dadas por:

$$\epsilon_{e_{n+1}}^k = \mathbf{B}_e \mathbf{d}_{e_{n+1}}^k \quad (3.78)$$

2. Se obtienen los esfuerzos  $\sigma_{n+1}^k$  mediante uno de los modelos constitutivos locales, empleando el Algoritmo 1 para plasticidad y el Algoritmo 2 para viscoplasticidad.
3. Se encuentra el vector de fuerzas internas locales  $\mathbf{f}_{n+1}^{int^k}$  mediante (3.74), y se ensambla el vector de fuerzas globales  $\mathbf{F}_{n+1}^{int^k}$  mediante (3.75).
4. Se verifica la convergencia mediante  $\mathbf{R}_{n+1}^k = 0$ , considerando una tolerancia.

5. Si no se cumple la tolerancia, se obtiene  $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k$  y se repite el procedimiento, actualizando  $k = k + 1$ .

Queda por definirse el valor de  $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^k$ . Para ello, se parte del cambio en fuerzas internas de iteración a iteración, lo cual se define mediante la siguiente aproximación lineal:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^{int^k}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{\partial \mathbf{f}_{e_{n+1}}^{int^k}}{\partial \mathbf{d}_{e_{n+1}}^k} \Delta \mathbf{d}_{e_{n+1}}^{k+1} \\
 &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_0^{h_e} \mathbf{B}_e^T \left[ \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \right] \frac{\partial \epsilon_{n+1}^k}{\partial \mathbf{d}_{e_{n+1}}^k} \Delta \mathbf{d}_{e_{n+1}}^{k+1} dx \\
 &= \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_0^{h_e} \mathbf{B}_e^T \left[ \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \right] \mathbf{B}_e dx \Delta \mathbf{d}_{e_{n+1}}^{k+1}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

De la ecuación anterior, se define la matriz de rigideces de forma elemental:

$$\mathbf{k}_{e_{n+1}}^k = \int_0^{h_e} \mathbf{B}_e^T \left[ \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \right] \mathbf{B}_e dx \tag{3.80}$$

Luego, de manera análoga a lo realizado para las fuerzas internas, se ensambla la matriz de rigideces global:

$$\mathbf{K}_{n+1}^k = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{k}_{e_{n+1}}^k \tag{3.81}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}^{int^k}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{K}_{n+1}^k \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} \tag{3.82}$$

Se aproxima de forma lineal el nuevo estado de fuerzas internas mediante:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int^k} + \mathbf{K}_{n+1}^k \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{R}_{n+1}^k + \mathbf{K}_{n+1}^k \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = 0 \tag{3.83}$$

de donde, finalmente, se despeja los desplazamientos incrementales:

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = -[\mathbf{K}_{n+1}^k]^{-1} [\mathbf{R}_{n+1}^k] \tag{3.84}$$

Por último, se acumulan los desplazamientos encontrados para la siguiente iteración:

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^k \quad (3.85)$$

### 3.2.3.5. Módulo tangente

Del desarrollo anterior, queda por determinarse el factor

$$C_{n+1}^k = \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \quad (3.86)$$

en la obtención de la matriz de rigidez. A éste se le conoce como el módulo tangente, y se define de la siguiente manera para cada modelo constitutivo:

- Plasticidad perfecta

$$C_{n+1}^k = \begin{cases} E, & \text{si } f_{n+1}^{\text{PR}} \leq 0 \\ 0, & \text{si } f_{n+1}^{\text{PR}} > 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

- Plasticidad con endurecimiento isotrópico

$$C_{n+1}^k = \begin{cases} E, & \text{si } f_{n+1}^{\text{PR}} \leq 0 \\ \frac{EH}{E+H}, & \text{si } f_{n+1}^{\text{PR}} > 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

- Viscoplasticidad

$$C_{n+1}^k = \begin{cases} E, & \text{si } f_{n+1}^{\text{PR}} < 0 \\ \frac{E}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} + \frac{\frac{\Delta t}{\tau}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} C_{\infty}, & \text{si } f_{n+1}^{\text{PR}} \geq 0 \end{cases} \quad (3.89)$$

donde  $C_{\infty}$  es el módulo tangente de la respuesta elastoplástica correspondiente.

### 3.3. Acoplamiento de daño no local a plasticidad

#### 3.3.1. Ecuaciones constitutivas

El modelo implementado en este trabajo tiene plasticidad perfecta homogénea como la primera fase de disipación de energía. Una vez pasado cierto límite de deformación, empieza la evolución de la variable interna de daño no local  $\alpha$ , no homogénea en el espacio. Ésta se acopla a la plasticidad de manera que exista una codependencia entre ambos fenómenos disipativos. Esta dependencia entre el daño y las deformaciones plásticas es característica en materiales con fractura dúctil, representando una evolución de elasticidad, plasticidad y daño acoplado a plasticidad (E-P-DP).<sup>3</sup>

Se plantea la energía libre en función de la variable de daño:

$$\Psi(\epsilon, \epsilon_p, \alpha) = \frac{1}{2} E_o (1 - \alpha)^2 (\epsilon - \epsilon_p)^2 dx \quad (3.90)$$

donde  $E_o$  es el módulo de Young inicial. Luego, se tienen las ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = E_o (1 - \alpha)^2 (\epsilon - \epsilon_p) \\ &= (1 - \alpha)^2 \hat{\sigma} \\ \sigma_p &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_p} = E_o (\alpha) (\epsilon - \epsilon_p) \equiv \sigma \end{aligned} \quad (3.91)$$

De lo anterior, se puede observar que el uso del factor  $(1 - \alpha)^2$  (característico de materiales con evolución E-D-DP, ver [1]) es equivalente a tomar  $\gamma = 2$  en la expresión (2.30). Con esto, las ecuaciones constitutivas quedan definidas en función del esfuerzo efectivo. Luego, se define la fuerza disipativa correspondiente al daño:

$$a = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = E_o (\epsilon - \epsilon_p)^2 (1 - \alpha) = \frac{1}{E_o} (1 - \alpha) \hat{\sigma} \quad (3.92)$$

<sup>3</sup>Cabe recalcar que si bien se realiza la implementación de una evolución E-P-DP, el modelo es más general; pues se pueden abarcar distintas evoluciones, como son: elasticidad-daño (E-D); elasticidad-plasticidad-daño (E-P-D) y elasticidad-daño-daño y plasticidad (E-D-DP).

### 3.3.2. Criterio de daño no local

Análogo a lo desarrollado en plasticidad, se impone una función de fluencia de daño. El criterio de daño que se emplea en este trabajo resulta de la formulación variacional del Capítulo 4 (ver [1]), donde se desarrolla su obtención a detalle. En un marco de formulación clásica, basta con imponer este criterio como la función de daño, y utilizando el concepto de la ecuación (2.31), se tiene:

$$f_d = a(\hat{\sigma}) - g(\alpha, p, \alpha'') \leq 0 \quad (3.93)$$

donde  $p = \int_0^t |\dot{\epsilon}_p(x, \tau)| d\tau$  es la deformación plástica acumulada. Además, se ha introducido la variable correspondiente a la gradiente de daño  $\alpha''$ , característica en modelos no locales. Adoptando el modelo planteado por [1], la función de daño se escribe como:

$$f_d = a(\hat{\sigma}) - w'(\alpha) + pm(\alpha) + \eta^2 \alpha'' \leq 0 \quad (3.94)$$

donde  $w(\alpha)$  está relacionado al trabajo disipado y  $\eta$  es un término relacionado a la longitud interna. El término  $m(\alpha)$  permite el acoplamiento de daño a plasticidad, cumpliendo con  $m(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in [0, 1)$ . Se toman las siguientes consideraciones constitutivas [1]:

$$E(\alpha) = E_o(1-\alpha)^2, \quad w(\alpha) = w_o\alpha, \quad \sigma_y(\alpha) = \sigma_{y_o}(1-\alpha)^2, \quad m(\alpha) = -\sigma'_{y_o}(\alpha) \quad (3.95)$$

donde  $\sigma_{y_o}$  es el módulo de fluencia en plasticidad inicial. Reemplazando en (3.94), se obtiene:

$$f_d = E_o(\epsilon - \epsilon_p)^2(1 - \alpha) - w_o + 2\sigma_{y_o}(1 - \alpha)p + \eta^2 \alpha'' \leq 0 \quad (3.96)$$

La expresión (3.94) se ha adoptado de [1] y representa la ecuación de gobierno de la variable de daño no local. Al ser una ecuación diferencial de segundo orden en  $\alpha$ , se resuelve mediante el método de elementos finitos, como se describe en la siguiente sección. Está sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$\alpha(0, t) = \alpha(L, t) = 0 \quad (3.97)$$

Además, se descarta la posibilidad del material de recuperar su rigidez, por lo que se aplica la condición de irreversibilidad en el daño:

$$\alpha(t_i) \leq \alpha(t_j) \quad \forall i \leq j \quad (3.98)$$

### 3.3.3. Solución mediante elementos finitos unidimensionales

El criterio de daño se cumple con  $f_d = 0$ . Luego, las condiciones de contorno (3.97) y la ecuación diferencial (3.96) igualada a cero representan la forma fuerte del problema de daño. Se aplica el principio de trabajos virtuales, obteniéndose:

$$\int_0^L E_o(1 - \alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2 w dx - \int_0^L w_o w dx + \int_0^L 2\sigma_{y_o}(1 - \alpha) p w dx + \int_0^L \eta^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} w dx = 0 \quad \forall w \text{ admisible} \quad (3.99)$$

donde nuevamente se ha utilizado la función de pesos  $w$ . Integrando por partes el último término y aplicando las condiciones tipo Dirichlet (3.97), se obtiene la forma débil del problema de valores de contorno:

$$\int_0^L E_o(1 - \alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2 w dx - \int_0^L w_o w dx + \int_0^L 2\sigma_{y_o}(1 - \alpha) p w dx - \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \eta^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = 0 \quad \forall w \text{ admisible} \quad (3.100)$$

Aplicando las funciones de aproximación y las definiciones vectoriales de la Sección 3.2.3, se escribe la expresión anterior en forma matricial:

$$\mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{N}^T E_o(1 - \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha})(\epsilon - \epsilon_p)^2 dx - \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{N}^T w_o dx + \mathbf{w}^T \int_0^L 2\sigma_{y_o} p \mathbf{N}^T (1 - \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}) dx - \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{B}^T \eta^2 \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} dx = 0 \quad \forall \mathbf{w} \text{ admisible} \quad (3.101)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es el vector columna de valores de daño nodales. De la expresión anterior, se resalta que el conjunto de variables de estado  $\{\epsilon, \epsilon_p, p\}$  no se obtiene en la resolución de esta ecuación; pues ingresan como constantes luego de resolver el problema de valores de contorno de la Sección 3.2. Desarrollando los términos de (3.101), se tiene:

$$\begin{aligned} & \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{N}^T E_o (\epsilon - \epsilon_p)^2 dx - \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{N}^T E_o (\epsilon - \epsilon_p)^2 \mathbf{N} dx \boldsymbol{\alpha} \\ & - \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{N}^T w_o dx + \mathbf{w}^T \int_0^L 2\sigma_{y_o} p \mathbf{N}^T dx - \mathbf{w}^T \int_0^L 2\sigma_{y_o} p \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \boldsymbol{\alpha} \\ & - \mathbf{w}^T \int_0^L \mathbf{B}^T \eta^2 \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} dx = 0 \quad \forall \quad \mathbf{w} \text{ admisible} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Se definen los siguientes vectores y matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d &= \int_0^L \mathbf{N}^T E_o (\epsilon - \epsilon_p)^2 dx & \mathbf{L}_d &= \int_0^L \mathbf{N}^T E_o (\epsilon - \epsilon_p)^2 \mathbf{N} dx \\ \mathbf{W}_d &= \int_0^L \mathbf{N}^T w_o dx & \mathbf{S}_d &= \int_0^L 2\sigma_{y_o} p \mathbf{N}^T dx \\ \mathbf{M}_d &= \int_0^L 2\sigma_{y_o} p \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx & \mathbf{J}_d &= \int_0^L \mathbf{B}^T \eta^2 \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} dx \end{aligned} \quad (3.103)$$

Aplicando la discretización espacial de la Sección 3.2.3.2, se evalúan los integrales de forma elemental. Luego, se tiene que:

$$(\bullet) = \mathbf{A} \begin{matrix} n_{el} \\ \bullet \\ e=1 \end{matrix} (\bullet)_e \quad (3.104)$$

donde  $(\bullet)$  y  $(\bullet)_e$  corresponden a los vectores y matrices de (3.103) a nivel global y elemental, respectivamente. Luego, se escribe (3.102) como:

$$\mathbf{w}^T [\mathbf{E}_d - \mathbf{L}_d \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{W}_d - \mathbf{S}_d - \mathbf{M}_d \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{J}_d \boldsymbol{\alpha}] = 0 \quad (3.105)$$

Recordando que las condiciones tipo Dirichlet implican la resolución de matrices reducidas, la arbitrariedad del vector  $\mathbf{w}$  permite que sea eliminado de la ecuación.

Por tanto, se despejan los valores de daño nodales:

$$\boldsymbol{\alpha} = [-\mathbf{J}_d - \mathbf{L}_d - \mathbf{M}_d]^{-1}[\mathbf{W}_d - \mathbf{S}_d - \mathbf{E}_d] \quad (3.106)$$

### 3.4. Implementación computacional

El método empleado se basa en dos procedimientos básicos. Mediante el problema de valores de contorno de la Sección 3.2, se obtiene la respuesta de plasticidad; obteniéndose en definitiva las variables de estado correspondientes, los esfuerzos y los desplazamientos. Los resultados pasan a ser datos de entrada en la ecuación de gobierno del daño, mediante la cual se actualiza la variable interna  $\alpha(x, t)$ . Luego, este valor se introduce en la respuesta elastoplástica, de manera que la rigidez  $E(\alpha)$  y el esfuerzo de fluencia  $\sigma_y(\alpha)$  se vean afectados por el daño. Esto resulta en un procedimiento iterativo mediante el cual se obtiene la respuesta global empleando criterios de convergencia.

