RESUMEN

El siguiente proyecto de graduación es una recopilación teórica y práctica de las operaciones fundamentales de la subunidad “Ondas Mecánicas” perteneciente a Oscilaciones y Ondas.
Con la utilización de Modellus (programa de animación matemática) se han elaborado variadas animaciones, las mismas que se han clasificado en: Conceptuales, Ejercitativas y Lúdicas. Las primeras contienen conceptos, teorías, teoremas y modelos matemáticos de la subunidad mencionada; las segundas consolidan y refuerzan el aprendizaje con la ayuda de ejercicios modelo y propuestos; mientras que las últimas complementan el aprendizaje, pues son juegos que incentivan el aprendizaje y desarrollan el razonamiento, la creatividad y la motricidad. Además de éstos, la presente cuenta con una síntesis bien elaborada de “Temas de Didáctica Especial, Cómo Enseñar a niños con problemas de aprendizaje”, los fundamentos básicos para el uso de Modellus y resúmenes breves referentes a cada uno de los temas que componen “Ondas Mecánicas”.

PALABRAS CLAVE

- **Perturbación**
- **Oscilación Viajera**
- **Bidimensional**
- **Longitudinal**
- **Transversales**
- **Medio Elástico**
- **Superposición**
- **Propagación**
- **Frecuencia**
- **Interfase**
- **Reflexión**
- **Refracción**
- **Transmisión**
- **Sincrónicas**
- **Polarización**

ÍNDICE

Certificado	4
Dedicatoria	5
Agradecimiento	6
Introducción	7
Temas de la Didáctica Especial	11
Introducción a Modellus	27
Presentación	42
Conceptos Generales	43
Ecuación de la Onda. Solución	54
Ondas longitudinales en una varilla rígida	69
Ondas de Presión en una columna de gas	76
Ondas transversales en una cuerda	85
Ondas transversales y de torsión en una varilla	94
Ondas superficiales en un líquido	102
Ondas bi y tridimensionales	113
Superposición de ondas de igual dirección. Veloci-	124
dad de grupo	133
Energía y Momentum en una onda	143
Efecto Doppler	150
Reflexión y refracción de ondas planas	157
Coeficientes de reflexión y transmisión. Reflectancia	167
y Transmitancia	177
Interferencia de dos ondas sincrónicas	186
Interferencia de N ondas sincrónicas	194
Ondas estacionarias	207
Polarización de ondas trasversales	208
Conclusiones	209
Recomendaciones	
Bibliografía	

UNIVERSIDAD DE CUENCA
FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

UNIVERSIDAD DE CUENCA
fundada en 1867

"MODELLUS, UNA GRAN AYUDA PARA EL APRENDIZAJE DE ONDAS MECÁNICAS"

Tesis previa a la obtención
del título de Licenciado
en Ciencias de la Educación
en la especialidad de
Matemáticas y Física

DIRECTOR: **Dr. ALBERTO SANTIAGO AVECILLAS JARA**

AUTOR: **Edison Javier Saquicela Urdiales**

CUENCA-ECUADOR
2010

CERTIFICADO

Yo, Edison Javier Saquicela Urdiales,

certifico que todo el contenido

del presente trabajo es

de exclusiva responsabilidad del autor.

……..

DEDICATORIA

A mis padres:
Cristina Urdiales y Polivio Saquicela
Por darme cariño, la confianza, y su apoyo incondicional sin esperar nada a cambio.
A mi esposa:
María Isabel Guzmán
Por brindarme su amor incondicional, su paciencia y ayudarme a cumplir mis objetivos.
A mi abuelita:
María Peláez
Por guiarme con sus consejos y enseñarme el respeto hacia los demás.
A mis hermanos
Cesar y Lorena Saquicela
Por apoyarme en los momentos que más lo necesitaba, para lograr cumplir mi sueño de graduarme.

AGRADECIMIENTOS

Muchas han sido las personas que de manera directa o indirecta me han ayudado en la realización de esta tesis, quiero dejar constancia y agradecerles con sinceridad su participación.

En primer lugar dar gracias a Dios, por darme la salud, por estar conmigo en cada paso que doy, y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi fuerza y compañía durante mis estudios.

Agradecer hoy y siempre a mi madre por darme la vida y por el esfuerzo realizado, que si no fuese por ella mis estudios no hubiesen sido posibles, a mis Tíos y hermanos por brindarme su ayuda incondicional sin esperar nada a cambio.

De igual manera mi más sincero agradecimiento a mis profesores y compañeros, y de manera especial a mi director de tesis, el Dr. Alberto Santiago Avecillas Jara, por toda su confianza, apoyo y sobre todo por su paciencia que brindo en la realización de este proyecto.

Agradezco a mi esposa y a sus padres por la motivación y el cariño que me dan día tras día, y finalmente agradezco a mis amigos por la colaboración en todo momento y sobre todo cuando más necesitaba.

INTRODUCCIÓN

"MODELLUS, UNA GRAN AYUDA PARA EL APRENDIZAJE DE ONDAS MECÁNICAS", es un proyecto que involucra directamente el software y elementos informáticos con la matemática, debido a que la ciencia y la tecnología avanza rápidamente en nuestro mundo actual, se vio la necesidad de crear este proyecto que es un software educativo: dinámico, comprensible y fácil de utilizar. Dejemos atrás esa ideología que la matemática, la física, la trigonométrica, la geometría, etc... solamente se la aprende con la explicación del profesor en la pizarra y nada más, nosotros los profesores debemos irnos innovando en cada momento, conociendo las diversas formas y métodos de enseñanza-aprendizaje en donde permitan hacer uso de todas sus herramientas, entendiendo como herramientas todos los materiales visuales, auditivos, manipulables que incentiven y logren un aprendizaje provechoso en cada uno de nuestros alumnos.

La tecnología, por su rapidez de crecimiento y expansión, ha venido trasformando las sociedades actuales. Tomemos conciencia y aceptemos que de una u otra manera la educación se ha beneficiado con la tecnología si cabe recalcar uno de los inventos tecnológicos más usado e importante en nuestro medio que es el internet que es una herramienta fundamental de investigación y comunicación que influye en el proceso enseñanza – aprendizaje ya que tanto los alumnos como educadores pueden acceder a la información que tiene como fin obtener un aprendizaje duradero.

También podemos darnos cuenta que se presentan diversos métodos pedagógicos de aprendizaje, que no solamente relacionan al profesor-alumno sino alumno-profesor es decir que el profesor no es el único que interviene en la enseñanza-aprendizaje, sino, que también el alumno. Es por ello que en esta obra yo me he centrado a hablar acerca del modelo pedagógico activista del aprendizaje, donde trata acerca del rol del profesor y el rol del estudiante dentro y fuera de las aulas.

Finalmente puedo decir que esta obra tiene como objetivo principal, proporcionar dinamismo en las aulas, puesto que contiene animaciones: conceptuales, ejercitativas y lúdicas hechas en Modellus que son comprensibles, ilustrativas e interesantes, también busca al mismo tiempo un auto-aprendizaje.

DESCRIPCIÓN DE CADA TEMA

2.1.1 Conceptos Generales: El primer tema contiene los conceptos y ecuaciones básicas necesarias para el conocimiento del resto de temas.

2.1.2 Ecuación de la Onda: Se obtiene la ecuación de la onda, sus condicionantes y se da una gran importancia al estudio de las ondas armónicas.

2.1.3 Ondas Longitudinales en una Varilla Rígida: Desarrolla y plantea la ecuación diferencial respectiva, se estudia las deformaciones y elasticidad que presenta una varilla rígida.

2.1.4 Ondas de presión en una columna de gas: Se estudia las ondas elásticas escalares y longitudinales, además se obtiene la ecuación diferencial respectiva.

2.1.5 Ondas Transversales en una cuerda: En este tema se analiza la propagación de un movimiento ondulatorio en una cuerda sometida a una perturbación.

2.1.6 Ondas Transversales y de Torsión en una cuerda: Aquí se estudia la deformación unitaria por cizalladura y su trazo continuo cuando ha sido perturbado trasversalmente.

2.1.7 Ondas Superficiales en un Liquido: Se plantea y desarrolla la ecuación diferencial, además ondas en las que su velocidad depende de la longitud de onda.

2.1.8 Ondas Bi y Tridimensionales: Mientras se plantea la ecuación diferencial requerida se resuelve las respectivas ecuaciones para ondas cilíndricas y esféricas.

2.1.9. Superposición de Ondas de Igual Dirección. Velocidad de Grupo: Explica la superposición de dos ondas de igual dirección, se desarrolla la expresión para la velocidad de grupo y la ecuación para la frecuencia de pulsaciones.

2.1.10 Energía y Momentum en una Onda: Define lo que en un movimiento ondulatorio se trasmite o propaga Momentum y energía, se obtiene la ecuación de la potencia media y su relación con la intensidad de onda.

2.1.11 Efecto Doppler: Explica la variación en la frecuencia de una onda producida por el movimiento de una fuente respecto a un observador.

2.1.12 Reflexión y Refracción de Ondas Planas: Se estudia los fenómenos de reflexión y trasmisión, además se analiza la Ley de Snell y el índice de refracción.

2.1.13 Coeficientes de Reflexión y Transmisión. Reflectancia y Transmitancia: Se explica los cuatro conceptos necesarios para la comprensión de los fenómenos ondulatorios, así como la definición de las ecuaciones de la energía reflejada y trasmitida.

2.1.14 Interferencia de Dos Ondas Sincrónicas: Se estudiara la interferencia producida por dos fuentes que vibran con la misma frecuencia y en fase.

2.1.15 Interferencia de N Ondas Sincrónicas: Expone el análisis de N ondas sincrónicas distribuidas linealmente en forma uniforme.

2.1.16 Ondas Estacionaria: Se estudia la propagación de una onda estacionaria como el resultado de la interferencia o superposición de dos ondas.

2.1.17 Polarización de Ondas Transversales: Explica el fenómeno y concepto de polarización, se describe la polarización lineal o plana, polarización elípticas y circulares y sus respectivas ecuaciones.

TEMAS DE LA DIDÁCTICA ESPECIAL

INTRODUCCIÓN

Hoy en día los padres se preocupan mucho y se decepcionan cuando su hijo tiene problemas en la escuela. Existen muchas razones para el fracaso escolar, pero entre las más comunes se encuentra específicamente la de los problemas del aprendizaje. Muchos niños con uno de estos problemas de aprendizaje suele ser muy inteligente y trata arduamente de seguir las instrucciones al pie de la letra, de concentrarse y de portarse bien en la escuela y en la casa. Sin embargo, a pesar de sus esfuerzos, tiene mucha dificultad aprendiendo y no saca buenas notas, algunos niños con problemas de aprendizaje no pueden estarse quietos o prestar atención en clase. Los problemas del aprendizaje afectan a un 15% de los niños de edad escolar.

Los problemas del aprendizaje están causados por algún problema del sistema nervioso central que interfiere con la recepción, procesamiento o comunicación de la información. Algunos niños con problemas del aprendizaje son también hiperactivos, se distraen con facilidad y tienen una capacidad para prestar atención muy corta. El niño, al esforzarse tanto por aprender, se frustra y desarrolla problemas emocionales, como el de perder la confianza en sí mismo con tantos fracasos. Algunos niños con problemas de aprendizaje se portan mal en la escuela porque prefieren que los crean "malos" a que los crean "estúpidos."

Estos problemas merecen una evaluación comprensiva por un experto que pueda analizar todos los diferentes factores que afectan al niño. Un psiquiatra de niños y adolescentes puede ayudar a coordinar la evaluación y trabajar con profesionales de la escuela y otros expertos para llevar a cabo la evaluación y las pruebas escolásticas y así clarificar si existe un problema de aprendizaje. Es importante reforzar la confianza del niño en sí mismo, tan vital para un desarrollo saludable, y también ayudar a padres y a otros miembros de la familia a que entiendan y puedan hacer frente a las realidades de vivir con un niño con problemas de aprendizaje.

COMO EDUCAR A NIÑOS CON PROBLEMAS DE APRENDIZAJE

Muchos modelos se han formulado basándose en la falta de atención de atención o interés que ponen algunos niños en clases, la falta de retención dificulta la secuencia de contenidos a lo largo de la vida estudiantil.
Los problemas del aprendizaje afectan a 1 de cada 10 niños en edad escolar. Son problemas que pueden ser detectados en los niños a partir de los 5 años de edad y constituyen una gran preocupación para muchos padres ya que afectan al rendimiento escolar y a las relaciones interpersonales de sus hijos.

Un niño con problemas de aprendizaje suele tener un nivel normal de inteligencia, de agudeza visual y auditiva. Es un niño que se esfuerza en seguir las instrucciones, en concentrarse, y portarse bien en su casa y en la escuela. Su dificultad está en captar, procesar y dominar las tareas e informaciones, y luego a desarrollarlas posteriormente. El niño con ese problema simplemente no puede hacer lo que otros con el mismo nivel.

El niño con problemas específicos del aprendizaje tiene patrones poco usuales de percibir las cosas en el ambiente externo. Sus patrones neurológicos son distintos a los de otros niños de su misma edad. Sin embargo tienen en común algún tipo de fracaso en la escuela o en su comunidad.

Cómo detectar problemas de aprendizaje en los niños

No resulta tan complicado detectar cuando un niño está teniendo problemas para procesar las informaciones y la formación que recibe. Los padres y maestros deben estar siempre atentos y conscientes de las señales más frecuentes que puede indicar la presencia de un problema de aprendizaje, cuando el niño:

- Presenta dificultad para entender y seguir tareas e instrucciones.
- Presenta dificultad para recordar lo que alguien le acaba de decir.
- No domina las destrezas básicas de lectura, deletreo, escritura y/o matemática, por lo que fracasa en el trabajo escolar.
- Presenta dificultad para distinguir entre la derecha y la izquierda, para identificar las palabras, etc. Su tendencia es escribir las letras, palabras o números al revés.
- Le falta coordinación al caminar, hacer deportes o llevar a cabo actividades sencillas, tales como aguantar un amarrarse el cordón del zapato.
- Presenta facilidad para perder o extraviar su material escolar, como los libros y otros artículos.
- Tiene dificultad para entender el concepto de tiempo, confundiendo el "ayer", con el "hoy" y/o "mañana", el almuerzo con la merienda.
- Manifiesta irritación o excitación con facilidad.

Características de los problemas de aprendizaje

Los niños que tienen problemas del aprendizaje con frecuencia presentan:

Lectura

El niño acerca mucho el libro; dice palabras en voz alta; señala, sustituye, omite e invierte las palabras; Ve doble, salta y lee la misma línea dos veces; no lee con fluidez; tiene poca comprensión en la lectura oral; omite consonantes finales en lectura oral; pestañea en exceso; se pone bizco al leer; Tiende a frotarse los ojos y quejarse de que le pican; presenta problemas de limitación visual, deletreo pobre.
Sin embargo los niños se confundan en muchas y variados mensajes entre letras del alfabeto y los sonidos que son componentes de las palabras habladas, se le atribuye como causa un defecto en la habilidad para discriminar los sonidos del habla. En estos casos, se supone que los niños carecen de conciencia fonológica, lo cual es falso, porque el hecho de que el niño no pueda producir algunos sonidos, no significa que no los identifique.

Escritura.

La escritura es una actividad lingüística secundaria. Se pueden detectar aspectos comprensivos y de producción. El factor comprensivo está relacionado con el OUTPUT cognitivo o capacidad cognitiva. En cambio, el factor de producción está relacionado con el OUTPUT motor. Este último es el que se encuentra alterado en una digrafía.

Es importante diferenciar entre las dificultades de escritura propias de una dislexia y entre dificultades de escritura específicas con alteración del mecanismo de la escritura.

En el OUTPUT motor intervienen diversas funciones:

- Organización, kinestésica o memoria de movimiento.
- Organización motriz.
- Coordinación motriz fina.
- Organización espacial.
-

Aspectos que se debe tener en cuenta para detectar dificultades en la escritura.

Para detectar dificultades en la escritura se debe tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. Trazado
2. Forma
3. Legibilidad
4. Fluidez
5. Significado

Auditivo y visual

Los expertos sostienen que los niños con problemas de visión y audición, que los padres no pueden detectar a simple vista, padecen de serios inconvenientes a la hora de aprender; de ahí la importancia de realizar controles que puedan evitar el bajo rendimiento escolar. La mayoría de los establecimientos educativos exigen, al inicio del año lectivo, ambos estudios. Los especialistas sugieren que el primer control visual y auditivo de un niño debe ser antes de los tres meses de vida ya que se calcula que un 12 por ciento de los niños en edad escolar pueden tener problemas en la vista.

Síntomas a tener en cuenta

Así, los padres deben consultar:

- si el chico mira del televisor desde muy corta distancia;
- si le molesta la luz, si se frota los ojos con insistencia o si uno de ellos se le desvía.
- Un niño con problemas auditivos o visuales suele ser retraído, tímido y es frecuente que le cuesta más relacionarse con sus compañeros.
- Los traumatismos son la principal causa de problemas visuales en niños.
- Los accidentes hogareños, la práctica de algún deporte brusco, la actividad recreativa en la escuela, pero también pinchazos, caídas, quemaduras, o el uso indebido de cohetes o artículos de limpieza caseros, suelen ser causa de lesión ocular.

La audición

Se estima que uno de cada mil chicos tiene dificultades para escuchar. La rubéola durante la gestación, una mala oxigenación al nacer, cierto tipo de sufrimiento fetal durante el parto y las secuelas de meningitis o enfermedades neurológicas pueden ser causantes sordera o hipoacusia. La audición en los niños termina de madurar recién a los 18 meses de nacer. José María Castillo, otorrinolaringólogo del hospital "Sor María Ludovico" especificó que "además de realizar el control al nacer debemos consultar al especialista si nuestro hijo no se altera ante estímulos sonoros fuertes, como una puerta que se cierra fuerte o un grito". Y agregó que "después de los cuatro meses debe llamar la atención que no se interese por juguetes sonoros o que no experimente una reacción ante la llegada de alguien a

la casa". El especialista enfatizó que el exceso en el uso de auriculares para escuchar, MP3 más la acústica de los boliches suele producir disminución auditiva en los adolescentes, sobre todo si la exposición se prolonga más de media hora en forma continua, ya que es la única entrada de sonido en nuestro cuerpo.

La visión

Estos problemas visuales afectan directamente al modo en que aprendemos, leemos, escribimos, y a la destreza con la que realizamos las tareas.
Un problema que afecte a alguna de las habilidades visuales puede tener un impacto importante sobre el aprendizaje.

Como la visión y el aprendizaje están íntimamente relacionados, en muchas ocasiones un problema de aprendizaje está enmascarando a un problema visual.
Muchos adolescentes con problemas visuales pueden estar mal diagnosticados de deficiencias de Aprendizaje (Déficit de Atención con y sin Hiperactividad, Dislexia, etc.).
Hay varias razones para esta asociación. Por ejemplo, los niños que tienen problemas de aprendizaje relacionados con problemas visuales no pueden mantener su trabajo en visión próxima en el colegio. Pueden estar mal diagnosticados de **Déficit de Atención** y tampoco pueden mantener la atención en el trabajo escolar.

Matemáticas

Las investigaciones sobre los niños con dificultades mayores en el aprendizaje de las matemáticas, son escasas, pero sí se

ha permitido establecer descriptivamente ciertos subgrupos diferentes a los que pueden pertenecer estos niños.

Las investigaciones posteriores, sobre todo desde la perspectiva cognitiva, han perfilado ciertas diferencias cognitivas, que han recibido recientemente una rigurosa confirmación experimental en un estudio sobre las competencias de memoria de los niños con dificultades de aprendizaje de las matemáticas (DAM).

La lógica de la perspectiva cognitiva es muy clara: si conocemos, por ejemplo, los procesos mentales que se emplean para efectuar una operación de suma, o las estructuras intelectuales que debe poseer el alumno para realizarla, podremos comprender mejor sus fallos y errores al sumar. El enfoque cognitivo no etiqueta al sujeto, sino más bien categoriza los procesos que realiza y los errores que comete. No dice lo que el niño es o sufre (es discalcúlico, sufre una disminución cerebral) sino que trata de comprender y explicar lo que hace: los procesos y estrategias que emplea cuando asimila conceptos matemáticos, efectúa operaciones de cálculo, resuelve problemas algebraicos, etc.

El enfoque cognitivo es neutral con relación a la etiología última del déficit del aprendizaje matemático. Ayuda a precisar la naturaleza fina de las funciones mentales que no van bien en los sujetos con estas dificultades, favoreciendo así la búsqueda de las causas, pero no las establece por sí mismo. El enfoque cognitivo requiere un análisis minucioso y paso a paso de los procesos que se ponen en juego para resolver tareas matemáticas.

¿QUÉ HACER SI SU HIJO TIENE PROBLEMA EN EL APRENDIZAJE?

Cultive su conocimiento sobre la discapacidad de su hijo(a).

Mientras usted sepa más sobre los problemas de aprendizaje que tiene su hijo, más podrá ayudarlo. Comience con la escuela y el maestro de su niño, y continúe su investigación en la red y consultando a otros profesionales.

a) Conocer sus derechos

Su niño puede recibir ayuda de un especialista en la misma institución, ya que la gran mayoría de los establecimientos escolares cuentan con un Psicólogo, oh también para recibir material diseñado para compensar sus necesidades.

b) Sociabilice positivamente con el maestro de su niño, y también con el personal escolar.

Por medio de la comunicación regular, pueden intercambiar información sobre el progreso de su niño en casa y en la escuela. Reúnase con el maestro y el equipo de educación especial, y ayude a desarrollar un plan educacional para tratar con las necesidades de su niño. Planifique las acomodaciones que su niño necesita.

c) Consulte al maestro de su niño sobre las maneras en que puede fomentar el aprendizaje de su niño en la casa.

Algunos pasos podrían incluir ayuda con las tareas, establecer un horario o rutina, o practicar ciertas destrezas juntos.

d) Anime a su hijo a seguir adelante

La gran mayoría de niños y jóvenes sobresalen en otro tipo de materias, por esa razón motive a su hijo a realizar las actividades que le gustan.

e) Converse con otros padres cuyos niños tienen problemas del aprendizaje

Los padres pueden compartir consejos prácticos y apoyo emocional, además que son de gran ayuda al momento de tomar una decisión.

f) Paciencia a su hijo

No saque conclusiones antes de conocer el problema, algunas veces a los niños con discapacidades para el aprendizaje se les acusa de no hacer suficiente esfuerzo o de ser flojos, cuando que en realidad su discapacidad no es algo que ellos puedan controlar y sí están trabajando muy duro. La discapacidad para el aprendizaje no es culpa de nadie, y la obtención del apoyo adecuado puede propiciar una diferencia positiva para su niño.

g) Ponga atención a la salud mental de su niño (¡y a la suya!)

Esté dispuesto a recibir asesoramiento y básicamente consejos, los cuales pueden ayudar a su niño a tratar con las frustraciones, sentirse mejor acerca de sí mismo y aprender más sobre las destrezas sociales.

h) Recuerde que los niños con problemas de aprendizaje pueden triunfar en la escuela y profesionalmente como adultos.

Muchas personas con discapacidades para el aprendizaje han realizado exitosas carreras académicas y profesionales. El hecho de brindarle apoyo al niño cuanto antes tendrá un gran efecto para ayudarle a manejar su discapacidad de aprendizaje, alcanzar sus metas y lograr su pleno potencial.

ESTRATEGIAS PARA ENSEÑAR A LOS NIÑOS CON PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE

Las dificultades de comportamiento asociados con los problemas de aprendizaje por lo general crean otra tipo de problemas.
Los niños que son inquietos y problemáticos en la escuela, rápidamente son etiquetados como “niños problema”, “rufianes”, “balas” o simplemente como “tontos”.

Los niños que están en el otro extremo son catalogados como “flojos”, “estúpidos”, para hacer las cosas más difíciles, estos niños a menudo no entienden por qué su comportamiento no es adecuado.

Esto explica la tendencia de estos niños de parecer realmente asombrados, cuando se meten en problemas. Uno de los mayores retos para mejorar el comportamiento del niño, es enseñarle a reconocer las consecuencias de sus actos y a ver las cosas desde el punto de vista de las demás personas.

Pasos para ayudarle a manejar la conducta de sus estudiantes con problemas de aprendizaje en su clase:

1. Identificar los problemas de conducta.

Objetivamente, identifique cuales son los mayores problemas que obstaculizan el aprendizaje del niño.
Estos no tienen que ser sus comportamientos más molestos o los que usted desea corregir, así que realice un inventario, evitando que sus emociones influyan en éste, quizás ayudaría el punto de vista de otro instructor o el de los padres del niño.
La realización de una tabla puede ayudar. Para cada punto, enliste el comportamiento, su frecuencia, que lo dispara y como perturba este en la escala del 1 al 10. Trate de ser lo más específico posible. Para cada problema escriba al menos una estrategia para eliminar o cambiar el comportamiento.

2. Identificar los problemas en el ambiente del aula

Fíjese de la manera en que usted y los demás maestros tratan al niño. ¿Son ustedes demasiado severos? ¿”Espera” que el niño se comporte mal y lo reprende más rápido que a los demás? ¿Ha eliminado la mayoría de los distractores posibles? ¿La clase es activa y demasiado extenuante con muchos períodos cortos de actividad y poca inactividad? ¿Son los niños supervisados de muy cerca, especialmente cuando trabajan en parejas o en grupo?

Observando la manera en que ustedes educan y el ambiente de clase, ayudará a eliminar rápidamente algunos comportamientos indeseables.

3. Modele la conducta saludable

Indique los comportamientos que usted desea que el niño siga, como el no hablar cuando otro está hablando, guardar los útiles después de usarlos, utilizando una voz tranquila y no siendo demasiado crítico.

4. Haga alianzas para tareas difíciles.

Si a un niño le cuesta aprender algo o alguna habilidad, juntarse con alguien, como un alumno mayor y responsable o un asistente de instructor, puede ser de gran ayuda. Recuérdele al niño mayor que su trabajo es ser un modelo y ayudar así el será más comprensivo y realizará mejor su papel.

5. Cuente sus retroalimentaciones.

Trate de mantener un registro de las retroalimentaciones positivas y de las negativas que les da a los niños con problema de aprendizaje en la clase.
Como seguramente muchas de estas son negativas, busque áreas y habilidades para elogiar activamente, para no parecer malo o negativo.

6. Sea específico.

Déle a los niños mensajes e instrucciones precisas y específicas. Ellos no son capaces, muchas veces, de leer entrelíneas en una frase como: “Colgarse del pasamanos es peligroso”.
Puede no ser capaz de traducir esto en “Atención, deja de colgarte del pasamanos y regresa a la línea”. Usted necesita hablar claro, palabra por palabra, lo que usted desea que el haga, exactamente en la manera que usted está pensando.

Si usted quiere, siguiendo con el ejemplo, que se aleje del pasamano, dígales exactamente eso. Si usted quiere que dejen en paz los pulgares de sus pies y lo miren a usted cuando está hablando, dígale que lo mire.
Al dar instrucciones específicas que incluyan acciones específicas, elimina cualquier duda o mal entendido o mala interpretación. Use frases cortas.

7. Utilice los premios correctamente.

Hay una gran tentación de “impulsar” el buen comportamiento de un niño utilizando recompensas materiales, para cada buena acción. Aunque es algo positivo, busque otras alternativas.
Las recompensas pueden ser también, elogios en frente del salón de clase o los padres del niño, un simple “gracias” o “bien hecho” significa una buena oportunidad de elevar su posición en la clase.
Los premios son aún más efectivos, cuando el niño escoge su recompensa. Y usted quedará sorprendido de lo que pueden solicitar.
Para algunos niños una figurita para colocar en su camiseta puede hacerlos más felices, que el juguete más costoso de la tienda.
Si se ha puesto una recompensa material, utilice la técnica de ganar estrellas o tickets para obtener el premio grande al llegar a cierto número de éstas. De esta manera cada estrella o ticket se convierte en una mini recompensa.

8. Utilice la frase: “cuando.... entonces...”

Si un niño no está realizando un comportamiento específico, como mantenerse sentado o guardar silencio, pruebe utilizar la

frase: “cuando.... entonces...” como: “Cuando te sientes y dejes de hablar, entonces explicaré las reglas del juego que vamos a comenzar.” O “Cuando patees la pelota chica hasta la meta, entonces cambiaremos a la pelota grande”.

Obviamente la parte “entonces” debe sonar emocionante y gratificante y servir como un estímulo para dirigir el comportamiento hacia lo adecuado.
Siempre utilice “cuando” en vez de “si”, por que “cuando” implica que el niño debe hacer algo y “si” implica que tiene la opción de hacerlo o no.

9. No utilice el problema de aprendizaje como una excusa.

Resístase al recurso de utilizar el problema de aprendizaje como una excusa para el comportamiento del niño.
Si usted recopila sus consecuencias, responsabilidades y expectativas por el hecho de que él tiene problemas de aprendizaje, no le está haciendo ningún favor.
Claro que es más fácil usar el problema de aprendizaje como una excusa en vez de tratar de hacerle seguir las reglas, pero esto significaría que nos estamos rindiendo ante él. Tómese el tiempo y el esfuerzo necesario para ayudar al niño. Esto implica muchísimo tiempo al principio, pero pagará grandes dividendos en el largo plazo.

10. Hable agradablemente.

Si usted quiere que un niño con problema de aprendizaje le escuche, trate de hablar despacio, con bajo volumen y breve.
Los niños a los que se les grita las instrucciones y los gritos aumentan, conforme aumentan las instrucciones, son niños que se quejan todo el tiempo.

También ayuda hacer contacto visual antes de empezar a hablar, así usted sabe que cuenta con la atención del niño.

SITUACIÓN DE RETENCIÓN DE NIÑOS EN EL MISMO GRADO

De entrada, se hace lo imposible para evitarlo, pero hay niños que lo necesitan, que van muy ahogados y darle un año de margen para adquirir una serie de conocimientos que se les hacen una montaña es darles nuevas oportunidades.

La evolución intelectual de los niños no es lineal ni homogénea y lo importante no es quién llega antes o es más rápido, sino quién sabe llegar. A Einstein lo expulsaron de la escuela por mal estudiante, y luego llegó a ser un genio.

Es mejor ir despacito, pero con buena letra, que ir a trancas y barrancas. De entrada, a los padres nos parece que es una pérdida de tiempo, pero a menudo resulta un tiempo necesario para adquirir la madurez intelectual necesaria para que el estudio no resulte un suplicio para el niño sino algo agradable y entretenido.

Mejor repetir, cuando aún estas a tiempo, que abandonar los estudios más adelante porque llevan muchos años arrastrando su desfase. En este punto nos encontramos en que la repetición de un curso, lejos de ser una mancha en el historial académico de nuestro hijo es una alternativa favorable a su desarrollo.

INTRODUCCIÓN A MODELLUS

(Herramienta para la Modelización de Sistemas)

1. Introducción

Modellus es una herramienta orientada a la simulación y modelización de sistemas válida para el estudio de diversas materias dentro de los currícula de Educación Secundaria, Bachillerato y Formación Profesional. Sus autores la han concebido como instrumento de apoyo en el aula y con ese objetivo es que se explica su funcionamiento y uso para profesores y estudiantes.