Nótese que al modificar el límite de fluencia, la superficie de fluencia en plasticidad ahora viene dada por:

$$f_p = |\sigma| - \sigma_y(\alpha) \leq 0 \quad (3.107)$$

Una vez iniciado el daño, el criterio de plasticidad se cumple como igualdad en la zona de localización; pues el resto de la barra experimenta una descarga elástica. En la implementación computacional, se toman las siguientes consideraciones:

- Se aplican los desplazamientos en el controno de manera incremental, donde  $n_{desp}$  es el número de desplazamientos impuestos.
- Se emplean dos criterios de convergencia: la sumatoria de las fuerzas internas para el problema de plasticidad y la norma infinita para el daño.
- Se definen dos tolerancias de convergencia:  $tol_p$  para la sumatoria de las fuerzas internas y  $tol_d$  para la norma infinita.

El procedimiento general de la implementación de la formulación clásica se resume en el Algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo de la formulación clásica

---

**Entrada:** los pasos de carga (desplazamientos) y parámetros constitutivos

**Salida:** valores globales de variables internas, desplazamientos y esfuerzos

- 1: **for**  $n = 1$  **to**  $n_{desp}$
- 2:   Inicializar el primer contador

$$k = 0$$

- 3:   **while**  $\|\alpha_n^k - \alpha_n^{k-1}\|_\infty > tol_d$  **and**  $k \leq itmax$
- 4:     Inicializar el segundo contador y los desplazamientos incrementales

$$j = 0, \quad \Delta \mathbf{d}_n^j = \mathbf{0}$$

- 5:     **while**  $\|\mathbf{R}_n^j\|_1 > tol_p$  **and**  $k \leq itmax$
- 6:       Inicializar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas internas para las iteraciones

$$\mathbf{K}_n^j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_n^{intj} = \mathbf{0}$$

- 7:       **for**  $e = 1$  **to**  $n_{el}$
- 8:         Obtener el daño promedio del elemento  $\bar{\alpha}$
- 9:         Obtener  $\{\sigma, \epsilon, \epsilon_p, p\}$  mediante el Algoritmo 1 o el Algoritmo 2 y el módulo tangente correspondiente, introduciendo  $E(\bar{\alpha})$  y  $\sigma_y(\bar{\alpha})$
- 10:        Actualizar  $\mathbf{F}_n^{intj}$  y  $\mathbf{K}_n^j$
- 11:     **end for**
- 12:     **if**  $\|\mathbf{R}_n^j\|_1 > tol_p$  **then**
- 13:        Obtener los desplazamientos incrementales para la siguiente iteración

$$\Delta \mathbf{d}_n^j = \Delta \mathbf{d}_n^{j-1} - [\mathbf{K}_n^j]^{-1}[\mathbf{R}_n^j]$$

- 14:         $j = j + 1$
  - 15:     **end if**
  - 16:     **end while**
  - 17:     Obtener los valores nodales de daño  $\alpha$  mediante (3.106)
  - 18:     **if**  $\|\alpha_n^k - \alpha_n^{k-1}\|_\infty > tol_d$  **then**
  - 19:         $k = k + 1$
  - 20:     **end if**
  - 21:     **end while**
  - 22: **end for**
-

## Capítulo 4

---

# Formulación Energética

---

En este capítulo se presenta el desarrollo de la formulación energética para el modelo de plasticidad y daño analizado en este trabajo. Las hipótesis adoptadas acerca del comportamiento del material y los fenómenos disipativos son las mismas que se presentaron en la formulación clásica del Capítulo 3. Primero, se muestran los potenciales de energía y disipación que se utilizan en la formulación variacional del problema de plasticidad y daño propuestos por [1]. Se amplía la descripción de las funciones e hipótesis constitutivas del modelo introducidas en el Capítulo 3. Luego, se introducen estos potenciales en los principios energéticos tratados en la Sección 2.4, con lo que se obtiene un modelo matemático del problema de plasticidad y daño. Además, en esta parte, se muestra cómo al aplicar los principios energéticos de estabilidad y balance de energía, se obtienen las superficies y las condiciones de consistencia propias del enfoque clásico del problema, con lo que se demuestra la equivalencia entre las dos formulaciones. Se introducen funciones constitutivas en la formulación y se plantea el funcional de energía que se utiliza para la obtención del modelo numérico del problema. El capítulo concluye con la minimización del funcional y un algoritmo computacional desarrollado a partir de los resultados de la minimización.

### 4.1. Modelo variacional de daño y plasticidad

#### 4.1.1. Potenciales energéticos y funciones constitutivas

El punto de partida de la formulación energética es la definición de la energía interna y del potencial de disipación, en base a los cuales se obtienen los funcionales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  utilizados en el enfoque energético de la Sección 2.4. La energía



interna  $\mathcal{E}$  está en función de la energía elástica almacenada  $\Psi$  definida en (2.33):

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^L \Psi \, dx \\ &= \int_0^L \frac{1}{2} E(\alpha) (\epsilon - \epsilon_p)^2 \, dx\end{aligned}\tag{4.1}$$

Para la definición del potencial de disipación, se asume la descomposición aditiva del potencial de acuerdo a los fenómenos disipativos considerados en el modelo: un potencial de disipación plástica y un potencial de disipación de daño.

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_d\tag{4.2}$$

$$\Phi_p = \sigma_y(\alpha) |\dot{\epsilon}_p|\tag{4.3}$$

$$\Phi_d = \dot{w}(\alpha) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \eta^2(\alpha) \alpha^2 \right) - q(p) m(\alpha) \dot{\alpha}\tag{4.4}$$

donde los términos del potencial de daño corresponden a lo descrito en el Capítulo 3 para en el criterio de daño. El potencial  $\Phi_p$  se puede definir como la variación con respecto al tiempo de la energía disipada en un proceso de plasticidad homogéneo. Es importante observar que en la definición de  $\Phi_p$  se ha utilizado (3.16), con la diferencia de que en (4.3) se ha añadido la dependencia de la variable de daño  $\alpha$ .

Por su parte, el potencial  $\Phi_d$  se forma de la contribución de funciones definidas tanto a nivel local o asociadas a procesos homogéneos y de una función de daño no local. El término  $\dot{w}(\alpha)$  es la contribución a la potencia disipada debida únicamente al daño. Para considerar el efecto que tiene la evolución plástica sobre el potencial de daño disipado, cuando los dos fenómenos se presentan en la evolución del sistema, se añade al potencial el término  $-q(p)m(\alpha)\dot{\alpha}$  realizando el acoplamiento entre los dos fenómenos disipativos. El objetivo de añadir un término dependiente de la plasticidad al potencial de daño y de permitir que el potencial de plasticidad dependa explícitamente del daño es lograr que las variables de plasticidad y daño interactúen entre sí; es decir, que la plasticidad pueda influenciar en el accionamiento y la evolución del daño en el sistema y viceversa. Finalmente, el término correspondiente al gradiente de daño se adiciona al potencial como una regularización para problemas no homogéneos, penalizando respuestas muy localizadas en la distribución espacial del daño. El factor  $\eta(\alpha)$  está relacionado a la longitud de la zona en la que evoluciona el daño. Una simplifica-



ción en este término puede hacerse de acuerdo a [29], eligiéndose  $\eta(\alpha)$  constante. Consiguientemente, de aquí en adelante se utiliza  $\eta(\alpha) = \eta$ .

Las elección de las funciones  $\sigma(\alpha)$ ,  $m(\alpha)$ ,  $q(p)$ ,  $w(\alpha)$  y  $E(\alpha)$  dependen del comportamiento que se quiera representar con el modelo. A continuación, se muestran las condiciones establecidas en [1] para el modelo que se trata en este trabajo:

- Pérdida de rigidez del material durante la fase de daño:

$$E'(\alpha) \leq 0, \quad E(0) = E_0, \quad E(1) = 0 \quad (4.5)$$

- Influir en el accionamiento y la evolución del daño con la evolución de la plasticidad:

$$m(\alpha) \geq 0, \quad q(p) \geq 0, \quad q(0) = 0 \quad (4.6)$$

- Representar un comportamiento con ablandamiento del material:

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{S'(\alpha)}{2(w'(\alpha) - q(p)m(\alpha))} \right) \geq 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left( \frac{S'(\alpha)}{2(w'(\alpha) - q(p)m(\alpha))} \right) = +\infty \quad (4.7)$$

donde se ha introducido el módulo de flexibilidad  $S(\alpha) = 1/E(\alpha)$ .

- Influir en el accionamiento y la evolución de la plasticidad con la evolución del daño:

$$\sigma'_y(\alpha) < 0, \quad \sigma_y(0) = \sigma_{y0}, \quad \sigma_y(1) = 0 \quad (4.8)$$

Luego de elegir los potenciales elástico y de disipación, se introducen éstos en las definiciones del potencial de energía y la distancia de disipación dadas en la Sección 2.4, para obtener los funcionales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{P}(u, \epsilon_p, \alpha) = \int_0^L \frac{1}{2} E(\alpha) (\epsilon - \epsilon_p)^2 dx - \int_0^L b_f \cdot u dx - (f \cdot u) \Big|_{\partial\Omega} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{D}(u, \epsilon_p, \alpha) = \int_0^L \left( w(\alpha) + \frac{1}{2} \eta^2 \alpha'^2 \right) dx + \int_0^L \int_0^t (\sigma_y(\alpha) |\dot{\epsilon}_p| - q(p)m(\alpha)\dot{\alpha}) d\tau dx \quad (4.10)$$

En donde se ha omitido la dependencia de  $t$  y  $x$  en las funciones constitutivas para simplificar la notación.

## 4.1.2. Condición de estabilidad

### 4.1.2.1. Condición de estabilidad de primer orden

Con el objetivo de explorar el comportamiento del modelo, se presenta el desarrollo de la condición de estabilidad de primer orden (2.42) con la introducción de los potenciales energéticos (4.9) y (4.10). El cálculo de  $\mathcal{P}'$  y  $\mathcal{D}'$  presenta ciertas dificultades matemáticas que se abordan en [1]; por lo que aquí, únicamente se presentan sus resultados:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(u, \epsilon_p, \alpha)(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}) &= \int_0^L \sigma(\epsilon(\tilde{u}) - \tilde{\epsilon}_p) dx - (f_a u) \Big|_{\partial\Omega_N} + \frac{1}{2} \int_0^L E'(\alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2 \tilde{\alpha} dx \\ &= - \int_0^L \left( \frac{\partial\sigma}{\partial x} + b_f \right) \tilde{u} dx + (\sigma - f_a) \tilde{u} \Big|_{\partial\Omega_N} - \int_0^L \sigma \tilde{\epsilon}_p dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L E'(\alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2 \tilde{\alpha} dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{D}'(u, \epsilon_p, \alpha)(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}) = \int_0^L \sigma_y(\alpha) |\epsilon_p| dx + \int_0^L ((w'(\alpha) - q(p)m(\alpha)) \tilde{\alpha} + \eta^2 \alpha' \tilde{\alpha}') dx \quad (4.12)$$

En la ecuación (4.11), se ha introducido la fuerza  $f_a$  aplicada en el contorno tipo Neumann  $\partial\Omega_N$ . La ecuación (2.42) se debe cumplir para cualquier valor de  $(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha})$  admisible.<sup>1</sup> Se explora la condición de estabilidad en los siguientes casos:

- Para  $\tilde{\epsilon}_p = 0$  y  $\tilde{\alpha} = 0$  se tiene:

$$- \int_0^L \left( \frac{\partial\sigma}{\partial x} + b_f \right) \tilde{u} dx + ((\sigma - f_a) \tilde{u}) \Big|_{\partial\Omega_N} \geq 0 \quad (4.13)$$

La ecuación (4.13) sólo puede cumplirse como una igualdad. Luego, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + b_f = 0 \quad (4.14)$$

$$\sigma \Big|_{\partial\Omega_N} = f_a \quad (4.15)$$

<sup>1</sup>La admisibilidad de las variaciones  $(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha})$  hace referencia a las condiciones de contorno y al espacio de soluciones que se establecen para cada variable.

Como puede observarse en las ecuaciones (4.14) y (4.15), al aplicar la condición de estabilidad de primer orden sobre los funcionales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$ , se obtienen la ecuación de equilibrio y las condiciones de contorno tipo Neumann del problema.

- Para  $\tilde{u} = 0$  y  $\tilde{\alpha} = 0$  se tiene:

$$\int_0^L (\sigma_y(\alpha)|\tilde{\epsilon}_p| - \sigma\tilde{\epsilon}_p) dx \geq 0 \quad (4.16)$$

El mínimo de la ecuación (4.16) se alcanza cuando su segundo término es el máximo positivo; esto es  $\sigma\tilde{\epsilon}_p = |\sigma||\tilde{\epsilon}_p|$ . Con esto, se obtiene el criterio de fluencia de plasticidad utilizado en la formulación clásica:

$$f_p = |\sigma| - \sigma_y(\alpha) \leq 0 \quad (4.17)$$

- Para  $\tilde{u} = 0$  y  $\tilde{\epsilon}_p = 0$  se tiene:

$$\int_0^L \left( \left( \frac{1}{2}E'(\alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2 + w'(\alpha) - q(p)m(\alpha) \right) \tilde{\alpha} + \eta^2 \alpha' \tilde{\alpha}' \right) dx \geq 0 \quad (4.18)$$

Integrando por partes el último término de la ecuación (4.18) con respecto a  $\alpha$ , se tiene:

$$\int_0^L \left( \frac{1}{2}E'(\alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2 + w'(\alpha) - q(p)m(\alpha) - \eta^2 \alpha'' \right) \tilde{\alpha} dx + \eta^2 \alpha' \tilde{\alpha} \Big|_{\partial\Omega} \geq 0 \quad (4.19)$$

Las siguientes condiciones aseguran que la ecuación (4.19) se cumpla:

$$f_d = -\frac{1}{2}E'(\alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2 - w'(\alpha) + q(p)m(\alpha) + \eta^2 \alpha'' \leq 0 \quad (4.20)$$

$$\alpha' \Big|_{\partial\Omega} \geq 0 \quad (4.21)$$

La ecuación (4.20) es el criterio de daño utilizado en el enfoque clásico del Capítulo 3, mientras que en la ecuación (4.21) se obtienen condiciones de contorno en la

derivada espacial del daño. Cabe destacar que, mientras en la formulación clásica es necesario imponer condiciones de contorno en la distribución espacial del daño, éstas se derivan de forma natural al imponer la condición de estabilidad en la formulación energética.

#### 4.1.2.2. Condición de estabilidad de segundo orden

Como se mencionó en la Sección 2.4, el análisis de la condición de estabilidad de segundo orden sólo es necesaria cuando la estabilidad de primer orden se cumple como una igualdad. De acuerdo a los resultados obtenidos del análisis de la estabilidad de primer orden, esto se cumple cuando el modelo se encuentra en la fase de plasticidad o en la fase de plasticidad-daño. La obtención de la segunda variación de los funcionales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  se encuentra [1], y sus resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}''(u, \epsilon_p, \alpha)(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}) &= \int_0^L E(\alpha)(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}_p) dx \\
 &+ \int_0^L 2E'(\alpha)(\epsilon - \epsilon_p)(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}_p)\tilde{\alpha} dx \\
 &+ \int_0^L \frac{1}{2}E''(\alpha)(\epsilon - \epsilon_p)^2\tilde{\alpha}^2 dx \\
 &= \int_0^L \left( E(\alpha)((\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}_p) - S(\alpha)\sigma\tilde{\alpha})^2 - \frac{1}{2}S''(\alpha)\sigma^2\tilde{\alpha}^2 \right) dx
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}''(u, \epsilon_p, \alpha)(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}) &= \int_0^L (\sigma_y'(\alpha) - q'(p)m(\alpha))|\tilde{\epsilon}_p|\tilde{\alpha} dx \\
 &+ \int_0^L (w''(\alpha) - q(p)m'(\alpha))\tilde{\alpha}^2 dx \\
 &+ \int_0^L \eta^2\alpha'\tilde{\alpha}' dx
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Se explora la condición de estabilidad en la primera fase de disipación (la fase de plasticidad), para lo cual se tiene:

$$(\mathcal{P}'' + \mathcal{D}'')(u, \epsilon_p, 0)(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, 0) = \int_0^L E(0)(\tilde{u}' - \tilde{\epsilon}_p)^2 dx \geq 0 \tag{4.24}$$

Puesto que (4.24) es siempre positiva, se demuestra que la fase de plasticidad es



estable. Este resultado indica que no sólo la respuesta homogénea es estable, ya que respuestas que incluyan una localización de deformaciones plásticas también son estables. Respuestas con una localización aparecen con frecuencia en modelos de plasticidad perfecta como en el que se presenta en este trabajo. En el siguiente capítulo, se trata este tema con un poco más de detalle.

Para la segunda fase de disipación, se prefiere estudiar un problema equivalente a  $\mathcal{P}'' + \mathcal{D}'' \geq 0$ , analizando el mínimo de la relación entre la parte positiva y la parte negativa de (2.43), de manera que se cumpla:

$$\min \mathcal{R}(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}) = \min \left( \frac{\mathcal{R}_N}{\mathcal{R}_D} \right) \geq 1 \quad (4.25)$$

donde  $\mathcal{R}_N$  y  $-\mathcal{R}_D$  son la contribución de los términos positivos y negativos de (2.43) respectivamente. Esta relación está definida por:

$$\mathcal{R}(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}) = \frac{\int_0^L E(\alpha)((\tilde{u}' - \tilde{\epsilon}_p) - S'(\alpha)\sigma\tilde{\alpha})^2 dx + \eta^2 \int_0^L \tilde{\alpha}'^2 dx}{\int_0^L (\frac{1}{2}S''(\alpha)\sigma^2 - w''(\alpha) + pm'(\alpha)) \tilde{\alpha}^2 dx - \int_0^L (\sigma'_y(\alpha) - m(\alpha)) \tilde{\epsilon}_p \tilde{\alpha} dx} \quad (4.26)$$

Para la minimización de  $\mathcal{R}$ , se puede hacer una simplificación encontrando primero el valor de  $\tilde{u}$  que minimiza  $\mathcal{R}$  para valores fijos de  $\tilde{\epsilon}_p$  y  $\tilde{\alpha}$ , con lo que se tendría un problema de minimización en dos variables:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'(\tilde{u}, \tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha})(\tilde{u}, 0, 0) &= \int_0^L E(\alpha)((\tilde{u}' - \tilde{\epsilon}_p) - S'(\alpha)\sigma\tilde{\alpha})\tilde{u}' dx = 0 \\ \forall \tilde{u} \text{ admisible, } \tilde{u} \Big|_{\partial\Omega_D} &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Integrando por partes y utilizando las condiciones de contorno  $\tilde{u} \Big|_0 = \tilde{u} \Big|_L = 0$  se tiene:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} (E(\alpha)(\tilde{u}' - \tilde{\epsilon}_p) - S'(\alpha)\sigma\tilde{\alpha})\tilde{u} dx = 0 \quad (4.28)$$



A partir de las ecuaciones (4.27) y (4.28) se puede concluir que

$$E(\alpha) ((\tilde{u}' - \tilde{\epsilon}_p) - S'(\alpha)\sigma\tilde{\alpha}) = \text{constante} \quad (4.29)$$

El valor de la constante a la derecha de la ecuación (4.29) se puede encontrar aplicando las condiciones de contorno  $\tilde{u}\Big|_0 = \tilde{u}\Big|_L = 0$ , obteniéndose:

$$\tilde{u} = \int_0^x (S'(\alpha)\sigma\tilde{\alpha} + \tilde{\epsilon}_p) dx - \frac{\int_0^L (S'(\alpha)\sigma\tilde{\alpha} + \tilde{\epsilon}_p) dx}{\int_0^L S(\alpha) dx} \int_0^x S(\alpha) dx \quad (4.30)$$

Introduciendo (4.30) en (4.26) se obtiene la relación de Rayleigh en función de  $\tilde{\epsilon}_p$  y  $\tilde{\alpha}$ :

$$\mathcal{R}^*(\tilde{\epsilon}_p, \tilde{\alpha}) = \frac{\int_0^L E(\alpha) \left( -\frac{\int_0^L (S'(\alpha)\sigma\tilde{\alpha} + \tilde{\epsilon}_p) dx}{\int_0^L S(\alpha) dx} S(\alpha) \right)^2 dx + \eta^2 \int_0^L \tilde{\alpha}'^2 dx}{\int_0^L \left( \frac{1}{2} S''(\alpha)\sigma^2 - w''(\alpha) + pm'(\alpha) \right) \tilde{\alpha}^2 dx - \int_0^L (\sigma'_y(\alpha) - m(\alpha)) \tilde{\epsilon}_p \tilde{\alpha} dx} \quad (4.31)$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$\hat{x} = x/L, \quad d\hat{x} = dx/L \quad (4.32)$$

e introduciendo las siguientes funciones para simplificar la notación:

$$\begin{aligned} x &= \hat{x}, & a &= \eta^2/L^2, & b &= 1/\int_0^1 S(\alpha) dx, & c &= S'(\alpha)\sigma, \\ m &= \frac{1}{2} S''(\alpha)\sigma^2 - w''(\alpha) + pm'(\alpha), & n &= -\frac{1}{2}(\sigma'_y(\alpha) - m(\alpha)) \end{aligned} \quad (4.33)$$



se puede expresar la relación de Rayleigh como:

$$\mathcal{R}^*(\epsilon_p, \alpha) = \frac{a \int_0^1 \alpha'^2 dx + b \left( \int_0^1 \epsilon_p dx \right)^2 + 2bc \left( \int_0^L \epsilon_p dx \right) \left( \int_0^1 \alpha dx \right) + bc^2 \left( \int_0^1 \alpha dx \right)^2}{\int_0^1 (m\alpha^2 + 2n\epsilon_p \alpha dx)} \quad (4.34)$$

La minimización de (4.34) sobrepasa los alcances de este trabajo y puede encontrarse en [1], con lo que la estabilidad de segundo orden en la fase de plasticidad-daño se reduce a:

$$\min(\mathcal{R}) = \min(\mathcal{R}^*) = \min \left( \frac{bc^2}{m}, 4b \frac{cn - m}{n^2}, \left( \frac{ab^2 c^4 \pi^2}{m^3} \right)^{1/3} \right) \quad (4.35)$$

En (4.35), sólo el tercer resultado aporta información acerca de la evolución no homogénea en la fase de plasticidad-daño en la que se enfoca este trabajo. Introduciendo (4.35) en (4.25), se obtiene:

$$\left( \frac{ab^2 c^4 \pi^2}{m^3} \right)^{1/3} \geq 1\eta^2 \geq \frac{m^3 L^2}{b^2 c^4 \pi^2} \quad (4.36)$$

Es importante resaltar que a partir del resultado obtenido en (4.36), se tiene una relación entre la longitud de la barra y la longitud interna  $\eta$ , con la que se define una condición a partir de la cual la solución no homogénea es estable. Este resultado puede utilizarse para obtener el valor de los parámetros constitutivos del modelo si se elige un valor adecuado  $L$  que permita comparar resultados experimentales con el modelo numérico en el caso de una evolución homogénea.

### 4.1.3. Balance de energía

Se introducen los potenciales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  en la ecuación de balance de energía (2.44) y se obtiene:

$$\begin{aligned} & - \int_0^L \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + b_f \right) \dot{u} dx + (\sigma - f) \dot{u} \Big|_{\partial \Omega} + \int_0^L (\sigma_y(\alpha) - |\sigma|) |\dot{\epsilon}| dx \\ & + \int_0^L \left( \frac{1}{2} E'(\alpha) (\epsilon - \epsilon_p)^2 + w'(\alpha) - q(p) m(\alpha) \right) \dot{\alpha} dx + \int_0^L \eta^2 \alpha' \dot{\alpha}' dx = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

A continuación, se utiliza una metodología similar a la utilizada en la condición



de estabilidad de primer orden, para explorar ciertas condiciones que se derivan del cumplimiento del balance de energía.

- Para  $\dot{\epsilon}_p = 0$  y  $\dot{\alpha} = 0$  se tiene:

$$-\int_0^L \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + b_f \right) \dot{u} \, dx + (\sigma - f) \dot{u} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.38)$$

El primer integral de (4.38) es la ecuación de equilibrio obtenida en la subsección anterior. Utilizando (4.15):

$$\sigma \Big|_{\partial\Omega_D} = f_r \quad (4.39)$$

En esta última, se establece el equilibrio entre las fuerzas internas y las reacciones en el contorno en el que se imponen condiciones tipo Dirichlet.

- Para  $\dot{u} = 0$  y  $\dot{\alpha} = 0$ , se tiene:

$$(|\sigma| - \sigma_y(\alpha)) \Big|_{\epsilon_p} = 0 \quad (4.40)$$

Con lo que se obtiene la condición de consistencia del modelo de plasticidad del enfoque clásico.

- Para  $\dot{u} = 0$  y  $\dot{\epsilon}_p$  se tiene:

$$\int_{\Omega} \left( \left( \frac{1}{2} E'(\alpha) (\epsilon - \epsilon_p)^2 + w'(\alpha) - q(p)m(\alpha) \right) \dot{\alpha} + \eta^2 \alpha' \dot{\alpha}' \right) d\Omega = 0 \quad (4.41)$$

Integrando por partes (4.41) con respecto a  $\alpha$  y utilizando (4.21), se obtiene:

$$\left( \frac{1}{2} E'(\alpha) (\epsilon - \epsilon_p)^2 + w'(\alpha) - q(p)m(\alpha) - \eta^2 \alpha'' \right) \dot{\alpha} = 0 \quad (4.42)$$

$$\alpha' \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.43)$$

La ecuación (4.42) es la condición de consistencia de daño y (4.43) la condición de contorno para la derivada espacial del daño.

## 4.2. Funcional de energía y minimización

Para continuar con el desarrollo del modelo, es necesario introducir funciones constitutivas para  $q(p)$ ,  $m(\alpha)$ ,  $w(\alpha)$  y  $\sigma(\alpha)$  que cumplan con (4.5), (4.6), (4.7), (4.8). Se eligen las funciones constitutivas utilizadas en el Capítulo 3:

$$q(p) = p, \quad m(\alpha) = \sigma'(\alpha), \quad \sigma(\alpha) = \sigma_{y_0}(1 - \alpha)^2 \quad (4.44)$$

El funcional elegido para realizar la minimización es el trabajo interno  $\mathcal{W}$ . Luego de introducir las funciones constitutivas (4.44), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u, \epsilon, \alpha) &= \mathcal{P}(u, \epsilon, \alpha) + \mathcal{D}(u, \epsilon, \alpha) \\ &= \int_0^L \left( \frac{1}{2} E_0 (1 - \alpha)^2 (u' - \epsilon_p)^2 + p \sigma_{y_0} (1 - \alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. + w_0 \alpha + \frac{\eta^2}{2} (\alpha')^2 \right) dx \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde se han omitido los términos correspondientes a las fuerzas externas, puesto que en el problema analizado no se aplican fuerzas de cuerpo ( $b_f(x) = 0$ ) y se trata de un sistema controlado únicamente por desplazamientos con  $f_a \Big|_{\partial\Omega_N} = 0$ .

La evolución del problema unidimensional de daño y plasticidad se obtiene de la minimización de (4.45), para la cual, se utiliza el *algoritmo de minimización alterna* descrito en [1]. El algoritmo se basa en el hecho de que el funcional (4.45) no es convexo en todas sus variables, pero sí es convexo con respecto a cada variable [5]. De aquí, se deriva la idea de utilizar un procedimiento iterativo en el que se minimiza a  $\mathcal{W}$  con respecto a las variables  $u$ ,  $\epsilon_p$  y  $\alpha$  por separado. A continuación, se muestra el resultado de calcular la primera variación de  $\mathcal{W}$  en las direcciones  $(\tilde{u}, 0, 0)$ ,  $(0, \tilde{\epsilon}_p, 0)$  y  $(0, 0, \tilde{\alpha})$ . Luego, se introduce el espacio de elementos finitos para cada variable, utilizando las funciones de aproximación descritas en el Capítulo 3.