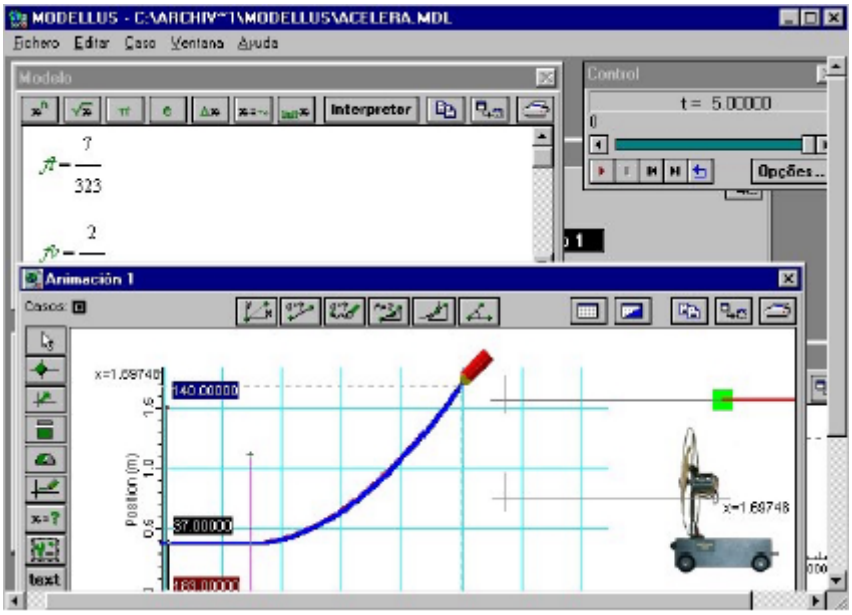
Modelo matemático

Sabemos que los diversos fenómenos que se estudian en las materias del área de ciencias pueden explicarse y representarse mediante su modelo matemático. Este modelo recogerá el comportamiento del sistema tanto en su aspecto temporal (evolución a lo largo del tiempo) como en su aspecto puramente matemático (cálculo de valores). Modellus está orientado a los modelos temporales de tal manera que con él se puede estudiar el comportamiento dinámico de los distintos sistemas. Este comportamiento se podrá estudiar mediante la simulación en distintos escenarios “casos” en cada uno de los cuales cada uno de los parámetros o constantes del modelo pueden ser modificados. Tal sería el caso del estudio de la caída de un cuerpo en distintos planetas del sistema solar con distintas fuerzas de gravedad, o el comportamiento de un muelle con distintas constantes de elasticidad.

La modelización de cualquier fenómeno o sistema se apoya en la observación de los fenómenos que lo caracterizan, razón por la cual, en la medida que podamos reproducir esos fenómenos y experimentar con ellos, podremos comprender con más claridad el modelo. El estudio del modelo se realizará siempre en orden creciente de complejidad de tal forma que en una primera fase se tendrán en cuenta los aspectos más relevantes para posteriormente derivar hacia un modelo más perfecto a través de un método de “refinamiento”. Según lo define uno de sus autores (V. D. Teodoro), Modellus es, bajo el punto de vista computacional, un micromundo computacional para estudiantes y profesores a la vez, basado en un método de programación en el que el usuario escribe en la “Ventana de modelo”.

2. Estructura Básica de Modellus.

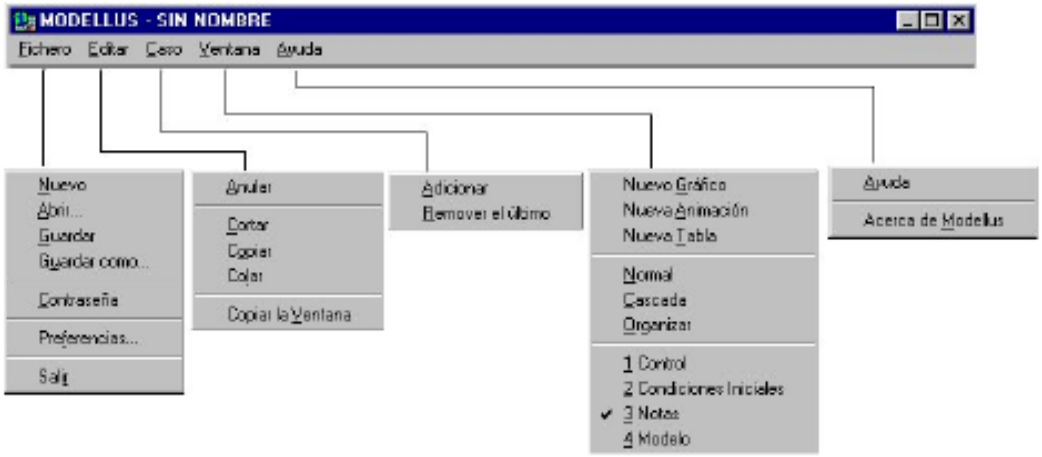
Modellus presenta un entorno muy “amigable” basado en una serie de ventanas, cada una de las cuales recoge o muestra una serie de informaciones muy concretas. En la figura vemos una imagen del entorno; las ecuaciones matemáticas se escriben de la misma manera que lo haría en el papel.



Por ser una aplicación que trabaja en Windows, aprovecha todas las ventajas del entorno y esto facilita su manejo. La versión que explicamos en este trabajo es la V:2.01 de 2000.

Las ventanas permiten la modificación de su tamaño y al activarlas pasan a primer plano colocando en segundo plano a las que estén dentro de su área; del mismo modo las ventanas se pueden mover dentro de la pantalla.

Menú de Modellus:



El menú que presenta el entorno consta de cinco opciones principales:

Fichero
Editar
Caso
Ventana
Ayuda

Fichero: Con la opción Fichero podemos realizar las siguientes operaciones:

Nuevo: Crear un nuevo modelo.
Abrir: Leer un modelo del disco (ya creado).
Guardar: Guardar modelo en un fichero con el mismo nombre que tenga.
Guardar Como: Grabar un fichero con el nombre que le queramos dar.
Contraseña: Poner una clave al modelo de tal manera que no se puedan modificar los datos de las ventanas de animación y modelo.
Preferencias: Configurar ubicación de ficheros.
Salir: Salir y abandonar el programa.

Editar: Permite las operaciones de edición comunes a cualquier herramienta.

Anular: Anula la última operación de edición realizada
Cortar: Permite cortar el objeto seleccionado y lo coloca en el portapapeles.
Copiar: Copia el objeto seleccionado al portapapeles.
Copiar la Ventana: Copia todo el contenido de la ventana en la que estemos y lo deposita en el portapapeles.

Caso: Esta opción presenta dos posibilidades:

Adicionar: Añade un caso en la ventana de condiciones.
Remover el último: Quita el último de los casos añadidos, téngase en cuenta que al menos debe existir un caso en la ventana de condiciones.

Ventanas: Esta opción presenta las siguientes acciones encaminadas a la creación de ventanas dentro del modelo.

Nuevo Gráfico: Crea una nueva ventana de gráfico.

Nueva Animación: Crea una nueva ventana de animación.

Nueva Tabla: Crea una nueva ventana de tabla.

Normal: Sitúa las ventanas en la pantalla en modo normal

Cascada: Sitúa las ventanas en la pantalla en cascada.

Organizar: Sitúa las ventanas en pantalla de forma organizada.

1 Control: Activamos la ventana de control.

2 Condiciones Iníciales: Activamos la ventana de condiciones iniciales.

3 Notas: Activamos la ventana de notas.

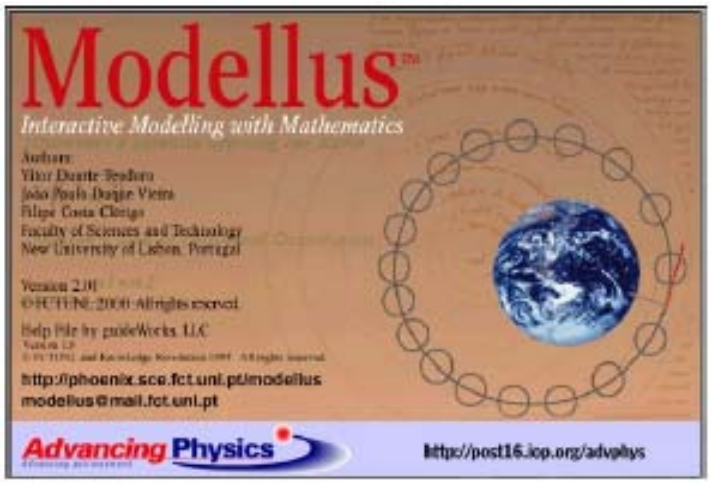
4 Modelo: Activamos la ventana de modelo.

Las ventanas que se van creando aparecerán en esta opción del menú con números consecutivos a partir del 4, téngase en cuenta que las ventanas 1, 2, 3 y 4 no se pueden eliminar.

Ayuda: Muestra las opciones siguientes:

Ayuda: Nos despliega la ventana de ayuda.

Acerca de Modellus: Esta opción nos presenta información sobre el programa

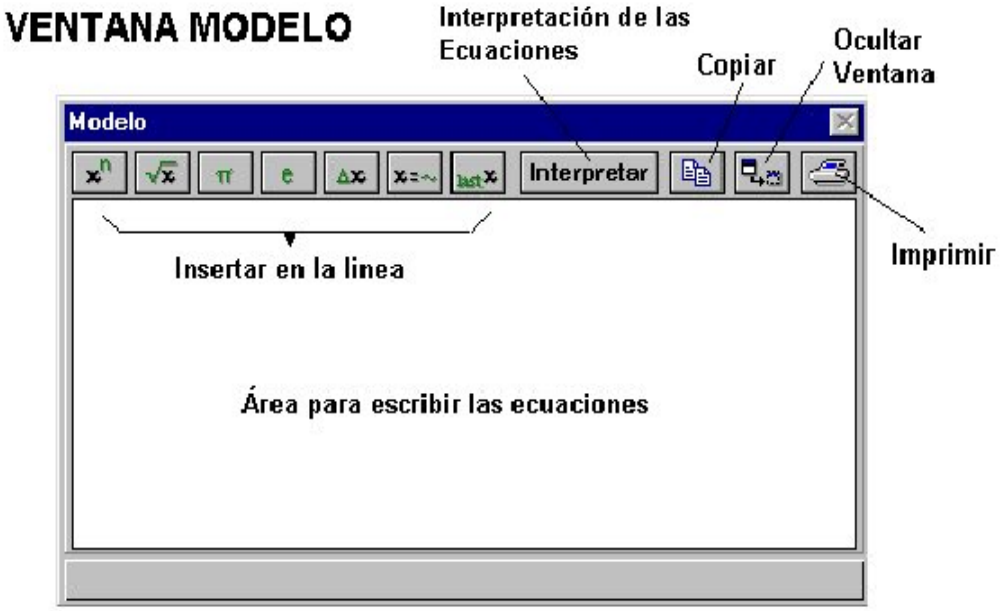


Modellus está estructurado en torno a un conjunto de ventanas sobre las que se escribe o se muestra la información de los modelos que se pretenden simular. Las ventanas son las siguientes:

- Ventana de modelo.
- Ventana de condiciones
- Ventana de animaciones
- Ventana de control
- Ventana de gráficos
- Ventana de tablas

A continuación se estudian estas ventanas, su utilización y contenidos.

2.1. VENTANA DE MODELO: Escritura de las ecuaciones del modelo. Para iniciar el trabajo con Modellus, una vez arrancada la aplicación, debemos ir al menú Modelo (Nuevo) y de esta manera iniciamos la creación de un modelo nuevo.



Lo primero que debemos hacer es escribir las ecuaciones del modelo, y esto lo hacemos en la “ventana de modelo” que aparece en la figura. A la hora de escribir las ecuaciones tenemos que hacerlo observando unas normas básicas en lo que se refiere a la sintaxis. Estas normas son las siguientes:

Sintaxis de los modelos:

Modellus soporta ecuaciones algebraicas, diferenciales e iterativas.

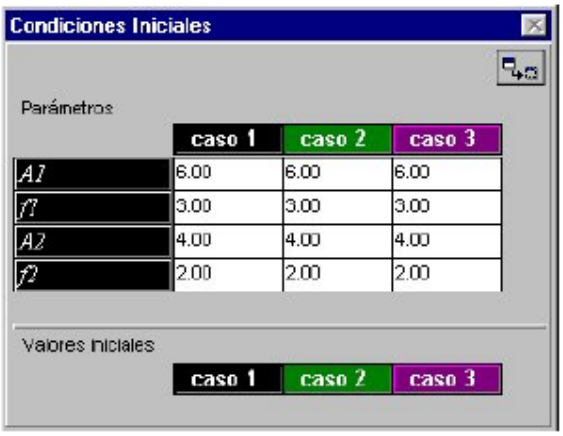
Usted puede modelar ecuaciones que van desde las relaciones simples como las líneas rectas y parábolas a los conceptos más complejos como son las ecuaciones de Pol o de Lorentz.
La entrada de un modelo en Modellus es casi como la escritura de ecuaciones matemáticas en el papel.

2.2. VENTANA DE CONDICIONES

Cuando se ha escrito el modelo en la correspondiente ventana y se ha pulsado por primera vez el botón interpretar aparecerá la ventana de “condiciones” que se encarga de recoger los valores de los “parámetros” y los “valores iníciales” del modelo en forma de tabla formando parte del “caso 1" que es el primer caso de simulación que Modellus crea por defecto.

Los “parámetros” se podrán modificar en esta misma ventana o también en la ventana de “animación” haciendo uso de algunos de sus objetos como veremos más adelante.

Cada uno de los posibles casos, que nosotros podremos añadir en el estudio del modelo, no son otra cosa que distintos escenarios para aplicar a las mismas ecuaciones. Esto nos permitirá poder estudiar el modelo cambiando a nuestro gusto distintos parámetros.



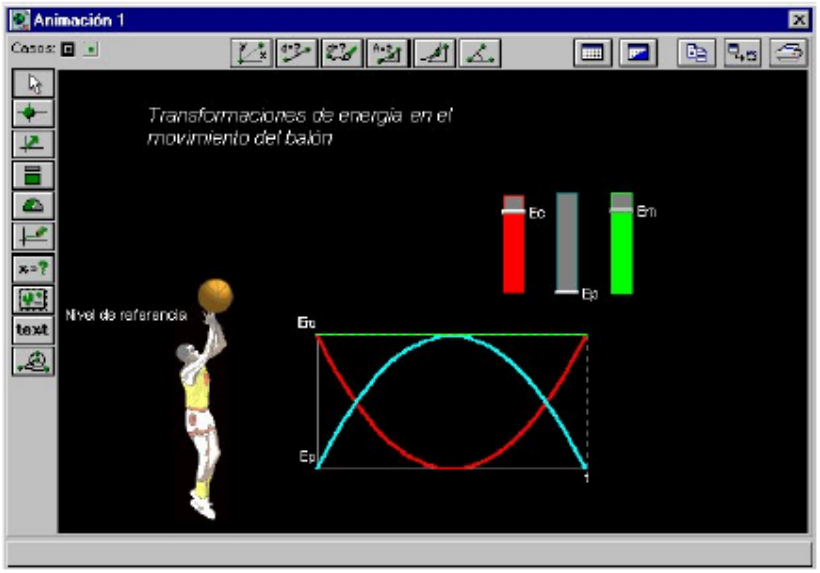
Si deseamos modificar los parámetros desde la ventana de animación quedará invalidado el valor del parámetro que se coloque en esta ventana. Cada uno de los casos que nosotros establezcamos en la simulación tendrá la posibilidad de verse en la ventana de “animación”; bastará con seleccionarlo de entre los que aparecerán señalados en la parte superior izquierda de

la ventana, y esto ocurrirá en las ventanas de “tabla” y “gráfico” teniendo en cuenta que en la ventana de “gráfico” pueden coexistir los gráficos de cada uno de los casos con el fin de poder ver las distintas curvas superpuestas.

2.3. VENTANA DE ANIMACIONES

Una vez que hemos escrito las ecuaciones del modelo, la siguiente operación será diseñar la ventana de animaciones en la que se realizarán las representaciones gráficas de aquellos valores que nos interese ver.

Esta ventana tiene mucho interés de cara a ser el “interface” con el estudiante ya que si se hace buen uso de todas sus posibilidades encontraremos en ella una poderosa herramienta. En la figura vemos la estructura de esta ventana de “animación” mostrando un ejemplo de movimiento de un balón lanzado hacia arriba.



El tamaño y posición de esta ventana, al igual que el resto, se puede modificar colocando el puntero en los bordes y estirando

hacia dentro o hacia fuera o manteniendo pulsado y moviendo en el caso de cambiar la posición.

En esta ventana se pueden colocar distintos elementos gráficos que se corresponden con los botones que aparecen en la parte superior. Cada uno de estos elementos se podrá asociar a las variables del modelo y realizar las funciones que correspondan a él de acuerdo a los parámetros que se hayan colocado en su ventana de parámetros asociada. Pasaremos a explicar cada uno de los elementos, así como sus ventanas asociadas.

Los botones de la parte superior se usan para realizar mediciones sobre las imágenes (GIF o BMP) o videos (AVI), que pueden colocarse en el fondo, usando el botón de fondo.
El rayado (grid) puede mostrarse u ocultarse mediante el botón . Pulsando sobre el botón de fondo puede definir el espaciado del grid y su color así como el color del fondo de la pantalla.

A continuación se muestra una tabla en la que se puede identificar cada uno de los botones que representan un determinado objeto.

Use esta herramienta……..para añadir:

Partícula

Imagen, bola (partícula), rectángulo, o referencia.

Vector

Vector con o sin flecha resultante o componentes.

Indicador de Nivel

Horizontal o Vertical.

Medidor Analógico

Aguja, reloj, o medidor circulo completo.

Trazador

Realiza el trazado interactivo de líneas o puntos.

Medidor Digital

Medidor digital, mostrado o no el nombre de la Variable.

Importar imagen

Importa imagen en formato BMP o GIF

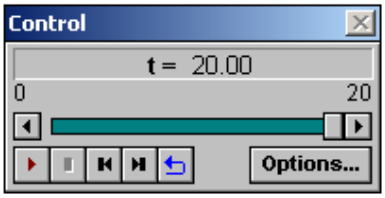
Texto

Texto con el color, fuente, estilo y tamaño especificables.

Objeto Geométrico

Líneas y figuras tales como círculos y polígonos.

2.4. VENTANA DE CONTROL



Una vez que hemos diseñado el modelo en la ventana “Modelo” y hemos colocado en la ventana “animaciones los objetos, así como las condiciones y las tablas y gráficos que nos haya parecido bien, se debe pasar a la fase de “simulación”.

En la fase de “simulación” Modellus realizará los cálculos y mostrará los valores de la forma que hayamos previsto. La ventana “Control” es la que permite el control del proceso de simulación.

Los botones de esta ventana sirven para:

Simular o detener la simulación.

Terminar la simulación.

Reiniciar el modelo, ir al principio sin perder los valores calculados.

Saltar al último valor calculado del modelo.

Repetir la simulación del modelo.

Lee t = 6.80 el actual valor de la variable independiente.

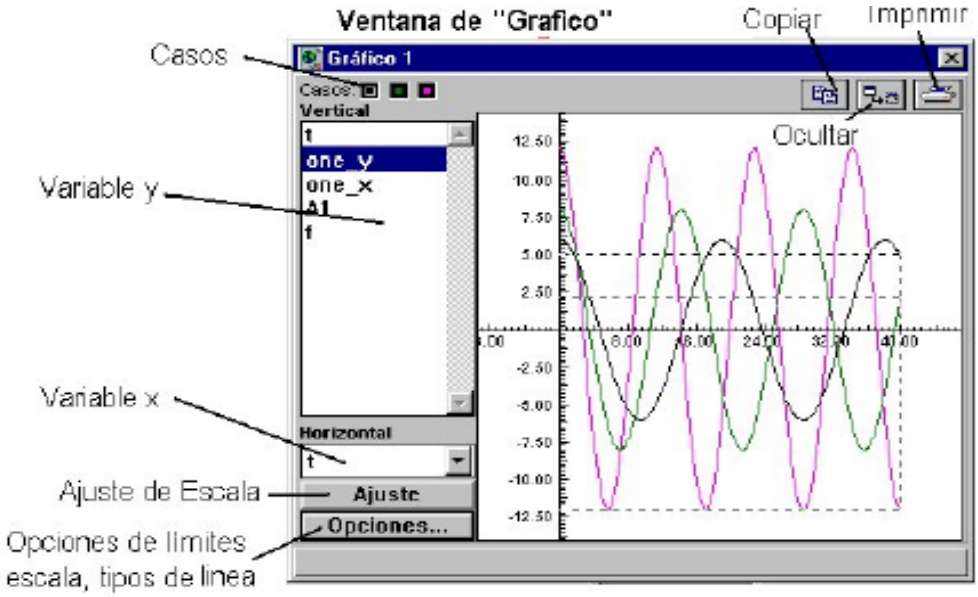
Muestra el valor actual de la variable independiente y chequea visualmente el progreso de esta variable.

Ir atrás o adelante un simple paso.

Acceder a caja de diálogo Opciones…:

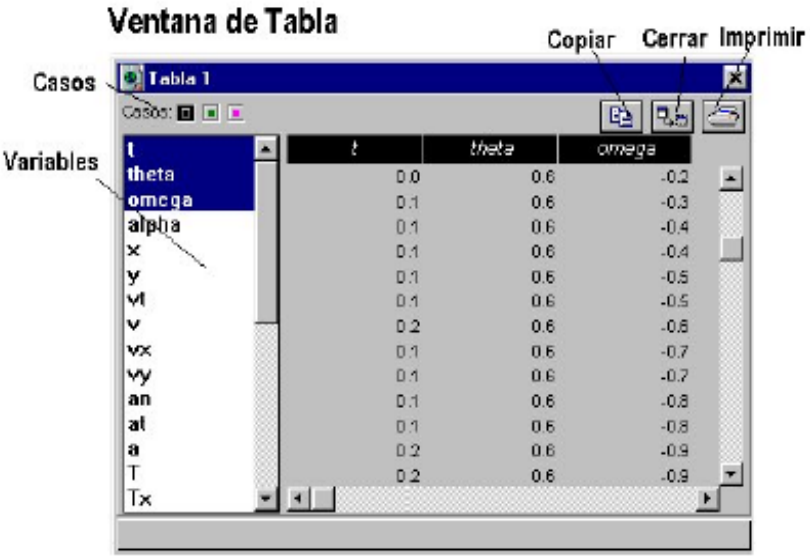
2.5. VENTANA DE GRÁFICO

Mediante esta ventana podemos realizar representaciones gráficas en ejes de coordenadas (XY) de las variables que queramos y para los casos que hayamos definido mediante la opción del menú “Casos”. En la figura vemos la ventana de “gráficos” y en ella se puede distinguir el área de representación en donde se dibujan los gráficos y a la izquierda aparecen las ventanas de las variables.



2.6. VENTANA DE TABLA

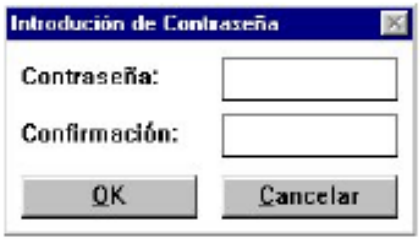
En numerosas aplicaciones será necesario realizar una tabla con los valores de las variables, esta posibilidad nos la brinda la ventana de “tabla” que sencillamente permite la creación de tablas con tantas variables como seleccionemos en la ventana de la izquierda simplemente pulsando las teclas “Control” o “Shift” a la vez que señalamos con el ratón (tecla izquierda) sobre éstas.



2.7. PROTECCIÓN DE LOS TRABAJOS

Mediante la opción Contraseña dentro del menú de “Fichero” podremos conseguir proteger el trabajo, de tal manera que a quien realice las simulaciones solo le estará permitido ver los resultados, pero nunca modificar la ventana “Modelo” o la ventana Animación ni podrá modifica ni crear ventanas de “gráficos” o “tablas”.

Cuando activamos por primera vez ésta opción aparece una ventana como la de la figura en la que se nos pide el Password y la Confirmación, es decir debemos escribir dos veces, una en cada ventana, el password (clave).



PRESENTACIÓN

Aquí empieza el trabajo realizado, el cual abarca una subunidad de Oscilaciones y Ondas titulado “ONDAS MECÁNICAS”. Se desarrollan diecisiete temas, en cada uno de ellos existe una parte teórico-conceptual que reúne los conceptos más importantes; continuando con un listado de animaciones conceptuales, ejercitativas y lúdicas; por último se presenta una animación de muestra con su respectivo modelo matemático.

Vale indicar que esta parte es la esencia misma de la obra y lo que se presenta aquí en el texto es únicamente una animación de muestra por cada tema, pues el conjunto de todas las animaciones diseñadas se encuentran en un disco adjunto en formato DVD.

2.1.1 CONCEPTOS GENERALES

Las ondas, o más concretamente el movimiento ondulatorio, es otro de los fenómenos que ocurren con mucha frecuencia dentro de la naturaleza y del universo. En forma sencilla podemos imaginar a una onda como una perturbación particular de algún tipo de campo (escalar o vectorial) que ocurre en un punto del espacio y que, debido a las características elásticas del medio circundante, se propaga hacia otras regiones del espacio; es decir, es una especie de "oscilación viajera".

Las ondas pueden clasificarse de varias maneras, según el criterio que se utilice:

a) De acuerdo al medio en que se propagan pueden ser elásticas y electromagnéticas. Las primeras requieren de un medio mecánico elástico para su propagación; las segundas pueden propagarse en el absoluto vacío.

b) De acuerdo al tipo de campo perturbado pueden ser escalares y vectoriales. Las primeras implican perturbación de un campo escalar; las segundas implican perturbación de un campo vectorial.

c) De acuerdo al movimiento relativo de las partículas perturbadas pueden ser longitudinales y transversales. En las primeras el movimiento de las partículas es paralelo a la dirección de propagación de la onda; en las segundas el movimiento es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

d) De acuerdo al número de coordenadas implicadas en la función de onda pueden ser unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales.

e) De acuerdo a la forma del frente de onda pueden ser circulares, planas, cilíndricas y esféricas. Las primeras son producidas por un vibrador puntual que perturba la superficie de un líquido; las segundas son producidas por un vibrador en forma de placa plana extensa; las terceras son producidas por un vibrador lineal dentro de un fluido; las cuartas son producidas por un vibrador puntual dentro de un fluido.

Puesto que una onda es una especie de "oscilación viajera", el modelo matemático que la describe ha de ser función del tiempo, como toda oscilación, pero ha de ser además función de una o más coordenadas espaciales, pues si la oscilación viaja, debe haber desplazamiento espacial. Entonces debe haber parámetros comunes a los movimientos oscilatorio y ondulatorio: uno de los más importantes es el período temporal P, el cual representa el tiempo necesario para que en una posición fija del espacio, $x = x_0$, una onda se repita a sí misma. La primera novedad que se presenta es la existencia de otro tipo de período, llamado "período espacial", simbolizado con λ y que representa la distancia necesaria para que una onda se repita a sí misma en $t = t_0$. Al período espacial se le conoce también como "longitud de onda". Utilizando estos dos períodos y realizando ciertas analogías podemos empezar a introducir algunos conceptos elementales.

Así como:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{P}} \qquad (2.1.1.1)$$

es la "frecuencia cíclica temporal o angular" y representa el número de períodos temporales comprendidos en un intervalo de tiempo de $2\pi\ s$, así también:

$$\boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda}} \qquad (2.1.1.2)$$

es la "frecuencia cíclica espacial o lineal" o "número de propagación" y representa el número de períodos espaciales o longitudes de onda comprendidos en un intervalo de longitud de $2\pi\ m$. Relacionando los dos conceptos anteriores tenemos $\omega P = K\lambda$, de donde:

$$\boxed{\omega = K\frac{\lambda}{P} = Kv} \qquad (2.1.1.3)$$

en donde hemos hecho:

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{P} = \lambda f} \qquad (2.1.1.4)$$

pues $1/P = f$, es la frecuencia temporal.

La frecuencia cíclica espacial K multiplicada por un vector unitario paralelo a la dirección de avance de la onda es el "vector de propagación":

$$\boxed{\vec{K} = K\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}} \qquad (2.1.1.5)$$

Así como el inverso del período temporal es la "frecuencia temporal":

$$\boxed{f = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi}} \qquad (2.1.1.6)$$

así también el inverso del período espacial es la "frecuencia espacial":

$$\boxed{\chi = \frac{1}{\lambda} = \frac{K}{2\pi}} \qquad (2.1.1.7)$$

Así como el inverso de la frecuencia cíclica temporal es el "tiempo de onda":

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\omega} = \frac{P}{2\pi} = \frac{1}{2\pi f}} \qquad (2.1.1.8)$$

el cual representa el número de períodos temporales contenidos en $1\ s$, así también el inverso de la frecuencia cíclica espacial es el "número de onda":

$$\boxed{\zeta = \frac{1}{K} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\chi}} \qquad (2.1.1.9)$$

el cual representa el número de períodos espaciales o longitudes de onda contenidos en $1\ m$.

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO2.0.0C
OO211C1
OO211C2
OO211C3
OO211C4
OO211C5

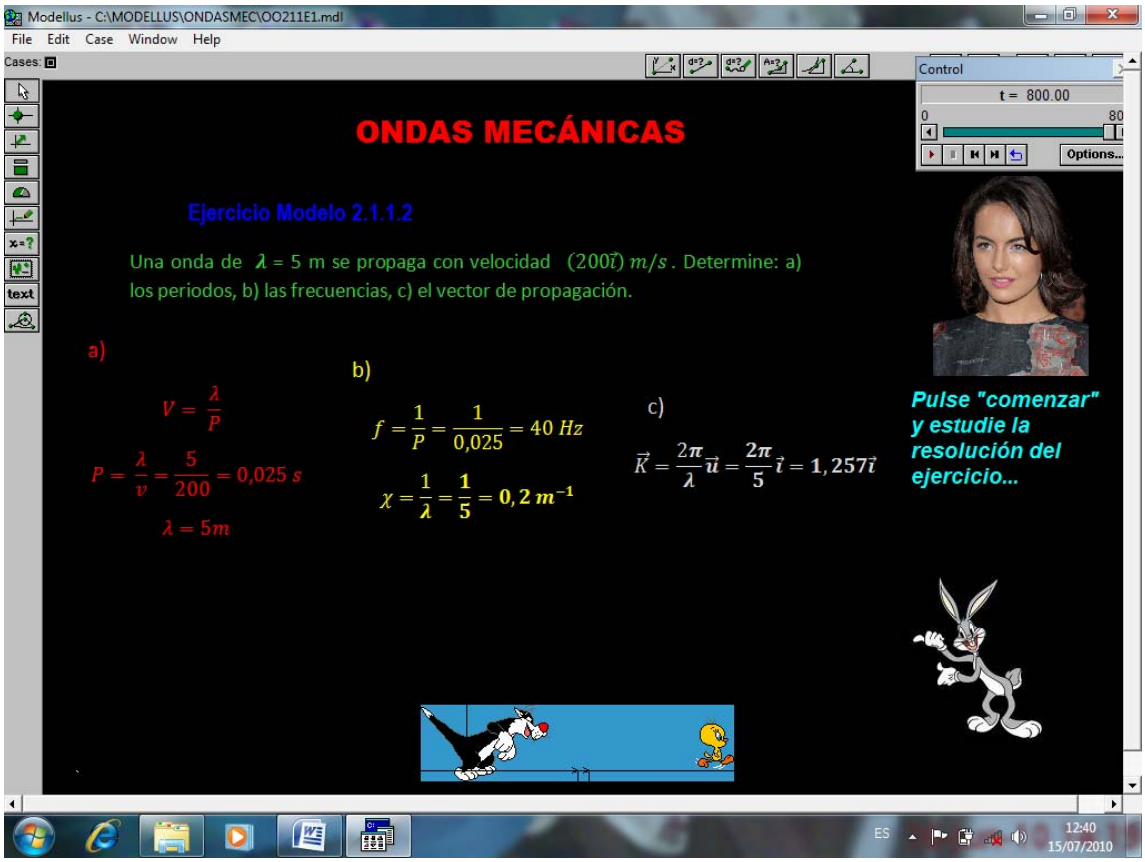
b) Ejercitativas:

OO211E1

c) Lúdicas:

OO211L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

L1=50

L2=50

L3=50

L4=50

L5=50

L6=100

L7=100

L8=10

L9=150

L10=200

L11=25

L12=75

L13=75

L14=50

L15=50

L16=50

L17=20

L18=100

```
L19=50
L20=50
L21=50
L22=50
L23=50
L24=50
L25=50
L26=50
L27=50
L28=50
L29=350
L30=90
L31=250
if(t<416)then(L32=-1000)
if(t>416)then(L32=-500+20*(t-416))
if(t>455.8)then(L32=300)
L33=50
L34=50
L35=50
if(t<460)then(L36=-1000)
if(t>460)then(L36=-500+20*(t-460))
```

```
if(t>499.9)then(L36=300)
if(t<215)then(L37=-1000)
if(t>215)then(L37=-400+20*(t-215))
if(t>247.5)then(L37=250)and(if(t>340)then(L37=-1000))
if(t<255)then(L38=-1000)
if(t>255)then(L38=-400+20*(t-255))
if(t>282)then(L38=150)and(if(t>340)then(L38=-1000))
if(t<505)then(L39=-1000)
if(t>505)then(L39=-500+20*(t-505))
if(t>544.9)then(L39=300)
if(t<10)then(L40=-400)
if(t>10)then(L40=50+15*(80-t))
if(t>50)then(L40=100)
L41=450
if(t<185)then(L42=-700)
if(t>185)then(L42=-300+20*(t-185))
if(t>206.9)then(L42=135)and(if(t>340)then(L42=-1000))
if(t<155)then(L43=-600)
if(t>155)then(L43=-300+20*(t-155))
if(t>177.9)then(L43=160)and(if(t>340)then(L43=-600))
L44=50
```

```
L45=50
if(t<364)then(L46=-1000)
if(t>364)then(L46=-600+20*(t-364))
if(t>411.6)then(L46=350)
if(t<62)then(L47=-1000)
if(t>62)then(L47=-600+20*(t-62))
if(t>109.5)then(L47=340)and(if(t>340)then(L47=-1000))
if(t<40)then(L48=-600)
if(t>40)then(L48=-300+20*(t-40))
if(t>57.3)then(L48=50)and(if(t>340)then(L48=-600))
L49=50
if(t<15)then(L50=400)
if(t>15)then(L50=400-20*(t-15))
if(t>35)then(L50=-10)and(if(t>340)then(L50=400))
if(t<345)then(L51=500)
if(t>345)then(L51=300-20*(t-345))
if(t>361.5)then(L51=-30)
L52=50
L53=50
L54=50
L55=50
```

```
L56=50

L57=50

L58=-200

L59=-100

L60=50

if(t<120)then(L61=-600)

if(t>120)then(L61=-400+20*(t-120))

if(t>145.5)then(L61=110)and(if(t>340)then(L61=-600))
```

2.1.2 ECUACIÓN DE ONDA. SOLUCIÓN

Como ya habíamos dicho, la ecuación que describe una onda debe ser función de t y de alguna(s) coordenada(s), por ejemplo x, de tal manera que la gráfica correspondiente sea una "gráfica viajera" con el tiempo. Para representar una onda cualquiera utilizaremos la letra griega ψ; sabemos que la función $\psi(x)$ mostrará una curva fija, por el contrario una función de la forma $\psi(x - vt)$ mostrará una curva que se desplaza hacia la derecha con velocidad v, en tanto que $\psi(x + vt)$ mostrará una curva que se desplaza hacia la izquierda con velocidad v. Por lo tanto una función de la forma $\psi(x \mp vt)$ resulta adecuada para describir una onda progresiva y de amplitud constante, en donde ψ es una función cualquiera del argumento $(x \mp vt)$. Ahora bien, por experiencia sabemos que una función de la forma $\psi(x \mp vt)$ no puede pasar de ser una solución concreta o particular correspondiente a una ecuación más general y única, y así es: los físicos han determinado que aquella ecuación general es:

$$\boxed{lap\,\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.2.1)$$

la cual se conoce como "ecuación de onda" y describe adecuadamente el fenómeno físico conocido como onda; allí $lap\,\psi$ es el laplaciano de la función ψ, siendo ψ la cantidad física sometida a algún tipo de perturbación. Antes de continuar con el análisis, comprobemos que $\psi = \psi(x \mp vt)$ es efectivamente una solución de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

pues $u = x \mp vt$ y $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \mp v\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \mp v\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\left(\mp v\right) = v^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo (b) en (a) tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.2.2)$$

que corresponde efectivamente a la ecuación de onda unidimensional, en la que $lap\ \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$. Debe tenerse presente que la ecuación de onda (2.1.2.1) es totalmente general: allí $lap\ \psi$ puede depender de una o más coordenadas y puede expresarse en cualquier sistema de coordenadas, según las conveniencias.

Resolvamos ahora la ecuación de onda unidimensional $\psi = \psi(x, t)$ utilizando el método de separación de variables, esto es, suponiendo que $\psi = X(x).T(t)$:

$$T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{X}{v^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

que al dividir para XT se convierte en:

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -K^2$$

de donde:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + K^2 X = 0$$

y:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + K^2 v^2 T = 0$$

Al resolverlas se obtiene:

$$X = C_1 Sen\, Kx + C_2 Cos\, Kx$$

y:

$$T = D_1 Sen\, Kvt + D_2 Cos\, Kvt = D_1 Sen\, \omega t + D_2 Cos\, \omega t$$

con lo que la solución general es:

$$\psi = (C_1 Sen\, Kx + C_2 Cos\, Kx)(D_1 Sen\, \omega t + D_2 Cos\, \omega t)$$

que luego de realizar ciertas operaciones toma la forma:

$$\psi = A Sen(Kx + \omega t) + B Cos(Kx - \omega t)$$

o, en general:

$$\boxed{\psi = A f(Kx - \omega t) + B f(Kx + \omega t)} \qquad (2.1.2.3)$$

La solución con senos y/o cosenos corresponde a la "onda armónica" la cual puede compactarse a la forma:

$$\boxed{\psi = \psi_0 Sen\left(Kx \mp \omega t\right)} \qquad (2.1.2.4)$$

Recordando que $\omega = Kv$, la ecuación anterior puede escribirse en la forma:

$$\boxed{\psi = \psi_0 Sen K\left(x \mp v\,t\right)} \qquad (2.1.2.5)$$

Utilizando algunas relaciones desarrolladas en el tema anterior, la solución armónica puede escribirse en las siguientes formas:

$$\boxed{\psi = \psi_0 Sen\, 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{P}\right)} \qquad (2.1.2.6)$$

$$\boxed{\psi = \psi_0 Sen\, 2\pi\left(\chi x \mp f t\right)} \qquad (2.1.2.7)$$

$$\boxed{\psi = \psi_0 Sen\, 2\pi f\left(\frac{x}{v} \mp t\right)} \qquad (2.1.2.8)$$

Para el caso de ondas cilíndricas, la ecuación de onda es:

$$\boxed{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \psi}{\partial R}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.2.9)$$

cuya solución asintótica, esto es para grandes valores de R, es de la forma:

$$\boxed{\psi=\frac{\psi_0}{\sqrt{R}}Sen\left(KR-\omega t\right)} \qquad (2.1.2.10)$$

en donde R es la coordenada radial plana del sistema cilíndrico. Observe que la amplitud de la onda decrece según $1/\sqrt{R}$; el valor ψ_0 es la amplitud de la onda a $1\ m$ de distancia de la fuente lineal.

Para el caso de ondas esféricas, la ecuación de onda es:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\left(r\psi\right)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.2.11)$$

cuya solución asintótica, esto es para grandes valores de r, es de la forma:

$$\boxed{\psi=\frac{\psi_0}{r}Sen\left(Kr-\omega t\right)} \qquad (2.1.2.12)$$

en donde r es la coordenada radial espacial del sistema esférico. Observe que la amplitud de la onda decrece según $1/r$; el valor ψ_0 es la amplitud de la onda a $1\ m$ de distancia de la fuente puntual.

Daremos importancia especial a las ondas armónicas debido a que buena parte de las ondas reales de todo tipo son armónicas y las que no lo son pueden sintetizarse, utilizando el método de Fourier, a partir de un número adecuado de ondas armónicas de amplitudes y frecuencias convenientes. El argumento $(Kx \mp \omega t)$ puede y debe completarse a la forma $(Kx \mp \omega t + \varepsilon)$, en donde ε es la fase inicial, esto es, el argumento de la función para $x = t = 0$. De este modo la expresión completa:

$$\boxed{\varphi = (Kx \mp \omega t + \varepsilon)} \qquad (2.1.2.13)$$

se denomina "fase del movimiento ondulatorio" considerado y representa las variaciones de la onda como tal y por ello la "velocidad de fase" es:

$$\boxed{v = -\frac{\partial\varphi/\partial t}{\partial\varphi/\partial x} = -\frac{\mp\omega}{K} = \pm v} \qquad (2.1.2.14)$$

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO212C1
OO212C2
OO212C3
OO212C4

b) Ejercitativas:

OO212E1

c) Lúdicas:

OO212L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA

MODELO MATEMÁTICO

```
L1=-50
L2=-50
L3=-60
L4=-50
L5=-50
L6=-50
L7=-100
L8=-10
L9=-50
L10=-50
L11=50
if(t<855)then(L12=-1000)
if(t>855)then(L12=-300+20*(t-850))
if(t>878)then(L12=275)
L13=50
L14=50
L15=50
if(t<655)then(L16=-300)
```

```
if(t>655)then(L16=-200+20*(t-655))
if(t>666)then(L16=30)and(if(t>700)then(L16=-300))
if(t<280)then(L17=-200)
if(t>280)then(L17=-100+20*(t-280))
if(t>288)then(L17=80)and(if(t>350)then(L17=-400))
if(t<580)then(L18=-300)
if(t>580)then(L18=-200+20*(t-580))
if(t>597)then(L18=140)and(if(t>700)then(L18=-300))
if(t<493)then(L19=-400)
if(t>493)then(L19=-300+20*(t-493))
if(t>523)then(L19=310)and(if(t>700)then(L19=-400))
if(t<56)then(L20=-410)
if(t>56)then(L20=-300+20*(t-56))
if(t>91)then(L20=410)and(if(t>350)then(L20=-410))
L21=50
L22=50
L23=50
L24=60
L25=50
L26=40
L27=60
```

```
L28=75
L29=75
L30=65
if(t<302)then(L31=300)
if(t>302)then(L31=200-20*(t-302))
if(t>319)then(L31=-150)and(if(t>350)then(L31=400))
if(t<602)then(L32=650)
if(t>602)then(L32=300-20*(t-602))
if(t>649.5)then(L32=-650)and(if(t>700)then(L32=650))
if(t<235)then(L33=600)
if(t>235)then(L33=200-20*(t-235))
if(t>275)then(L33=-600)and(if(t>350)then(L33=600))
if(t<528)then(L34=650)
if(t>528)then(L34=300-20*(t-528))
if(t>575)then(L34=-650)and(if(t>700)then(L34=67))
if(t<180)then(L35=700)
if(t>180)then(L35=300-20*(t-180))
if(t>230)then(L35=-700)and(if(t>350)then(L35=700))
if(t<140)then(L36=400)
if(t>140)then(L36=400-20*(t-140))
if(t>178)then(L36=-400)and(if(t>350)then(L36=400))
```

```
if(t<95)then(L37=700)
if(t>95)then(L37=200-20*(t-95))
if(t>140)then(L37=-700)and(if(t>350)then(L37=700))
if(t<403)then(L38=500)
if(t>403)then(L38=300-20*(t-403))
if(t>450)then(L38=-650)and(if(t>700)then(L38=500))
if(t<5)then(L39=700)
if(t>5)then(L39=300-20*(t-5))
if(t>53)then(L39=-700)and(if(t>350)then(L39=1000))
L40=-50
L41=-50
L42=-50
L43=-50
L44=-50
L45=-50
L46=-370
L47=-80
L48=-100
L49=-75
L50=-50
L51=-50
```

```
L52=-50
L53=-50
L54=-50
if(t<368)then(L55=500)
if(t>368)then(L55=300-20*(t-368))
if(t>387)then(L55=-80)and(if(t>700)then(L55=500))
if(t<350)then(L56=500)
if(t>350)then(L56=300-20*(t-350))
if(t>365)then(L56=-10)and(if(t>700)then(L56=500))
L57=50
L58=-150
L59=-250
L60=-50
L61=-50
L62=-50
L63=-50
L64=-50
L65=-50
L66=-50
L67=-50
L68=-50
```

```
L69=-50
L70=-50
if(t<455)then(L71=400)
if(t>455)then(L71=300-20*(t-455))
if(t>489)then(L71=-380)and(if(t>700)then(L71=400))
L72=-200
L73=-100
L74=-220
L75=20
L76=90
L77=40
L78=90
L79=50
L80=110
L81=90
if(t<705)then(L82=700)
if(t>705)then(L82=400-20*(t-705))
if(t>722.5)then(L82=45)
L83=300
if(t<725)then(L84=-1000)
if(t>725)then(L84=-900+20*(t-725))
```

```
if(t>772.5)then(L84=50)
if(t<780)then(L85=-1000)
if(t>780)then(L85=-900+20*(t-780))
if(t>827.5)then(L85=50)
if(t<835)then(L86=-1000)
if(t>835)then(L86=-900+20*(t-835))
if(t>882.5)then(L86=50)
if(t<885)then(L87=-1000)
if(t>885)then(L87=-900+20*(t-885))
if(t>932.5)then(L87=50)
if(t<937)then(L88=-1000)
if(t>937)then(L88=-300+20*(t-937))
if(t>969.5)then(L88=350)
if(t<974)then(L89=-1000)
if(t>974)then(L89=-500+20*(t-974))
if(t>1001.5)then(L89=50)
if(t<1005)then(L90=-1000)
if(t>1005)then(L90=-500+20*(t-1005))
if(t>1047.5)then(L90=350)
L91=50
L92=50
L93=50
L94=50
L95=50
```

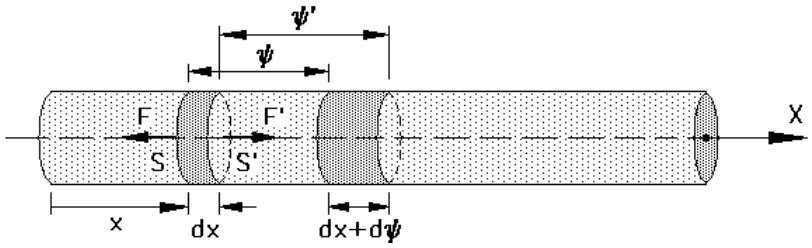
2.1.3 ONDAS LONGITUDINALES EN UNA VARILLA RÍGIDA

Un cuerpo es elástico cuando las deformaciones que experimenta desaparecen por completo al cesar las causas que las provocan. Las propiedades elásticas dependen del carácter del movimiento térmico de las moléculas y de las fuerzas con que éstas interaccionan; por ejemplo un gas cambia de forma sin dificultad, pues no posee elasticidad de forma; sin embargo se opone al cambio de volumen mediante una contrapresión dada por $dp = -C\,dV/V$, en donde C es el módulo de compresibilidad que, para el caso de los gases, depende del tipo de proceso termodinámico involucrado: si el proceso es isotérmico, $C = p$; si el proceso es adiabático, $C = \gamma p$.

La elasticidad de los sólidos se debe a las fuerzas de atracción y repulsión de las partículas que las forman, las cuales describen oscilaciones térmicas desordenadas en torno a los nudos de la red cristalina. Dichas fuerzas dificultan las deformaciones de forma y/o volumen, de modo que los sólidos tienen elasticidad de forma y de volumen.

Los líquidos, al igual que los gases, sólo presentan elasticidad de volumen.

Una sustancia, sólida, líquida o gaseosa, capaz de transportar una perturbación se conoce como elástica. Puede ser homogénea o no, isótropa o no, lineal o no. Para el análisis de una onda particular se parte de la realidad física específica y se observan los efectos producidos por la causa perturbadora en un punto concreto y su influencia sobre la vecindad hasta lograr plantear la ecuación diferencial de la onda que se va a producir. Ahora aplicaremos esto al caso de una varilla rígida delgada, lineal y homogénea, sometida a una perturbación, figura 2.1.3.1.



F i g u r a 2.1.3.1

Si perturbamos uno de los extremos de la varilla rígida, por ejemplo mediante un martillazo, la perturbación se propagará a lo largo de la misma en forma de una onda longitudinal y llegará al otro extremo. Sea S su sección transversal uniforme, el esfuerzo normal ξ_N que soporta esta sección es $\xi_N = F/S$ y como consecuencia sufre un desplazamiento ψ paralelo al eje de la varilla. Consideremos las secciones S y S', separadas, en estado de equilibrio, una cantidad dx; en presencia de la fuerza perturbadora se desplazan ψ y ψ', respectivamente, de modo que en estado de deformación la separación es $dx + d\psi$, con lo que la deformación de la porción dx de barra ha sido $d\psi$ y la correspondiente deformación unitaria de longitud es $DUL = \partial\psi/\partial x$. Recordando que el módulo de Young es $Y = \xi_N/DUL$, despejamos $\xi_N = Y.DUL = F/S$, de donde:

$$F = YS.DUL = YS\partial\psi/\partial x$$

y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = YS\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad \text{(a)}$$

La fuerza neta que actúa sobre la parte perturbada es $F' - F = (\partial F/\partial x)dx$ y produce una aceleración de la misma, de modo que al aplicar la segunda ley de Newton a dicha parte se encuentra:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = ma = V\rho a = Sdx\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = S\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad \text{(b)}$$

Igualando (a) y (b) encontramos:

$$YS\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = S\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

es decir:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.3.1)$$

que tiene la estructura matemática de la ecuación de onda unidimensional. Por simple comparación vemos que la velocidad de la perturbación longitudinal, que es una onda vectorial, es:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}} \qquad (2.1.3.2)$$

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO213C1
OO213C2

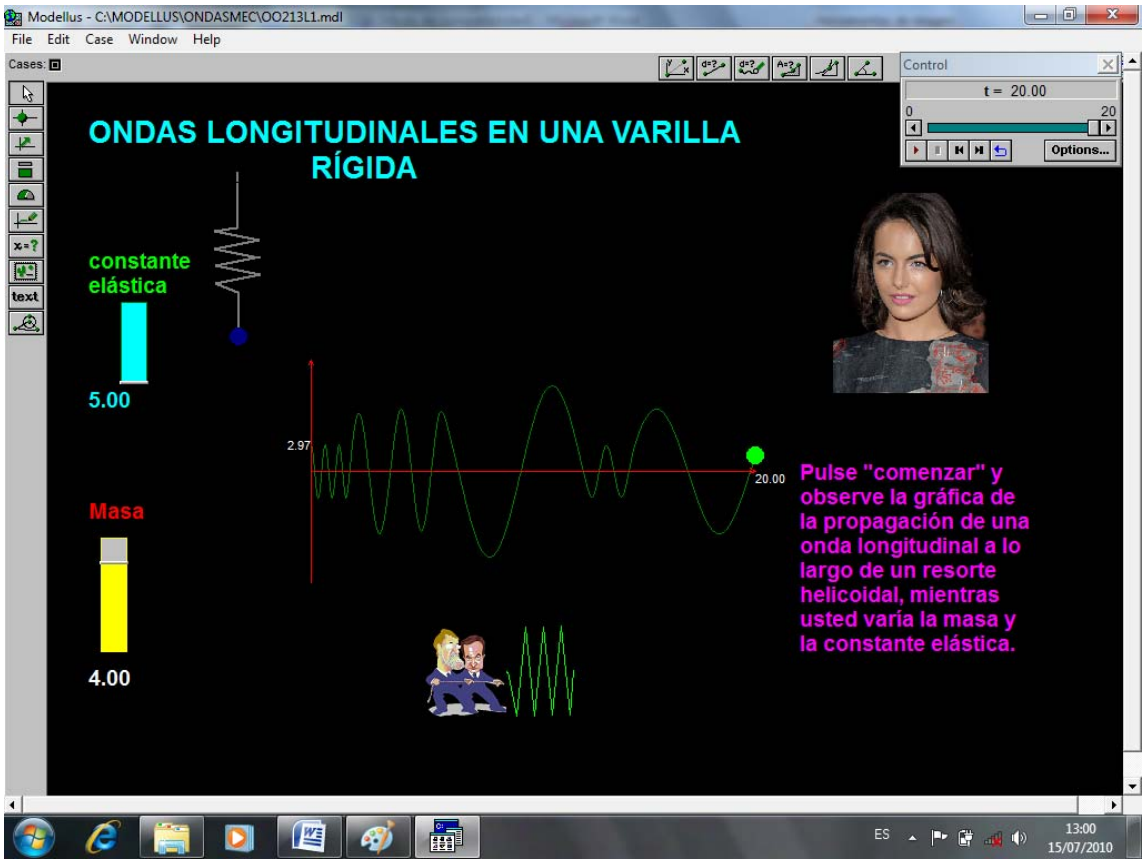
b) Ejercitativas:

OO213E1

c) Lúdicas:

OO213L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
ds/dt = v
dv/dt = a
a=F/m
F=-k*s
;below here for display
coil=-1.0+s/14
coil1=coil
coil2=3*coil
coil3=5*coil
coil4=7*coil
coil5=9*coil
coil6=11*coil
coil7=13*coil
coil8=15*coil
coil9=15*coil
coil10=17*coil
coil11=19*coil
coil12=21*coil
coil13=23*coil
coillink=coil8-8
L1=75
L2=75
L3=75
L4=100
L5=125
L6=60
L7=100
```

L8=100

L9=100

L10=140

L11=100

L12=100

L13=100

L14=300

L15=150

L16=100

L17=400

L18=100

L19=100

L20=200

L21=60

L22=100

L23=100

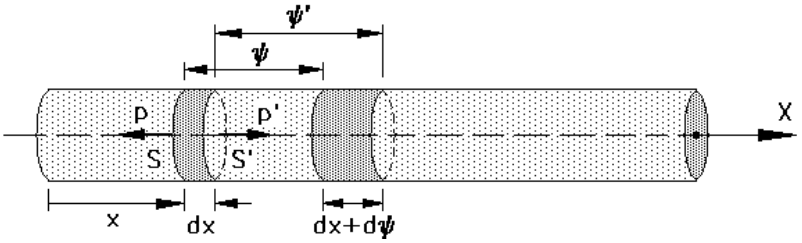
L24=-250

L25=-100

L26=100

2.1.4 ONDAS DE PRESIÓN EN UNA COLUMNA DE GAS

Las ondas de presión son las ondas elásticas escalares y longitudinales que se presentan tanto en la densidad como en la presión de una porción de gas encerrada dentro de un tubo que supondremos cilíndrico y de sección transversal recta S, figura 2.1.4.1.



F i g u r a 2.1.4.1

Simbolizaremos con p_0 y ρ_0, respectivamente, la presión y densidad no perturbadas. Si la presión se modifica, el pequeño volumen $S\,dx$ se pondrá en movimiento debido a una fuerza neta diferente de cero; entonces S se desplazará una cantidad ψ, mientras S' se desplazará una cantidad ψ', con lo que el espesor del volumen deformado será $dx + d\psi$ y el nuevo volumen será $(dx + d\psi)S$. Puesto que la masa permanece constante, la densidad debe variar en la forma:

$$\rho_0 S dx = \rho S (dx + d\psi)$$

de donde:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + d\psi/dx} = \rho_0 (1 - d\psi/dx)$$ (por el desarrollo del binomio)

es decir:

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0\, d\psi/dx \qquad \text{(a)}$$

Ya que la presión es función de la densidad, $p = p(\rho)$, su desarrollo en serie de Taylor es:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2\left(\frac{d^2 p}{d\rho^2}\right)_0 + \ldots$$

pero debido a que las variaciones de densidad son sumamente pequeñas, resulta suficiente conservar los dos primeros términos de la serie anterior, esto es:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \qquad \text{(b)}$$

Del concepto de módulo de compresibilidad, $C = -p\dfrac{V_0}{dV}$, despejamos p:

$$p = -C\frac{dV}{V_0} = -C\frac{V - V_0}{V_0} = C\frac{V_0 - V}{V_0} = C\left(1 - \frac{V}{V_0}\right) = C\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

de donde:

$$\frac{dp}{d\rho} = C\frac{\rho_0}{\rho^2}$$

y:

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 = C\frac{\rho_0}{\rho_0^{\,2}} = \frac{C}{\rho_0} \qquad \text{(c)}$$

Sustituyendo (c) en (b) tenemos:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\frac{C}{\rho_0} \qquad \text{(d)}$$

Sustituyendo (a) en (d):

$$p = p_0 - \rho_0\frac{d\psi}{dx}\frac{C}{\rho_0} = p_0 - C\frac{d\psi}{dx}$$

de modo que:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -C\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad \text{(e)}$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la porción perturbada tenemos:

$$(p - p')S = \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

es decir:

$$-dp = \rho_0 dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

de donde:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad \text{(f)}$$

Igualando (e) y (f) hallamos:

$$-C\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{C}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.4.1)$$

que es la ecuación diferencial de la onda de desplazamiento, ψ, la cual se propaga con velocidad:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{C}{\rho_0}}} \qquad (2.1.4.2)$$

No sólo el desplazamiento ψ (que es una onda longitudinal vectorial), sino también la presión p y la densidad ρ (que son ondas escalares) se presentan simultáneamente y se desplazan juntos, de modo que las respectivas ecuaciones de onda son:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{C}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}} \qquad (2.1.4.3)$$

y:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{C}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}} \qquad (2.1.4.4)$$

El prototipo de onda de presión en un gas es el sonido que se propaga en el aire; el proceso es muy rápido de modo que es adiabático, en cuyo caso la expresión para la presión es:

$$pV^{\gamma} = constante$$

es decir:

$$p = K\rho^{\gamma}$$

y:

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma K \rho^{\gamma - 1}$$

con lo que el módulo de compresibilidad es:

$$C = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 = \gamma K \rho_0^{\gamma} = \gamma p_0$$

o, en forma general:

$$C = \gamma p \qquad \text{(g)}$$

que al sustituir en la ecuación (2.1.4.2) da:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_0}}} \qquad (2.1.4.5)$$

y que al relacionar con la ecuación de estado de un gas ideal se convierte en:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{mol}}}} \qquad (2.1.4.6)$$

Para el caso particular del aire se tiene:

$$\boxed{v = 20{,}055\sqrt{T} \approx 331 + 0{,}6\left(T - T_0\right)} \qquad (2.1.4.7)$$

Finalmente procedemos a determinar la relación entre las amplitudes de las ondas de desplazamiento, ψ_0, y de presión, $\wp_0$, suponiendo una onda armónica de la forma $\psi = \psi_0 Sen\left(Kx - \omega t\right)$, que al sustituir en (e) se convierte en:

$$p - p_0 = -C\frac{d\psi}{dx} = -KC\psi_0 Cos\left(Kx - \omega t\right) = \wp_0 Cos\left(Kx - \omega t\right)$$

de modo que la onda de presión oscila en torno a su valor promedio con una amplitud $\wp_o = KC\psi_0$.

Utilizando la ecuación (2.1.4.2) para eliminar C obtenemos:

$$\boxed{\wp_0 = v^2 \rho_0 K\psi_0 = \rho_0 v\omega\psi_0 = 2\pi f v \rho_0 \psi_0} \qquad (2.1.4.8)$$

cuya principal aplicación se da en los cálculos relacionados con la Acústica.

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO214C1
OO214C2
OO214C3
OO214C4

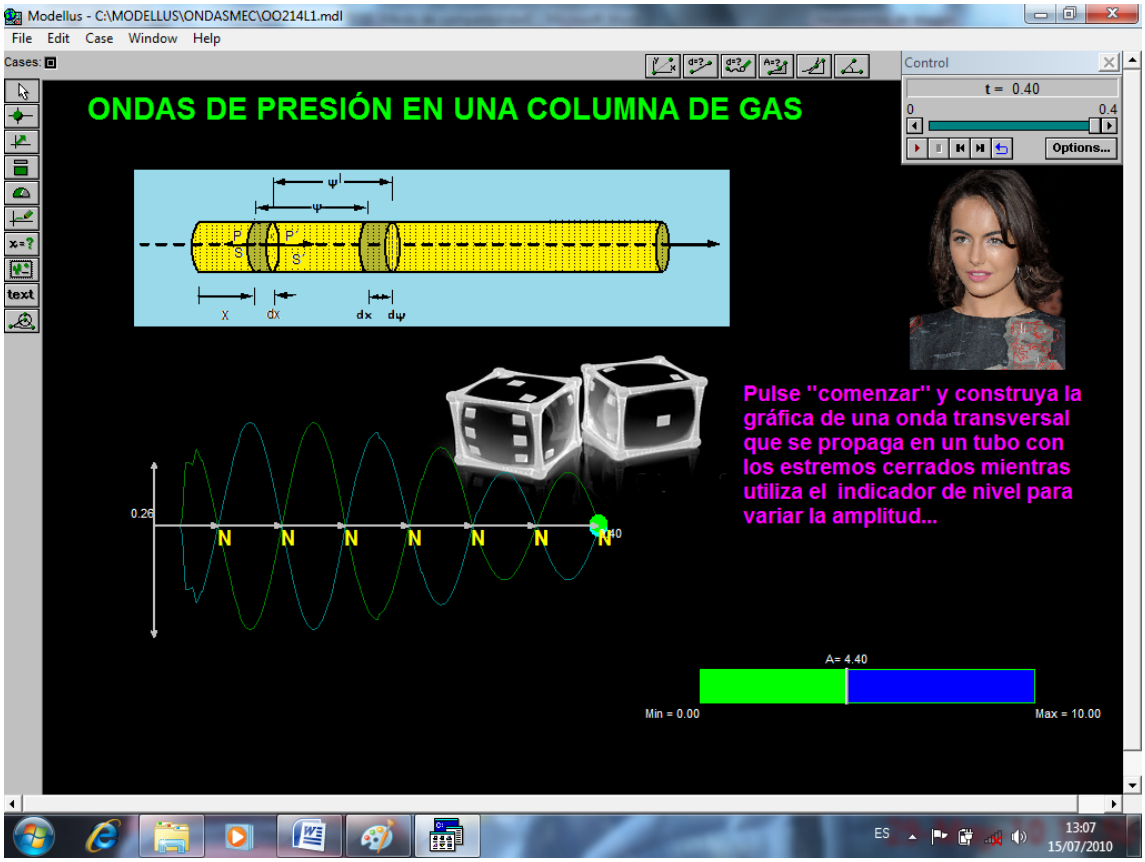
b) Ejercitativas:

OO214E1

c) Lúdicas:

OO214L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

L1=100

L2=100

L3=100

L4=150

L5=100

L6=100

L7=100

L8=150

L9=180

L10=100

L11=100

L12=100

L13=500

L14=100

L15=100

L16=100

L17=100

L18=57

L19=-100

L20=57

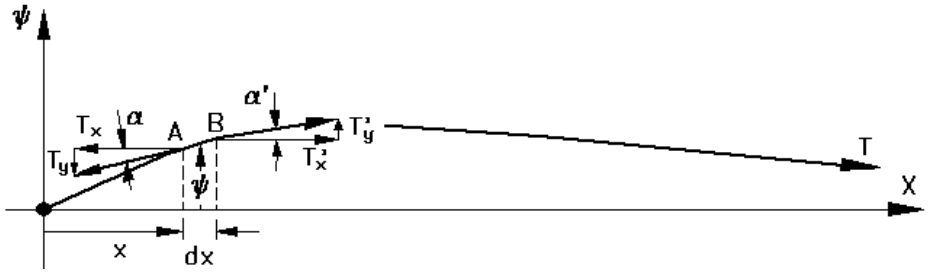
L21=57

L22=57