- Cálculo de  $\mathcal{W}'(u, \epsilon_p, \alpha)(\tilde{u}, 0, 0)$ :



$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}'(u, \epsilon_p, \alpha)(\tilde{u}, 0, 0) &= \left. \frac{d}{dh} \mathcal{W}(u + h\tilde{u}, \epsilon_p, \alpha) \right|_{h=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dh} \int_0^L \frac{1}{2} E(\alpha) \left( \frac{d}{dx} (u + h\tilde{u}) - \epsilon_p \right)^2 dx \right|_{h=0} \\
 &= \int_0^L E(\alpha) \left( \frac{du}{dx} - \epsilon_p \right) \frac{d\tilde{u}}{dx} dx \quad \forall h\tilde{u} \text{ admisible, } (h\tilde{u}) \Big|_{\partial\Omega_D} = 0
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Como puede observarse en la ecuación (4.46), la minimización de  $\mathcal{W}$  con respecto a  $u$  resulta en el problema unidimensional de una barra elástica. Luego de introducir el espacio de elementos finitos, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{n_{el}} \tilde{u}_e^h \int_{\Omega_e} B_e^T E(\alpha_e^h) (B_e u_e^h - \epsilon_{p_e}^h) dx &= 0 \\
 \sum_{e=1}^{n_{el}} \tilde{u}_e^T (B_e^T \int_{\Omega_e} E(\alpha) dx B_e + B - e^T \int_{\Omega_e} E(\alpha) dx \epsilon_{p_e}^h) &= 0, \quad \tilde{u} \Big|_{\partial\Omega_U} = 0
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

La matriz de rigidez y el vector asociado a las deformaciones plásticas definidos a nivel local para el elemento  $e$  se definen como:

$$\mathbf{k}_e = B_e^T \int_{\Omega_e} E(\alpha) dx B_e \tag{4.48}$$

$$\mathbf{f}_{p_e} = B_e^T \int_{\Omega_e} E(\alpha) dx \epsilon_{p_e} \tag{4.49}$$

Al igual que en el Capítulo 3, se evalúan las variables de estado y el esfuerzo de cada elemento en los puntos Gauss, por lo que el integral  $\int_{\Omega_e} E(\alpha) dx$  se resuelve como:

$$\int_{\Omega_e} E(\alpha(x)) dx = \frac{h_e}{2} \sum_{l=1}^m w^l E(\alpha(x)) \Big|_{x=x_e^l} \tag{4.50}$$

Se introducen las matrices globales del sistema:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{k}_e \tag{4.51}$$



$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{u}_e^h \quad (4.52)$$

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{A} \mathbf{f}_{p_e} \quad (4.53)$$

con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}_p) = 0, \quad \tilde{\mathbf{U}}(0) = \tilde{\mathbf{U}}(L) = 0 \quad (4.54)$$

- Cálculo de  $\mathcal{W}'(u, \epsilon_p, \alpha)(0, \tilde{\epsilon}_p, 0)$ :

Puesto que en el funcional (4.45) no hay derivadas con respecto a  $x$  en las variables asociadas a la plasticidad  $(\epsilon_p, p)$ , la minimización puede hacerse a nivel local sujeta a la restricción de que el esfuerzo debe permanecer en la superficie elástica. El funcional para la minimización es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, \epsilon_p, \alpha) &= w - \Delta\lambda(|\sigma| - \sigma_y(\alpha)) \\ &= \frac{1}{2}E_0(1 - \alpha)^2(u' - \epsilon_p)^2 + \sigma_{y_0}p(1 - \alpha)^2 + \\ &w_0 \alpha + \frac{\eta^2}{2}(\alpha')^2 - \Delta\lambda(|\sigma| - \sigma_y(\alpha)) \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde la primera variación de  $F$  en la dirección  $(0, \tilde{\epsilon}_p, 0)$  es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(u, \epsilon_p, \alpha)(0, \tilde{\epsilon}_p, 0) &= \left. \frac{d}{dh}(\mathcal{F}(u, \epsilon_p + h\tilde{\epsilon}_p, \alpha)) \right|_{h=0} \\ &= E(\alpha)(u' - \epsilon_p) + \sigma_p(\alpha)|\tilde{\epsilon}_p| - \Delta\lambda E(\alpha) \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Reemplazando  $\sigma^{\text{Pr}} = E(\alpha)(u' - \epsilon_p)$  en (4.56), se obtiene:

$$\sigma = \sigma_y(\alpha) = \sigma^{\text{Pr}} - \Delta\lambda E(\alpha) \quad (4.57)$$

resultando en la definición del esfuerzo  $\sigma$  en la superficie de fluencia. Con la expresión anterior, se demuestra que para calcular  $\epsilon_p$  y  $p$  se puede utilizar el *algoritmo de mapeo* 1 para plasticidad perfecta, ya que (4.57) representa la esencia de dicho algoritmo.

- Cálculo de  $\mathcal{W}'(u, \epsilon_p, \alpha)(0, 0, \tilde{\alpha})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'(u, \epsilon_p, \alpha)(0, 0, \tilde{\alpha}) &= \left. \frac{d}{dh} \mathcal{W}(u, \epsilon_p, \alpha + h\tilde{\alpha}) \right|_{h=0} \\ &= \int_0^L (-E_0(1 - \alpha)(u' - \epsilon_p)^2 \tilde{\alpha} + w_0 \tilde{\alpha} - 2p\sigma_{y_0}(1 - \alpha)\tilde{\alpha} - \eta^2 \alpha'' \tilde{\alpha}) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Integrando por partes el último término de (4.58) y utilizando la condición de contorno  $\alpha' \Big|_{\partial\Omega} = 0$ :

$$\int_0^L (-E_0(1 - \alpha)(u' - \epsilon_p)^2 \tilde{\alpha} + w_0 \tilde{\alpha} - 2p\sigma_{y_0}(1 - \alpha)\tilde{\alpha} - \eta^2 \alpha' \tilde{\alpha}') dx = 0 \quad (4.59)$$

obteniéndose así la forma débil del criterio de daño (3.100), cuya resolución con elementos finitos se presenta en el Capítulo 3.

### 4.3. Implementación computacional

Como se mencionó anteriormente, el algoritmo que se utiliza para resolver el problema variacional consiste en calcular las variables de estado que minimicen el trabajo interno del sistema de forma alterna. Este proceso se divide en 3 partes:

- Calcular el campo de desplazamientos, considerando un comportamiento elástico de todos los elementos de la barra. Se utiliza (4.54).
- Calcular las variables  $\epsilon_p$  y  $p$  utilizando el algoritmo de mapeo 1 para cada elemento.
- Calcular la distribución del daño dentro de la barra utilizando (3.106).

Las variables de estado se actualizan al final de cada iteración. Para detener el proceso iterativo, se compara la diferencia entre los valores calculados en las dos últimas iteraciones y se verifica su cumplimiento con con una tolerancia establecida.



---

**Algoritmo 4** Algoritmo de la formulación energética

---

**Entrada:** los pasos de carga (desplazamientos) y parámetros constitutivos

**Salida:** valores globales de variables internas, desplazamientos y esfuerzos

- 1: **for**  $n = 1$  **to**  $n_{desp}$
  - 2: Inicializar contador  
k=0;
  - 3: **while**  
( $\|\mathbf{u}_n^k - \mathbf{u}_n^{k-1}\|_2 > tol$  **or**  $\|\boldsymbol{\epsilon}_{p_n^k} - \boldsymbol{\epsilon}_{p_n^{k-1}}\|_2 > tol$  **or**  $\|\boldsymbol{\alpha}_n^k - \boldsymbol{\alpha}_n^{k-1}\|_\infty > tol$ )  
**and**  $k \leq itmax$
  - 4: Actualizar contador  
k=k+1;
  - 5: Calcular  $\mathbf{u}_n^k = \operatorname{argmin}_u \mathcal{W}(u, \boldsymbol{\epsilon}_{p_n^{k-1}}, p_n^{k-1}, \boldsymbol{\alpha}_n^{k-1})$ , con (4.54),  
para  $u(L) = U(t_i)$
  - 6: Calcular  $\boldsymbol{\epsilon}_{p_n^k} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\epsilon}_p} \mathcal{W}(u_n^k, \boldsymbol{\epsilon}_p, p_n^{k-1} + |\Delta\epsilon_p|, \boldsymbol{\alpha}_n^{k-1})$ , con el Algoritmo 1
  - 7: Calcular  $\boldsymbol{\alpha}_n^k = \operatorname{argmin}_\alpha \mathcal{W}(u_n^k, \boldsymbol{\epsilon}_{p_n^k}, p_n^k, \alpha)$ , con (3.106)
  - 8: **end while**
  - 9: **end for**
-

## Capítulo 5

---

# Resultados y Análisis Comparativo

---

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos con la implementación de los algoritmos presentados en los capítulos 3 y 4, resaltando sus características principales y las ventajas que presenta cada uno de los modelos. En las dos primeras secciones se muestra el comportamiento de las variables de estado en los modelos clásico y energético, y en la Sección 3 se realiza un análisis comparativo de la implementación, los resultados y el esfuerzo computacional. Los valores de los parámetros usados en las funciones constitutivas para el desarrollo de este capítulo se muestran en la Tabla 5.1.

### 5.1. Modelo clásico

Como se mencionó anteriormente, para implementar el modelo energético en el marco de la formulación clásica, es necesario incluir una regularización al problema de la plasticidad perfecta. Esto se debe a que el algoritmo utilizado en el modelo clásico (Newton-Raphson) calcula la distribución de los desplazamientos para equilibrar las fuerzas internas en la barra, por lo que al sobrepasar el límite elasticidad, el problema está mal definido y existe un número infinito de soluciones admisibles [17]. Este comportamiento numérico se verificó en las simulaciones, obteniéndose una localización de deformaciones en el elemento que contiene al no-

$E_0$	$\sigma_{y_0}$	$\eta$	$\nu$	$U_P$	$U_D$
Módulo de elasticidad	Límite de plasticidad	Longitud interna	Viscosidad	Desp. de plasticidad	Desp. de daño
1	1	0.4	1	1	1.5

Tabla 5.1: Valores constitutivos del material y desplazamientos de plasticidad y daño

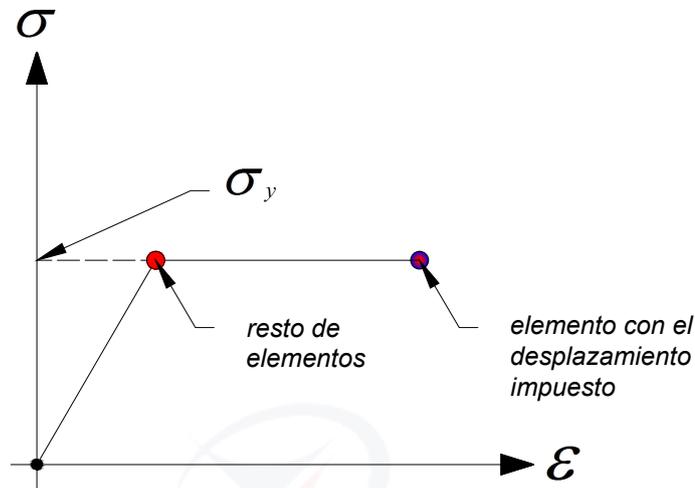


Figura 5.1: Solución obtenida con el modelo de plasticidad perfecta en el algoritmo de Newton Raphson

do en el que se imponen los desplazamientos. Debido al módulo tangente de la plasticidad perfecta  $C = 0$ , se obtiene una matriz tangente que no es positiva definida, incumpliendo una condición necesaria para la unicidad de la solución [1]. En la Figura 5.1, se puede observar una descripción gráfica del problema de unicidad, donde una solución arbitraria genera el equilibrio, el cual representa la condición necesaria y suficiente para la convergencia en Newton-Raphson.

Para definir de mejor forma el problema se proponen dos opciones: utilizar el modelo de viscoplasticidad o introducir una perturbación en uno de los elementos de la barra. Como se observará más adelante, la introducción de una perturbación en un elemento de la barra genera los mismos resultados en los modelos clásico y energético; sin embargo, el modelo viscoplástico es mucho más consistente numéricamente, por lo que el estudio de esta sección se centrará únicamente en este modelo.

A pesar de que el modelo de viscoplasticidad se utiliza para simular el comportamiento de materiales en los que la respuesta del sistema es función de la velocidad de carga, se puede demostrar que conforme la relación  $\Delta t/\nu \rightarrow \infty$ , la respuesta de este modelo tiende al modelo sin viscosidad [34]. En las simulaciones numéricas, la velocidad de carga  $v$  está en función de la discretización en los pasos

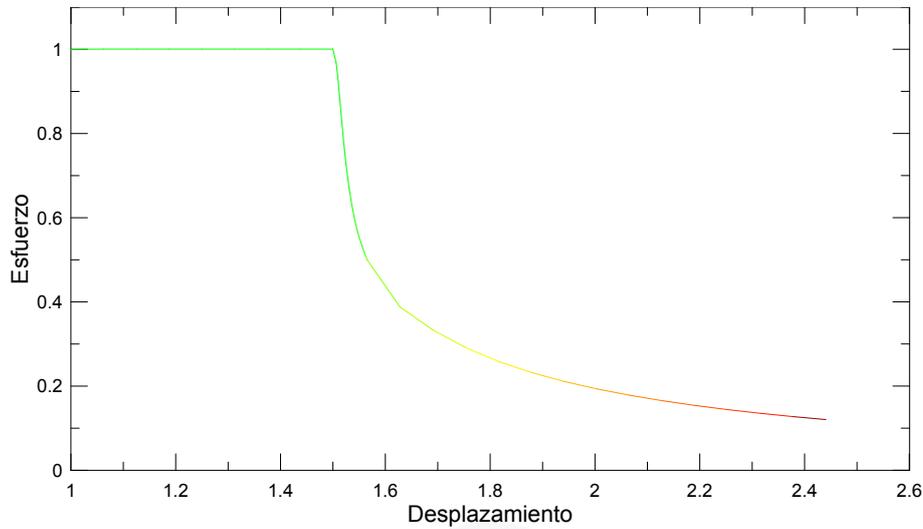


Figura 5.2: Gráfica esfuerzo-desplazamiento de las fases de plasticidad y plasticidad-daño en el modelo clásico

de carga, de manera que  $v = \Delta u / \Delta t$ . Por esto, se fija el factor de viscosidad  $\nu$  como propiedad del material y se utiliza a la velocidad de carga como el parámetro controlador. Es evidente que  $v \rightarrow 0$  es equivalente a  $\Delta t / \nu \rightarrow \infty$ . Basándose en ese resultado, se utiliza el modelo viscoplástico en este trabajo dentro del modelo clásico que, como se muestra en la Sección 5.3, se aproxima de manera adecuada a la respuesta sin viscosidad, incluso durante la fase de plasticidad y daño. En la Figura 5.2, se observa la curva esfuerzo-desplazamiento a lo largo de toda la evolución.

En la Figura 5.3, se puede observar la evolución del perfil de deformaciones plásticas sobre la barra. Durante la fase de plasticidad ( $1 \leq U(t) \leq 1,5$ ), las deformaciones plásticas evolucionan de forma homogénea en toda la barra. Luego, al iniciar el daño, la zona en la que evoluciona la plasticidad se reduce a una región en el centro de la barra, formándose un perfil de deformaciones plásticas. El tamaño de esta región está controlado por la velocidad de carga (Figura 5.19), por lo que dicho valor podría interpretarse como un parámetro en el que se encuentra incluido, de forma implícita, una longitud interna del material. Esto es análogo al parámetro  $\eta$  en el criterio de daño, pero aplicado al perfil de deformaciones plásticas. Este comportamiento difiere de la solución analítica de este modelo presentada en [1], ya que la viscoplasticidad suaviza la distribución de las deformaciones plásticas luego de romperse la homogeneidad en la barra, presentando resultados similares a lo obtenido en [26]. A pesar de este efecto, el tamaño de la región en la que evolucionan las deformaciones plásticas disminuye

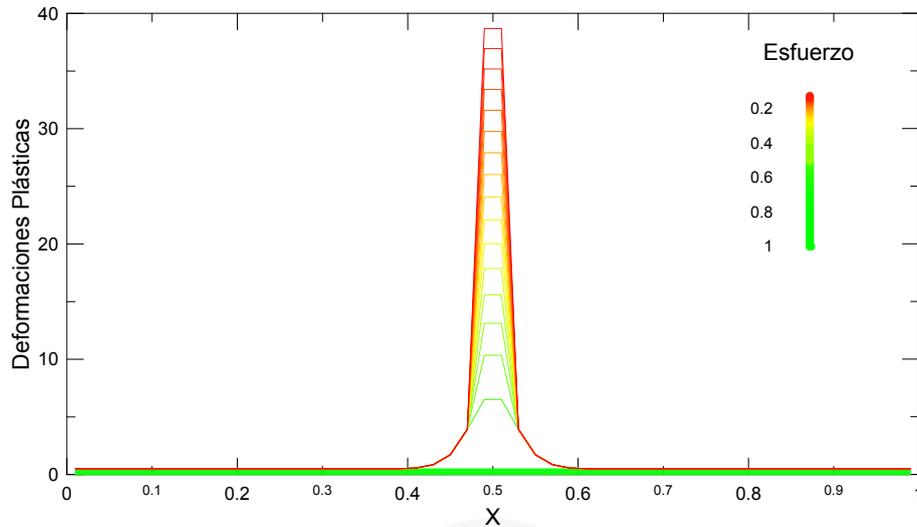


Figura 5.3: Evolución del perfil de deformaciones plásticas en el modelo clásico

escogiendo una velocidad de carga suficientemente baja, al punto que el tamaño de dicha región se reduce a uno o dos elementos en el centro de la barra conforme avanza la evolución. Esta tendencia se mantiene al reducir el tamaño de la malla y es coherente con los modelos de fractura de [36], en los que la región en la que evoluciona la deformación se reducen a cero *measure sets* cerca de la fractura.

En concordancia con lo observado en el comportamiento de las deformaciones plásticas, en el perfil de desplazamientos de la Figura 5.4, se observa un comportamiento suave al inicio de la evolución que cambia con el tiempo, llegando a desarrollar un salto en el campo de desplazamientos. De forma similar, el perfil de daño de la Figura 5.5 presenta una forma suave al inicio, pero conforme avanza la evolución, tiende a crearse un pico en el punto máximo del perfil. La tendencia del modelo a formar estos puntos singulares en las variables de estado y en sus derivadas es consistente con el modelo matemático de [1]. Es importante observar que al utilizar la viscoplasticidad en este modelo, se introdujo una fase intermedia en la evolución de la barra con respecto a las descritas en el Capítulo 4. En ésta, se permite a la plasticidad evolucionar en una región cuyo tamaño está controlado por la velocidad de carga, antes de concentrar la deformación para desarrollar la tendencia hacia los puntos singulares en las variables de estado antes mencionadas.

En cuanto a la dependencia del tamaño de malla (dado por el número de elementos), no se observan grandes variaciones en los campos de esfuerzos, desplazamientos y daño. Esto es más apreciable conforme aumenta el número de elementos. Sin embargo, cabe recalcar que la convergencia para un determinado

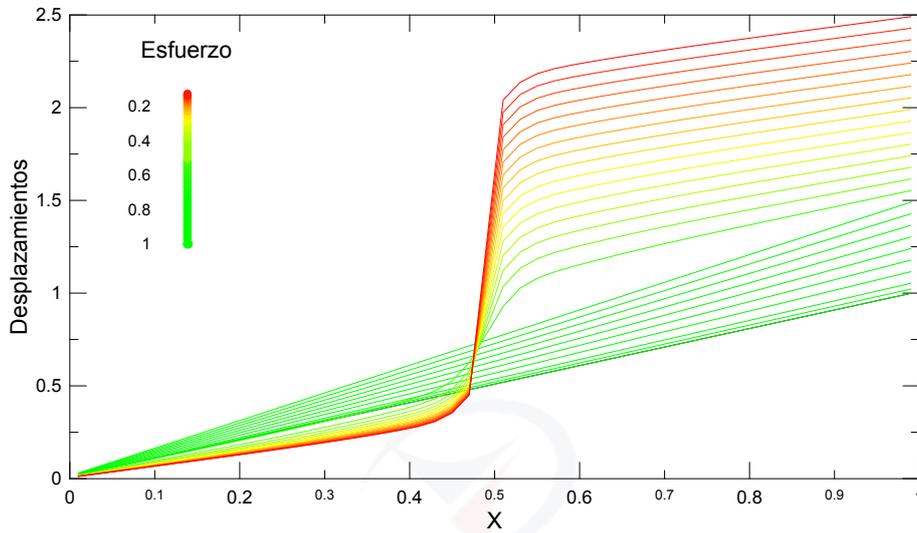


Figura 5.4: Evolución del campo de desplazamientos en el modelo clásico

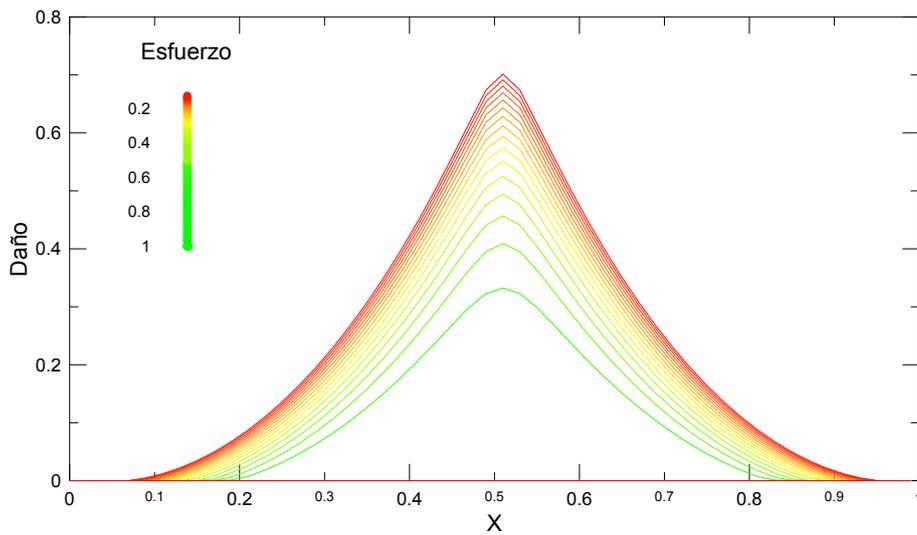


Figura 5.5: Evolución del perfil de daño en el modelo clásico

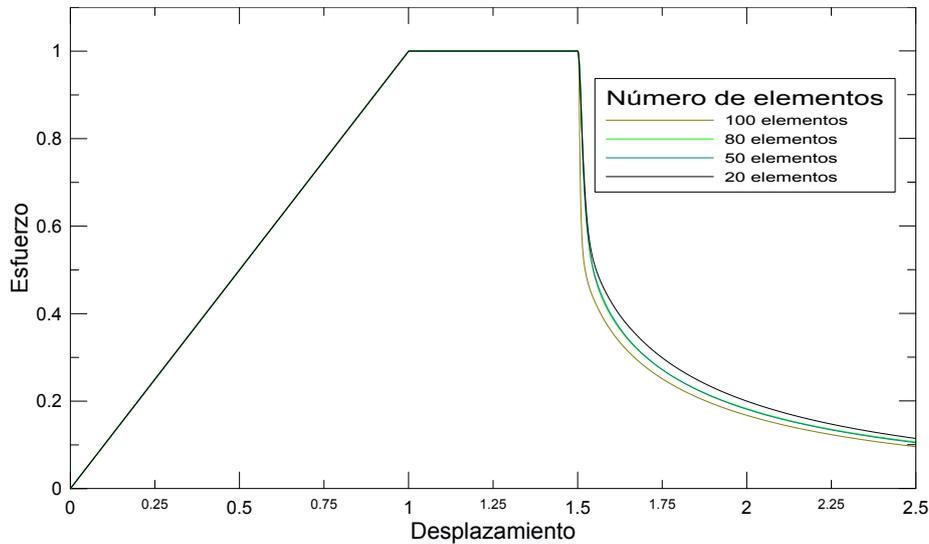


Figura 5.6: Gráfica esfuerzo-desplazamiento con variación del número de elementos en el modelo clásico

tamaño de malla está en función de la velocidad de carga. En las Figuras 5.6, 5.7, 5.8 y 5.9, se observa la variación del número de elementos con respecto a la curva esfuerzo-desplazamiento, las deformaciones plásticas, los desplazamientos y el perfil de daño. Se puede apreciar la tendencia de la región de localización a reducirse conforme aumenta el número de elementos. Esto es un resultado esperado en el campo de deformaciones plásticas; pues conforme se reduce el tamaño de malla, la localización tiende a la delta de Dirac descrita a detalle en la solución analítica de [1].

## 5.2. Modelo energético

En esta sección, se realiza un análisis del comportamiento del modelo computacional basado en el enfoque energético del Capítulo 4. El análisis se desarrolla para la distribución espacial y la evolución temporal de las variables correspondientes al daño, deformaciones plásticas y desplazamientos. Para verificar los resultados obtenidos, se comparan con la solución analítica del modelo planteado en [1]. Una de las características que se puede observar en este modelo es la capacidad de reproducir la evolución de la plasticidad de forma homogénea, aun cuando no se ha utilizado una regularización para el problema. Esta característica puede observarse en los perfiles de deformaciones plásticas para  $\epsilon_p \leq 0,5$  de la Figura 5.11. También se observa que luego de alcanzar el límite de daño del material, se rompe la homogeneidad del problema y las deformaciones plásticas

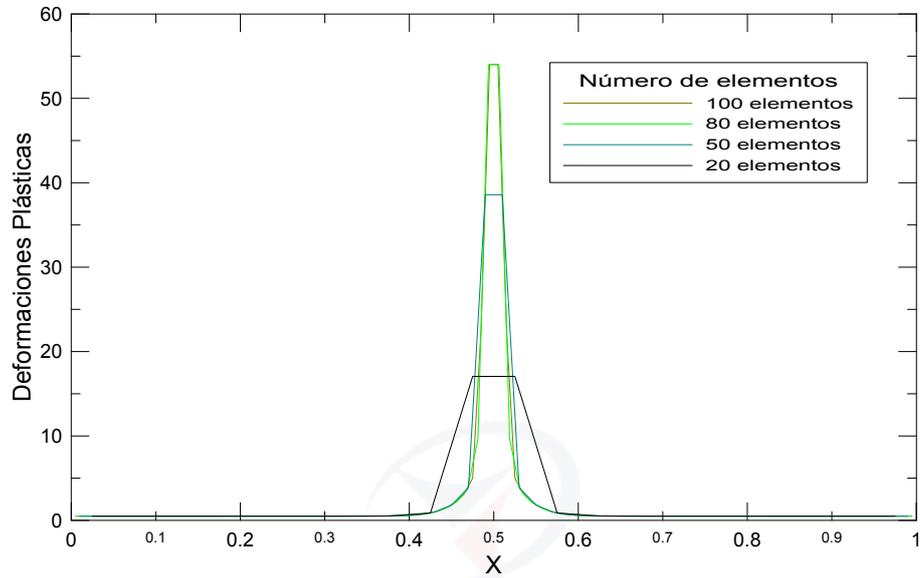


Figura 5.7: Evolución del perfil de deformaciones plásticas con variación del número de elementos en el modelo clásico

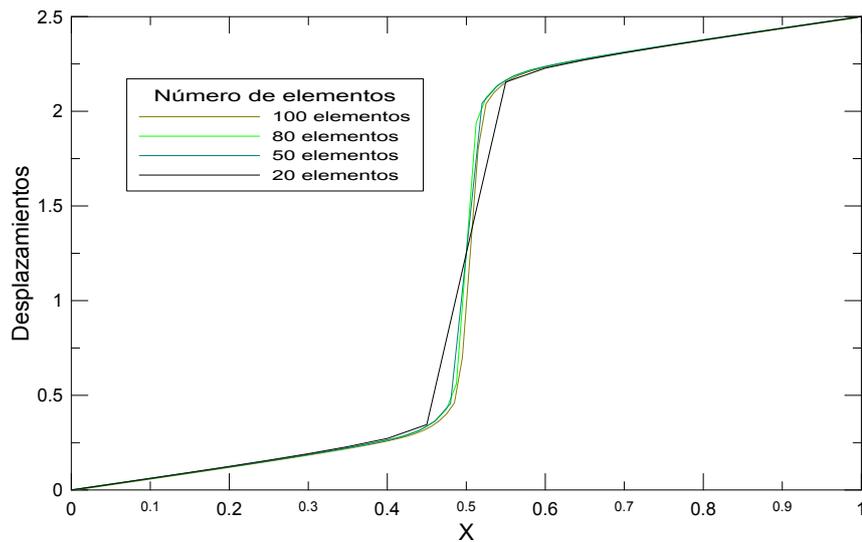


Figura 5.8: Evolución del campo de desplazamientos con variación del número de elementos en el modelo clásico

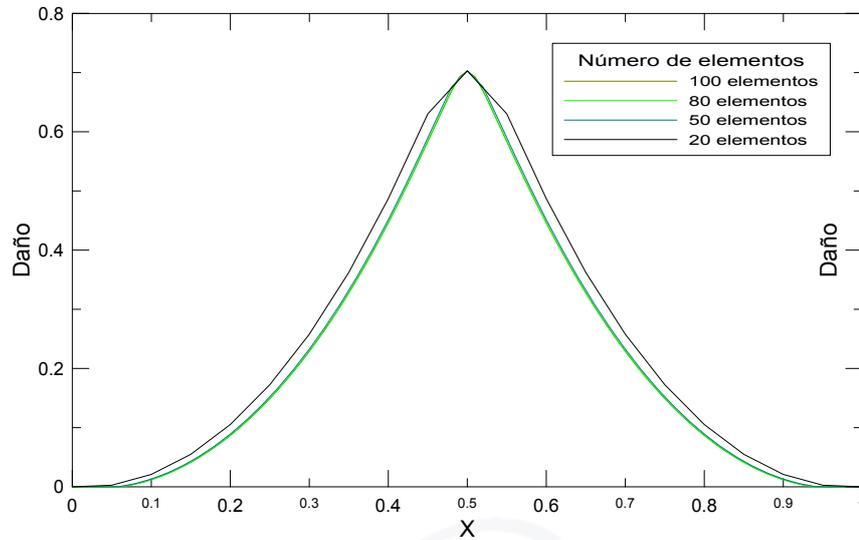


Figura 5.9: Evolución del perfil de daño con variación del número de elementos en el modelo clásico

se concentran en uno o dos elementos de la barra. Esta zona tiende a la delta de Dirac utilizada en la definición de la parte singular del campo de deformaciones plásticas definida en la solución analítica de este modelo en [1].