```
(L23=57)and(L24=57)
L25=220
L26=-220
L27=-120
L28=40
L29=100
L30=50
L31=50
L32=50
L37=350
Psi=A*sin(1000*pi*t)
Psi1=-A*sin(1000*pi*t)
if(x<0.10)and(Psi<10)then(L33=1000)
if(x>0.10)then(L33=70)
if(x<0.20)then(L34=1000)
if(x>0.20)then(L34=-70)
if(x<0.30)then(L35=1000)
if(x>0.30)then(L35=70)
if(x<0.40)then(L36=1000)
if(x>0.40)then(L36=-70)
L38=57
L39=57
L40=57
```

2.1.5 ONDAS TRANSVERSALES EN UNA CUERDA

Una cuerda tensa en equilibrio se mantiene perfectamente recta; al ser perturbada mediante un desplazamiento perpendicular, la cuerda propaga dicha perturbación en forma de una onda transversal vectorial. Para el estudio de esta onda de desplazamiento utilizaremos la figura 2.1.5.1.



F i g u r a 2.1.5.1

La porción de cuerda AB ha sido desplazada una cantidad ψ, en cada extremo actúa la tensión T cuyas componentes son:

$$T_x = T\,Cos\alpha\ ;\ T_x' = T\,Cos\alpha'\ ;\ T_y = T\,Sen\alpha \approx T\,Tan\alpha\ ;\ T_y' = T\,Sen\alpha' \approx T\,Tan\alpha'$$

La diferencia $T_x - T_x' = T\left(Cos\,\alpha - Cos\,\alpha'\right) \approx 0$ ya que los ángulos α y α' son pequeños y, en consecuencia, no existe una fuerza neta horizontal sobre la porción AB.

En cambio la diferencia

$T_y - T_y' = T\left(Tan\,\alpha - Tan\,\alpha'\right) = T\,d\left(Tan\,\alpha\right) = T\dfrac{\partial}{\partial x}\left(Tan\,\alpha\right)dx$ es distinta de cero y es la causante de la perturbación transversal. Puesto que $Tan\,\alpha = d\psi/dx$ tenemos:

$$F_y = T_y - T_y' = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)dx = T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx$$

Esta fuerza produce la aceleración de la porción AB:

$$T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx = ma = \mu\,dx\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

en donde $\mu = m/L$ es la densidad lineal de masa; de allí:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.5.1)$$

que es la ecuación diferencial de la onda transversal la cual se propaga con la velocidad:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \qquad (2.1.5.2)$$

Vemos que en este tipo de ondas sólo existe el campo de desplazamiento ψ, que es perpendicular a la dirección de propagación; pero hay infinitas posibles direcciones perpendiculares. Si tomamos los ejes X y Y como referenciales, podemos expresar el desplazamiento ψ en forma vectorial con componentes en X y en Y: $\vec{\psi} = \vec{\psi}_x + \vec{\psi}_y$. Si durante la propagación la dirección de $\vec{\psi}$ se mantiene constante, diremos que la onda transversal está "polarizada"; si varía al azar diremos que no está

polarizada; si varía con rotación uniforme diremos que está "polarizada circularmente", en cuyo caso puede ser derecha (R) o izquierda (L); un caso especial de polarización circular es la "polarización elíptica". En la figura 2.1.5.2 se muestra una onda polarizada en un plano y se dice que tiene "polarización lineal o plana"; en la figura 2.1.5.3 se muestra una onda con polarización circular derecha.

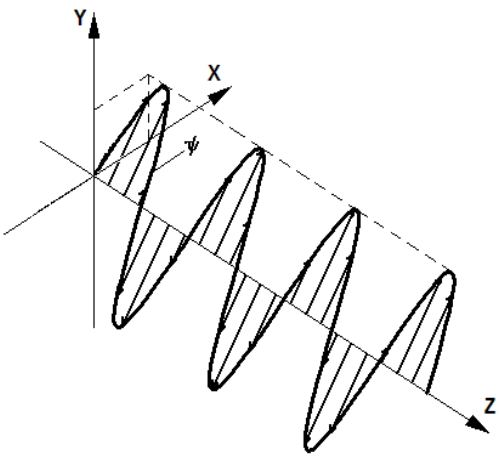


Figura 2.1.5.2

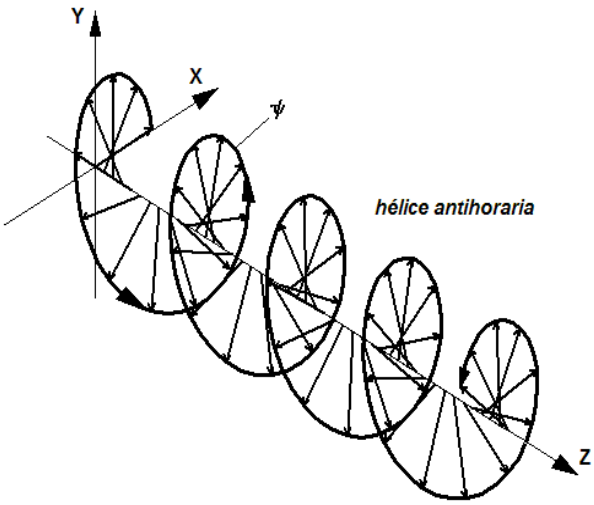


Figura 2.1.5.3

En un tema posterior, y más aún al estudiar la Óptica, ampliaremos el estudio del fenómeno de la polarización de las ondas transversales.

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO215C1
OO215C2

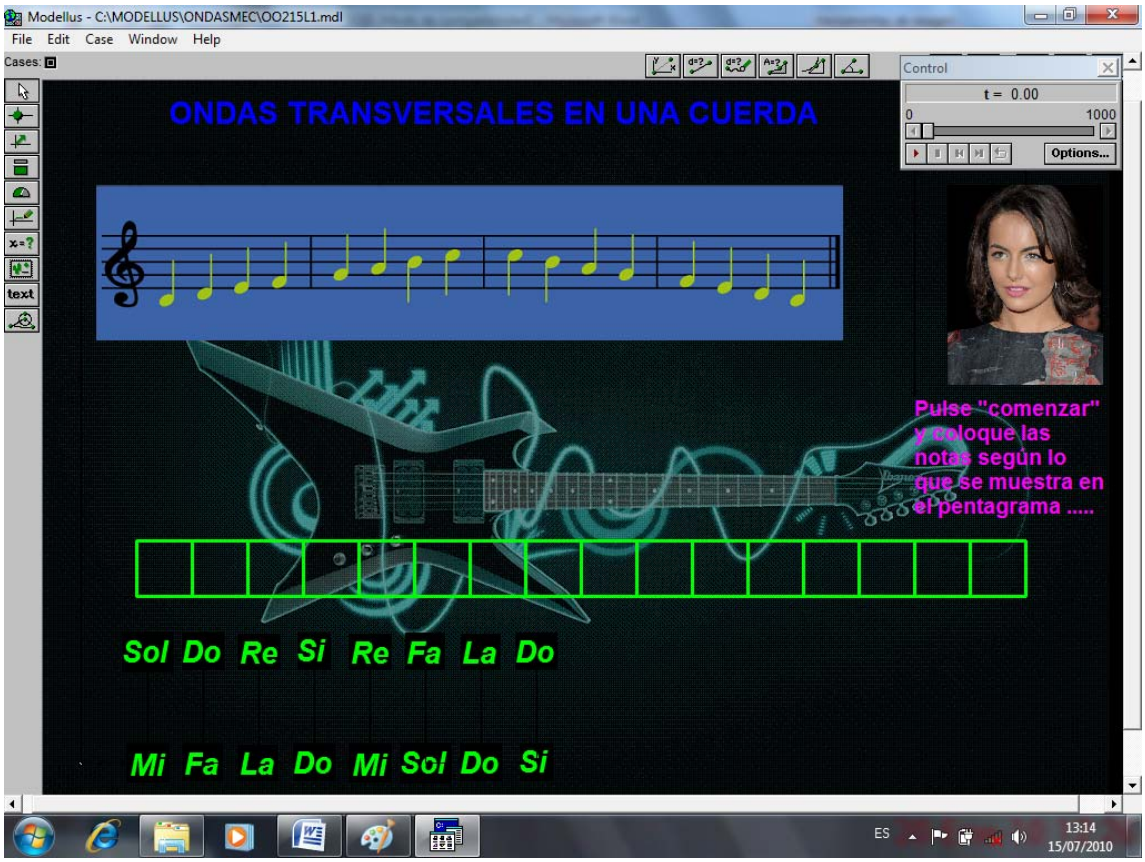
b) Ejercitativas:

OO215E1

c) Lúdicas:

OO215L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=100
L2=50
L3=200
L4=100
L5=100
L6=20
L7=20
if(t>80)then(L7=-1000)
L8=20
L9=50
L10=50
L11=50
L12=50
L13=50
L14=50
L15=50
L16=100
L17=100
L18=100
L19=100
L20=100
L21=100
L22=100
L23=100
x1
y1
x2
y2
```

x3
y3
x4
y4
x5
y5
x6
y6
x7
y7
x8
y8
x9
y9
x10
y10
x11
y11
x12
y12
x13
y13
x14
y14
x15
y15
x16
y16
L30=50
(L31=50)and(L32=50)
(L33x=50)and(L33y=-
50)and(L34x=50)and(L34y=50)and(L35x=50)

```
(L35y=-
50)and(L36x=50)and(L36y=50)and(L37x=50)and(L37y=-50)
(L38x=50)and(L38y=50)and(L39x=50)and(L39y=-
50)and(L40x=50)
(L40y=50)and(L41x=50)and(L41y=-
50)and(L42x=50)and(L42y=50)and(L43x=50)
(L43y=-50)and(L44x=50)and(L44y=50)
(L45x=50)and(L45y=-
50)and(L46x=50)and(L46y=50)and(L47x=-50)
L47y=-50
(L48=700)and(L49=50)and(L50=700)and(L51=350)and(L52=20
0)and(L53=200)
(L54=200)and(L55=150)and(L56=100)and(L57=-120)and(L58=-
220)
Ax1=-1000
Ay1=-1000
if(t>80)then(Ax1=77)and(Ay1=173)
Ax2=-1000
Ay2=-1000
if(t>80)then(Ax2=124)and(Ay2=173)
Ax3=-1000
Ay3=-1000
if(t>80)then(Ax3=175)and(Ay3=173)
Ax4=-1000
Ay4=-1000
if(t>80)then(Ax4=226)and(Ay4=173)
Ax5=-1000
Ay5=-1000
if(t>80)then(Ax5=275)and(Ay5=173)
Ax6=-1000

Ay6=-1000
```

```
if(t>80)then(Ax6=326)and(Ay6=173)
Ax7=-1000
Ay7=-1000
if(t>80)then(Ax7=374)and(Ay7=173)
Ax8=-1000
Ay8=-1000
if(t>80)then(Ax8=424)and(Ay8=173)
Bx1=-1000
By1=-1000
if(t>80)then(Bx1=475)and(By1=173)
Bx2=-1000
By2=-1000
if(t>80)then(Bx2=526)and(By2=173)
Bx3=-1000
By3=-1000
if(t>80)then(Bx3=574)and(By3=173)
Bx4=-1000
By4=-1000
if(t>80)then(Bx4=625)and(By4=173)
Bx5=-1000
By5=-1000
if(t>80)then(Bx5=675)and(By5=173)
Bx6=-1000
By6=-1000
if(t>80)then(Bx6=724)and(By6=173)
Bx7=-1000
By7=-1000
if(t>80)then(Bx7=776)and(By7=173)
Bx8=-1000
By8=-1000
if(t>80)then(Bx8=826)and(By8=173)
L100=50
```

2.1.6 ONDAS TRANSVERSALES Y DE TORSIÓN EN UNA VARILLA

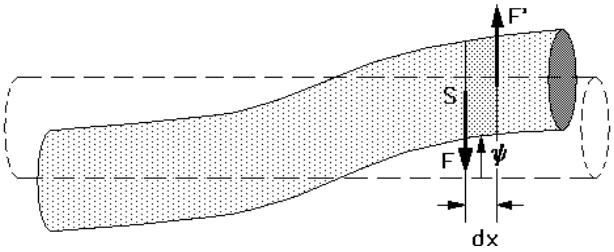


Figura 2.1.6.1

En la figura 2.1.6.1, en trazos, se muestra una varilla rígida en equilibrio y en trazo continuo la misma cuando ha sido perturbada transversalmente. En un instante dado, la porción de longitud dx ha sido desplazada una cantidad ψ. Se ve que el cociente $d\psi/dx$ no es otra cosa que la deformación unitaria por cizalladura, es decir:

$$DUC = \phi = d\psi/dx$$

Como resultado de la deformación, cada porción de espesor dx está sometida a dos fuerzas paralelas y opuestas, F y F', tangentes a las superficies limitantes, de modo que producen esfuerzos tangenciales que pueden expresarse en las dos siguientes formas:

$$\xi_T = \frac{F}{S}$$

y:

$$\xi_T = G\phi$$

en donde G es el módulo de rigidez. Al igualarlas se obtiene:

$$\frac{F}{S} = G\phi$$

de donde:

$$F = GS\phi = GS\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = GS\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad \text{(a)}$$

La fuerza neta que actúa sobre la sección es:

$$F' - F = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx$$

la cual, a partir de la segunda ley de Newton es igual a:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = ma = \rho S dx\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad \text{(b)}$$

Igualando (a) y (b) se obtiene:

$$GS\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \rho S\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

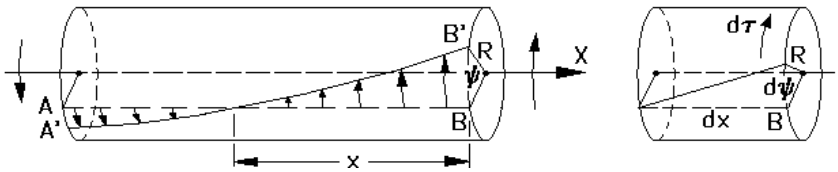
de donde:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.6.1)$$

que es la ecuación de la onda transversal vectorial que se propaga con la velocidad:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}} \qquad (2.1.6.2)$$

Ahora analizaremos una onda de torsión en la varilla, figura 2.1.6.2.



F i g u r a 2 . 1 . 6 . 2

De la elasticidad por torsión sabemos que $\tau = \dfrac{\pi G r^4 \phi}{2L}$, que para el caso concreto mostrado en la figura anterior es:

$$d\tau = \frac{\pi G R^4}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\pi G R^4}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad \text{(a)}$$

La aceleración angular que experimenta la porción perturbada de la varilla, a partir de la segunda ley de Newton para la rotación es:

$$d\tau = I\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{mR^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{S\,dx\,\rho R^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\pi R^2\,dx\,\rho R^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\pi \rho R^4}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}dx$$

de donde:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\pi \rho R^4}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad \text{(b)}$$

Igualando (a) y (b) se obtiene:

$$\frac{\pi G R^4}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\pi \rho R^4}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.6.3)$$

que es la ecuación de la onda transversal vectorial de torsión que se propaga con la velocidad:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}} \qquad (2.1.6.4)$$

Vemos que las ondas transversales y de torsión se propagan con la misma velocidad, lo cual era de esperarse, pues ambas dependen del mismo módulo elástico, el de rigidez, G.

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO216C1
OO216C2

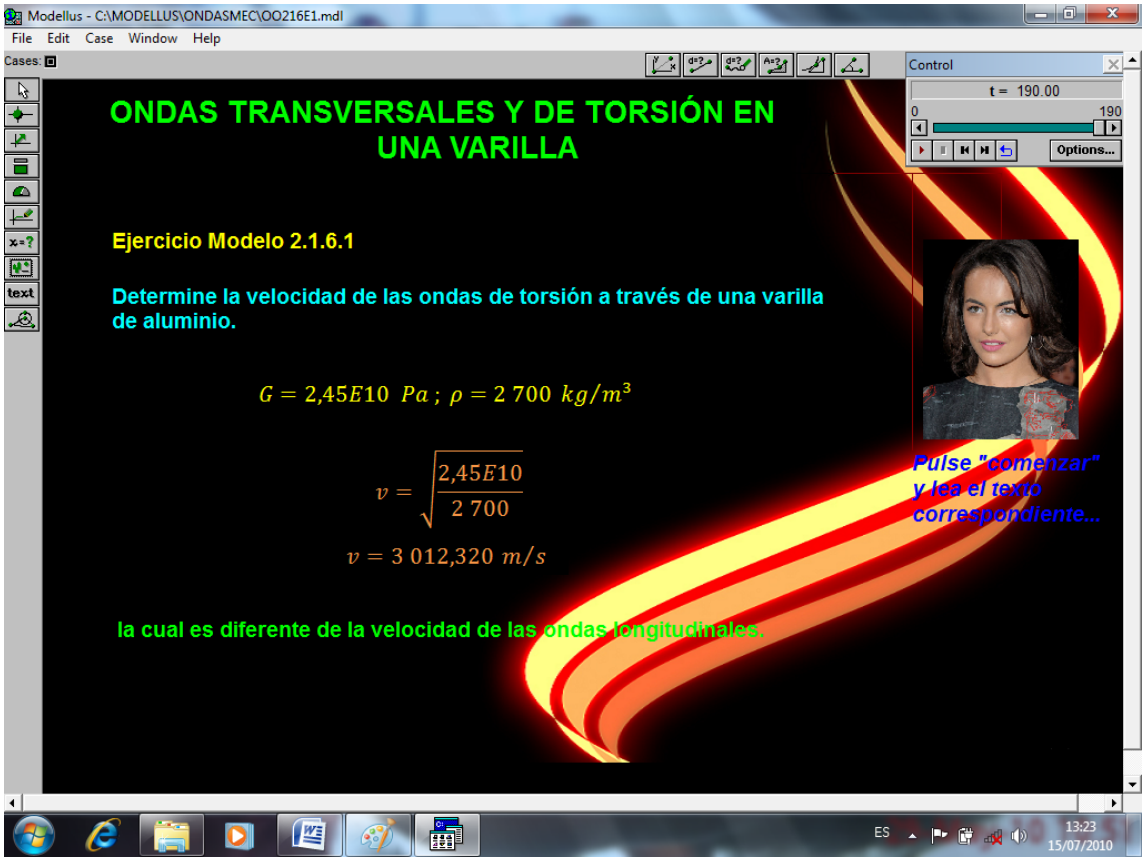
b) Ejercitativas:

OO216E1

c) Lúdicas:

OO216L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=100
L2=50
L3=50
L4=50
L5=50
L6=50
L7=50
L8=50
L9=50
L10=50
if(t<5)then(L11=-1000)
if(t>5)then(L11=-400+20*(t-5))
if(t>27.2)then(L11=50)
if(t<35)then(L12=-1000)
if(t>35)then(L12=-400+20*(t-35))
if(t>57.2)then(L12=50)
if(t<63)then(L13=-1000)
if(t>63)then(L13=-400+20*(t-63))
```

```
if(t>100.2)then(L13=350)
if(t<105)then(L14=-1000)
if(t>105)then(L14=-400+20*(t-105))
if(t>142.3)then(L14=350)
if(t<147)then(L15=-1000)
if(t>147)then(L15=-400+20*(t-147))
if(t>169.5)then(L15=50)
L16=50
L17=50
L18=50
L19=50
L20=50
L21=150
L22=150
L23=400
L24=70
L25=80
L26=-250
L27=-150
L28=70
L29=50
L30=50
```

2.1.7 ONDAS SUPERFICIALES EN UN LÍQUIDO

Supongamos un tanque de ancho *a* y profundidad *h* que contiene un líquido en reposo y en el que se propagan ondas tales que λ es muy grande y la perturbación bastante pequeña, figura 2.1.7.1. Al perturbar al líquido, el pequeño volumen de ancho *dx* y altura *h* experimenta desplazamientos horizontales y verticales de modo que sus nuevas dimensiones son $dx + d\psi$ y $h + \eta$. Para líquidos incompresibles el volumen permanece cons-tante, luego:

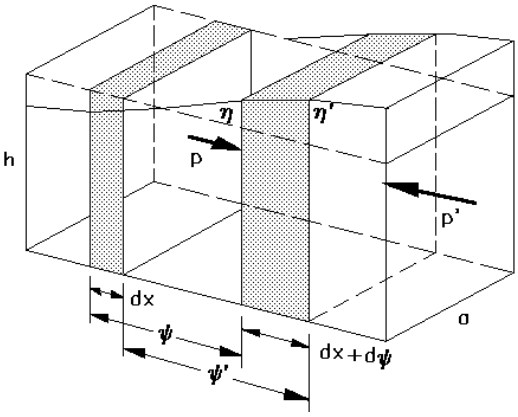


Figura 2.1.7.1

$$ah\,dx = a(h+\eta)(dx + d\psi)$$

que aproximadamente es:

$$ah\,dx \approx a(h\,dx + \eta\,dx + h\,d\psi)$$

de donde:

$$\eta\,dx + h\,d\psi = 0$$

o:

$$\eta = -h\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

y:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -h\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad \text{(a)}$$

Ya que el nivel perturbado no es horizontal, la presión a cada lado de la porción es diferente por lo que la fuerza neta es diferente de cero:

$$pS - p'S = -S(p' - p) = -S\,dp$$

y la ecuación del movimiento de dicha porción es:

$$\rho S\,dx\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -S\,dp = -S\rho g(\eta - \eta') = -S\rho g\frac{\partial \eta}{\partial x}dx$$

es decir:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad \text{(b)}$$

Igualando (a) y (b) se obtiene:

$$-h\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.7.1)$$

que es la ecuación diferencial de la perturbación horizontal que es una onda longitudinal vectorial que se mueve con la velocidad:

$$\boxed{v = \sqrt{gh}} \qquad (2.1.7.2)$$

Para la perturbación vertical se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}} \qquad (2.1.7.3)$$

que es una onda transversal vectorial que se mueve con la misma velocidad que la onda horizontal.

Las ecuaciones (2.1.7.1) y (2.1.7.2) han sido determinadas con las severas restricciones impuestas al inicio. Las expresiones más generales son:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi Y}{\rho\lambda}\right) Tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.7.4)$$

y:

$$\boxed{v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi Y}{\rho\lambda}\right) Tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}} \qquad (2.1.7.5)$$

que involucran otros parámetros característicos del líquido perturbado como son su tensión superficial, Y, y su densidad volumétrica, ρ.

Si la profundidad h no es menor que un tercio de la longitud de onda, la tangente hiperbólica que aparece en las ecuaciones anteriores tiende a uno de modo que:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi Y}{\rho\lambda}}} \qquad (2.1.7.6)$$

Ésta es la primera vez que hemos hallado ondas para las cuales su velocidad de propagación depende de la longitud de onda, esto es que $v = v(\lambda)$. En estos casos se suele decir que el medio es "dispersivo". Esto es de interés muy particular en el estudio de la Óptica.

Si en la ecuación anterior λ es muy grande, el segundo término tiende a cero y la expresión para la velocidad es simplemente:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}} \qquad (2.1.7.7)$$

y dichas ondas se conocen como "ondas gravitacionales". Por el contrario cuando λ es muy pequeña, el primer término es el que tiende a cero y:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\pi Y}{\rho\lambda}}} \qquad (2.1.8.8)$$

y las pequeñas onditas se conocen como "ondas capilares".

Otras ondas en las que su velocidad depende de la longitud de onda son las peligrosas "ondas sísmicas".

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO217C1
OO217C2

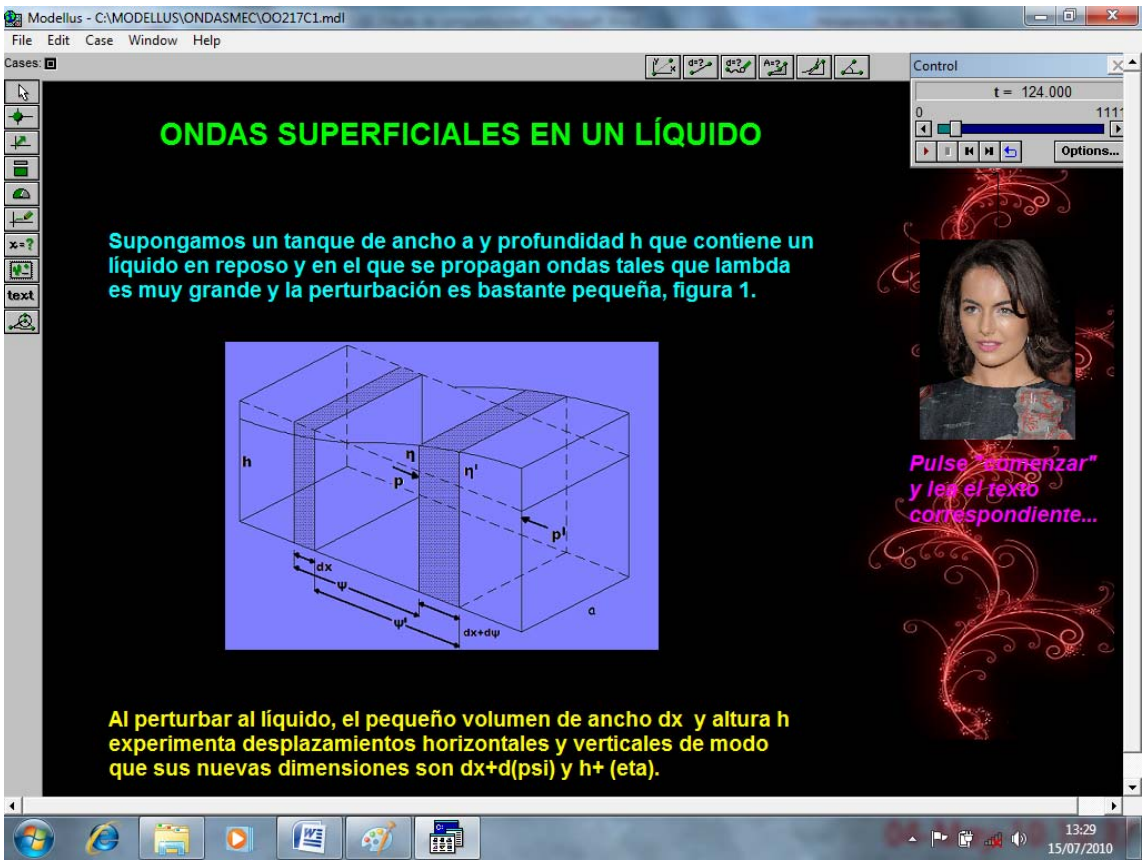
b) Ejercitativas:

OO217E1

c) Lúdicas:

OO217L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

L1=70

L2=40

L3=50

L4=50

L5=50

L6=50

L7=40

L8=50

L9=100

L10=50

if(t<5)then(L11=-1000)

if(t>5)then(L11=-500+20*(t-5))

if(t>32.2)then(L11=50)and(if(t>140)then(L11=-1000))

if(t<37)then(L12=-1000)

if(t>37)then(L12=-500+20*(t-37))

if(t>79.3)then(L12=350)and(if(t>140)then(L12=-1000))

if(t<85)then(L13=-1000)

if(t>85)then(L13=-500+20*(t-85))

```
if(t>112.3)then(L13=50)and(if(t>140)then(L13=-1000))
if(t<145)then(L14=-1000)
if(t>145)then(L14=-400+20*(t-145))
if(t>167.3)then(L14=50)and(if(t>500)then(L14=-1000))
if(t<173)then(L15=-1000)
if(t>173)then(L15=-500+20*(t-173))
if(t>215.2)then(L15=350)and(if(t>500)then(L15=-1000))
if(t<247)then(L16=-1000)
if(t>247)then(L16=-400+20*(t-247))
if(t>284.2)then(L16=350)and(if(t>500)then(L16=-1000))
if(t<220)then(L17=-1000)
if(t>220)then(L17=-400+20*(t-220))
if(t>242.2)then(L17=50)and(if(t>500)then(L17=-1000))
if(t<289)then(L18=-1000)
if(t>289)then(L18=-400+20*(t-289))
if(t>311.2)then(L18=50)and(if(t>500)then(L18=-1000))
if(t<317)then(L19=-1000)
if(t>317)then(L19=-400+20*(t-317))
if(t>354.2)then(L19=350)and(if(t>500)then(L19=-1000))
if(t<359)then(L20=-1000)
if(t>359)then(L20=-400+20*(t-359))
```

```
if(t>381.2)then(L20=50)and(if(t>500)then(L20=-1000))
L21=150
L22=150
L23=400
L24=70
L25=80
L26=-250
L27=-150
L28=50
L29=50
L30=50
if(t<386)then(L31=-1000)
if(t>386)then(L31=-400+20*(t-386))
if(t>423.2)then(L31=350)and(if(t>500)then(L31=-1000))
if(t<429)then(L32=-1000)
if(t>429)then(L32=-400+20*(t-429))
if(t>451.2)then(L32=50)and(if(t>500)then(L32=-1000))
L33=350
if(t<458)then(L34=-1000)
if(t>458)then(L34=-400+20*(t-458))
if(t>479.2)then(L34=30)and(if(t>500)then(L34=-1000))
```

```
if(t<505)then(L35=-1000)
if(t>505)then(L35=-500+20*(t-505))
if(t>532.2)then(L35=50)and(if(t>750)then(L35=-1000))
if(t<537)then(L36=-1000)
if(t>537)then(L36=-400+20*(t-537))
if(t>574.3)then(L36=350)and(if(t>750)then(L36=-1000))
if(t<579)then(L37=-1000)
if(t>579)then(L37=-400+20*(t-579))
if(t>601.2)then(L37=50)and(if(t>750)then(L37=-1000))
if(t<606)then(L38=-1000)
if(t>606)then(L38=-400+20*(t-606))
if(t>643.2)then(L38=350)and(if(t>750)then(L38=-1000))
if(t<648)then(L39=-1000)
if(t>648)then(L39=-400+20*(t-648))
if(t>670.2)then(L39=50)and(if(t>750)then(L39=-1000))
if(t<675)then(L40=-1000)
if(t>675)then(L40=-400+20*(t-675))
if(t>711.2)then(L40=350)and(if(t>750)then(L40=-1000))
if(t<755)then(L41=-1000)
if(t>755)then(L41=-400+20*(t-755))
if(t>777.2)then(L41=50)
if(t<783)then(L42=-1000)
if(t>783)then(L42=-400+20*(t-783))
if(t>825.2)then(L42=450)
```