La distribución del campo de desplazamientos y su evolución se encuentra en la Figura 5.12. En la distribución espacial de desplazamientos puede observarse como, luego de alcanzar el límite de daño, la solución tiende a desarrollar un salto en el mismo punto en el que se produce la concentración de deformaciones plásticas. El efecto de la concentración de deformaciones plásticas en la barra afecta también al perfil de daño de la Figura 5.13, donde se observa la tendencia a desarrollar una discontinuidad en la derivada espacial. Una de las características más importantes del enfoque energético es la capacidad que posee el modelo de representar un comportamiento en el que las variables de estado pueden desarrollar discontinuidades fuertes durante su evolución. Este modelo hace uso de esa capacidad para representar un comportamiento en el que el material, luego de alcanzar el límite de daño, pierde rigidez de forma casi instantánea. Este efecto puede observarse en la fuerte pendiente de la curva esfuerzo-desplazamiento de la Figura 5.10 luego alcanzar el límite de daño.

Al igual que en el modelo clásico, la variación en el tamaño de la malla presenta poca variación en la respuesta del esfuerzo, desplazamientos y daño, como se pueden observar en las Figuras 5.14, 5.16 y 5.17. Sin embargo, se puede observar que la dependencia del tamaño de malla es mayor en este modelo. Por otro lado, la localización de las deformaciones plásticas en la Figura 5.15 tiende a la delta

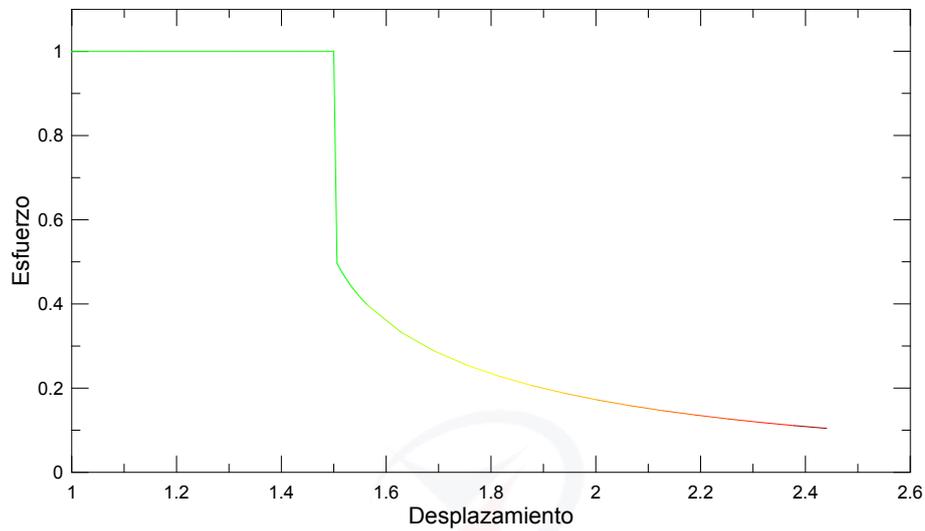


Figura 5.10: Gráfica esfuerzo-desplazamiento de las fases de plasticidad y plasticidad-daño en el modelo energético

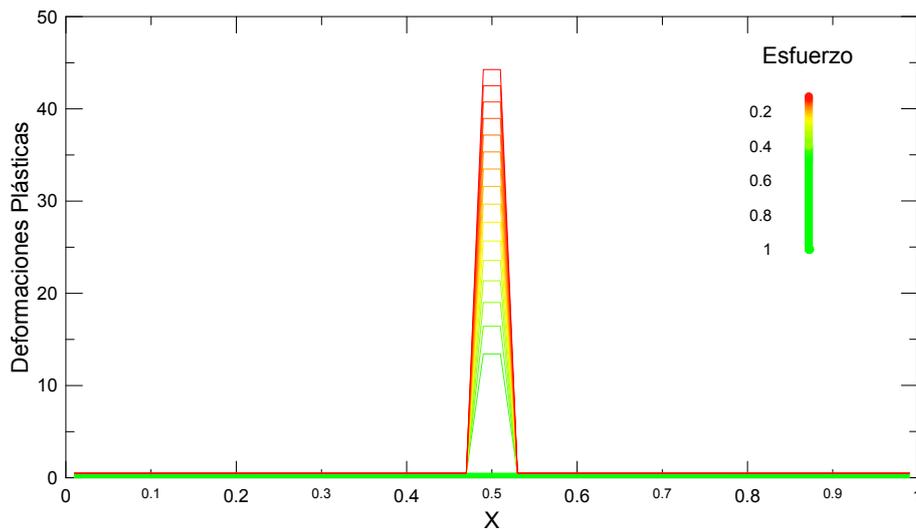


Figura 5.11: Evolución del perfil de deformaciones plásticas en el modelo energético

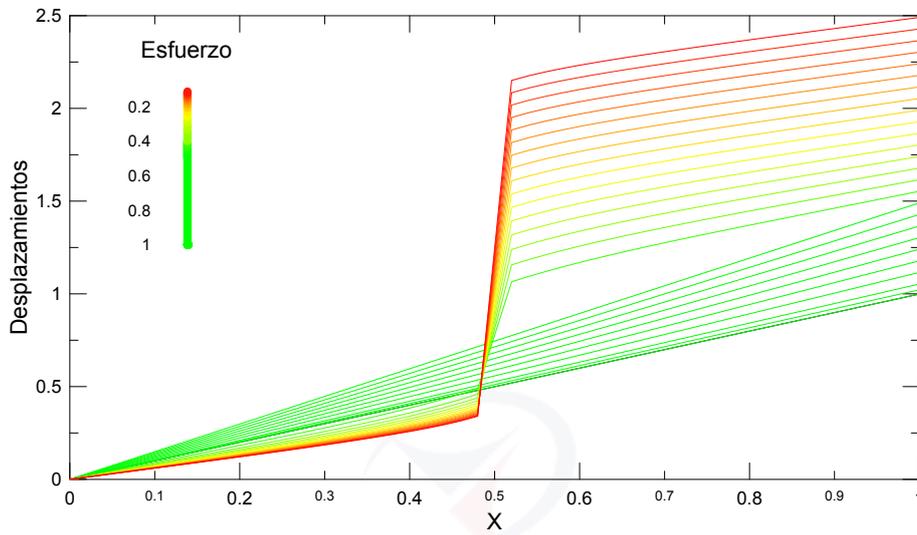


Figura 5.12: Evolución del campo de desplazamientos en en el modelo energético

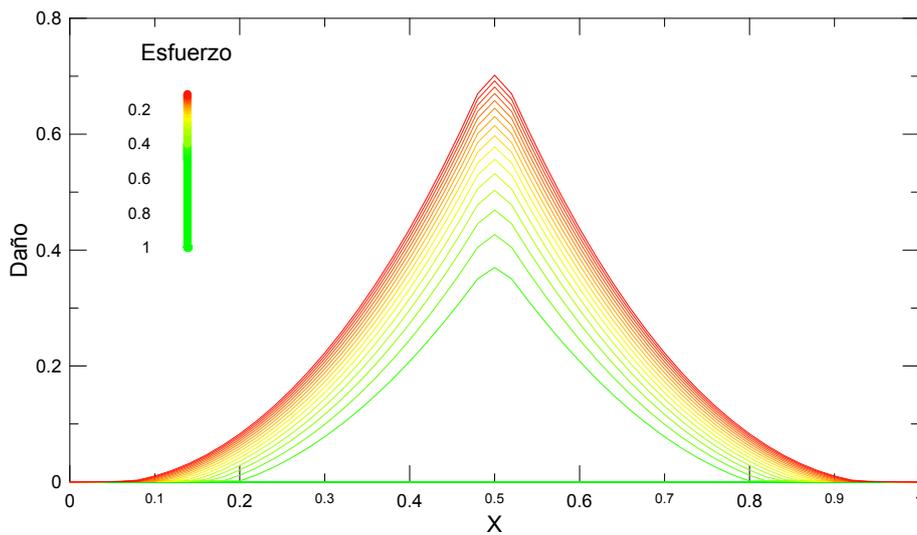


Figura 5.13: Evolución del perfil de daño en el modelo energético

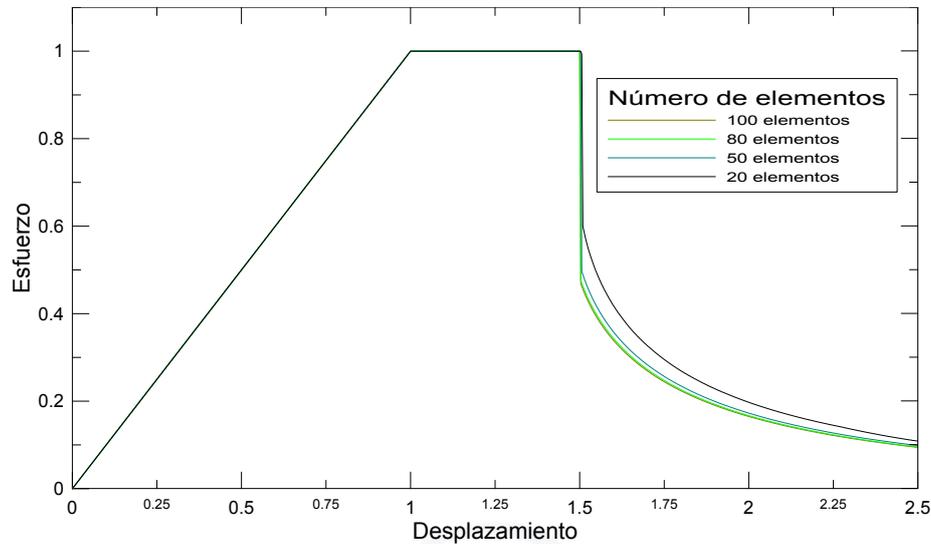


Figura 5.14: Gráfica esfuerzo-desplazamiento con variación del número de elementos en el modelo energético

de Dirac con un tamaño menor de malla, en mayor magnitud que en el modelo clásico.

### 5.3. Análisis comparativo

En esta sección se realiza un análisis comparativo entre las formulaciones clásica y energética, enfocado a la parte de la implementación y los resultados obtenidos con cada modelo computacional. Primero, se muestra la diferencia entre la distribución del daño, las deformaciones plásticas, el desplazamiento y la evolución temporal del esfuerzo en la barra obtenidos con cada modelo. Luego, se describe la diferencia entre el tiempo computacional utilizado por el modelo energético y un modelo clásico sin viscosidad para calcular la evolución de una barra con una perturbación en uno de sus elementos.

La principal razón por la que difieren los resultados obtenidos con los dos modelos se debe al uso del modelo viscoplástico para calcular la evolución de las variables internas correspondientes a la plasticidad ( $\epsilon_p$  y  $p$ ). En el modelo clásico, la dependencia de la velocidad de carga en la evolución de las deformaciones plásticas crea un efecto de endurecimiento que disminuye conforme aumenta la relación  $\Delta t/\nu$  o disminuye la velocidad de carga. En las Figuras 5.18, 5.19, 5.20 y 5.21, se pueden observar los resultados obtenidos al disminuir la velocidad de carga comparados con la respuesta del modelo energético. Claramente, los resultados del modelo clásico con viscoplasticidad tienden a la solución del modelo

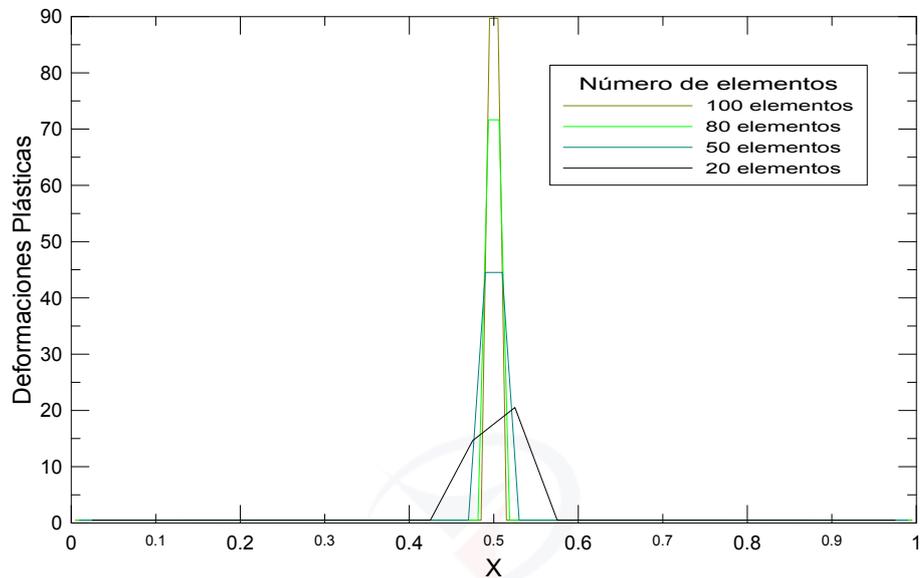


Figura 5.15: Evolución del perfil de deformaciones plásticas con variación del número de elementos en el modelo energético

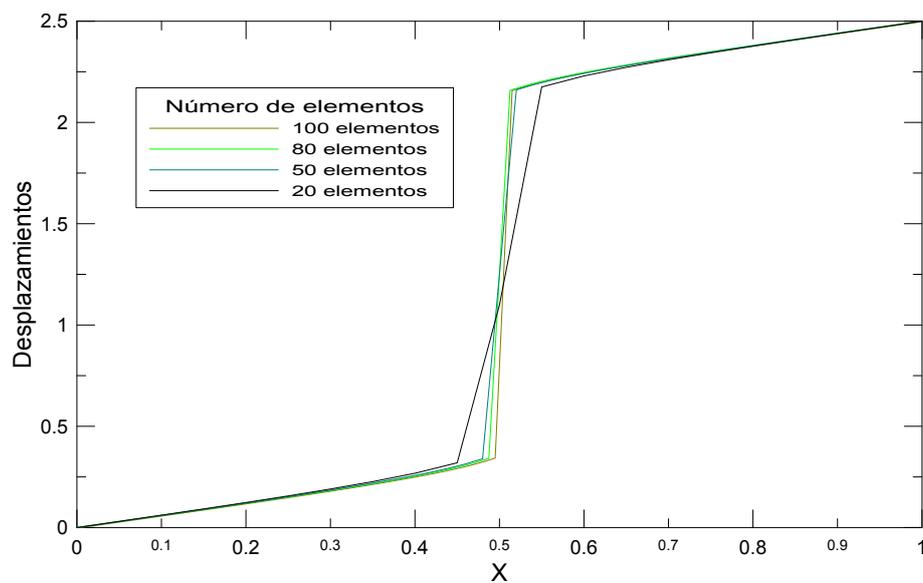


Figura 5.16: Evolución del campo de desplazamientos con variación del número de elementos en el modelo energético

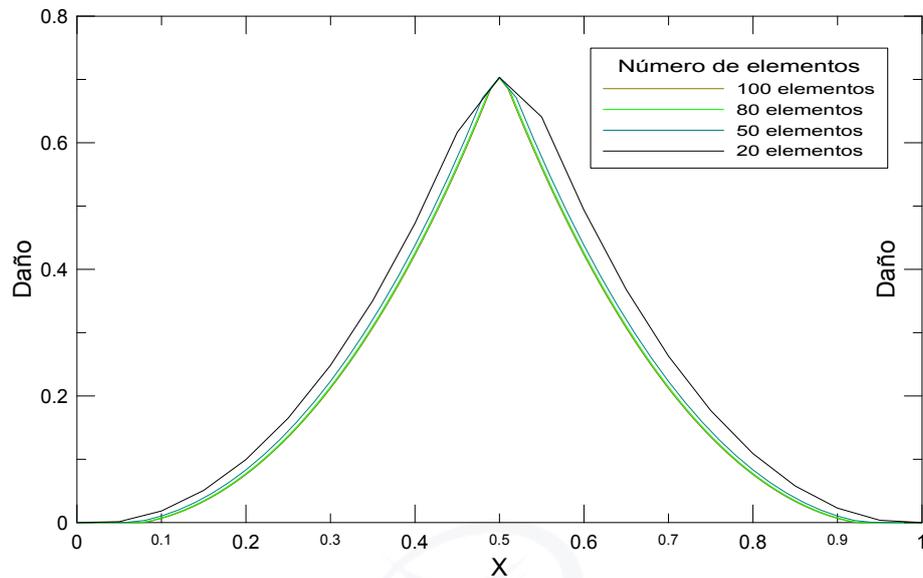


Figura 5.17: Evolución del perfil de daño con variación del número de elementos en el modelo energético

energético con una velocidad de carga suficientemente baja.

En cuanto al trabajo computacional, el modelo clásico con viscoplasticidad presenta dificultades con respecto al tamaño de paso de carga necesario para la convergencia en una barra sin perturbación. El tamaño de paso de carga impuesto puede resultar demasiado grande, causando oscilaciones en los desplazamientos calculados por el método de Newton-Raphson [4]. Se han obtenido estos mismos resultados en las simulaciones numéricas realizadas en la fase de daño, sin llegar a la convergencia. Por esto, se concluye que aunque el proceso de convergencia para un paso de carga determinado en el modelo energético sea más lento que en el modelo clásico, se pueden emplear pasos de carga más grandes, reduciendo el esfuerzo computacional.

Con el objetivo de comparar el esfuerzo computacional realizado por ambos modelos de manera equitativa, se realizan simulaciones en una barra con una perturbación en el elemento central. En cuanto a la evolución, se obtiene la misma respuesta con ambos modelos, la cual se observa en las Figuras 5.22, 5.23, 5.24 y 5.25.

Por su parte, el esfuerzo computacional es mayor en el modelo energético ya que se utilizan tres criterios de convergencia y no se hace uso de la matriz tangente, la cual influye en el número de iteraciones necesarias para la convergencia. Sin embargo, en el modelo clásico sin viscosidad, a menudo se presentan problemas de convergencia en el método de Newton-Raphson. A pesar de que el elemento

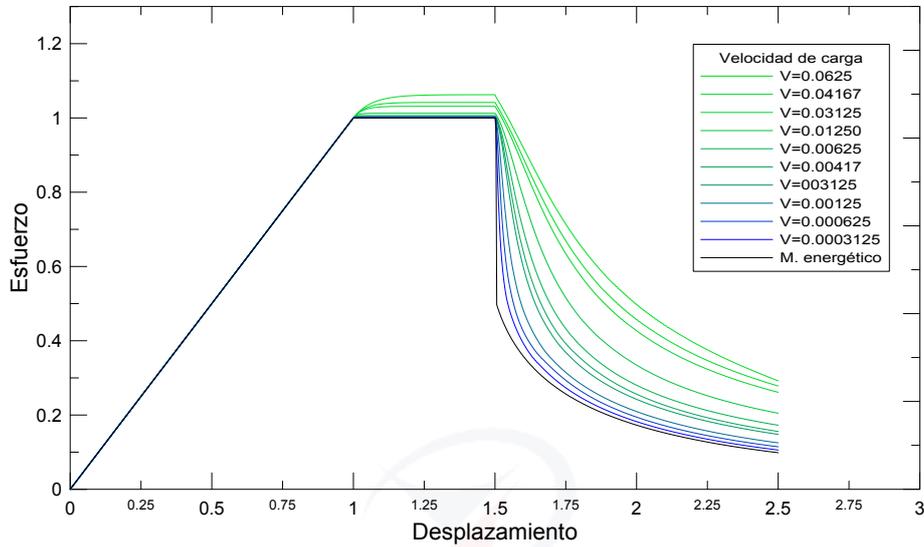


Figura 5.18: Comparación entre las gráficas esfuerzo-desplazamiento del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético

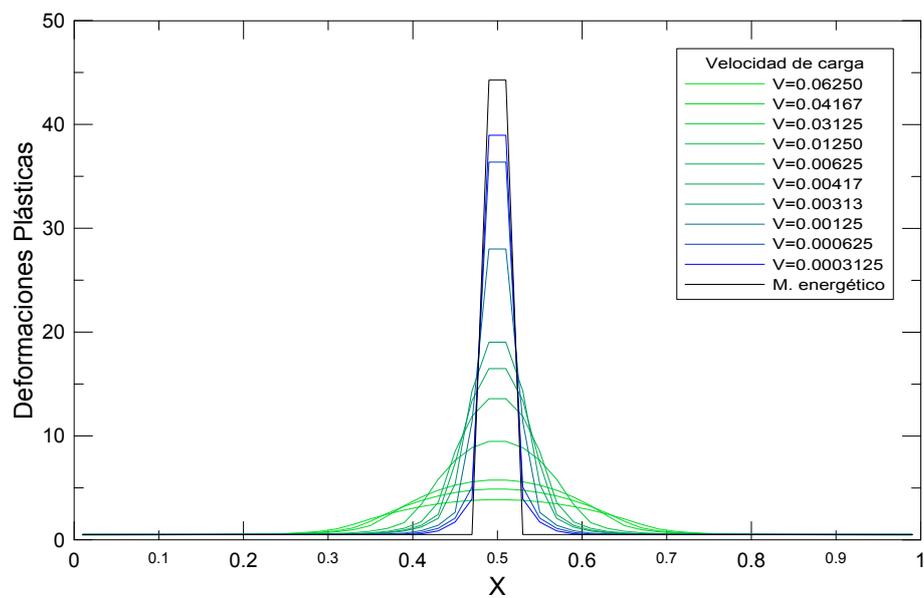


Figura 5.19: Comparación entre los perfiles de deformaciones plásticas del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético

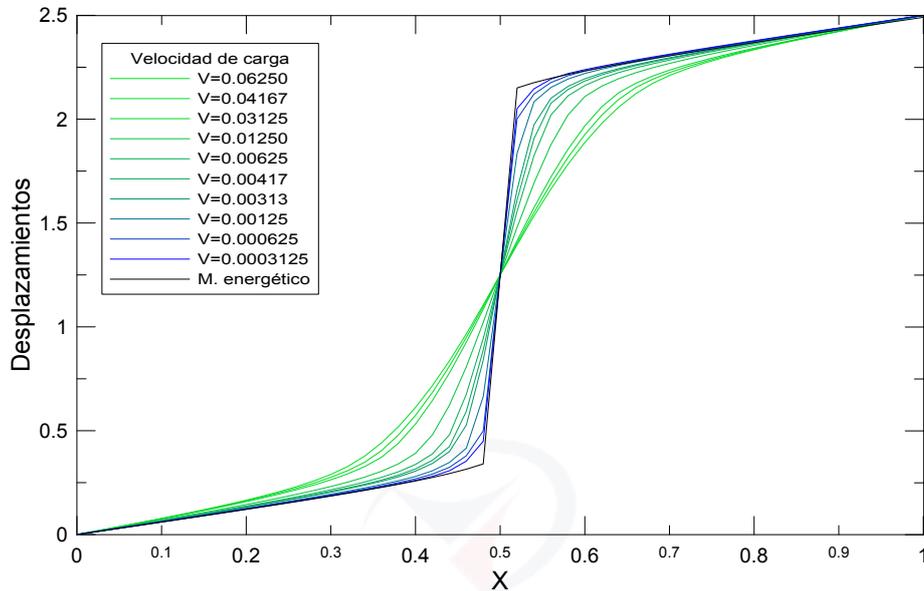


Figura 5.20: Comparación entre los perfiles de desplazamiento del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético

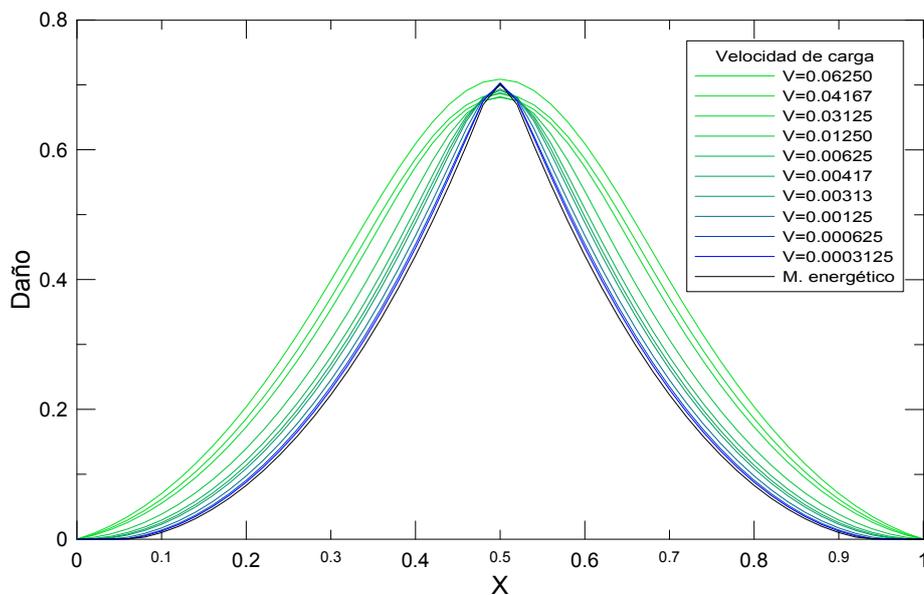


Figura 5.21: Comparación entre los perfiles de daño del modelo clásico para diferentes velocidades de carga con el modelo energético

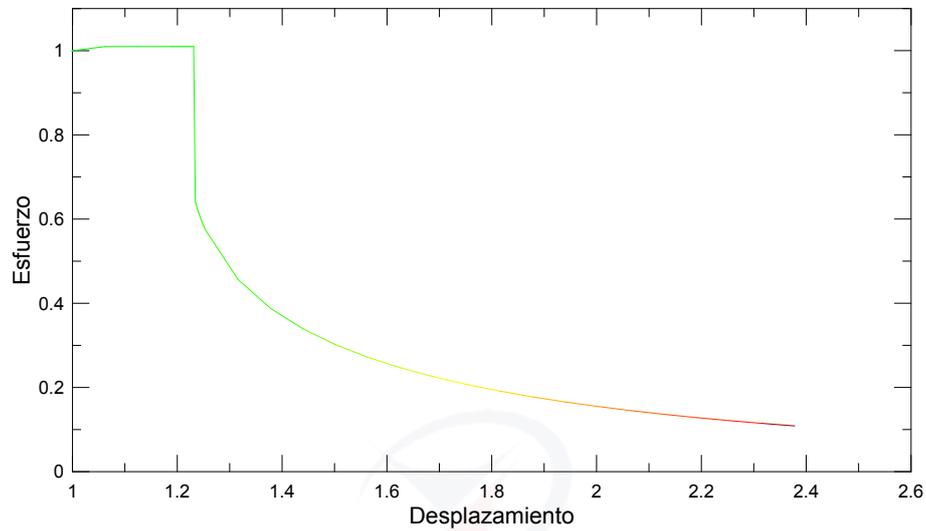


Figura 5.22: Gráfica esfuerzo-desplazamiento con perturbación en el elemento central

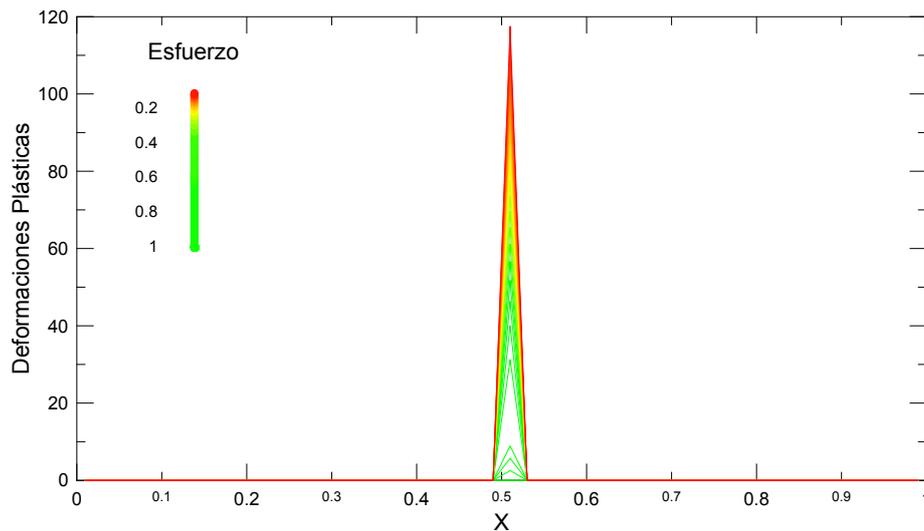


Figura 5.23: Perfiles de deformaciones plásticas con perturbación en el elemento central