```
if(t<830)then(L43=-1000)
if(t>830)then(L43=-400+20*(t-830))
if(t>852.2)then(L43=50)
if(t<857)then(L44=-1000)
if(t>857)then(L44=-400+20*(t-857))
if(t>899.2)then(L44=450)
if(t<905)then(L45=-1000)
if(t>905)then(L45=-400+20*(t-905))
if(t>927.2)then(L45=50)
if(t<935)then(L46=-1000)
if(t>935)then(L46=-400+20*(t-935))
if(t>972.2)then(L46=350)
if(t<983)then(L47=-1000)
if(t>983)then(L47=-400+20*(t-983))
if(t>1005.2)then(L47=50)
if(t<1010)then(L48=-1000)
if(t>1010)then(L48=-400+20*(t-1010))
if(t>1047.3)then(L48=350)
if(t<1053)then(L49=-1000)
if(t>1053)then(L49=-400+20*(t-1053))
if(t>1075.3)then(L49=50)
L50=50
(L51=50) and(L52=50)
```

2.1.8 ONDAS BI Y TRIDIMENSIONALES

La ecuación de onda $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, así como su solución $\psi = f(x - vt)$ corresponde realmente a ondas de frente plano, es decir, a ondas planas que se propagan en el espacio en la dirección +X. Si dichas ondas se propagaran en una dirección arbitraria $\vec{u}$, la ecuación de onda en coordenadas cartesianas sería:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.8.1)$$

y la solución tendría la forma:

$$\boxed{\psi = f(\vec{u}\cdot\vec{r} - vt)} \qquad (2.1.8.2)$$

En particular, para la onda armónica plana se tendría:

$$\psi = \psi_0 \, Sen\, K(\vec{u}\cdot\vec{r} - vt) = \psi_0 \, Sen(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

en donde $\vec{K} = K\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} = \frac{\omega}{v}\vec{u}$.

El vector de propagación es $\vec{K} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}$, tal que $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$.

Otras ondas interesantes, desde el punto de vista de la geometría de sus frentes, que se dan en el espacio son las cilíndricas y las esféricas; las respectivas ecuaciones de onda son:

$$\boxed{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.8.3)$$

y:

$$\boxed{\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}} \qquad (2.1.8.4)$$

cuyas soluciones, respectivamente, son:

$$\boxed{\psi=\frac{1}{\sqrt{R}}f\left(\vec{u}\cdot\vec{R}-vt\right)=\frac{1}{\sqrt{R}}f\left(\vec{K}_R\cdot\vec{R}-\omega t\right)} \qquad (2.1.8.5)$$

y:

$$\boxed{\psi=\frac{1}{r}f\left(\vec{u}\cdot\vec{r}-vt\right)=\frac{1}{r}f\left(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \qquad (2.1.8.6)$$

El decrecimiento de las amplitudes de la función ψ con la distancia que se observa en las dos ecuaciones anteriores es consecuencia de la resolución de las respectivas ondas, pero además es consecuencia de la ley de conservación de la energía.

Ahora analizaremos las ondas producidas en una membrana tensa, por ejemplo en el cuero de un tambor. Supongamos que ésta es rectangular y ajustada o templada de modo que presente una especie de "tensión superficial", $Y = F/l$, figura 2.1.8.1. Consideremos el elemento de área $dx\,dy$ que ha sido desplazado una cantidad ψ de su posición de equilibrio (que en este caso es el plano XY). Debido a la curvatura que adquiere la membrana, ψ es función tanto de x como de y; además, las fuerzas que tiran de lados paralelos no son directamente opuestas. Para obtener la fuerza vertical neta razonamos como en el caso de las ondas transversales en una cuerda y obtenemos:

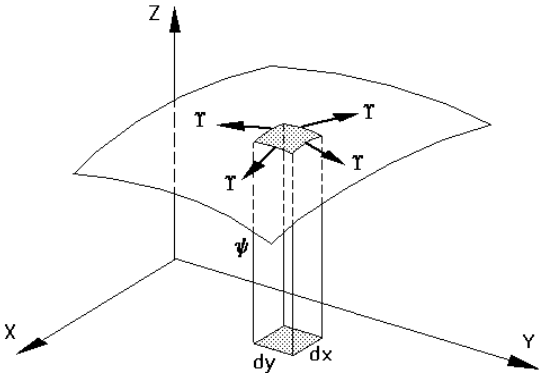


Figura 2.1.8.1

$$F_x = Y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx\,dy \quad \text{y} \quad F_y = Y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}dx\,dy$$

de modo que:

$$F_z = Y\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy \qquad \text{(a)}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton a la porción perturbada se obtiene:

$$Y\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx\,dy = \sigma\,dx\,dy\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

en donde $\sigma = m/S$ es la densidad superficial de masa, entonces:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\sigma}{Y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \qquad (2.1.8.7)$$

que es la ecuación diferencial buscada y que corresponde a ondas bidimensionales, transversales y vectoriales, las cuales se propagan con la velocidad:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Y}{\sigma}}} \qquad (2.1.8.8)$$

Para el caso de ondas esféricas propagándose en un fluido, por ejemplo ondas de presión, la ecuación de onda y su solución son:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\rho_0}{C}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}} \qquad (2.1.8.9)$$

$$\boxed{p = \frac{A}{r} f\left(r - vt\right) = \frac{A}{r} f\left(Kr - \omega t\right)} \qquad (2.1.8.10)$$

y:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{C}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{mol}}}} \qquad (2.1.8.11)$$

Un caso interesante y frecuente es el de la onda esférica armónica:

$$p - p_0 = \frac{\wp_0}{r} Sen\left(Kr - \omega t\right)$$

cuya onda de desplazamiento, para valores grandes de r , es:

$$\psi = \frac{\psi_0}{r} Cos\left(Kr - \omega t\right)$$

en donde $\psi_0 = \dfrac{\wp_0}{\rho_0 \omega v}$.

Dentro de un sólido elástico, las ondas esféricas pueden ser irrotacionales y solenoidales, lo cual es importante dentro de Electromagnetismo y de Óptica. Por el contrario las ondas planas pueden ser longitudinales y transversales, cuyas velocidades son:

$$\boxed{v_{long} = \sqrt{\frac{C + 3G/4}{\rho}}} \qquad (2.1.8.12)$$

y:

$$\boxed{v_{trans} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}} \qquad (2.1.8.13)$$

LISTADO DE ANIMACIONES

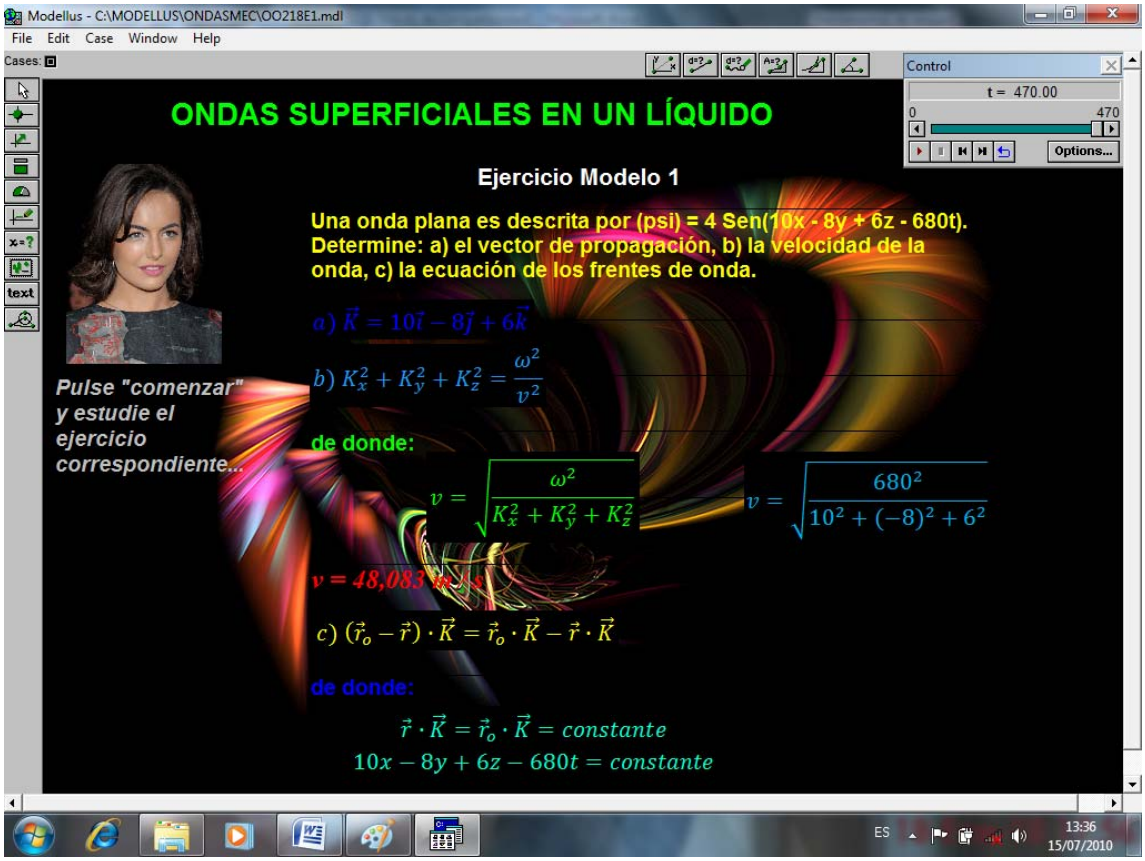
a) Conceptuales:

OO218C1
OO218C2
OO218C3
OO218C4

b) Ejercitativas:

OO218E1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=20
L2=60
L3=40
L4=60
L5=60
L6=60
L7=50
L8=50
L9=100
L10=50
L31=-200
L32=-150
L33=-100
L34=-100
L35=-300
L36=-80
L37=-200
(L38=50)and(L39=-100)
if(t<5)then(L11=1000)
if(t>5)then(L11=200-20*(t-5))
if(t>50)then(L11=-700)
if(t<55)then(L12=1000)
if(t>55)then(L12=200-20*(t-55))
if(t>95)then(L12=-600)
if(t<100)then(L13=1000)
if(t>100)then(L13=200-20*(t-100))
if(t>139)then(L13=-595)
```

```
if(t<145)then(L14=1000)
if(t>145)then(L14=200-20*(t-145))
if(t>190)then(L14=-700)
if(t<195)then(L15=1000)
if(t>195)then(L15=200-20*(t-195))
if(t>230)then(L15=-500)
if(t<235)then(L16=1000)
if(t>235)then(L16=200-20*(t-235))
if(t>255)then(L16=-200)
if(t<260)then(L17=1000)
if(t>260)then(L17=200-20*(t-260))
if(t>305)then(L17=-700)
if(t<310)then(L18=1000)
if(t>310)then(L18=200-20*(t-310))
if(t>348)then(L18=-560)
if(t<355)then(L19=1000)
if(t>355)then(L19=200-20*(t-355))
if(t>400)then(L19=-700)
if(t<405)then(L20=1000)
if(t>405)then(L20=200-20*(t-405))
if(t>440)then(L20=-500)
L21=-10
L22=-50
L23=-50
L24=-50
L25=-50
L26=-50
L27=-50
L28=-50
L29=-50
L30=-50
```

2.1.9 SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE IGUAL DIRECCIÓN. VELOCIDAD DE GRUPO

En general, la superposición de ondas se realiza de la misma forma matemática que la superposición de oscilaciones; únicamente hay que tener presente que el argumento $(\omega t + \varepsilon)$, típico de los movimientos oscilatorios armónicos, se convierte en $(Kx - \omega t + \varepsilon)$ para los movimientos ondulatorios armónicos. El caso más sencillo de superposición corresponde a dos ondas de igual dirección e iguales frecuencias cíclicas (en plural), esto es: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $K_1 = K_2 = K$. Sean las ondas:

$$\psi_1 = \psi_{01} Sen(Kx - \omega t + \varepsilon_1)$$

y:

$$\psi_2 = \psi_{02} Sen(Kx - \omega t + \varepsilon_2)$$

la onda resultante es:

$$\boxed{\psi = \psi_0 Sen(Kx - \omega t + \varepsilon)} \qquad (2.1.9.1)$$

en donde la amplitud resultante es:

$$\psi_0 = \sqrt{\psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 - 2\psi_{01}\psi_{02} Cos(\pi - \delta)} = \sqrt{\psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02} Cos\,\delta}$$

con $\delta = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$, que representa el desfase entre las dos ondas, y la fase inicial es:

$$\varepsilon = Tan^{-1} \frac{\psi_{01} Sen\,\varepsilon_1 + \psi_{02} Sen\,\varepsilon_2}{\psi_{01} Cos\,\varepsilon_1 + \psi_{02} Cos\,\varepsilon_2}$$

En este tipo de superposición de ondas hay cuatro casos especiales correspondientes a los siguientes desfases: $\delta = 0$; $\delta = \pi/2$; $\delta = \pi$ y $\delta = 3\pi/2$, que a su vez se relacionan con los fenómenos de interferencia como veremos más adelante.

Otro caso interesante y frecuente es el de la superposición de dos ondas de igual dirección y frecuencias cíclicas diferentes. Para simplificar el análisis matemático supondremos que las frecuencias cíclicas son levemente diferentes, de modo que $\omega_1 \approx \omega_2$ y $K_1 \approx K_2$. Sean las ondas:

$$\psi_1 = \psi_{01} Sen\left(K_1 x - \omega_1 t\right)$$

y:

$$\psi_2 = \psi_{02} Sen\left(K_2 x - \omega_2 t\right)$$

La onda resultante es:

$$\boxed{\psi = \psi_{01} Sen\left(K_1 x - \omega_1 t\right) + \psi_{02} Sen\left(K_2 x - \omega_2 t\right)} \qquad (2.1.9.2)$$

la cual bate pulsos o pulsaciones, es decir, es de amplitud modulada según una función armónica (seno o coseno) entre los valores extremos $\psi_{01} + \psi_{02}$ y $|\psi_{01} - \psi_{02}|$. Dentro de esta envolvente de amplitud evoluciona la "fase" u onda propiamente dicha. Entre dos mínimos consecutivos de amplitud se aglomeran N fluctuaciones de fase conformando un "grupo o paquete", el cual se propaga normalmente con la misma velocidad que la fase, pero no siempre como veremos más adelante. Un caso especial ocurre cuando $\psi_{01} = \psi_{02}$, pues la ecuación (2.1.9.2) puede simplificarse un poco más:

$$\psi = \psi_{01}\left[Sen\left(K_1 x - \omega_1 t\right) + Sen\left(K_2 x - \omega_2 t\right)\right]$$

es decir:

$$\psi = 2\psi_{01} Cos\frac{\left(K_2 - K_1\right)x - \left(\omega_2 - \omega_1\right)t}{2} Sen\frac{\left(K_1 + K_2\right)x - \left(\omega_1 + \omega_2\right)t}{2}$$

Introduciendo los siguientes cambios:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K_2 - K_1}{2} &= K_G = dK \\ \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} &= \omega_G = d\omega \end{aligned}\right\}$$ (frecuencias cíclicas del grupo)

y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K_1 + K_2}{2} &= K_F = K \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} &= \omega_F = \omega \end{aligned}\right\}$$ (frecuencias cíclicas de la fase)

la ecuación anterior se reduce a:

$$\boxed{\psi = 2\psi_{01} Cos\left(d\,Kx - d\,\omega t\right) Sen\left(Kx - \omega t\right)} \qquad (2.1.9.3)$$

en donde la amplitud modulada está dada por:

$$AM = 2\psi_{01} Cos\left(dKx - d\omega t\right)$$

y oscila entre 0 y $2\psi_{01}$.

Así como la relación entre ω y K es la velocidad de la onda, o más exactamente de la fase:

$$\boxed{v = v_F = \frac{\omega}{K}} \qquad (2.1.9.4)$$

así también la relación entre $d\omega$ y dK es la velocidad de grupo o paquete:

$$\boxed{v_G = \frac{d\omega}{dK} = v + K\frac{dv}{dK} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} = -\lambda^2\frac{df}{d\lambda}} \qquad (2.1.9.5)$$

de tal manera que la velocidad de grupo difiere de la velocidad de fase únicamente cuando el medio es dispersivo, esto es, cuando la velocidad de la onda depende de la longitud de onda.

La expresión para la frecuencia de las pulsaciones ondulatorias es la misma que la de las pulsaciones oscilatorias, esto es:

$$\boxed{f = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}} \qquad (2.1.9.6)$$

LISTADO DE ANIMACIONES

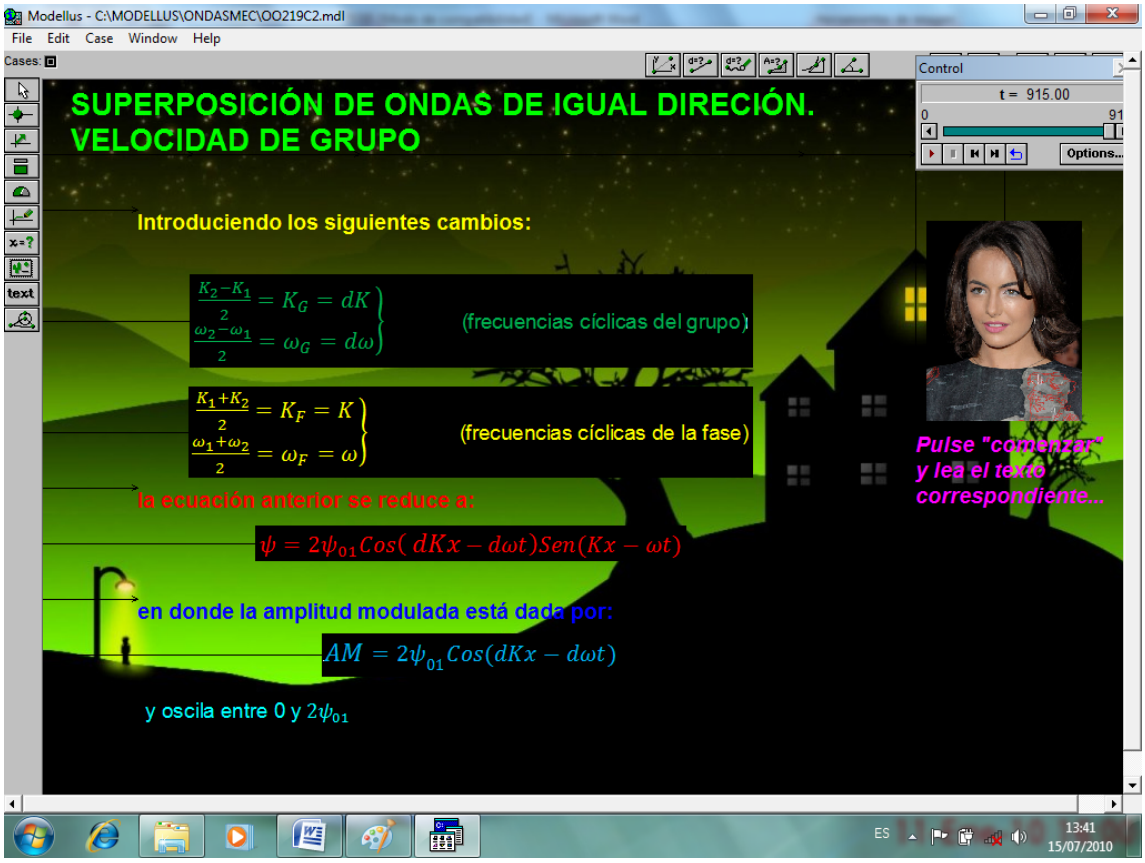
a) Conceptuales:

OO219C1
OO219C2
OO219C3

b) Ejercitativas:

OO219E1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=50
L2=50
L3=50
L4=50
L5=50
L6=50
L7=50
L8=50
L9=100
L10=50
if(t<5)then(L11=-1000)
if(t>5)then(L11=-500+20*(t-5))
if(t>35)then(L11=100)and(if(t>310)then(L11=-1000))
if(t<40)then(L12=-1000)
if(t>40)then(L12=-500+20*(t-40))
if(t>85)then(L12=400)and(if(t>310)then(L12=-1000))
if(t<90)then(L13=-1000)
if(t>90)then(L13=-500+20*(t-90))
if(t>120)then(L13=100)and(if(t>310)then(L13=-1000))
if(t<125)then(L14=-1000)
if(t>125)then(L14=-500+20*(t-125))
if(t>170)then(L14=400)and(if(t>310)then(L14=-1000))
if(t<175)then(L15=-1000)
if(t>175)then(L15=-500+20*(t-175))
if(t>205)then(L15=100)and(if(t>310)then(L15=-1000))
if(t<210)then(L16=-1000)
if(t>210)then(L16=-500+20*(t-210))
```

```
if(t>255)then(L16=400)and(if(t>310)then(L16=-1000))
if(t<260)then(L17=-1000)
if(t>260)then(L17=-500+20*(t-245))
if(t>290)then(L17=400)and(if(t>310)then(L17=-1000))
if(t<310)then(L18=-1000)
if(t>310)then(L18=-500+20*(t-310))
if(t>340)then(L18=100)and(if(t>545)then(L18=-1000))
if(t<345)then(L19=-1000)
if(t>345)then(L19=-500+20*(t-345))
if(t>390)then(L19=400)and(if(t>545)then(L19=-1000))
if(t<395)then(L20=-1000)
if(t>395)then(L20=-500+20*(t-395))
if(t>440)then(L20=400)and(if(t>545)then(L20=-1000))
L21=150
L22=150
L23=400
L24=100
L25=80
L26=-250
L27=-150
L28=60
L29=50
L30=50
if(t<445)then(L31=-1000)
if(t>445)then(L31=-500+20*(t-445))
if(t>475)then(L31=100)and(if(t>545)then(L31=-1000))
if(t<480)then(L32=-1000)
if(t>480)then(L32=-500+20*(t-480))
if(t>525)then(L32=400)and(if(t>545)then(L32=-1000))
if(t<565)then(L33=-1000)
```

```
if(t>565)then(L33=-500+20*(t-565))
if(t>595)then(L33=100)
if(t<600)then(L34=-1000)
if(t>600)then(L34=-500+20*(t-600))
if(t>645)then(L34=400)
if(t<650)then(L35=-1000)
if(t>650)then(L35=-500+20*(t-650))
if(t>695)then(L35=400)
if(t<700)then(L36=-1000)
if(t>700)then(L36=-500+20*(t-700))
if(t>730)then(L36=100)
if(t<735)then(L37=-1000)
if(t>735)then(L37=-500+20*(t-735))
if(t>780)then(L37=400)
if(t<785)then(L38=-1000)
if(t>785)then(L38=-500+20*(t-785))
if(t>815)then(L38=100)
if(t<820)then(L39=-1000)
if(t>820)then(L39=-500+20*(t-820))
if(t>865)then(L39=400)
if(t<870)then(L40=-1000)
if(t>870)then(L40=-500+20*(t-870))
if(t>904.9)then(L40=200)
```

2.1.10 ENERGÍA Y MOMENTUM EN UNA ONDA

Es el momento de preguntarnos: ¿Qué es lo que se propaga como onda en un movimiento ondulatorio? Evidentemente lo que se propaga es un tipo particular de perturbación; pero esta respuesta resulta poco útil en Física de modo que analizaremos el asunto con más detenimiento. Si consideramos cualquiera de las ondas estudiadas en los temas anteriores notaremos que todas ellas corresponden a ciertos tipos de movimientos de las moléculas del medio transmisor por el cual se propaga la onda; pero las moléculas, en promedio, mantienen fijas sus posiciones en el espacio. Entonces lo que se propaga no es la materia o masa, sino su estado de movimiento, es decir, su condición dinámica lo cual se reduce a dos parámetros: momentum y energía. Por lo tanto, en un movimiento ondulatorio se transmite o propaga momentum y energía.

Si en el extremo izquierdo de una varilla se aplica una onda, cualquier sección transversal de la misma se moverá una cantidad $d\psi$ bajo la acción de la fuerza resultante aplicada; de ese modo el trabajo realizado por la parte izquierda de la varilla sobre la de la derecha será $dW = -F\,d\psi$ y la potencia transmitida será $\partial P = \partial W / \partial t = -F\,\partial\psi / \partial t$, la cual se propagará a lo largo de la varilla junto con la onda. Y si en el extremo izquierdo se suministra continuamente energía, ésta fluirá y llegará continuamente al extremo derecho.

Supongamos una onda armónica plana de la forma:

$$\psi = \psi_0 Sen(Kx - \omega t)$$

entonces:

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega \psi_0 Cos(Kx - \omega t)$$

y:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = K \psi_0 Cos(Kx - \omega t)$$

de modo que:

$$F = YS \frac{\partial \psi}{\partial x} = YSK \psi_0 Cos(Kx - \omega t)$$

Recordando que $\omega = Kv$ y que $v = \sqrt{Y/\rho}$, y aplicando el concepto de potencia tenemos:

$$P = -Fv = -YSK \psi_0 Cos(Kx - \omega t)\left[-\omega \psi_0 Cos(Kx - \omega t)\right]$$

$$P = YS\omega K \psi_0^2 Cos^2(Kx - \omega t) = \rho v^2 S \frac{\omega^2}{v} \psi_0^2 Cos^2(Kx - \omega t)$$

es decir:

$$P = vS\rho\omega^2 \psi_0^2 Cos^2(Kx - \omega t) \qquad \text{(a)}$$

de modo que siempre $P \geq 0$, pues $Cos^2(Kx - \omega t) \geq 0$, aunque variable.

Ya que P depende de $(Kx - \omega t)$, satisface la ecuación de onda y corresponde realmente a una "onda de energía". Ahora determinaremos la media funcional de la expresión de la potencia, ecuación (a), para hallar la expresión de la potencia media:

$$\overline{P} = \frac{\int_0^\tau P\, dt}{\tau} = \frac{\int_0^\tau vS\, \rho\omega^2 \psi_0^2 Cos^2(Kx - \omega t)dt}{\tau} =$$

$$\frac{vS\, \rho\omega^2 \psi_o^2}{\tau} \int_0^\tau Cos\,(Kx - \omega t) Cos\,(Kx - \omega t)dt$$

$$\overline{P} = \frac{vS\rho\omega^2\psi_0^{\,2}}{\tau}\int_0^{\tau}\left(Cos\,Kx\,Cos\,\omega t + Sen\,Kx\,Sen\,\omega t\right)^2 dt$$

$$\overline{P} = \frac{vS\rho\omega c\psi_0^{\,2}}{\tau}\int_0^{\tau}\begin{pmatrix} Cos^2 Kx\,Cos^2\omega t + Sen^2 Kx\,Sen^2\omega t + \\ 2\,Sen\,Kx\,Cos\,Kx\,Sen\,\omega t\,Cos\,\omega t \end{pmatrix} dt$$

$$\overline{P} = \frac{vS\rho\omega^2\psi_0^{\,2}}{\tau}\begin{bmatrix} Cos^2 Kx\int_0^{\tau} Cos^2\omega t\,dt + Sen^2 Kx\int_0^{\tau} Sen^2\omega t\,dt + \\ 2\,Sen\,Kx\,Cos\,Kx\int_0^{\tau} Sen\,\omega t\,Cos\,\omega t\,dt \end{bmatrix}$$

$$\overline{P} = \frac{vS\rho\omega^2\psi_0^{\,2}}{\tau}\begin{bmatrix} Cos^2 Kx\left(\frac{t}{2} + \frac{Sen\,2\omega r}{4\omega}\right) + Sen^2 Kx\left(\frac{t}{2} - \frac{Sen\,2\omega t}{4\omega}\right) + \\ Sen\,2Kx\frac{Sen^2\omega t}{\omega} \end{bmatrix}_0^{\tau}$$

$$\overline{P} = \frac{vS\rho\omega^2\psi_0^{\,2}}{\tau}\left[Cos^2 Kx\left(\frac{\tau}{2} + 0\right) + Sen^2 Kx\left(\frac{\tau}{2} - 0\right) + Sen\,2Kx\,(0)\right]$$

$$\overline{P} = \frac{vS\rho\omega^2\psi_0^{\,2}}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}Cos^2 Kx + \frac{\tau}{2}Sen^2 Kx\right)$$

$$\overline{P} = \frac{vS\rho\omega^2\psi_0^{\,2}}{\tau}\frac{\tau}{2}\left(Cos^2 Kx + Sen^2 Kx\right)$$

es decir:

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2}vS\rho\omega^2\psi_0^{\,2}} \qquad (2.1.10.1)$$

Puesto que $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}V\rho\left(\omega\psi_0\right)^2$, entonces:

$$\boxed{E_V = \frac{E}{V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\psi_0{}^2} \qquad (2.1.10.2)$$

es la densidad volumétrica de energía que se expresa en J/m^3, y la potencia media se reduce a:

$$\boxed{\overline{P} = vSE_V} \qquad (2.1.10.3)$$

Se llama "intensidad de onda" al cociente entre la potencia media y el área transversal recta por la que fluye dicha potencia, esto es:

$$\boxed{I = \frac{\overline{P}}{S} = vE_V = vp_{rad}} \qquad (2.1.10.4)$$

la cual se expresa en W/m^2. En ella, p_{rad} es la presión de radiación que ejerce la onda sobre la superficie sobre la que incide. A algunas intensidades de onda se les ha dado nombres propios tales como "irradiancia" para el caso de la luz.

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO2110C1
OO2110C2

b) Ejercitativas:

OO2110E1

c) Lúdicas:

OO2110L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA

MODELO MATEMÁTICO

L1=200
L2=60
L3=460
L4=460
L5=460
L6=460
L7=40
L8=160
L9=120
L10=60
L11=160
L12=120
L13=40
L14=60
L15=40
L16=120
L17=-160
L18=-60
L19=-160
L20=-120
L21=-40
L22=-60
L23=-40
L24=40
L25=60
L26=-40
L27=120
L28=120

L29=60
L30=120
L31=-120
L32=40
L33=-60
L34=40
L35=-120
L36=-120
L37=-60
L38=-120
L39=120
L40=40
L41=220
L42=80
L43=-220
L44=-80
L45=60
L46=80
L47=-220
L48=-80
L49=220
L50=600
L51=150
L52=100
L53=450
L54=-100
L55=-100
L56=-150
L57=-250
L58=-600
L59=50
L60=20

```
ds/dt=v
dv/dt=a
a=F/m
F=-k*s
;below here for display
x2=-1.0+s/14
L61=20
ds2/dt=v2
dv2/dt=a2
a2=F2/m2
F2=-k2*s2
y2=-1.0+s2/14
L62=-20
ds3/dt=v3
dv3/dt=a3
a3=F3/m3
F3=-k3*s3
x3=-1.0+s3/14
L63=20
L64=-20
ds4/dt=v4
dv4/dt=a4
a4=F4/m4
F4=-k4*s4
y4=-1.0+s4/14
U
V
Ax=U+431
Ay=V+288
Bx
By
Cx
```

```
Cy
Dx
Dy
L65=300
L66=100
L67=100
L68=-1000
L69=-1000
L70=-1000
L71=100
L72=100
L73=50
if(t<5)then(L74=-1000)
if(t>5)then(L74=50)
E=617
G=80
H=579
I=460
J=300
L=213
if(Ax>297)and(Ax<310)and(Ay>169)and(Ay<267)then(J=1000)a
nd(L=1000)and(L68=20)
if(Ax>538)and(Ax<607)and(Ay>454)and(Ay<464)then(H=1000)
and(I=1000)and(L69=20)
if(Ax>575)and(Ax<644)and(Ay>72)and(Ay<103)then(E=1000)a
nd(G=1000)and(L70=20)
if(Ax>297)and(Ax<310)and(Ay>270)and(Ay<360)then(stop(Ax))
```

2.1.11 EFECTO DOPPLER

Se llama "efecto doppler" a la variación o alteración de la frecuencia temporal percibida con respecto a la frecuencia temporal emitida por una fuente de ondas debida al movimiento relativo del observador y/o fuente con respecto al medio en el que se propagan las ondas.

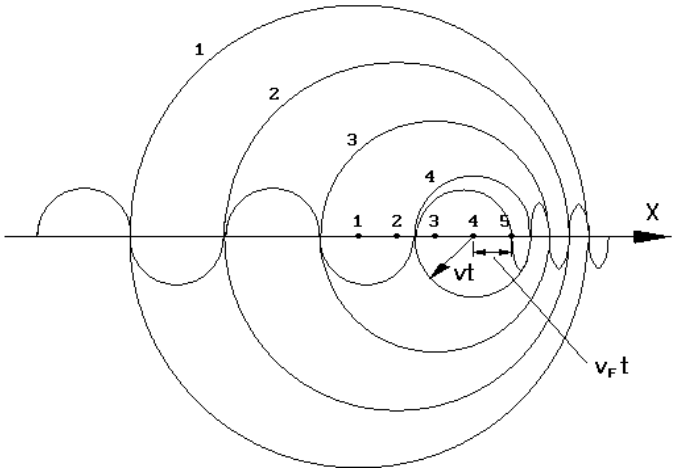


Figura 2.1.11.1

Supongamos una fuente que se desplaza hacia la derecha con velocidad v_F a través de un medio en reposo; si a intervalos iguales emite un pulso, al cabo de cierto tiempo las ondas emitidas ocuparán posiciones no concéntricas, figura 2.1.11.1. Las ondas están más próximas en el lado derecho y más separadas en el lado izquierdo, de modo que un observador percibirá mayor frecuencia temporal a la derecha y menor frecuencia temporal a la izquierda; si a la vez el observador se mueve con velocidad v_O, percibirá una frecuencia temporal diferente, según sea el sentido de su movimiento.

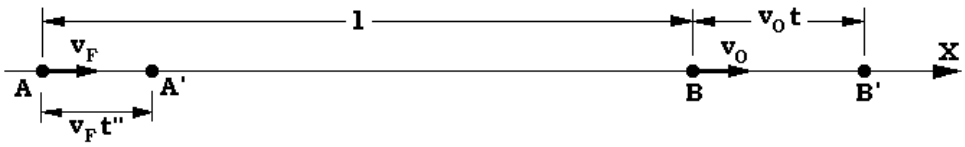


Figura 2.1.11.2

Para obtener la relación entre la frecuencia temporal *f* de las ondas producidas por la fuente y la frecuencia temporal *f '* percibida por el observador utilizaremos la figura 2.1.11.2; consideraremos que las velocidades dirigidas hacia la derecha son positivas. Supongamos que en $t = 0$, cuando la separación entre la fuente y el observador es $AB = l$, la fuente emite una onda que llega al observador luego de un tiempo *t*, esto es, a una distancia $l + v_O t$; pero esta distancia es también el producto del tiempo *t* por la velocidad de la onda, es decir vt, así que:

$$vt = l + v_O t$$

de donde:

$$t = \frac{l}{v - v_O} \qquad \text{(a)}$$

En $t = t''$ la fuente llega a A' y la onda emitida en aquel instante alcanza al observador en el instante *t'* (medido desde el mismo origen de tiempos que el primero). La distancia total recorrida por la onda desde que fue emitida en A' hasta que fue captada por el observador es $(l - v_F t'') + v_O t'$.

El tiempo real de viaje de la onda es $t' - t''$ y la correspondiente distancia recorrida es $v(t' - t'')$; entonces:

$$v(t' - t'') = l - v_F t'' + v_O t'$$

de donde:

$$t' = \frac{l + (v - v_F)t''}{v - v_O} \qquad \text{(b)}$$

El intervalo de tiempo registrado por el observador entre las ondas emitidas por la fuente desde A y desde A' es:

$$\tau = t' - t = \frac{v - v_F}{v - v_O} t'' \qquad \text{(c)}$$

Ahora bien, si f es la frecuencia temporal de la fuente, el número de ondas emitido en el tiempo t'' es ft'' el cual es recibido por el observador en el tiempo τ de modo que él mide una frecuencia temporal $f' = ft''/\tau$, esto es:

$$\boxed{f' = \left(\frac{v - v_O}{v - v_F}\right) f} \qquad (2.1.11.1)$$

y:

$$\boxed{\omega' = \left(\frac{v - v_O}{v - v_F}\right) \omega} \qquad (2.1.11.2)$$

Si v_O y v_F son mucho menores que la velocidad v de la onda, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\boxed{f' = \left(\frac{v + v_F - v_O}{v}\right) f} \qquad (2.1.11.3)$$

y:

$$\boxed{\omega' = \left(\frac{v + v_F - v_O}{v}\right)\omega} \qquad (2.1.11.4)$$

Un caso muy especial ocurre cuando $v_F > v$ y $v_O = 0$: la fuente avanza más rápido que el frente de onda y éste queda sistemáticamente tras la fuente, es decir se trata de "ondas supersónicas". La tangente a todas las ondas sucesivas que van quedando atrás, y que en forma individual son esféricas, describe un cono cuyo eje es la recta sobre la que se mueve la fuente y cuya abertura es:

$$\boxed{\theta = Sen^{-1}\frac{v}{v_F}} \qquad (2.1.11.5)$$

El movimiento resultante es una onda cónica que se propaga perpendicularmente a la cáscara cónica y es conocida como "onda de Mach" u onda de choque, la cual es altamente energética y por lo mismo peligrosa y destructiva, pues es la resultante de miles de frentes de onda que se refuerzan entre sí alcanzando una amplitud enorme.

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO2111C1
OO2111C2
OO2111C3

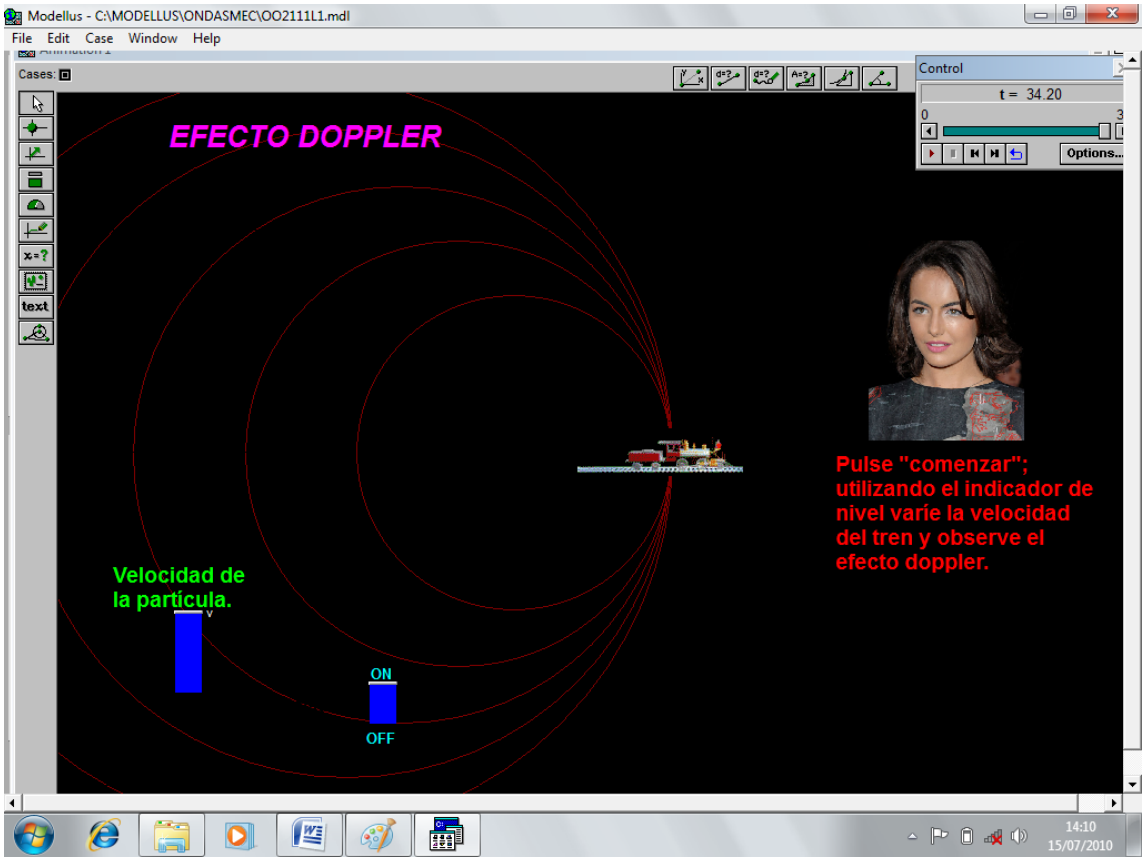
b) Ejercitativas:

OO2111E1

c) Lúdicas:

OO2111L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

L1=100

L2=100

L3=100

L4=100

L5=100

L6=100

L7=100

L8=100

L9=100

L10=100

L11=100

L12=400

L13=100

L14=-200

L15=-100

L16=50

L17=500

L18=50

Ax=200

Ay=100

Bx=282

By=108

Cx=278

```
Cy=50
x=v*t
r0=t
c0=0
length=#((lengthx-originx)^2+(lengthy-originy)^2)
if(switch==0)then(lambda=wavelength*1/#(1-v^2))
if(switch==1)then(lambda=wavelength)
c1=lambda*v
if(t<lambda)then(r1=c1)
if(t>=lambda)then(r1=c1+(t-lambda))
c2=2*lambda*v
if(t<2*lambda)then(r2=c2)
if(t>=2*lambda)then(r2=c2+(t-2*lambda))
c3=3*lambda*v
if(t<3*lambda)then(r3=c3)
if(t>=3*lambda)then(r3=c3+(t-3*lambda))
c4=4*lambda*v
if(t<4*lambda)then(r4=c4)
if(t>=4*lambda)then(r4=c4+(t-4*lambda))
c5=5*lambda*v
if(t<5*lambda)then(r5=c5)
if(t>=5*lambda)then(r5=c5+(t-5*lambda))
```

2.1.12 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS

Supongamos una onda incidente de la forma $\psi_i = \psi_{0i}\, Sen\left(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega t\right)$ que se aproxima a una interfase situada sobre el plano XZ; supongamos también que el plano de incidencia es el plano XY. Al llegar la onda a la interfase se dividirá en dos partes: una onda reflejada, $\psi_r = \psi_{0r}\, Sen\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right)$, y una onda refractada o transmitida, $\psi_t = \psi_{0t}\, Sen\left(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega t\right)$. El valor de ψ es el mismo a ambos lados de la interfase, medios (1) y (2); luego $\psi_i + \psi_r = \psi_t$. Para que ocurra esto es necesario que las fases de las tres ondas sean iguales, es decir:

$$\vec{K}_i \cdot \vec{r} = \vec{K}_r \cdot \vec{r} = \vec{K}_t \cdot \vec{r} \qquad \text{(a)}$$

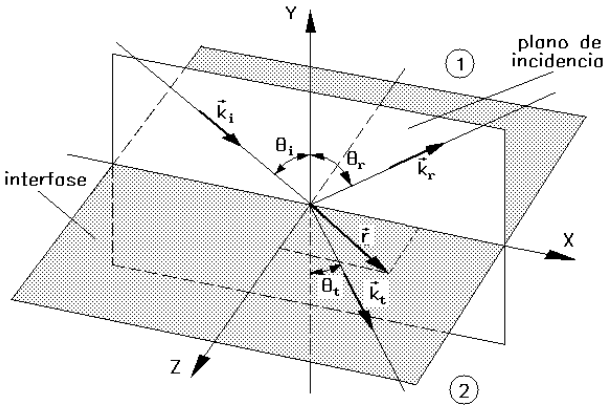


Figura 2.1.12.1

Puesto que $\vec{r}$ está en el plano XZ, figura 2.1.12.1, ha de tener la forma $\vec{r} = x\vec{i} + z\vec{k}$. Puesto que el plano de incidencia es el plano XY, se ha de tener que $\vec{K}_i = K_{ix}\vec{i} + K_{iy}\vec{j}$. Para $\vec{K}_r$ y $\vec{K}_t$ se tienen:

$$\vec{K}_r = K_{rx}\vec{i} + K_{ry}\vec{j} + K_{rz}\vec{k}$$

y

$$\vec{K}_t = K_{tx}\vec{i} + K_{ty}\vec{j} + K_{tz}\vec{k}$$

Con todo esto, la ecuación (a) se convierte en:

$$K_{ix}x = K_{rx}x + K_{rz}z = K_{tx}x + K_{tz}z$$

la cual ha de ser válida para todos los puntos de la interfase, plano XZ, luego:

$$K_{ix} = K_{rx} = K_{tx} \qquad \text{(b)}$$

y:

$$K_{rz} = K_{tz} = 0 \qquad \text{(c)}$$

de modo que $\vec{K}_r$ y $\vec{K}_t$ no tienen componente en el eje Z, así que deben reposar en el plano de incidencia XY; entonces:

- Los rayos incidente, reflejado y transmitido son coplanares con el plano de la normal (que es el eje Y).

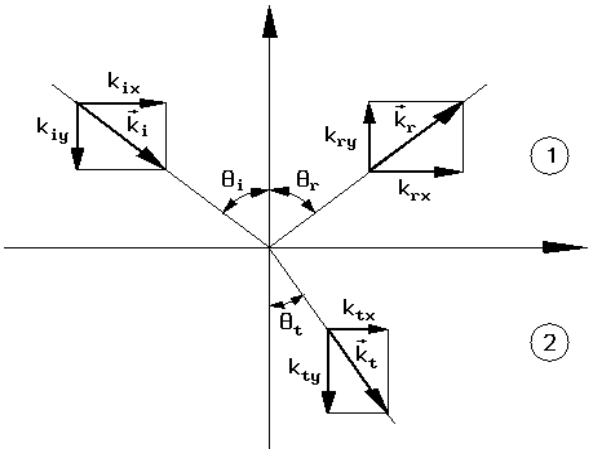


Figura 2.1.12.2

De la figura 2.1.12.2 y recordando que $K_{ix} = K_{rx} = K_{tx}$ tenemos:

$$Sen\,\theta_i = \frac{K_{ix}}{K_i} = \frac{K_{ix}}{\omega/v_1}$$

$$Sen\,\theta_r = \frac{K_{rx}}{K_r} = \frac{K_{rx}}{\omega/v_1}$$

$$Sen\,\theta_t = \frac{K_{tx}}{K_t} = \frac{K_{tx}}{\omega/v_2}$$

de donde:

$$K_{ix} = \frac{\omega}{v_1} Sen\,\theta_i$$

$$K_{rx} = \frac{\omega}{v_1} Sen\,\theta_r$$

$$K_{tx} = \frac{\omega}{v_2} Sen\,\theta_t$$

con lo que las ecuaciones (b) toman la forma:

$$\frac{1}{v_1} Sen\,\theta_i = \frac{1}{v_1} Sen\,\theta_r = \frac{1}{v_2} Sen\,\theta_t \qquad \text{(d)}$$

Tomando los dos primeros miembros tenemos:

$$\frac{1}{v_1} Sen\,\theta_i = \frac{1}{v_1} Sen\,\theta_r$$

de donde:

$$\boxed{\theta_i = \theta_r} \qquad (2.1.12.1)$$

Tomando el primero y tercer miembros tenemos:

$$\boxed{\frac{1}{v_1} Sen\,\theta_i = \frac{1}{v_2} Sen\,\theta_t} \qquad (2.1.12.2)$$

conocida como la ley de Snell. El cociente entre c y v se denota con n y se denomina "índice de refracción", en donde c es la máxima velocidad que puede tener la onda, lo cual ocurre en un medio referencial, es decir:

$$\boxed{n = \frac{c}{v}} \qquad (2.1.12.3)$$

Introduciendo este concepto en la ecuación (2.1.12.2) la ley de Snell adopta la forma:

$$\boxed{n_i \, Sen\,\theta_i = n_t \, Sen\,\theta_t} \qquad (2.1.12.4)$$

Si en la interfase se satisface la igualdad entre funciones, $\psi_i + \psi_r = \psi_t$, también se cumple la relación entre sus amplitudes, $\psi_{0i} + \psi_{0r} = \psi_{0t}$, la cual sirve como primera condición para la determinación de la relación entre las tres amplitudes; sin embargo se requiere una segunda condición de contorno para determinar dicha relación. Normalmente ésta sale de la condición de "continuidad" de ciertas componentes o de algunos parámetros físicos como la tensión, presión, etc.

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO2112C1
OO2112C2
OO2112C3

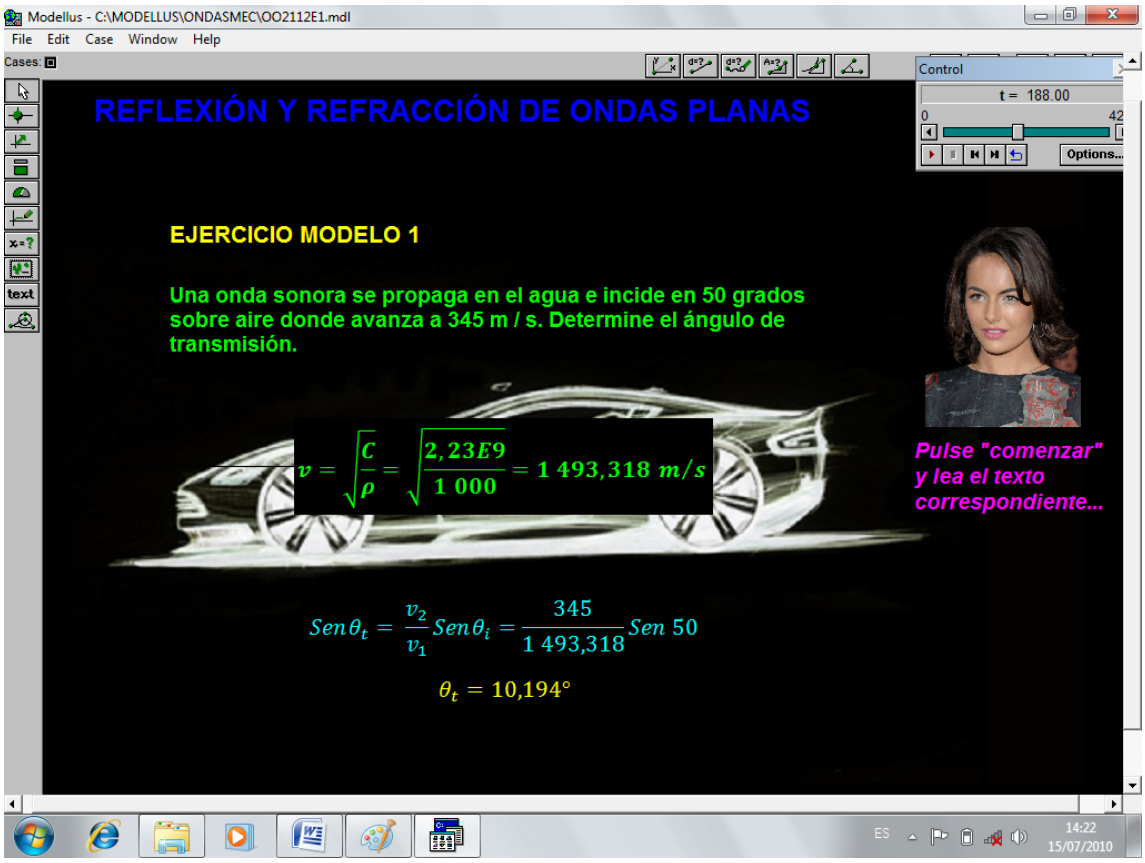
b) Ejercitativas:

OO2112E1

c) Lúdicas:

OO2112L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



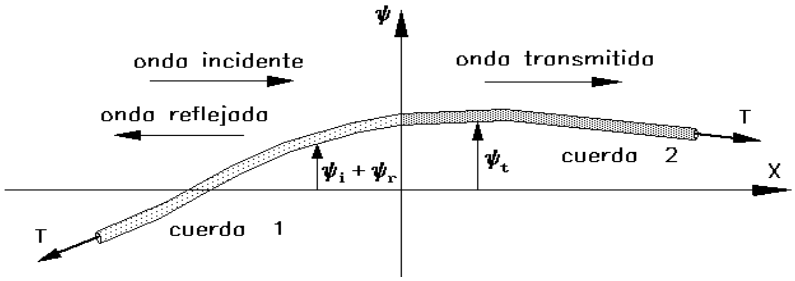
MODELO MATEMÁTICO

```
L1=55
L2=55
L3=55
L4=55
L5=55
L6=55
L7=55
L8=55
L9=55
L10=55
if(t<5)then(L11=-1000)
if(t>5)then(L11=-500+20*(t-5))
if(t>35)then(L11=100)and(if(t>190)then(L11=-1000))
if(t<40)then(L12=-1000)
if(t>40)then(L12=-500+20*(t-40))
if(t>70)then(L12=100)and(if(t>190)then(L12=-1000))
if(t<75)then(L13=-1000)
if(t>75)then(L13=-500+20*(t-75))
if(t>120)then(L13=400)and(if(t>190)then(L13=-1000))
if(t<125)then(L14=-1000)
if(t>125)then(L14=-500+20*(t-125))
if(t>170)then(L14=400)and(if(t>190)then(L14=-1000))
if(t<190)then(L15=-1000)
```

```
if(t>190)then(L15=-500+20*(t-190))
if(t>220)then(L15=100)
if(t<225)then(L16=-1000)
if(t>225)then(L16=-500+20*(t-225))
if(t>255)then(L16=100)
if(t<260)then(L17=-1000)
if(t>260)then(L17=-500+20*(t-260))
if(t>305)then(L17=400)
if(t<310)then(L18=-1000)
if(t>310)then(L18=-500+20*(t-310))
if(t>355)then(L18=400)
if(t<360)then(L19=-1000)
if(t>360)then(L19=-500+20*(t-360))
if(t>405)then(L19=400)
L20=400
L21=150
L22=150
L23=400
L24=70
L25=80
L26=-250
L27=-150
L28=60
L29=50
L30=50
```

2.1.13 COEFICIENTES DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN. REFLECTANCIA Y TRANSMITANCIA

Partamos de una situación concreta y conocida: se juntan en serie (una unida o atada a otra) dos cuerdas de diferentes densidades lineales y se las somete a la tensión común T. Queremos estudiar la reflexión y refracción de las ondas transversales en el punto de unión, figura 2.1.13.1.



F i g u r a 2. 1. 1 3. 1

Las ondas incidente, reflejada y transmitida son:

$$\psi_i = \psi_{0i}\, Sen\left(\omega t - K_1 x\right)$$

$$\psi_r = \psi_{0r}\, Sen\left(\omega t + K_1 x\right)$$

$$\psi_t = \psi_{0t}\, Sen\left(\omega t - K_2 x\right)$$

El desplazamiento de cualquier punto de la cuerda (1) es $\psi = \psi_i + \psi_r$, mientras en la cuerda (2) es $\psi = \psi_t$.

En el origen, que es el punto de unión de las dos cuerdas, $\psi_i + \psi_r = \psi_t$, de modo que:

$$\psi_{0i}\, Sen\, \omega t + \psi_{0r}\, Sen\, \omega t = \psi_{0t}\, Sen\, \omega t$$

es decir:

$$\psi_{0i} + \psi_{0r} = \psi_{0t} \qquad \text{(a)}$$

Sabemos que la fuerza vertical en cualquier punto de la cuerda (1) es:

$$F_y = T\, Sen\, \alpha \approx T\, Tan\, \alpha = T\frac{\partial \psi}{\partial x} = T\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right)$$

entonces:

$$F_y = TK_1\left[-\psi_{0i}\, Cos\left(\omega t - K_1 x\right) + \psi_{0r}\, Cos\left(\omega t + K_1 x\right)\right]$$

Similarmente, la fuerza vertical en cualquier punto de la cuerda (2) es:

$$F_y = T\frac{\partial \psi_t}{\partial x} = -TK_2\psi_{0t}\, Cos\left(\omega t - K_2 x\right)$$

En $x = 0$, ambas fuerzas verticales son idénticas, luego:

$$TK_1\left(-\psi_{0i}\, Cos\, \omega t + \psi_{0r}\, Cos\, \omega t\right) = -TK_2\, \psi_{0t}\, Cos\, \omega t$$

de donde:

$$K_1\left(-\psi_{0i} + \psi_{0r}\right) = -K_2\psi_{0t} \qquad \text{(b)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (a) y (b) se obtiene:

$$\psi_{0r} = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\psi_{0i} \qquad \text{(c)}$$

y:

$$\psi_{0t} = \frac{2K_1}{K_1 + K_2}\psi_{0i} \qquad \text{(d)}$$

que expresan ψ_{0r} y ψ_{0t} en función de ψ_{0i}. Recordando que $K = \omega / v$, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\psi_{0r} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\psi_{0i} \qquad \text{(e)}$$

y:

$$\psi_{0t} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}\psi_{0i} \qquad \text{(f)}$$

que para el caso de ondas transversales en una cuerda tensa se reducen a:

$$\psi_{0r} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\psi_{0i} \qquad \text{(g)}$$

y:

$$\psi_{0t} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\psi_{0i} \qquad \text{(h)}$$

Para propagación lineal o rectilínea, los "coeficientes de reflexión y transmisión", válidos para todo tipo de onda, se definen, respectivamente, mediante las expresiones:

$$\boxed{r = \frac{\psi_{0r}}{\psi_{0i}}} \qquad (2.1.13.1)$$

y:

$$\boxed{t = \frac{\psi_{0t}}{\psi_{0i}}} \qquad (2.1.13.2)$$

que para el caso de las ondas transversales en una cuerda tensa son:

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

y:

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

de modo que ψ_t está siempre en fase con ψ_i, ya que $2\sqrt{\mu_1}$ es siempre positivo; en cambio ψ_r está en fase con ψ_i sólo si $\mu_1 > \mu_2$ y en contrafase si $\mu_1 < \mu_2$.

Asimismo, para propagación lineal o rectilínea, el flujo relativo de energía reflejada o "reflectancia" se define mediante:

$$\boxed{R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{\psi_{0r}}{\psi_{0i}}\right)^2 = r^2} \qquad (2.1.13.3)$$

y el flujo relativo de energía transmitida o "transmitancia" se define mediante:

$$\boxed{T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{\psi_{0t}}{\psi_{0i}}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1}t^2 = \frac{v_1}{v_2}t^2} \qquad (2.1.13.4)$$

Evidentemente, debido a la conservación de la energía, se cumple que:

$$\boxed{R + T = 1} \qquad (2.1.13.5)$$

LISTADO DE ANIMACIONES

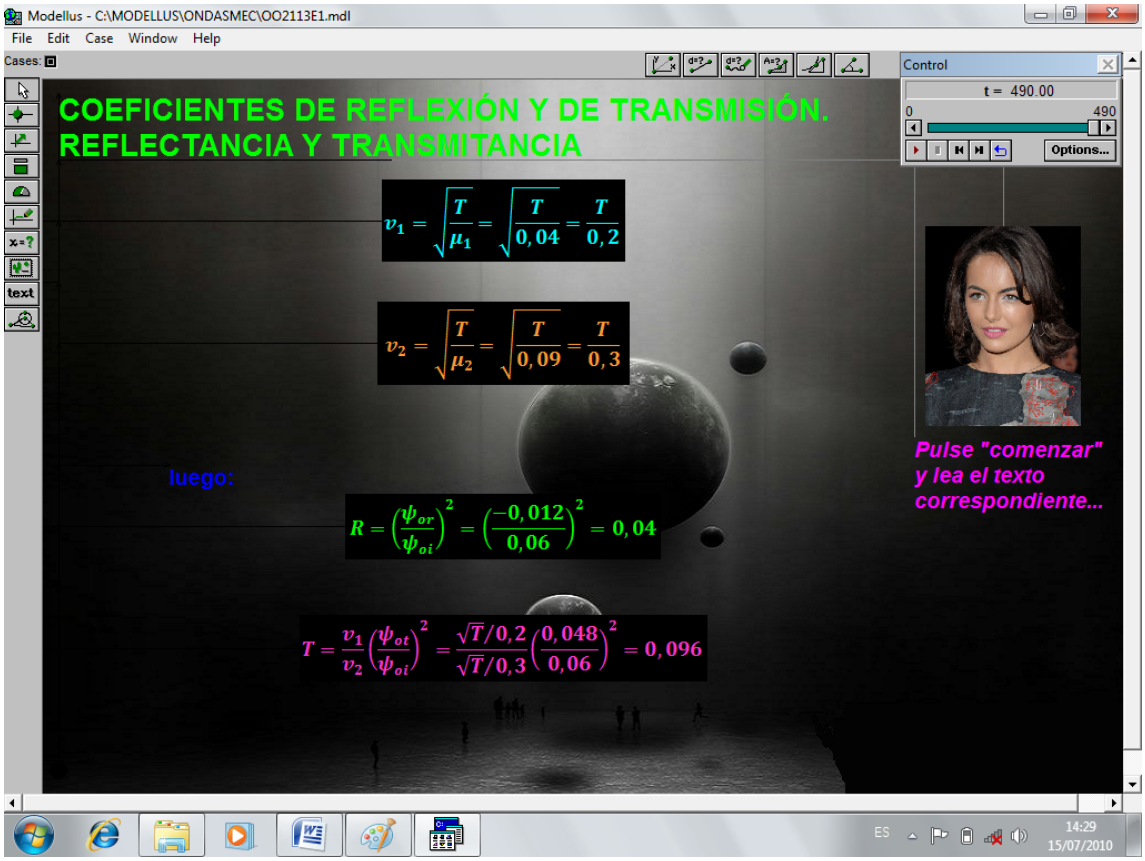
a) Conceptuales:

OO2113C1
OO2113C2
OO2113C3

b) Ejercitativas:

OO2113E1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=55
L2=55
L3=55
L4=55
L5=55
L6=55
L7=55
L8=55
L9=55
L10=55
if(t<5)then(L11=-1000)
if(t>5)then(L11=-500+20*(t-5))
if(t>35)then(L11=100)and(if(t>230)then(L11=-1100))
if(t<40)then(L12=-1000)
if(t>40)then(L12=-500+20*(t-40))
if(t>70)then(L12=100)and(if(t>230)then(L12=-1100))
if(t<75)then(L13=-1000)
if(t>75)then(L13=-500+20*(t-75))
if(t>120)then(L13=400)and(if(t>230)then(L13=-1100))
if(t<125)then(L14=-1000)
if(t>125)then(L14=-500+20*(t-125))
if(t>170)then(L14=400)and(if(t>230)then(L14=-1100))
if(t<175)then(L15=-1000)
if(t>175)then(L15=-500+20*(t-175))
if(t>220)then(L15=400)and(if(t>230)then(L15=-1100))
if(t<230)then(L16=-1000)
if(t>230)then(L16=-500+20*(t-230))
if(t>275)then(L16=400)
```

```
if(t<280)then(L17=-1000)
if(t>280)then(L17=-500+20*(t-280))
if(t>325)then(L17=400)
if(t<330)then(L18=-1000)
if(t>330)then(L18=-500+20*(t-330))
if(t>360)then(L18=100)
if(t<365)then(L19=-1000)
if(t>365)then(L19=-500+20*(t-365))
if(t>410)then(L19=400)
if(t<415)then(L20=-1000)
if(t>415)then(L20=-500+20*(t-415))
if(t>460)then(L20=400)
L21=150
L22=150
L23=400
L24=70
L25=80
L26=-250
L27=-150
L28=60
L29=50
L30=50
```

2.1.14 INTERFERENCIA DE DOS ONDAS SINCRÓNICAS

Una característica de todo movimiento ondulatorio es el fenómeno de la interferencia, lo cual ocurre cuando dos o más ondas que vibran en fase, coinciden en el tiempo y en el espacio; en otras palabras, la interferencia es una de las consecuencias de la superposición de dos o más ondas, o más exactamente, "la superposición de dos o más ondas sincrónicas y paralelas da origen a fenómenos de interferencia". En esta parte abordaremos la interferencia producida por dos fuentes que vibran en fase, es decir, fuentes sincrónicas, a las que representaremos con S_1 y S_2, las cuales emiten las ondas esféricas $\psi_1 = \psi_{01} Sen(\omega t - Kr_1)$ & $\psi_2 = \psi_{02} Sen(\omega t - Kr_2)$, en donde r_1 y r_2 son las distancias desde un punto P cualquiera hasta S_1 y S_2. La onda resultante en P tiene un desfase dado por:

$$\delta = (Kr_1 - Kr_2) = K(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

y una amplitud dada por:

$$\psi_0 = \sqrt{\psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02} Cos\,\delta} \qquad \text{(a)}$$

De la ecuación (a) vemos que el valor de ψ_0 está comprendido entre $\psi_{01} + \psi_{02}$ y $|\psi_{01} - \psi_{02}|$, dependiendo del valor de δ; esto lo resumimos a continuación:

Si $\delta = \pm 2\pi n \quad \rightarrow \quad Cos\,\delta = 1 \quad \rightarrow \quad \psi_0 = \psi_{01} + \psi_{02} \quad \rightarrow$ *interferencia constructiva total*

Si $\delta = \pm(2m-1)\pi \quad \rightarrow \quad Cos\,\delta = -1 \quad \rightarrow \quad \psi_0 = |\psi_{01} - \psi_{02}| \quad \rightarrow$ *interferencia destructiva total*

lo cual equivale a:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \begin{cases} \pm 2\pi n & \textit{interferencia constructiva total} \\ \pm(2m-1)\pi & \textit{interferencia destructiva total} \end{cases}$$