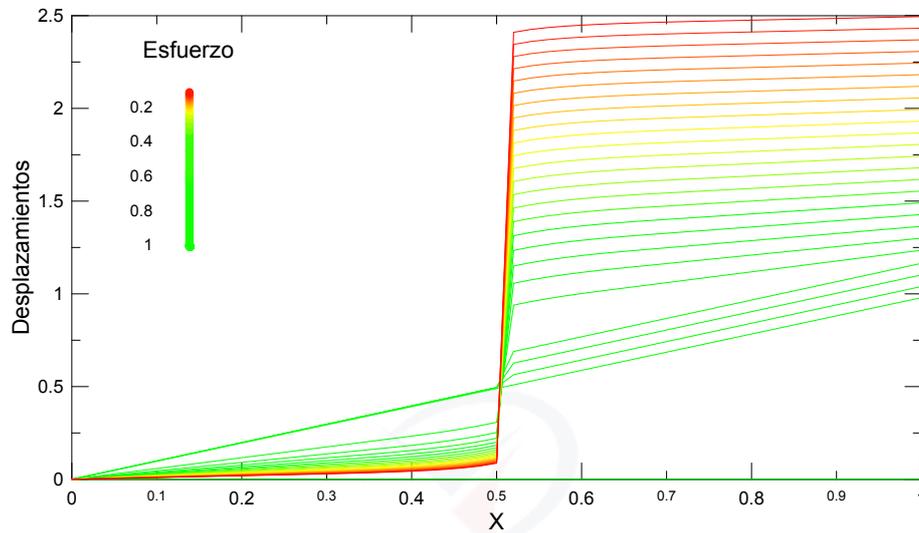


Figura 5.24: Perfiles de desplazamientos con perturbación en el elemento central

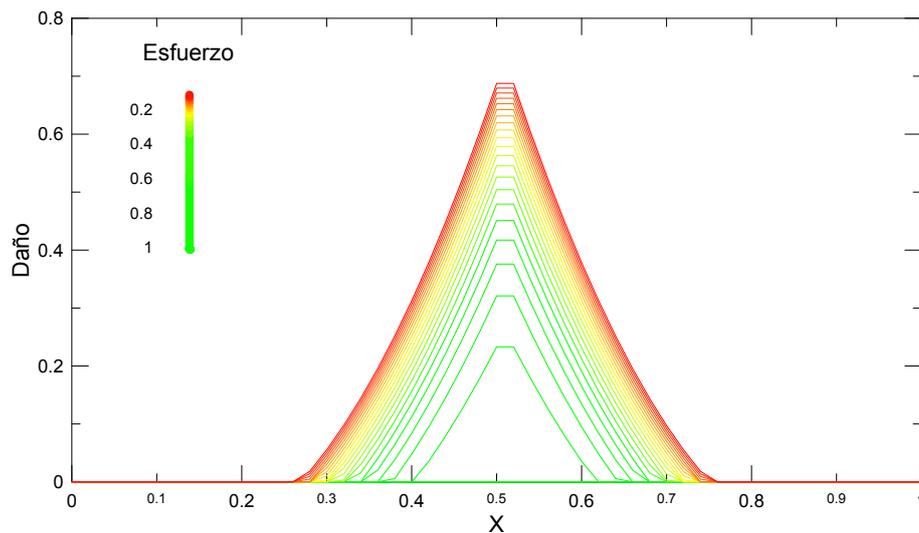


Figura 5.25: Perfil de daño con perturbación en el elemento central



## CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS COMPARATIVO

---

en el que evoluciona la plasticidad queda definido al introducir una perturbación, se producen inestabilidades numéricas en las primeras iteraciones del método que hacen que más de un elemento se considere en fluencia. Al ensamblar la matriz tangente, si más de un elemento está en fluencia, la matriz tangente se vuelve singular, deteniendo las iteraciones.



## Capítulo 6

---

# Conclusiones

---

En este trabajo, se exploran dos modelos computacionales para la modelización de plasticidad y daño, utilizando un enfoque clásico en el primero y un enfoque energético en el segundo. En el desarrollo de estos modelos, se muestra que pese a que se construyen sobre principios diferentes, resultan en el mismo problema matemático. Con esto, se demuestra que en principio, los modelos planteados son equivalentes. A pesar de esta equivalencia, cada formulación conduce a un modelo numérico distinto, lo cual implica que la descripción de la evolución del sistema a nivel global resulte, dadas ciertas condiciones, en soluciones diferentes para la parte poscrítica. Esto se evidencia en los resultados presentados en el Capítulo 5.

El modelo clásico hace uso de la teoría de materiales estándar para la obtención de las ecuaciones de gobierno. Esto resulta en un tratamiento en principio local, donde es necesaria la aplicación de una regularización al problema. El modelo clásico de plasticidad perfecta resulta en un problema mal planteado, puesto que las condiciones de equilibrio y compatibilidad cinemática no son suficientes para definir de forma única la evolución del sistema. El modelo puede converger hacia una solución inadecuada, con una localización de deformaciones en el elemento en el que se imponen los desplazamientos. Se resuelve este problema mediante dos regularizaciones: el uso de una perturbación y la viscoplasticidad. Las principales desventajas del modelo clásico consisten en problemas de convergencia. El modelo computacional es sensible al tamaño de paso de carga, pudiendo no llegar a converger. Pese a estas desventajas, se obtienen resultados positivos. Aunque numéricamente inestable, la regularización mediante una perturbación presenta los mismos resultados que el modelo energético. Por otro lado, el uso de viscoplasticidad presenta un resultado importante, ya que permite la modelización de un comportamiento diferente, donde existe una zona de localización de



deformaciones plásticas en lugar de una localización inmediata. Este comportamiento está en función de la velocidad de carga y de la constante de viscosidad, las cuales, conforme disminuyen, permiten que el modelo con viscosidad tienda al modelo energético. Por último, se debe resaltar que el modelo clásico permite la implementación de diferentes modelos constitutivos mediante algoritmos locales, representando un modelo flexible.

Por su parte, el modelo energético hace uso de un tratamiento puramente variacional. Con esto, se construye el modelo sobre tres principales bloques: la condición de estabilidad, la condición de irreversibilidad y el balance de energía. Esto resulta en un modelo global, donde la evolución viene dada por la minimización de un funcional de energía. Los principales problemas del modelo energético consisten en la velocidad de convergencia y en la falta de flexibilidad. Ya que no se emplea la matriz tangente ni se obtiene el equilibrio al final de cada iteración, la convergencia viene dada por criterios impuestos en las variables de estado, lo cual puede resultar en un mayor esfuerzo computacional. Además, la implementación de diferentes modelos constitutivos requiere cambios en la formulación, por lo que la minimización del funcional de energía correspondiente puede resultar en otra implementación. Por otro lado, las ventajas del modelo van desde lo conceptual hasta lo numérico. Primero, se debe recalcar que la formulación permite obtener de forma natural las condiciones matemáticas que se imponen en la formulación clásica. Además, permite estudiar la condición de estabilidad de segundo orden, lo cual no se trata en la formulación clásica por carencia de herramientas variacionales. En cuanto a lo numérico, se recalca la capacidad de representar el comportamiento deseado de manera estable. Debido al tratamiento global y a la convexidad del funcional de energía con respecto a las variables de estado (considerando cada una por su lado), el problema de plasticidad no necesita regularización y se resuelve mediante el *algoritmo de minimización alterna*. Esto representa la ventaja principal del modelo, ya que se obtiene la plasticidad perfecta de manera homogénea y la distribución del daño de manera adecuada, sin localizaciones arbitrarias. Además, no es necesaria la obtención de la matriz tangente, cuya obtención puede representar problemática desde el punto de vista analítico en modelos clásicos con cierto grado de complejidad.

Pese a las limitaciones mencionadas en ambos modelos, se obtienen positivos, como se puede observar en el Capítulo 5. Principalmente, se logra reproducir la falla de un material dúctil unidimensional, con un salto en los desplazamientos en la presencia de esfuerzos cohesivos. Para este fin, el enfoque energético resulta



en un modelo computacional robusto y estable, mientras que el enfoque clásico permite la simulación de un comportamiento con una zona de localización de deformaciones plásticas. En ambos modelos, se logra una respuesta sin dependencia espuria y en general poco sensible al tamaño de la malla; salvo por el campo de deformaciones plásticas, donde se obtuvo un incremento en las deformaciones conforme disminuye el tamaño de la malla. Estos resultados concuerdan con la respuesta analítica de [1], donde las deformaciones plásticas tienden a la delta de Dirac. Además, las simulaciones numéricas demuestran que el modelo con viscoplasticidad tiende al modelo energético conforme disminuye la velocidad de carga manteniendo constante la constante de viscosidad, demostrando equivalencia entre ambos enfoques.

Por último, cabe recalcar posibles ampliaciones a este trabajo, entre las cuales se destacan:

- Realizar la implementación computacional en dos y tres dimensiones. Para esto, se debería definir los problemas de valores de contorno en notación vectorial y realizar la implementación correspondiente.
- Introducir efectos de endurecimiento en el modelo energético.
- Implementar un modelo con gradiente de deformaciones y comparar los resultados con el modelo de viscoplasticidad.
- Realizar simulaciones numéricas con datos de materiales reales y realizar la validación con resultados experimentales.

---

## Bibliografía

---

- [1] Roberto Alessi. *Variational Approach to Fracture Mechanics with Plasticity*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, 2013.
- [2] Madjid Almansba, Khémais Saanouni, Nacer Eddine Hannachi, et al. Isotropic elastoplasticity fully coupled with non-local damage. *Engineering*, 2(06):420, 2010.
- [3] Grigory Isaakovich Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in applied mechanics*, 7(55-129):104, 1962.
- [4] Ronaldo I. Borja. *Plasticity*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [5] Blaise Bourdin, Gilles A Francfort, and Jean-Jacques Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4):797–826, 2000.
- [6] Blaise Bourdin, Gilles A Francfort, and Jean-Jacques Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1-3):5–148, 2008.
- [7] GH Bryan. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the “buckling” of the sides of a ship. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1):54–67, 1890.
- [8] M Charlotte, G Francfort, J.-J. Marigo, and L Truskinovsky. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem: Comparison of griffith and barenblatt surface energy models. In *Continuous Damage and Fracture*. Elsevier, 2000.
- [9] Bernard D Coleman and Morton E Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47(2):597–613, 1967.



- [10] Daniele Ferretti, Marco Rossi, and Gianni Royer-Carfagni. An espi experimental study on the phenomenon of fracture in glass. is it brittle or plastic? *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(7):1338–1354, 2011.
- [11] Gilles A Francfort and J-J Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1319–1342, 1998.
- [12] Krishna Garikipati. Lectures on continuum physics. University Lecture, 2013.
- [13] Paul Germain, Quoc Son Nguyen, and Pierre Suquet. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4b):1010–1020, 1983.
- [14] Alan A Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, pages 163–198, 1921.
- [15] GR Irwin and JA Kries. In *Welding Journal Research Supplement 33*. 1951.
- [16] Warner Tjardus Koiter. The stability of elastic equilibrium. Technical report, DTIC Document, 1970.
- [17] David Lasry and Ted Belytschko. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6):581–597, 1988.
- [18] Jean Lemaitre and Horst Lippmann. *A course on damage mechanics*, volume 2. Springer Berlin, 1996.
- [19] LG Machado and DC Lagoudas. Thermomechanical constitutive modeling of smas. In *Shape Memory Alloys*. Springer, 2008.
- [20] J.-J. Marigo and L Truskinovsky. Initiation and propagation of fracture in the models of griffith and barenblatt. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16(4):391–409, 2004.
- [21] Stevie Mathieu. I-5 bridge listed as 'fracture critical', May 2013.
- [22] Gérard A Maugin and Wolfgang Muschik. Thermodynamics with internal variables. part ii. applications. *Journal of Non Equilibrium Thermodynamics*, 19:250–289, 1994.



- [23] Alexander Mielke. A mathematical framework for generalized standard materials in the rate-independent case. *Multifield Problems in Solid and Fluid Mechanics*, 28:399, 2006.
- [24] Giang Dinh Nguyen. *A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory*. PhD thesis, University of Oxford Oxford, 2005.
- [25] Quoc Son Nguyen. *Stability and nonlinear solid mechanics*. Wiley, 2000.
- [26] MS Niazi, HH Wisselink, and T Meinders. Viscoplastic regularization of local damage models: revisited. *Computational mechanics*, 51(2):203–216, 2013.
- [27] UMBERTO PEREGO. A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3731–3755, 1996.
- [28] Kim Pham and Jean-Jacques Marigo. Approche variationnelle de l'endommagement: I. les concepts fondamentaux. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4):191–198, 2010.
- [29] Kim Pham and Jean-Jacques Marigo. Approche variationnelle de l'endommagement: II. les modèles à gradient. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4):199–206, 2010.
- [30] Kim Pham and Jean-Jacques Marigo. From the onset of damage to rupture: construction of responses with damage localization for a general class of gradient damage models. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(2-4):147–171, 2013.
- [31] C LAKSHAMANA RAO, J LAKSHINARASHIMAN, RAJU SETHURAMAN, and SRINIVASAN M SIVAKUMAR. *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2003.
- [32] David Roylance. Introduction to fracture mechanics. University Lecture, 2001.
- [33] Kenneth Runesson, P Steinmann, M Ekh, and A Menzel. Constitutive modeling of engineering materials. *Volume I General Concepts and Inelasticity*, 2006.



- [34] Juan C Simó and Thomas JR Hughes. Computational inelasticity, volume 7 of interdisciplinary applied mathematics, 1998.
- [35] EERI Team. Effects of the 2011 tohoku japan earthquake on steel structures, August 2011.
- [36] L Truskinovsky. Fracture as a phase transition. *Contemporary research in the mechanics and mathematics of materials*, pages 322–332, 1996.
- [37] W.H. Warnes. Case studies in materials selection: Shipbuilding. University Lecture, 2014.