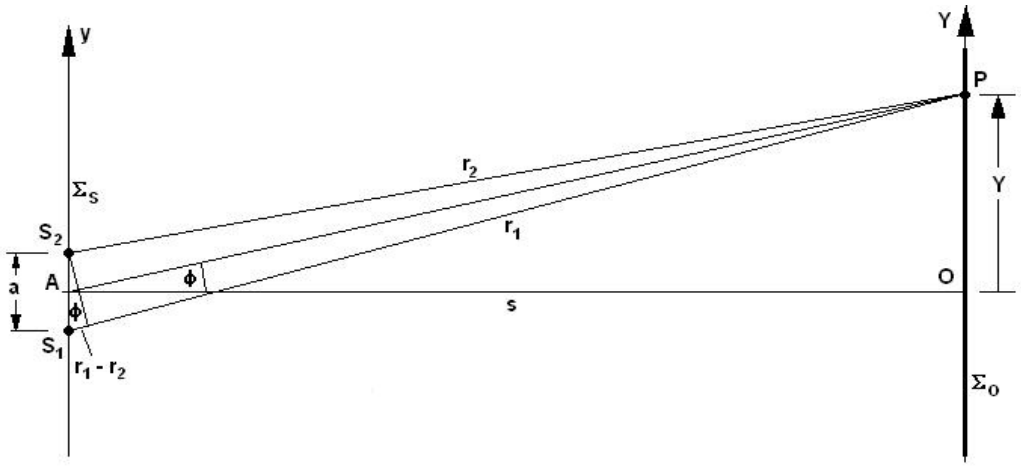
de donde:

$$\boxed{r_1 - r_2 = \begin{cases} \pm n\lambda & \textit{interferencia constructiva} \\ \pm(2m-1)\dfrac{\lambda}{2} & \textit{interferencia destructiva} \end{cases}}$$

$$\begin{matrix} (n = 0, 1, 2, 3, ...) \\ (m = 1, 2, 3, ...) \end{matrix} \qquad (2.1.14.1)$$

Pero $r_1 - r_2 = constante$ define hipérbolas en el plano o hiperboloides de revolución en el espacio, de focos S_1 y S_2. Así que de la ecuación (2.1.14.1) las hipérbolas o hiperboloides de revolución para los cuales $r_1 - r_2 = \pm n\lambda$ corresponden a "máximos de interferencia", pues los dos movimientos se refuerzan; estos puntos, líneas o superficies se llaman "vientres" o "antinodos". En cambio las hipérbolas o hiperboloides para los cuales $r_1 - r_2 = \pm(2m-1)\lambda/2$ corresponden a "mínimos de interferencia", pues los dos movimientos se atenúan; estos puntos, líneas o superficies se llaman "nodos". Utilizaremos la geometría de la figura 2.1.14.1 para ampliar algunos conceptos relacionados con la interferencia de dos fuentes sincrónicas S_1 y S_2. La distancia ínter fuentes será representada con a, el plano que contiene a las fuentes será representado con Σs, el plano de observación (pantalla) será representado con Σo, la distancia entre el plano de las fuentes y el de observación será

representado con s. Supongamos que las amplitudes de las dos ondas son iguales, esto es, $\psi_{01} = \psi_{02}$; a un punto P, sobre el plano de observación, llegarán las dos ondas recorriendo las distancias r_1 y r_2 y el efecto resultante dependerá precisamente de la diferencia $r_1 - r_2$. Imaginemos las dos situaciones extremas:



F i g u r a 2. 1. 14. 1

a) INTERFERENCIA CONSTRUCTIVA TOTAL: Ocurre si el punto P de la figura 2.1.14.1 se encuentra en un máximo en cuyo caso $Y = Y_n$, por lo que:

$$r_1 - r_2 = \pm n\lambda$$

pero de la figura:

$$Sen\,\phi \approx Tan\,\phi = \frac{r_1 - r_2}{a} = \pm\frac{n\lambda}{a}$$

y:

$$Tan\,\phi = \frac{Y_n}{s}$$

luego:

$$\pm\frac{n\lambda}{a} = \frac{Y_n}{s}$$

de donde:

$$\boxed{Y_n = \pm \frac{s\lambda}{a} n} \qquad (n = 0; 1; 2; 3; ....) \qquad (2.1.14.2)$$

que corresponde o marca las posiciones de los máximos de interferencia, en donde *n* indica el "orden del máximo", considerando que el máximo central es de "orden cero".

b) INTERFERENCIA DESTRUCTIVA TOTAL: Ocurre si el punto P de la figura 2.1.14.1 se encuentra en un mínimo en cuyo caso $Y = Y_m^{'}$, por lo que:

$$r_1 - r_2 = \pm(2m - 1)\lambda/2$$

pero de la figura:

$$Sen\,\phi \approx Tan\,\phi = \frac{r_1 - r_2}{a} = \pm(2m - 1)\frac{\lambda}{2a}$$

y:

$$Tan\,\phi = \frac{Y_m^{'}}{s}$$

luego:

$$\pm(2m - 1)\frac{\lambda}{2a} = \frac{Y_m^{'}}{s}$$

de donde:

$$\boxed{Y_m^{'} = \pm(2m - 1)\frac{s\lambda}{2a}} \qquad (m = 1; 2; 3; ....) \qquad (2.1.14.3)$$

que corresponde o marca las posiciones de los mínimos de interferencia, en donde *m* indica el "orden del mínimo".

Puesto que *s* es mucho mayor que *a* y $\psi_{01} = \psi_{02}$, las amplitudes de las dos ondas en cualquier punto P de la pantalla son prácticamente iguales; entonces, para interferencia destructiva se tiene que $\psi_0 = 0$, mientras que para interferencia constructiva $\psi_0 = 2\psi_{01}$.

Para las posiciones comprendidas entre un mínimo y un máximo se tiene:

$$\psi = \sqrt{\psi_{01}^{\ 2} + \psi_{01}^{\ 2} + 2\psi_{01}^{\ 2} Cos\,\delta} = \sqrt{2\psi_{01}^{\ 2}\left(1 + Cos\,\delta\right)} =$$

$$= \psi_{01}\sqrt{2\left(1 + Cos\,\delta\right)} = 2\psi_{01} Cos\,\frac{\delta}{2}$$

Pero de la figura anterior:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_1 - r_2\right) = \frac{2\pi}{\lambda} a Tan\,\phi = \frac{2\pi a Y}{s\lambda}$$

y:

$$\boxed{\psi = 2\psi_{01} Cos\left(\frac{\pi a Y}{s\lambda}\right)} \qquad (2.1.14.4)$$

La intensidad de la onda resultante es proporcional a ψ_0^2, luego:

$$\boxed{\begin{aligned} I(Y) &= 4I_{01}^{\ 2}\,Cos^2\left(\frac{\pi aY}{s\lambda}\right) = I(0)Cos^2\left(\frac{\pi aY}{s\lambda}\right) = \\ &= I(0)Cos^2\left(\frac{\pi a\,Sen\phi}{\lambda}\right) \end{aligned}} \qquad (2.1.14.5)$$

en donde $I(0)$ es la amplitud de la intensidad correspondiente a $\phi = 0$ y por lo mismo a $Y = 0$.

La separación entre dos máximos o entre dos mínimos consecutivos es:

$$\boxed{\Delta Y = \frac{s\lambda}{a}} \qquad (2.1.14.6)$$

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO2114C1
OO2114C2
OO2114C3
OO2114C4

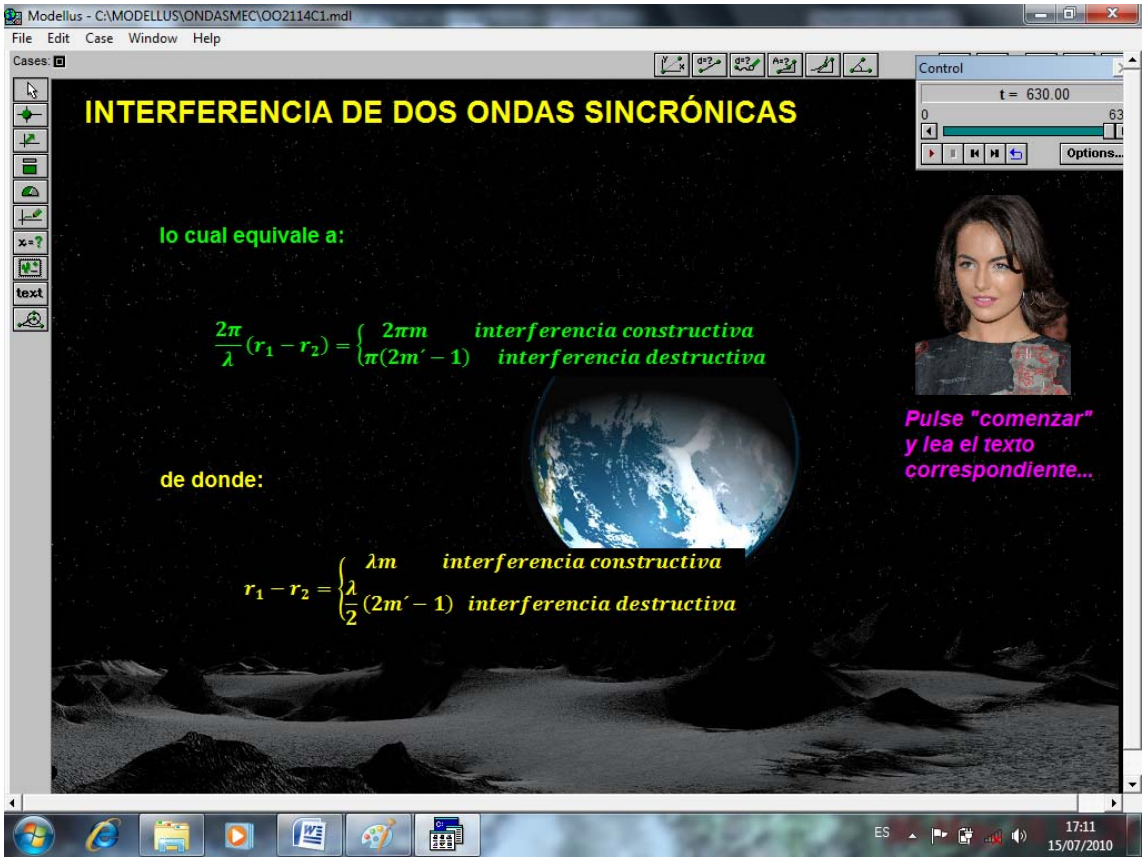
b) Ejercitativas:

OO2114E1
OO2114E2

c) Lúdicas:

OO2114L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

L1=55
L2=55
(L3=55)and(L4=55)and(L5=55)
L6=55
L7=55
L8=55
L9=55
L10=55
if(t<5)then(L11=-1000)
if(t>5)then(L11=-500+20*(t-5))
if(t>35)then(L11=100)and(if(t>215)then(L11=-1000))
if(t<40)then(L12=-1000)
if(t>40)then(L12=-500+20*(t-40))
if(t>70)then(L12=100)and(if(t>215)then(L12=-1000))
if(t<75)then(L13=-1000)
if(t>75)then(L13=-500+20*(t-75))
if(t>120)then(L13=400)and(if(t>215)then(L13=-1000))
if(t<125)then(L14=-1000)
if(t>125)then(L14=-500+20*(t-125))
if(t>155)then(L14=100)and(if(t>215)then(L14=-1000))
if(t<160)then(L15=-1000)
if(t>160)then(L15=-500+20*(t-160))
if(t>205)then(L15=400)and(if(t>215)then(L15=-1000))
if(t<215)then(L16=-1000)
if(t>215)then(L16=-500+20*(t-215))
if(t>245)then(L16=100)and(if(t>455)then(L16=-1000))
if(t<250)then(L17=-1000)
if(t>250)then(L17=-500+20*(t-250))

```
if(t>295)then(L17=400)and(if(t>455)then(L17=-1000))
if(t<300)then(L18=-1000)
if(t>300)then(L18=-500+20*(t-300))
if(t>345)then(L18=400)and(if(t>455)then(L18=-1000))
if(t<350)then(L19=-1000)
if(t>350)then(L19=-500+20*(t-350))
if(t>396)then(L19=420)and(if(t>455)then(L19=-1000))
if(t<400)then(L20=-1000)
if(t>400)then(L20=-500+20*(t-400))
if(t>447.5)then(L20=450)and(if(t>455)then(L20=-1000))
L21=150
L22=150
L23=400
L24=70
L25=80
L26=-220
L27=-120
L28=60
L29=50
L30=50
if(t<455)then(L31=-1000)
if(t>455)then(L31=-500+20*(t-455))
if(t>485)then(L31=100)
if(t<490)then(L32=-1000)
if(t>490)then(L32=-500+20*(t-490))
if(t>535)then(L32=400)
if(t<540)then(L33=-1000)
if(t>540)then(L33=-500+20*(t-540))
if(t>570)then(L33=100)
if(t<575)then(L34=-1000)
if(t>575)then(L34=-500+20*(t-575))
if(t>620)then(L34=400)
```

2.1.15 INTERFERENCIA DE N ONDAS SINCRÓNICAS

Supongamos ahora *N* fuentes sincrónicas idénticas distribuidas linealmente en forma uniforme; el punto de observación se supondrá situado a gran distancia de las fuentes de modo que las ondas que lleguen sean paralelas. Para el análisis utilizaremos la figura 2.1.15.1.

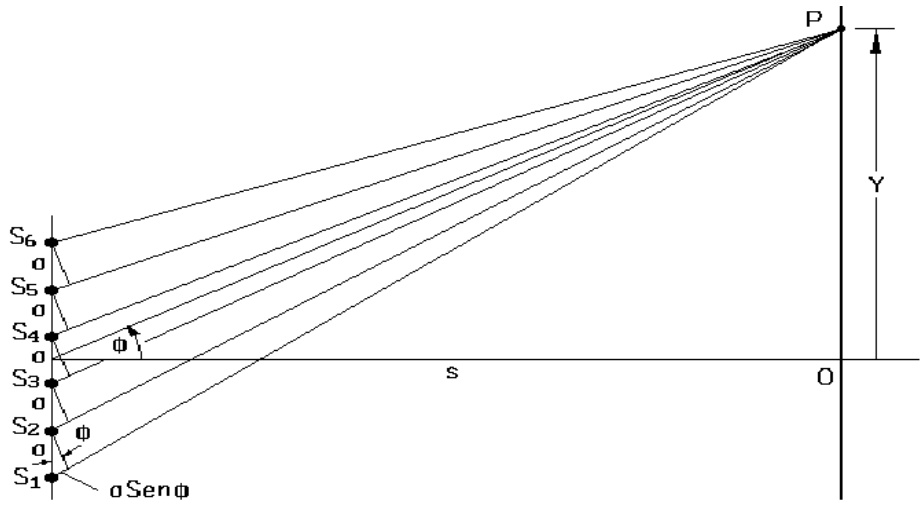


Figura 2. 1. 15. 1

Vemos que entre dos ondas consecutivas hay un desfase dado por:

$$\delta = \frac{2\pi a Sen\,\phi}{\lambda} = \frac{2\pi aY}{s\lambda}$$

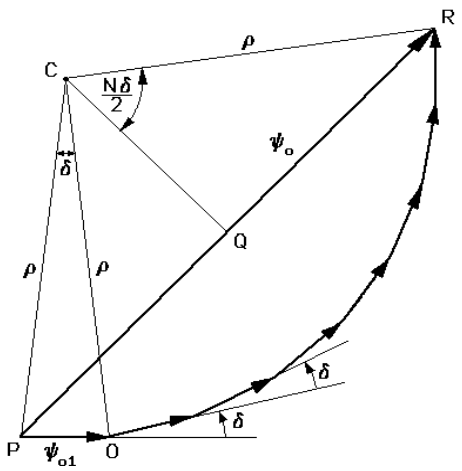


Figura 2.1.15.2

La amplitud resultante en P, bajo el ángulo ϕ, es la suma vectorial de los N vectores de igual magnitud, ψ_{01}, desfasados una cantidad δ entre cada dos consecutivos, figura 2.1.15.2. Observamos que se forma una porción de polígono regular centrado en C, radio ρ, lado ψ_{01} y ángulo central total subtendido $\angle PCR = N\delta$.

En el triángulo CPR:

$$\psi_0 = PR = 2QR = 2\rho Sen\frac{N\delta}{2} \qquad \text{(a)}$$

y en el triángulo CPO:

$$\psi_{01} = PO = 2\rho Sen\frac{\delta}{2} \qquad \text{(b)}$$

De (a) y (b) obtenemos:

$$\boxed{\psi_0 = \frac{Sen\frac{N\delta}{2}}{Sen\frac{\delta}{2}}\psi_{01}} \qquad (2.1.15.1)$$

con la correspondiente intensidad de onda:

$$\boxed{\begin{aligned} I(Y) &= I_0\left(\frac{Sen\frac{N\delta}{2}}{Sen\frac{\delta}{2}}\right)^2 = I_0\left(\frac{Sen\left(\frac{N\pi aY}{s\lambda}\right)}{Sen\left(\frac{\pi aY}{s\lambda}\right)}\right)^2 = \\ &= I_0\left(\frac{Sen\left(\frac{N\pi a\,Sen\phi}{\lambda}\right)}{Sen\left(\frac{\pi a\,Sen\phi}{\lambda}\right)}\right)^2 \end{aligned}} \qquad (2.1.15.2)$$

en donde I_0 es la intensidad de cada fuente individual. La gráfica de la ecuación anterior muestra máximos muy pronunciados, denominados "máximos principales" de amplitudes $N^2 I_0$, para valores de $\delta = \pm 2\pi n$, esto es, para:

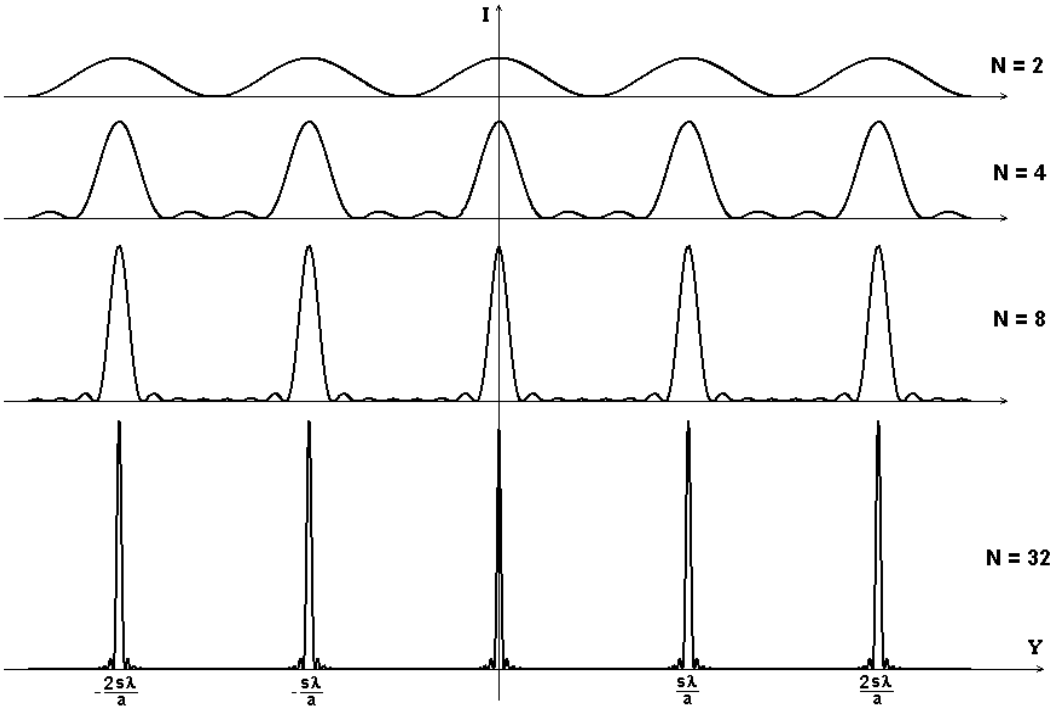
$$\boxed{a\,Sen\,\phi_n = \frac{aY_n}{s} = \pm n\lambda} \qquad (n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;...) \qquad (2.1.15.3)$$

Entre dos máximos principales hay siempre *N - 2* máximos secundarios, de amplitudes bastante pequeñas, especialmente si *N* es grande. El máximo principal corresponde a la dirección según la cual las ondas emitidas por fuentes adyacentes están en fase, generalmente es la mediatriz de las fuentes. Los mínimos o nodos se ubican mediante:

$$\boxed{a\,Sen\,\phi_m = \frac{aY_m'}{s} = \pm\frac{m}{N}\lambda} \qquad (m = 1;\ 2;\ 3;....;\ N-1)$$

(2.1.15.4)

La gráfica de la intensidad relativa, I/I_0, en función de δ



F i g u r a 2. 1. 1 5. 3

depende del número N de fuentes, resultando que a mayor N el sistema se torna cada vez más "direccional", pues el movimiento resultante es significativo únicamente para muy estrechos valores de δ, figura 2.1.15.3.

LISTADO DE ANIMACIONES

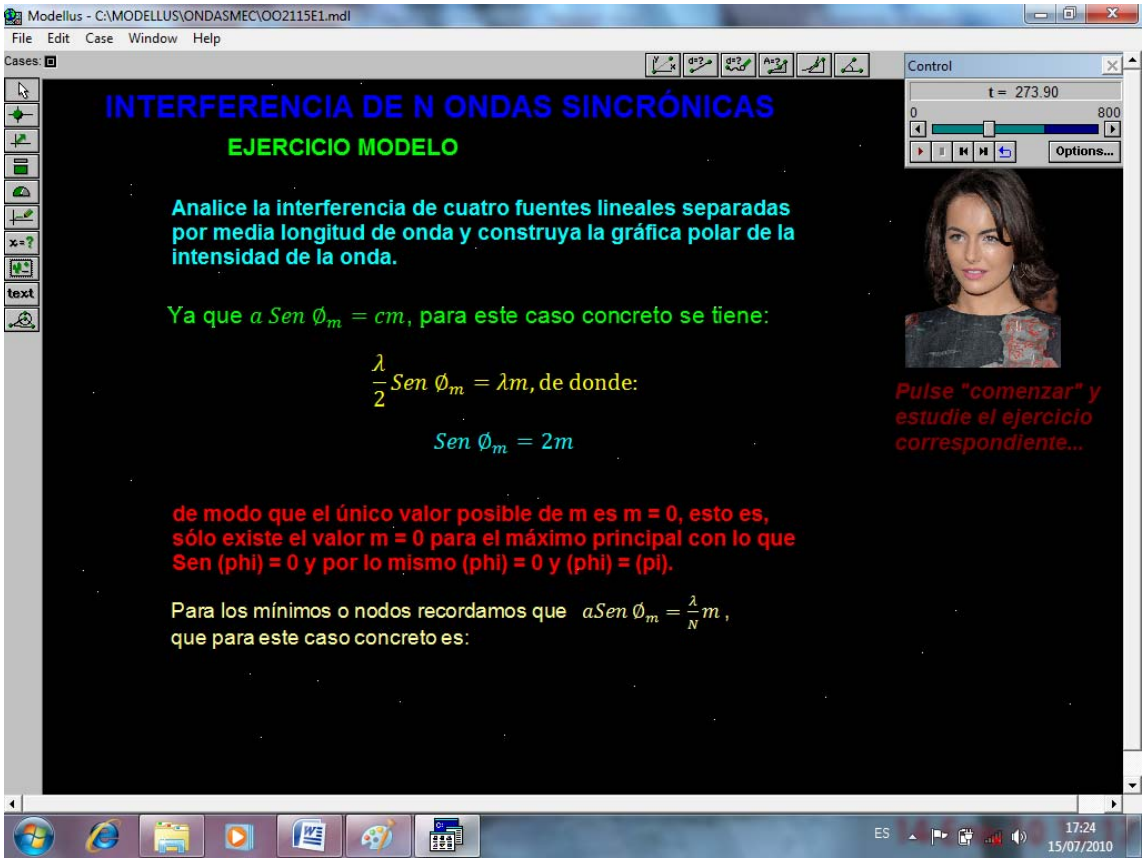
a) Conceptuales:

OO2115C1

b) Ejercitativas:

OO2115E1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=60
L2=60
L3=55
L4=55
L5=55
L6=55
L7=55
L8=55
L9=55
L10=55
if(t<5)then(L11=-1000)
if(t>5)then(L11=-500+20*(t-5))
if(t>35)then(L11=100)and(if(t>380)then(L11=-1000))
if(t<40)then(L12=-1000)
if(t>40)then(L12=-500+20*(t-40))
if(t>83.5)then(L12=370)and(if(t>380)then(L12=-1000))
if(t<90)then(L13=-1000)
if(t>90)then(L13=-500+20*(t-90))
if(t>135)then(L13=400)and(if(t>380)then(L13=-1000))
if(t<140)then(L14=-1000)
if(t>140)then(L14=-500+20*(t-140))
if(t>185)then(L14=400)and(if(t>380)then(L14=-1000))
if(t<190)then(L15=-1000)
if(t>190)then(L15=-500+20*(t-190))
if(t>220)then(L15=100)and(if(t>380)then(L15=-1000))
if(t<225)then(L16=-1000)
if(t>225)then(L16=-500+20*(t-225))
if(t>267.5)then(L16=350)and(if(t>380)then(L16=-1000))
if(t<270)then(L17=-1000)
```

```
if(t>270)then(L17=-500+20*(t-270))
if(t>315)then(L17=400)and(if(t>380)then(L17=-1000))
if(t<320)then(L18=-1000)
if(t>320)then(L18=-500+20*(t-320))
if(t>365)then(L18=400)and(if(t>380)then(L18=-1000))
if(t<380)then(L19=-1000)
if(t>380)then(L19=-500+20*(t-380))
if(t>424)then(L19=380)and(if(t>595)then(L19=-1000))
if(t<430)then(L20=-1000)
if(t>430)then(L20=-500+20*(t-430))
if(t>475)then(L20=400)and(if(t>595)then(L20=-1000))
L21=150
L22=150
L23=400
L24=50
L25=80
L26=-220
L27=-120
L28=40
L29=50
L30=50
L31=20
```

```
if(t<480)then(L32=-1000)
if(t>480)then(L32=-500+20*(t-480))
if(t>510)then(L32=100)and(if(t>595)then(L32=-1000))
if(t<515)then(L33=-1000)
if(t>515)then(L33=-500+20*(t-515))
if(t>552.5)then(L33=250)and(if(t>595)then(L33=-1000))
if(t<560)then(L34=-1000)
if(t>560)then(L34=-500+20*(t-560))
if(t>590)then(L34=100)and(if(t>595)then(L34=-1000))
L35=30
if(t<0)then(L36=-20)
if(t>300)then(L36=1000)
if(t<595)then(L39=-1000)
if(t>595)then(L39=450)
L50=250
L51=350
L52=-350
L53=250
I=2*((sin(2*pi*sin(0.1*(t-595))))/(sin(0.5*pi*sin(0.1*(t-595)))))^2
Ix=I*cos(0.1*(t-595))
Iy=I*sin(0.1*(t-595))
```

2.1.16 ONDAS ESTACIONARIAS

Recordemos la ecuación diferencial de la onda plana unidireccional:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad \text{(a)}$$

cuya solución total es de la forma:

$$\psi = Af(x - vt) + Bf(x + vt) \qquad \text{(b)}$$

en donde el término $Af(x - vt)$ corresponde a una onda que se propaga en la dirección positiva de X, mientras el término $Bf(x + vt)$ corresponde a una onda que se propaga en la dirección negativa de X. En todos los análisis anteriores hemos considerado sólo una de las partes de la solución total, ecuación (b). Aquí nos preguntamos: ¿qué ocurrirá al considerar la solución total? Para responder esta pregunta supongamos la solución en la forma:

$$\psi = f(x) Cos\, \omega t \qquad \text{(c)}$$

en donde $f(x)$ representa la amplitud de la oscilación $Cos\, \omega t$ en un punto x, & $f(x) Cos\, \omega t$ es la onda. Entonces, para que (c) sea solución de (a) hallamos las derivadas requeridas para sustituirlas en (a):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x) Cos\, \omega t$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x) Cos\, \omega t$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega f(x) Sen\, \omega t$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) Cos\, \omega t$$

$$f''(x)Cos\,\omega t = -\frac{\omega^2}{v^2}f(x)Cos\,\omega t$$

de donde:

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{v^2}f(x) = 0$$

o:

$$f''(x) + K^2 f(x) = 0$$

cuya solución es:

$$f(x) = A\,Sen\,Kx + B\,Cos\,Kx$$

con lo que la solución (c) se convierte en:

$$\psi = (A\,Sen\,Kx + B\,Cos\,Kx)Cos\,\omega t \qquad \text{(d)}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las restricciones físicas del sistema conocidas como condiciones de contorno o de frontera, las cuales dependen de la situación particular que se analiza. Tomemos por ejemplo una cuerda tensa de longitud L y fija en sus extremos; tomaremos como $x = 0$ en el extremo izquierdo, entonces las condiciones de frontera son:

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(L) = 0 \end{cases}$$

que al aplicarlas a la ecuación (d) da:

$$0 = (A\,Sen\,0 + B\,Cos\,0)Cos\,\omega t = B\,Cos\,\omega t$$

y:

$$0 = (A\,Sen\,KL + B\,Cos\,KL)Cos\,\omega t$$

Vemos, de la primera, que $B = 0$, por lo que la segunda se reduce a:

$$0 = A\,Sen\,KL\,Cos\,\omega t$$

en la cual A no puede ser cero, pues no habría solución, entonces:

$$Sen\,KL = 0$$

es decir $KL = n\pi$, o:

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$$

de donde:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1;\ 2;\ 3;.....) \qquad \text{(e)}$$

con lo que la solución final es:

$$\boxed{\psi = A\,Sen\,Kx\,Cos\,\omega t} \qquad (2.1.16.1)$$

Lo más curioso de la solución anterior es que ψ no depende del argumento característico $(Kx - \omega t)$ de la onda viajera, aunque sí depende de x y de t; a esta onda no viajera se la denomina "onda estacionaria", la cual más que onda parece ser un conjunto enorme de osciladores cuyas amplitudes de oscilación dependen de la posición o coordenada x.

Los puntos x_i, para los cuales la amplitud es máxima, se denominan "antinodos" o "vientres", en tanto que los puntos x_i, para los cuales la amplitud es nula, se denominan "nodos". Resumimos esto mediante:

$$\boxed{\begin{array}{lll} x = (2m-1)\dfrac{\lambda}{4} & vientres & (m = 1, 2, 3, ...) \\ x' = (m'-1)\dfrac{\lambda}{2} & nodos & (m' = 1, 2, 3, ...) \end{array}}$$

(2.1.16.2)

de modo que la separación entre dos nodos o entre dos vientres consecutivos es una media longitud de onda.

Volvamos a analizar el caso de las ondas estacionarias con un enfoque algo diferente y aplicado al caso concreto de la cuerda tensa de longitud L y fija en sus extremos. Supongamos que incide de izquierda a derecha la onda:

$$\psi_i = \psi_{0i} Sen(\omega t - Kx)$$

en el extremo fijo derecho se refleja la onda:

$$\psi_r = \psi_{0r} Sen(\omega t + Kx)$$

y la resultante es:

$$\psi = \psi_{0i} Sen(\omega t - Kx) + \psi_{0r} Sen(\omega t + Kx)$$

Pero como el extremo derecho es fijo debe cumplirse que $\psi_{0i} = -\psi_{0r}$, y la ecuación anterior se reduce a:

$$\psi = \psi_{0i}\left[Sen(\omega t - Kx) - Sen(\omega t + Kx)\right] =$$
$$-2\psi_{0i} Sen Kx Cos\, \omega t = A Sen Kx Cos\, \omega t$$

en la cual efectivamente desaparece el argumento $(\omega t - Kx)$, al igual que en la ecuación (2.1.16.1). Vemos que para el caso de la cuerda tensa, la constante es $A = -2\psi_{0i}$.

Una de las más grandes utilidades de las ondas estacionarias se da en los instrumentos musicales, en los cuales se busca crear y amplificar ondas sonoras estacionarias con fines artísticos y lúdicos; así que volveremos sobre este asunto en la próxima subunidad.

LISTADO DE ANIMACIONES

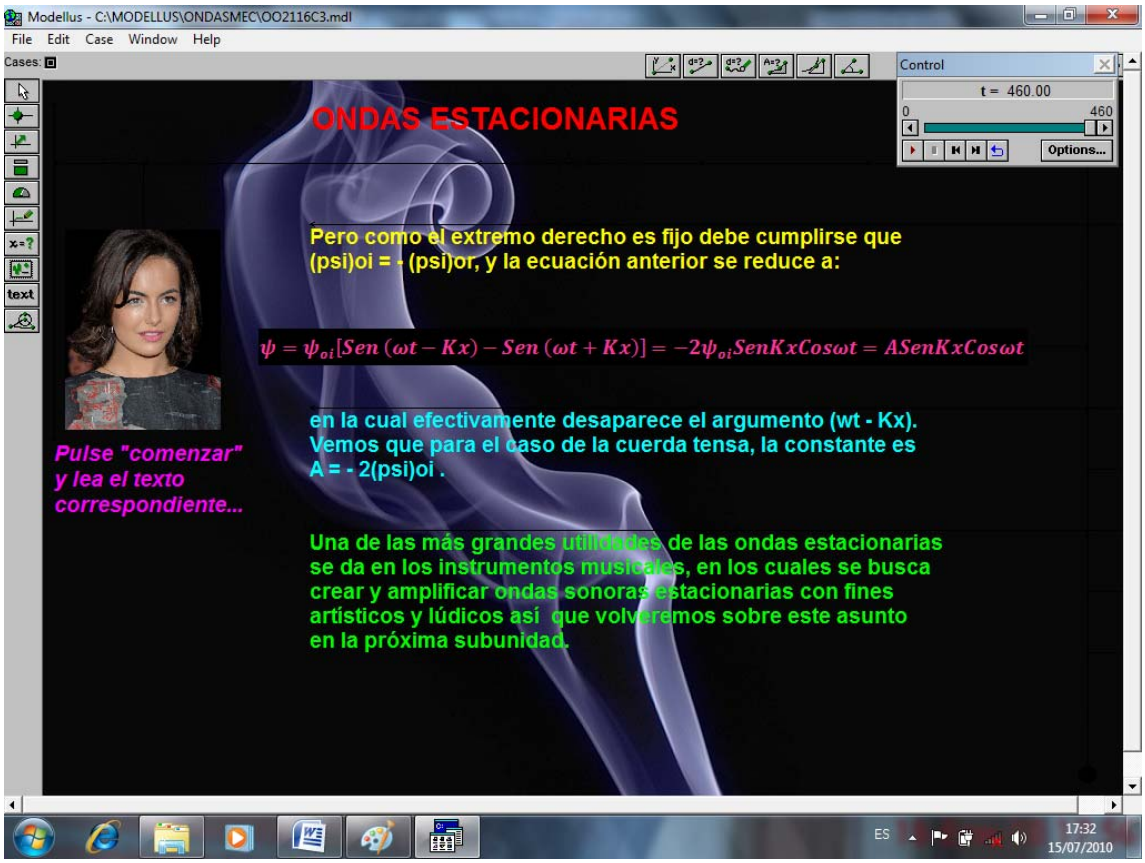
a) Conceptuales:

OO2116C1
OO2116C2
OO2116C3

b) Ejercitativas:

OO2116E1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=55
L2=55
L3=55
L4=55
L5=55
L6=55
L7=55
L8=55
L9=55
L10=55
L31=-200
L32=-150
L33=-100
L34=-100
L35=-300
L36=-80
L37=-250
L38=55
L39=-150
if(t<5)then(L11=1000)
if(t>5)then(L11=200-20*(t-5))
if(t>50)then(L11=-700)and(if(t>270)then(L11=1000))
if(t<55)then(L12=1000)
if(t>55)then(L12=200-20*(t-55))
if(t>85)then(L12=-400)and(if(t>270)then(L12=1000))
if(t<90)then(L13=1000)
if(t>90)then(L13=200-20*(t-90))
if(t>135)then(L13=-700)and(if(t>270)then(L13=1000))
if(t<140)then(L14=1000)
```

```
if(t>140)then(L14=200-20*(t-140))
if(t>170)then(L14=-400)and(if(t>270)then(L14=1000))
if(t<175)then(L15=1000)
if(t>175)then(L15=200-20*(t-175))
if(t>220)then(L15=-700)and(if(t>270)then(L15=1000))
if(t<225)then(L16=1000)
if(t>225)then(L16=200-20*(t-225))
if(t>255)then(L16=-400)and(if(t>270)then(L16=1000))
if(t<270)then(L17=1000)
if(t>270)then(L17=200-20*(t-270))
if(t>315)then(L17=-700)
if(t<320)then(L18=1000)
if(t>320)then(L18=200-20*(t-320))
if(t>350)then(L18=-400)
if(t<355)then(L19=1000)
if(t>355)then(L19=200-20*(t-355))
if(t>400)then(L19=-700)
if(t<405)then(L20=1000)
if(t>405)then(L20=200-20*(t-405))
if(t>450)then(L20=-700)
L21=-50
L22=-50
L23=-50
L24=-50
L25=-50
L26=-50
L27=-50
L28=-50
L29=-50
L30=-50
```

2.1.17 POLARIZACIÓN DE ONDAS TRANSVERSALES

La polarización es una peculiaridad de las ondas transversales, únicamente; consiste en la selección de un plano o de una hélice por parte de las moléculas vibrantes que van siendo alcanzadas por el frente de onda y por la onda en general a lo largo del tiempo para moverse exclusivamente en ellos. Algunas ondas son o están, por naturaleza, polarizadas y otras no; sin embargo éstas pueden polarizarse utilizando unos dispositivos adecuados llamados "polarizadores".

Para el estudio y análisis teórico de la polarización de las ondas es conveniente expresar la onda transversal en dos componentes ortogonales que sean perpendiculares a la dirección de propagación; por ejemplo, si la onda se propaga sobre el eje X, la onda se expresa en sus componentes según Y y Z; de ese modo el tratamiento matemático resulta sencillo. Al iniciar este análisis hay que recordar que "todo estado de polarización es consecuencia natural de la superposición de dos ondas perpendiculares entre sí". Sean las ondas:

$$\vec{\psi}_y = \psi_{0y} Sen\left(Kx - \omega t\right)\vec{j}$$

y:

$$\vec{\psi}_z = \psi_{0z} Sen\left(Kx - \omega t + \varepsilon\right)\vec{k}$$

La resultante es:

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_y + \vec{\psi}_z = \psi_{0y} Sen(Kx - \omega t)\vec{j} + \psi_{0z} Sen(Kx - \omega t + \varepsilon)\vec{k}$$

La onda se propaga en la dirección del eje X; la onda $\vec{\psi}_y$ vibra en el plano XY y la onda $\vec{\psi}_z$ vibra en el plano XZ. El desfase ε entre las dos ondas define el "estado de polarización", en efecto:

a) Si $\varepsilon = 0$:

$$\vec{\psi}_y = \psi_{0y} Sen(Kx - \omega t)\vec{j}$$

$$\vec{\psi}_z = \psi_{0z} Sen(Kx - \omega t)\vec{k}$$

La resultante es:

$$\boxed{\vec{\psi} = \left(\psi_{0y}\vec{j} + \psi_{0z}\vec{k}\right) Sen(Kx - \omega t)}$$

(2.1.17.1)

y se tiene polarización lineal o plana, como se ve esquematizado en la figura 2.1.17.1, en donde el eje X está dirigido hacia el lector.

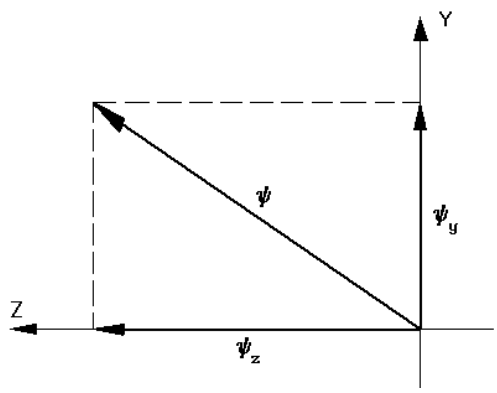


Figura 2.1.17.1

b) Si $\varepsilon = \pm\pi$:

$$\vec{\psi}_y = \psi_{0y} Sen(Kx - \omega t)\vec{j}$$

$$\vec{\psi}_z = \psi_{0z} Sen(Kx - \omega t \pm \pi)\vec{k}$$

La resultante es:

$$\boxed{\vec{\psi} = \left(\psi_{0y}\,\vec{j} - \psi_{0z}\,\vec{k}\right) Sen\left(Kx - \omega t\right)} \qquad (2.1.17.2)$$

y se tiene también polarización lineal o plana, como se ve esquematizado en la figura 2.1.17.2, asimismo con el eje X dirigido hacia el lector.

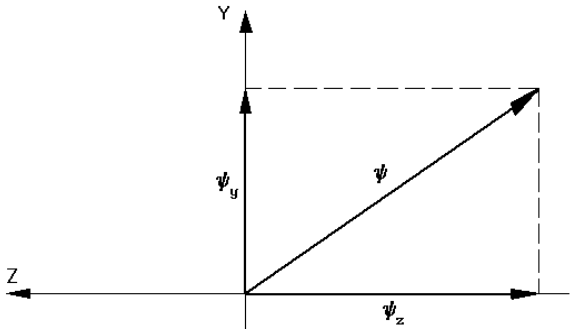


Figura 2.1.17.2

c) Si $\varepsilon = \pi/2$:

$$\vec{\psi}_y = \psi_{0y}\, Sen\left(Kx - \omega t\right)\vec{j}$$

$$\vec{\psi}_z = \psi_{0z}\, Sen\left(Kx - \omega t + \pi/2\right)\vec{k} = \psi_{0z}\, Cos\left(Kx - \omega t\right)\vec{k}$$

La resultante es:

$$\boxed{\vec{\psi} = \psi_{0y}\, Sen\left(Kx - \omega t\right)\vec{j} + \psi_{0z}\, Cos\left(Kx - \omega t\right)\vec{k}} \qquad (2.1.17.3)$$

y se tiene polarización elíptica izquierda: el vector $\vec{\psi}$ barre una hélice elíptica horaria vista por un observador hacia quien viaja la onda; pero en la posición fija $x = x_0$, la hélice pasante describe una elipse antihoraria, como se ve en la figura 2.1.17.3.

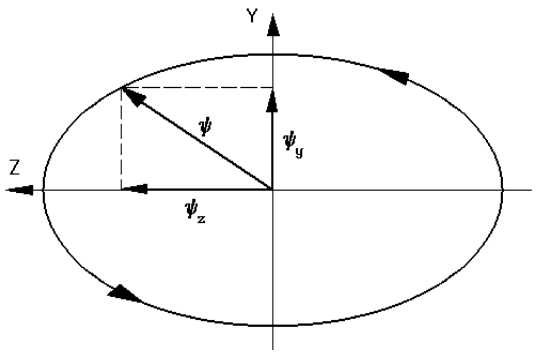


Figura 2.1.17.3

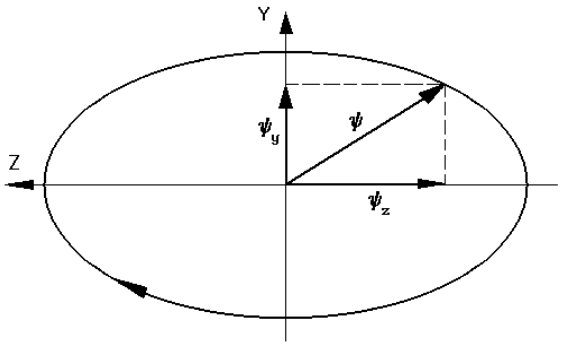


Figura 2.1.17.4

d) Si $\varepsilon = -\pi/2$:

$$\vec{\psi}_y = \psi_{0y} Sen(Kx - \omega t)\vec{j}$$

$$\vec{\psi}_z = \psi_{0z} Sen(Kx - \omega t - \pi/2)\vec{k} = -\psi_{0z} Cos(Kx - \omega t)\vec{k}$$

La resultante es:

$$\boxed{\vec{\psi} = \psi_{0y} Sen(Kx - \omega t)\vec{j} - \psi_{0z} Cos(Kx - \omega t)\vec{k}} \quad (2.1.17.4)$$

y se tiene polarización elíptica derecha: el vector $\vec{\psi}$ barre una hélice elíptica antihoraria vista por un observador hacia quien viaja la onda; pero en la posición fija $x = x_0$, la hélice pasante describe una elipse horaria, como se ve en la figura 2.1.17.4.

e) Si en los casos (c) y (d) resulta que $\psi_{0y} = \psi_{0z}$, se tienen las polarizaciones circulares izquierda y derecha, respectivamente, con ecuaciones:

$$\boxed{\vec{\psi} = \psi_0 \left[Sen(Kx - \omega t)\vec{j} + Cos(Kx - \omega t)\vec{k}\right]} \quad (2.1.17.5)$$

y:

$$\boxed{\vec{\psi} = \psi_0 \left[Sen(Kx - \omega t)\vec{j} - Cos(Kx - \omega t)\vec{k}\right]} \quad (2.1.17.6)$$

f) Para cualquier otro valor de ε, se tienen todas las polarizaciones elípticas posibles, figura 2.1.17.5, contenidas dentro del rectángulo de base $2\psi_{0z}$ y altura $2\psi_{0y}$. La ecuación vectorial es:

$$\boxed{\vec{\psi} = \psi_{0y}\, Sen\left(Kx - \omega t\right)\vec{j} + \psi_{0z}\, Sen\left(Kx - \omega t + \varepsilon\right)\vec{k}}$$

(2.1.17.7)

que en forma escalar toma la forma:

$$\boxed{\left(\frac{\psi_y}{\psi_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{\psi_z}{\psi_{0z}}\right)^2 - 2\frac{\psi_y}{\psi_{0y}}\frac{\psi_z}{\psi_{0z}} Cos\,\varepsilon = Sen^2\varepsilon} \qquad (2.1.17.8)$$

La inclinación α del eje mayor de dichas elipses con respecto al eje horizontal es:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} Tan^{-1}\left(\frac{2\psi_{0y}\psi_{oz}\, Cos\,\varepsilon}{\psi_{0z}^{\;2} - \psi_{0y}^{\;2}}\right)} \qquad (2.1.17.9)$$

NOTA:

Todos los casos de polarización, desde (a) hasta (e), son subcasos o casos particulares del caso (f) que acabamos de analizar.

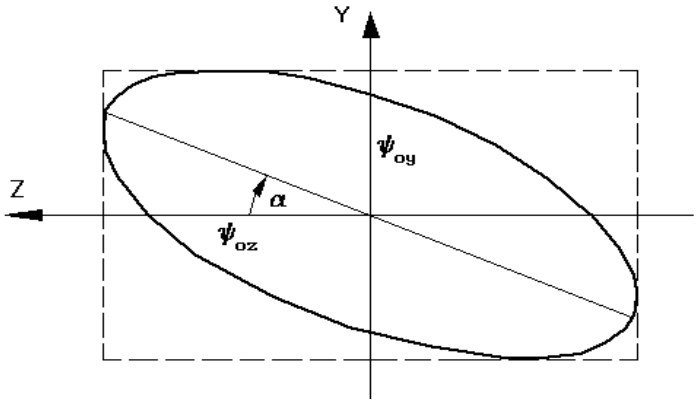


Figura 2.1.17.5

LISTADO DE ANIMACIONES

a) Conceptuales:

OO2117C1

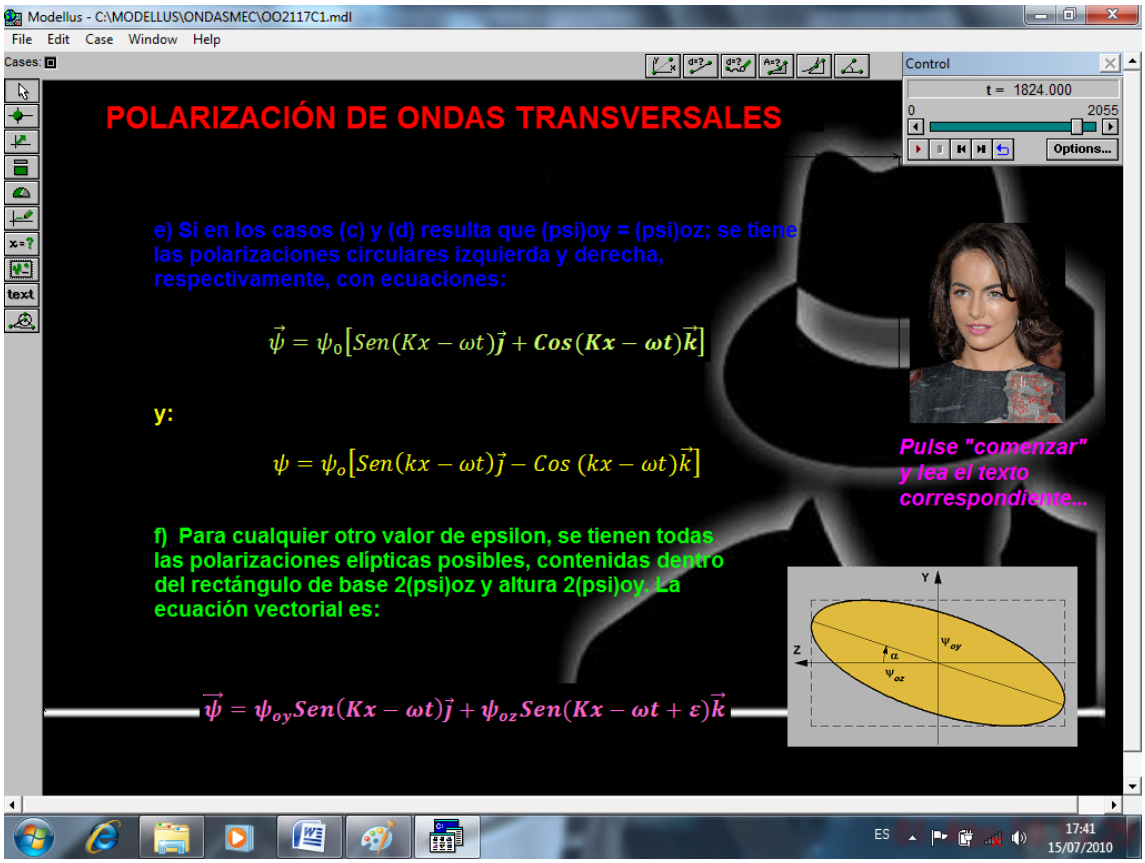
b) Ejercitativas:

OO2117E1

C) Lúdicas:

OO2117L1

ANIMACIÓN DE MUESTRA



MODELO MATEMÁTICO

```
L1=55
L2=55
L3=55
L4=55
L5=55
L6=55
L7=55
L8=55
L9=55
L10=55
if(t<5)then(L11=-1000)
if(t>5)then(L11=-500+20*(t-5))
if(t>35)then(L11=100)and(if(t>150)then(L11=-1000))
if(t<40)then(L12=-1000)
if(t>40)then(L12=-500+20*(t-40))
if(t>70)then(L12=100)and(if(t>150)then(L12=-1000))
if(t<75)then(L13=-1000)
if(t>75)then(L13=-500+20*(t-75))
if(t>105)then(L13=100)and(if(t>150)then(L13=-1000))
if(t<110)then(L14=-1000)
if(t>110)then(L14=-500+20*(t-110))
if(t>140)then(L14=100)and(if(t>150)then(L14=-1000))
L15=100
if(t<150)then(L16=-1000)
if(t>150)then(L16=-500+20*(t-150))
if(t>180)then(L16=100)and(if(t>445)then(L16=-1000))
if(t<185)then(L17=-1000)
if(t>185)then(L17=-500+20*(t-185))
if(t>230)then(L17=400)and(if(t>445)then(L17=-1000))
```

```
if(t<235)then(L18=-1000)
if(t>235)then(L18=-500+20*(t-235))
if(t>265)then(L18=100)and(if(t>445)then(L18=-1000))
if(t<270)then(L19=-1000)
if(t>270)then(L19=-500+20*(t-270))
if(t>315)then(L19=400)and(if(t>445)then(L19=-1000))
if(t<320)then(L20=-1000)
if(t>320)then(L20=-500+20*(t-320))
if(t>350)then(L20=100)and(if(t>445)then(L20=-1000))
L21=150
L22=150
L23=400
L24=70
L25=80
L26=-250
L27=-150
L28=50
if(t<355)then(L29=-1000)
if(t>355)then(L29=-500+20*(t-355))
if(t>400)then(L29=400)and(if(t>445)then(L29=-1000))
if(t<405)then(L30=-1000)
if(t>405)then(L30=-500+20*(t-405))
if(t>435)then(L30=100)and(if(t>445)then(L30=-1000))
if(t<445)then(L31=-1000)
if(t>445)then(L31=-500+20*(t-445))
if(t>475)then(L31=100)and(if(t>815)then(L31=-1000))
if(t<480)then(L32=-1000)
if(t>480)then(L32=-500+20*(t-480))
if(t>510)then(L32=100)and(if(t>815)then(L32=-1000))
if(t<515)then(L33=-1000)
if(t>515)then(L33=-500+20*(t-515))
if(t>560)then(L33=400)and(if(t>815)then(L33=-1000))
```

```
if(t<565)then(L34=-1000)
if(t>565)then(L34=-500+20*(t-565))
if(t>610)then(L34=400)and(if(t>815)then(L34=-1000))
if(t<615)then(L35=-1000)
if(t>615)then(L35=-500+20*(t-615))
if(t>645)then(L35=100)and(if(t>815)then(L35=-1000))
if(t<670)then(L36=-1000)
if(t>670)then(L36=-500+20*(t-670))
if(t>715)then(L36=400)and(if(t>815)then(L36=-1000))
if(t<720)then(L37=-1000)
if(t>720)then(L37=-500+20*(t-720))
if(t>750)then(L37=100)and(if(t>815)then(L37=-1000))
if(t<755)then(L38=-1000)
if(t>755)then(L38=-500+20*(t-755))
if(t>806)then(L38=520)and(if(t>815)then(L38=-1000))
L39=30
if(t<815)then(L40=-1000)
if(t>815)then(L40=-500+20*(t-815))
if(t>845)then(L40=100)and(if(t>1080)then(L40=-1000))
if(t<850)then(L41=-1000)
if(t>850)then(L41=-500+20*(t-850))
if(t>895)then(L41=400)and(if(t>1080)then(L41=-1000))
if(t<850)then(L42=-1000)
if(t>850)then(L42=-500+20*(t-850))
if(t>895)then(L42=400)and(if(t>1080)then(L42=-1000))
if(t<900)then(L43=-1000)
if(t>900)then(L43=-500+20*(t-900))
if(t>930)then(L43=100)and(if(t>1080)then(L43=-1000))
if(t<935)then(L44=-1000)
if(t>935)then(L44=-500+20*(t-935))
if(t>980)then(L44=400)and(if(t>1080)then(L44=-1000))
if(t<985)then(L45=-1000)
```

```
if(t>985)then(L45=-500+20*(t-985))
if(t>1015)then(L45=100)and(if(t>1080)then(L45=-1000))
if(t<1020)then(L46=-1000)
if(t>1020)then(L46=-500+20*(t-1020))
if(t>1065)then(L46=400)and(if(t>1080)then(L46=-1000))
L47=20
if(t<1080)then(L48=-1000)
if(t>1080)then(L48=-500+20*(t-1080))
if(t>1110)then(L48=100)and(if(t>1365)then(L48=-1000))
if(t<1115)then(L49=-1000)
if(t>1115)then(L49=-500+20*(t-1115))
if(t>1160)then(L49=400)and(if(t>1365)then(L49=-1000))
if(t<1115)then(L50=-1000)
if(t>1115)then(L50=-500+20*(t-1115))
if(t>1160)then(L50=400)and(if(t>1365)then(L50=-1000))
if(t<1165)then(L51=-1000)
if(t>1165)then(L51=-500+20*(t-1165))
if(t>1195)then(L51=100)and(if(t>1365)then(L51=-1000))
if(t<1200)then(L52=-1000)
if(t>1200)then(L52=-500+20*(t-1200))
if(t>1245)then(L52=400)and(if(t>1365)then(L52=-1000))
if(t<1250)then(L53=-1000)
if(t>1250)then(L53=-500+20*(t-1250))
if(t>1280)then(L53=100)and(if(t>1365)then(L53=-1000))
if(t<1200)then(L54=-1000)
if(t>1200)then(L54=550)and(if(t>1365)then(L54=-1000))
if(t<1285)then(L55=-1000)
if(t>1285)then(L55=-500+20*(t-1285))
if(t>1316)then(L55=120)and(if(t>1365)then(L55=-1000))
L56=800
if(t<1535)then(L57=-1000)
if(t>1535)then(L57=-500+20*(t-1535))
```

```
if(t>1565)then(L57=110)and(if(t>1575)then(L57=-1000))
if(t<1365)then(L58=-1000)
if(t>1365)then(L58=-500+20*(t-1365))
if(t>1395)then(L58=100)and(if(t>1575)then(L58=-1000))
if(t<1400)then(L59=-1000)
if(t>1400)then(L59=-500+20*(t-1400))
if(t>1445)then(L59=400)and(if(t>1575)then(L59=-1000))
if(t<1400)then(L60=-1000)
if(t>1400)then(L60=-500+20*(t-1400))
if(t>1445)then(L60=400)and(if(t>1575)then(L60=-1000))
if(t<1450)then(L61=-1000)
if(t>1450)then(L61=-500+20*(t-1450))
if(t>1480)then(L61=100)and(if(t>1575)then(L61=-1000))
if(t<1485)then(L62=-1000)
if(t>1485)then(L62=-500+20*(t-1485))
if(t>1530)then(L62=400)and(if(t>1575)then(L62=-1000))
if(t<1535)then(L63=-1000)
if(t>1535)then(L63=-500+20*(t-1535))
if(t>1565)then(L63=100)and(if(t>1575)then(L63=-1000))
if(t<1575)then(L64=-1000)
if(t>1575)then(L64=-500+20*(t-1575))
if(t>1605)then(L64=100)and(if(t>1835)then(L64=-1000))
if(t<1605)then(L65=-1000)
if(t>1605)then(L65=-500+20*(t-1605))
if(t>1650)then(L65=400)and(if(t>1835)then(L65=-1000))
if(t<1665)then(L66=-1000)
if(t>1665)then(L66=-500+20*(t-1665))
if(t>1695)then(L66=100)and(if(t>1835)then(L66=-1000))
if(t<1700)then(L67=-1000)
if(t>1700)then(L67=-500+20*(t-1700))
if(t>1745)then(L67=400)and(if(t>1835)then(L67=-1000))
if(t<1750)then(L68=-1000)
```

```
if(t>1750)then(L68=-500+20*(t-1750))
if(t>1780)then(L68=100)and(if(t>1835)then(L68=-1000))
if(t<1780)then(L69=-1000)
if(t>1780)then(L69=-500+20*(t-1780))
if(t>1825)then(L69=400)and(if(t>1835)then(L69=-1000))
if(t<1740)then(L76=-1000)
if(t>1740)then(L76=800)
if(t<1750)then(L77=-1000)
if(t>1750)then(L77=-500+20*(t-1750))
if(t>1780)then(L77=100)and(if(t>1835)then(L77=-1000))
if(t<1835)then(L70=-1000)
if(t>1835)then(L70=-500+20*(t-1835))
if(t>1865)then(L70=100)
if(t<1870)then(L71=-1000)
if(t>1870)then(L71=-500+20*(t-1870))
if(t>1910)then(L71=400)
if(t<1915)then(L72=-1000)
if(t>1915)then(L72=-500+20*(t-1915))
if(t>1945)then(L72=100)
if(t<1950)then(L73=-1000)
if(t>1950)then(L73=-500+20*(t-1950))
if(t>1995)then(L73=400)
if(t<2000)then(L74=-1000)
if(t>2000)then(L74=-500+20*(t-2000))
if(t>2030)then(L74=100)
L75=400
```

CONCLUSIONES

- La constante evolución tecnológica han puesto al docente en una búsqueda permanente de nuevos recursos educativos y didácticos, para dar a cada uno de sus estudiantes un conocimiento claro y completo, y una de esa ayuda ofrece la siguiente obra.

- Los problemas de aprendizaje tienen solución, y si se identifica a tiempo se logra una construcción secuencial en el conocimiento.

- La tecnología es una herramienta necesaria y de gran ayuda para el estudio de la Física y la Matemática.

- El programa Modellus amplia el conocimiento de “Ondas Mecánicas” mediante la recreación de animaciones, la cuales desarrollan destrezas mentales y motrices en nuestros estudiantes.

- Con la utilización de este software se obtiene el trabajo conjunto entre estudiante-maestro y son ellos quienes ponen a prueba su creatividad.

- Este programa motiva al estudiante a desarrollar una autoeducación, que busca una construcción y formación intelectual necesaria para competir y sobresalir en esta evolución tecnológica.

RECOMENDACIONES

- Para la utilización de Modellus es necesario y muy importante un conocimiento previo de las funciones que presenta este software.

- Se recomienda al docente leer minuciosamente cada una de las instrucciones antes de ejecutar la orden

- Se recomienda que el usuario estudie o revise ordenadamente este proyecto para que de esta manera pueda despejar cualquier duda o pregunta que se presente en los estudiantes.

- Se recomienda para la creación de nuevas animaciones es preferible realizarlas primero en un cuaderno de trabajo, que sirva como un plano, para luego proceder a la construcción.

- Si es necesario modificar cualquiera de las animaciones que se presentan en esta obra, se recomienda guardarlas con otro nombre de modo que no se pierda la información que le servirá como guía

- Se recomienda observar y consultar la bibliografía que ayudo a la construcción de esta obra, para aclarar alguna duda que se presente en este proyecto.

BIBLIOGRAFÍA

Libros y textos.

- AVECILLAS JARA, Alberto Santiago, Oscilaciones y Ondas, Primera edición, Centro de Publicaciones y Difusión, Cuenca – Ecuador, 2008.
- GIANCOLI C. DOUGLAS, Física, Principios con aplicación, Volumen 1, Sexta edición, Person Educación, México, 2006.
- MEDINA Antonio, MATA Francisco, Didáctica General, Person Educación, Madrid, 2002.

Internet

- http://www.google.com.ec/search?hl=es&q=oscilaciones+y+ondas+libro&aq=3&aqi=g8&aql=&oq=oscilaciones+y+ondas&gs_rfai.
- http://raulcaroy.iespana.es/FISICA/26%20oscilaciones.pdf.
- http://www.terapiavisual.com/aprendizaje.htm.
- http://www.mitecnologico.com/Main/TiposDeOndaYCaracteristicas
- http://kidshealth.org/teen/en_espanol/cuerpo/visual_impairment_esp.html

- http://www.mitecnologico.com/Main/OscilacionesArmonicas
- http://www.luventicus.org/articulos/03U006/index.html
- http://www.guiainfantil.com/educacion/escuela/noaprende.htm
-
- http://zeth.ciencias.uchile.cl/~manramirez/apuntes/metodos/informeoptica.pdf
- http://www.bebesecuador.com/bebe/el-bebe/68-nombres/222-como-identificar-los-problemas-de-aprendizaje
- http://www.slideshare.net/DELASERNACHE/problemas-del-aprendizaje-y-su-tratamiento
- http://www.uia.mx/campus/publicaciones/fisica/pdf/14ONDASmecanicas.pdf
- http://www.scribd.com/doc/6284701/Ondas-Elasticas-en-Una-Varilla
- http://www.oei.es/fomentolectura/dificultades_aprendizaje_lectura_escritura_aguirre.pdf
- http://iteso.mx/~jorgeaguilar/ondas_long_fluido.htm
- http://www.centro-psicologia.com/es/lectoescritura.html
- http://labiii.galeon.com/4columnaire.pdf